南京大學

工程管理学院

硕士研究生论文中期进展报告

论文题目 服务水平目标导向的随机库存路径问题研究

学生姓名 刘书婷

学生学号 MF20150125

专业名称 物流工程与管理

研究方向

指导教师 沈厚才、张莲民

2022 年 10 月 12 日

<table>
<tr>
<td>中
期
进
展
概
况</td>
<td>（简述论文工作进展情况，完成的主要工作，大致占总工作量的百分比）

从目前的论文进度来看，基本是按照前期的开题报告和整体论文计划来执行的。目前已完成第一章绪论、第二章理论基础和第三章以服务水平为目标的库存路径问题。

在第一章绪论中，简述了论文的研究背景及意义，并回顾了库存路径问题的国内外研究现状，着重从库存路径问题、鲁棒优化、启发式算法三个方面回顾国外的研究，分析国内外在这个领域的研究现状，然后介绍了论文的研究内容和创新点。

在第二章理论基础中，对研究问题涉及到的理论进行了介绍，分别是服务水平刻画、满足测度理论、分布鲁棒优化、变邻域搜索算法。在服务水平刻画部分，罗列了现有研究常用的四种服务水平刻画方式，根据本文研究的背景，选择了符合论文研究目标又便于求解的α_c服务水平，计划借助该刻画方式，开展后续的研究。在满足测度理论部分，回顾了理论发展的背景和历程，分析了该理论的优越性，满足测度纳入了目标影响并解决了概率测度的弊端，是更适合本篇论文研究的方法。在分布鲁棒优化部分，简述了分布鲁棒优化的发展背景和基本模型，概述了分布不确定集的构造方式。在变邻域搜索算法部分，介绍了算法的组成结构，重点介绍了根据局部搜索算法的不同而演变成的不同的变邻域搜索算法，并介绍了其中一般变邻域搜索算法(GVNS)的逻辑框架。

第三章以服务水平为目标导向的库存路径问题是论文的重点部分，依次按照问题描述、模型建立、模型近似转化、模型求解的结构开展。首先针对拟研究的问题进行了背景介绍，然后按照构造需求不确定集、刻画服务水平目标的顺序开始正式建立模型，为了便于计算和正确预估矩信息，选择采用上下界和均值来定义需求不确定集，然后</td>
</tr>
</table>

	基于α_c服务水平和满足测度理论，建立了相应的服务水平满足指数，并选择 shortfall 风险测度来具体化服务水平满足指数ρ的等价表示形式。最后基于问题提出的背景，将刻画好的服务水平目标纳入基本的库存路径模型中，同时将传统的成本最小化目标转换为约束条件加入进去，得到以服务水平为目标的鲁棒库存路径模型。模型建立好后，针对不确定参数、最大、最小化算子等难以直接求解的部分，进行相应的近似转化，得到了易于求解的混合整数规划模型，最后，分别采用 Gurobi 求解器、设计变邻域搜索算法进行求解。 以上三章内容是目前基本完成的论文章节，工作量与进展大致占到全文的 70%，剩下的工作主要在于将设计的变邻域搜索算法编写成代码 ,并与 Gurobi 优化求解器的结果进行对比，开展数值实验，证明算法的高效性。最后就是第五章总结与展望部分，以及全文的修改完善工作。
尚待解决的问题和研究	（提出进一步的研究工作及工作的重点、难点与计划） 接下来论文的主要工作是第四章数值试验和第五章总结与展望部分的撰写。 第四章是论文工作的技术难点部分，需要按照第三章模型求解部分的算法设计思路，将之代码化，然后开展数值实验，对比 Gurobi 和变邻域算法两种方法的求解结果，验证算法的高效性，最后会针对部分参数进行敏感性分析。由于该部分主要是技术工作，预计需要花费较多的时间，大概 12 月底完成第四章的内容。 第五章是全文的总结工作，主要是总结研究结论，并对本研究可能的贡献、创新点、不足以及未来的研究展望进行论述。这部分工作预计可以在 1 月中旬完成。 在完成论文主要章节的撰写工作后，接下来需要完成全文的修改完善工作，包括中英文摘要的撰写、参考文献的梳理和补充、主要章节内容的修改以及论文格式的核

计划	对等。这部分内容主要需要在导师的指导下完成内容的修改和结果的完善工作，预计可以在 3 月底完成。然后进行论文查重，根据论文查重结果对存在问题的部分进行修改，最后等待提交答辩。
科研工作情况	一、论文发表情况（列明作者排序、论文名称、期刊名称、期刊号、卷号、发表时间） 无 二、专利申请情况（列明作者排序、专利名称、申请时间、专利号） 无 三、参加会议情况（会议时间、会议地点、是否发表论文、是否宣读论文） 无

本人确认签字	（抄写以下内容并签字确认） 本人已知悉并承诺所提交的论文均为本人成果，如有涉及抄袭，则取消学位申请资格。 本人签名： 日期：　　年　　月　　日
导师意见	（包括学生的理论水平、研究能力，论文是否是导师指导下由本人独立完成，是否同意进行论文中期检查答辩等） 导师签名： 日期：　　年　　月　　日
考核小组意见	（对论文选题、文献综述、论文创新点、论文完成进度、未完成论文部分计划等方面进行综合考核） 考核成绩：　优 □　　合格 □　　不合格 □ 论文完善建议： 签名：________　________　________　_______　_______ 日期：　年　月　日

注：论文初稿附后。

服务水平目标导向的随机库存路径问题研究

摘　　要

在传统的库存路径问题研究中，常常以总成本为优化目标，这是现实企业追求利润现象的客观反映，企业早期发展的策略就是依靠压缩成本来提高利润，这种策略让企业能够在激烈的竞争中站稳脚跟。随着市场竞争的加剧，成本压缩的空间逐渐缩小，企业不得不开始从技术创新、提高服务水平和质量等方面来寻找新的利润增长的机会，激烈的市场竞争也要求企业为客户提供更好的服务，这是企业长远发展的必要条件以及成功的关键。因此，当企业从成本导向向服务导向转变时，以服务水平为目标来研究库存路径问题更贴合企业发展方向，同时也能拓展库存路径问题的优化方向。

本文以服务水平为目标研究随机库存路径问题，与传统的成本导向的研究思路不同，采用满足测度理论来刻画服务水平目标，建立相应的服务水平满足指数，并选择shortfall 风险测度来具体化服务水平满足指数ρ的等价表示形式，将传统的成本最小化目标转换为有预算限制的约束条件，以此为基础构建库存路径模型。针对需求的不确定性，采用上下界和均值来建立需求分布不确定集，将考虑了不确定性的鲁棒库存路径模型利用对偶理论进行转化，然后分别采用 Gurobi 求解器和变邻域搜索算法进行求解，最后通过数值实验验证算法的高效性，并对模型中的参数进行敏感性分析。

关键词： 随机需求 服务水平 库存路径问题 目标导向 风险测度 分布鲁棒优化 变邻域搜索

第1章 绪论

1.1 研究背景及意义

供应商管理库存（Vendor Managed Inventory，VMI）由于其相较于传统库存管理在合理利用资源、降本增效、改善服务水平方面的优势，受到了供应链各环节企业的重视，并迅速应用于自身的实践中。供应商管理库存的核心思想是供应商通过共享用户企业的当前库存和实际耗用数据，按照实际的消耗模型、消耗趋势和补货策略进行有实际根据的补货。因此，结合了库存管理和运输问题的库存路径问题（Inventory Routing Problem，IRP）就是实施 VMI 这一新兴业务实践时必须解决的核心问题之一。

要获得 VMI 带来的潜在优势有两个重要条件：一是决策者能否获得相关、准确又及时的信息，二是决策者能否使用获得的信息作出正确决策[1]。然而，现实中供应链各环节的信息共享存在着诸多障碍，这导致了决策者在作出决策的时候面临着诸多因素的不确定，因此无法作出正确决策，发挥 VMI 的最大优势。在 IRP 中，客户的需求情况是最关键的信息之一，根据需求信息的可得性可以将 IRP 分为确定性库存路径问题、随机库存路径问题（SIRP）和动态随机库存路径问题（DSIRP）[2]。

自 1984 年 Federgruen 等人首次提出随机需求后，多年来，需求信息不确定下的 IRP 始终是学术界研究库存路径问题的重点。需求不确定的 IRP 与需求确定的 IRP 目标相同，都是在满足每个客户需求的同时，最大限度地降低库存和运输总成本。然而，全球市场日益激烈的竞争给企业带来了越来越大的压力，企业不再仅仅需要关注成本，更需要尽可能提高效率，以提升客户满意度。高服务水平是提高客户满意度和忠诚度的关键因素之一，因此，提高服务水平已经成为企业关注的重点。尽管它在实践中非常重要，但很少有研究将服务水平纳入 IRP 框架。

鲁棒优化是处理不确定参数问题的有力方法，Aghezzaf(2008)率先将鲁棒优

化纳入需求不确定的 IRP 研究中。此后，随着鲁棒优化这一技术的发展，为克服经典鲁棒优化求解结果过于保守的缺点，分布鲁棒优化被引入。研究 IRP 的学者们也随之将分布鲁棒优化应用于 IRP 的建模中。引入分布鲁棒优化后，虽然能够很好地刻画客户需求信息不确定的特点，使问题更接近于实际，但也使求解难度大大增加，因此，针对该问题开发设计高效的启发式算法进行求解是现在 IRP 研究面临的困境之一。

基于上述背景，本文将基于风险测度和分布鲁棒优化的理论，研究以服务水平为目标导向的随机库存路径问题，然后通过设计高效的启发式算法对模型进行求解，最后进行实证研究，验证方法的有效性。研究成果将推动服务水平测度、风险测度、鲁棒优化、库存路径优化理论之间的交叉融合发展，以服务水平为目标导向的库存路径问题研究更适应现代企业的追求，能为企业的运营管理提供理论指导和决策支持。此外，高效的启发式算法设计思路能应用于企业实践，帮助企业解决实际问题。

1.2 国内外研究现状及分析

1.2.1 国外研究现状及分析

1.2.1.1 库存路径问题

库存路径问题（Inventory Routing Problem，IRP）是库存管理和车辆路径的组合问题，目标通常是在规划范围内最大限度地降低库存和运输成本。IRP 起源于为考虑库存成本和应对车辆路径问题（VRP）中车型的变化而开发的启发式模型，最早由 Bell 等人(1983)提出。随后 Dror 等人(1985)给出了更精确的定义：库存路径问题涉及一组客户，每个客户每天有不同的需求且库存容量已知，目标是尽量减少年度交货成本，同时努力确保任何客户在任何时候都不会耗尽库存。但 Campbell 等人(1998)描述的库存路径问题才是后来大多数研究应用的基础，他们指出，IRP 关注在给定规划期间内重复由一个供应商向一组客户分发一种产品，客户以给定的速度消耗产品，并有能力维持产品的库存，用于产品分销的是一组

同质车辆。目标是在规划期间最大限度地降低分销成本，且不会导致任何客户发生缺货。

对于 IRP 的发展历史，曾有多位学者做过综合性的回顾。根据 Campbell 等人描述的库存路径问题的特征，Kleywegt 等人(2002)将库存路径问题按照需求、车辆数、规划时间长度、车辆访问方式、贡献将过去研究进行了分类。后来 Andersson 等人(2010)在其综述文章中对 2010 年以前的研究进行了更细致的分类，7 个分类维度分别是时间、需求、拓扑结构、路径、库存、车队构成、车队规模。Coelho 等人(2014)在此基础上提出了另一种分类标准，并增加了库存策略这一结构标准，他们将需求从结构标准中提出，单独定为一种分类标准，根据获得需求信息的情况进行分类。如果决策者在规划期开始时已知需求信息，那么该 IRP 是确定性的 IRP；如果决策者只知道需求的概率分布，那么该 IRP 是随机的，即随机库存路径问题（SIRP）；如果需求不是完全已知的，而会随着时间逐渐揭晓，那么该 IRP 是动态的随机的，即动态随机库存路径问题（DSIRP）。

在需求确定的 IRP 中，研究者大多对 IRP 的特征进行组合来研究 IRP，从而产生了许多 IRP 的变体。Gallego 和 Simchi-Levi(1990)研究了在无限时间范围内，一个供应商通过使用无限制数量的同质车辆向多个客户直接交付一种产品的库存路径问题。Carter 等人(1996)研究了在有限时间范围内，一个供应商向多个客户提供多种产品的库存路径问题。Carter 等人(1996)研究的 IRP 的库存决策是订单可积压的，是有限时间范围的、车辆数有限的 IRP，而 Bertazzi 等人(1997)则研究了在无限时间范围车辆数无限、损失销售的 IRP。Bertazzi 和 Speranza(2002)之后又研究了在有限的时间范围内，一个供应商向一个客户直接交付多种产品的库存路径问题。Persson 和 Göthe-Lundgren(2005)对 IRP 进行拓展，研究了在有限时间范围内，多个供应商通过有限数量的异质车辆向多个客户提供多种产品的库存路径问题。不同特征组合产生了不同的 IRP 变体问题，对于同一种特征组合的 IRP 又可以采用不同的方法建模求解，拓展了库存路径问题的研究领域，并且这一拓展在需求不确定的 IRP 中同样适用。

鉴于实践中需求信息往往是不确定的，所以 Federgruen 等人(1984)提出随机需求以使研究更贴合实际。但引入不确定需求后，IRP 的建模求解难度也大大提

高了，为了更好地求解 IRP，学者们做出了许多努力。一开始，为了便于求解，学者们简化了假设，研究一辆车（Reinman 等人，1999；Qu 等人，1999；Schwartz 等人，2006）或直接交付（Barnes-Schuster 和 Bassok，1997；Reinman 等人，1999；Kleywegt 等人，2002）的情形。后来，学者们发现马尔可夫决策过程可用于在无限时间范围模拟随机 IRP，由于维数诅咒，研究人员经常采用近似价值函数的方法（Minkoff 1993；Adelman 2004)和分解法(Kleywegt 等人，2004）来求解它。除了采用马尔科夫决策过程以外，Jaillet 等人(2002)提出了近似增量成本的方法，将长期交付成本纳入较短的规划范围内，解决了以最大限度地降低预期年度交付成本总额的问题。Yu 等人(2012)将精确的随机模型转换为简化的确定性模型，然后，采用拉格朗日松弛法将模型分解成库存问题和车辆路径问题。Solyali 等人(2012)提出了一个鲁棒优化模型来解决随机 IRP，并开发了分支切割算法来求解该鲁棒 MIP 公式。Bertazzi 等人(2013)介绍了 SIRP 的动态编程公式，提出了基于推出算法和启发式方法的混合算法，该算法利用分支切割算法使用确定对应解的最佳解决方案来预测未来需求。Nikzad 等人(2019)提出了一个两阶段随机编程公式，并采用基于自适应大规模邻域搜索算法的启发式算法求解医疗废物回收中的 SIRP。

无论是需求确定的 IRP 还是需求不确定的 IRP，目标都是在满足每个客户需求的同时，最大限度地降低库存和运输总成本，考虑以服务水平为目标的库存路径问题的研究还比较少。Bijvank 和 Vis(2012)调查了一个确定性的 IRP，其中服务水平以平均满足率（即满足需求的分数）来衡量。Singh 等人(2015)研究了一个确定性的 IRP，以最大限度地提高服务水平和运营效率，其中服务水平以库存数量的函数衡量。Yu 等人(2012)调查了分批交付的随机 IRP，以最大限度地降低系统总成本，其中不确定的需求服从正态分布。在他们的研究中，服务水平以每个客户仓库缺货的概率和超容量的概率衡量，并将服务水平视作问题的约束条件。Rahimi 等人(2017)提出了多目标 IRP 的随机模型，其中已知不确定参数的概率分布，如车速、客户需求和运输成本。他们将服务水平描述为延迟和延期交货频率的函数。Liu 等人(2019) 在 Yu 等人(2012)的研究基础上，将服务水平为目标，将有限资本作为约束条件，加入了处理模块的考虑，结合分布鲁棒优化技术，采用

SAA 和 MIP 的分层方法求得了多周期随机库存路径问题的保守近似解，最后通过数值验证了方法的有效性，并向从业者提供了指导意见。综上所述，近年来逐渐有学者将服务水平纳入 IRP 的建模框架中，但真正以服务水平为目标导向的随机库存路径问题研究还非常少，本研究将拓展这一方面的研究，以适应现代企业追求更强竞争优势的趋势。

1.2.1.2 鲁棒优化

Soyster 在 1973 年发表的文章中第一个提出鲁棒优化，文章考虑了带有不确定参数的线性规划（LP），并将不确定参数设置为不确定性集中的最坏情况值。但是，这种方法通常会得到过于保守的解决方案，为了解决这个问题，El-Ghaoui 和 Lebret（1997）、 El-Ghaoui 等人（1998）、 Ben-Tal 和 Nemirovski (1998, 1999, 2000)考虑了在椭圆不确定性集下不确定的凸优化问题。但是，这种方法增加了名义问题的复杂性，并且不能轻松地扩展到离散优化问题。Bertsimas 和 Sim（2003，2004） 开发了一种鲁棒性方法，称为"不确定预算法"，它仅允许一些不确定参数同时偏离其名义值，从而控制保守程度。此方法的一个重要特点是，鲁棒等价形式保留了其名义问题的复杂性（例如，如果名义问题是 LP 问题，则鲁棒等价形式也是 LP 问题），因此可以轻松扩展到离散优化问题。到目前为止，所有有关鲁棒优化的研究都旨在获得静态决策问题的鲁棒等价形式，因为所有决策变量都是先验决定的。Ben-Tal 等人（2004 年）介绍了多阶段不确定 LP 问题的可调节鲁棒等价形式，其中有些决策可以在一些不确定参数已知后做出（观望决策），从而使这些决策能够根据已实现的数据进行自我调整。如果影响约束的不确定性对其他约束会产生影响，那么可调节鲁棒等价形式能比鲁棒等价形式提供更好的最优目标值。然而，可调节鲁棒等价形式是难以处理的。因此，Ben-Tal 等人（2004 年）提出了一个仿射的可调节鲁棒等价形式，作为易处理的近似，其中观望决策变量被重写为不确定数据的仿射函数。

后来，有学者将鲁棒优化应用于库存管理问题的研究，2008 年 Aghezzaf 第一次将鲁棒优化应用于库存路径问题的研究。Aghezzaf(2008)讨论了客户需求率和旅行时间是随机的库存路径问题，使用鲁棒优化技术通过非线性混合整数编程

公式确定最优鲁棒分销计划，并使用蒙特卡洛模拟来微调模型的关键参数。Abdelmaguid 等人(2009)研究了允许订单积压的确定性库存路径问题，提出了问题的 MIP 公式，并开发了建设性的和改进的启发式方法，通过在给定时间内解决 MIP 公式而获得的上下边界来衡量启发式方法的质量。Solyali 等人(2012)在需求不确定性下提出了鲁棒库存路径模型，开发了分支切割算法在两个小时限制内解决了实际案例。Huang 和 Lin(2010)还研究了不确定需求下的多产品的库存路径问题，并修改了蚁群优化算法来解决它。Li 等人(2016)建立了库存不准确和补货提前期下的库存路径模型，他们分三步用鲁棒的库存路径策略解决了这个问题。此外，Lefever 等人(2015)研究了具有可变旅行时间的鲁棒库存路径问题，他们使用了四种不同的模型来解决问题，并采用蒙特卡洛模拟改进了解决方案。Sokol 和 Papageorgiou(2015)提出了一个鲁棒模型和两阶段解决方案，以研究具有随机旅行时间和时间窗口的海上库存路径问题，在第一阶段生成鲁棒路径，并在下一阶段采用多场景构建启发式方法，以获得良好的可行解决方案。Agra 等人(2018)提出了一个两阶段可调的鲁棒公式，使用预算不确定性集来模拟航行时间的不确定性，应用了列和行生成的方法来解决由此产生的鲁棒等价形式。Liu 等人(2019)研究了在部分分布信息已知的情况下，带有选择处理模块和有限资本预算约束的随机库存路径问题。他们提出了一种新的分布鲁棒机会约束公式，并开发了基于问题的样本平均近似方法和基于 MIP 的分层方法。

将鲁棒优化应用于库存路径问题的研究成果已经较为丰富，但还少有人将分布鲁棒优化应用于库存路径问题，因此，有必要对该领域进行探索。

1.2.1.3 启发式算法

库存路径问题中供应商必须同时做出三个决定：（1）何时为给定客户提供服务，（2）在服务时向客户交付多少产品，（3）如何将多个客户合并到车辆行驶路线中。因此，求解 IRP 是非常困难的，这一点也已经被证实。由于库存路径问题是库存管理和车辆路径问题（VRP）的组合问题，因此，在求解 IRP 时，学者们大多采用车辆路径问题的求解方法。求解 VRP 的方法大概可以分为 5 类，即建设性启发式、局部改进启发式、元启发式、混合启发式、并行协作元启发式。

Abdelmaguid 等人(2009)采用建设性启发式和局部改进启发式的方法研究了有限的多周期的订单可积压的 IRP。Archetti 等人(2012)也研究了多周期的 IRP 但是没有考虑缺货的情况。针对研究问题，他们结合专门设计的混合整数编程模型开发了一种基于禁忌搜索（TS）的混合启发式方法。Cordeau 等人(2015)提出了多产品、多周期 IRP 的三阶段启发式，每个阶段都代表一个决策过程。首先，补充计划采用基于拉格朗日的方法构建，具体说明服务的客户以及每个期间要交付多少客户；然后，构建车辆路线；最后，将规划和路径决策合并到混合整数线性编程模型中。他们研究的问题包含 50 个客户和 5 种不同产品。

Liu 和 Lee(2011)提出了一个可变邻域禁忌搜索（VNTS）方法来研究带时间窗口的 IRP。根据初步解决方案，在 TS 框架内对车辆路线和库存控制策略的不同邻域结构进行了调查。Aksen 等人(2014)研究了从不同产地节点收集植物油的选择性和周期性的 IRP，开发了自适应大规模邻域搜索（ALNS）元启发式方法，问题设置了 100 个源节点和 7 天的规划期。Popović 等人(2012)开发了一种 VNS 算法，用于燃料输送中使用同质多槽车辆进行多产品、多周期的 IRP。Mjirda 等人(2014)提出了研究多产品 IRP 的两阶段 VNS 方法。在第一阶段，得到关联的 VRP 解决方案，然后考虑到运输和相关的库存成本，该解决方案会被反复改进。与其他研究不同，他们讨论的是一个多对一的供应链网络，多个不同的供应商为单个客户提供服务。

Moin 等人(2011)也研究了多达 98 家供应商的入境物流案例，以测试其多产品、多周期 IRP 的混合遗传算法（GA）。该算法遵循分配第一、路线第二的策略。Park 等人(2016)提出了一个针对一对多供应链网络中考虑销售损失的多层 IRP 的 GA。他们使用最多有 12 个客户和 12 个时间段的问题集进行实验。Shaabani 和 Kamalabadi(2016)提出了基于种群的多产品、多客户 IRP 的模拟退火算法，该算法用于易腐产品 IRP 的研究。

Zhao 等人(2008)在三级供应链网络的特殊情况下，采用固定分割和二次幂策略求解 IRP，并利用可变大邻域搜索(VLNS)元启发式算法进行分割。Nambirajan 等人(2016)也扩展了经典的 IRP 公式，考虑通过在三级供应链中中央仓库和不同仓库之间的补给活动，实现更紧密的供应链协作。首先确定一组制造商对单个节

点的补充政策。然后采用基于聚类、分配和路径的三级启发式算法规划中心仓库到多个仓库的路线。Vansteenwegen 和 Mateo(2014)讨论了在无限规划范围内循环 IRP 的迭代局部搜索算法。Chitsaz 等人(2016)、Raa 和 Dullaert(2016)、Zachariadis 等人(2009)也介绍了循环 IRP 的其他启发式和元启发式技术。

由于求解库存路径问题在计算上的复杂度，大多研究都采用了启发式方法。近年来，大多数学者也将启发式方法应用于各行业的具有不同特征的库存路径问题的研究中，但无论在哪个领域，设计高效的启发式算法都是一个艰巨的任务，尤其在引入分布鲁棒优化后，设计高效求解分布鲁棒形式的库存路径问题模型还是亟待解决的难题。

1.2.2 国内研究现状及分析

国内研究库存路径问题大概有二十年时间，研究最早可以追溯至 2001 年，袁庆达在《物流技术》杂志发表文章，对库存—运输联合优化问题做了初次描述，第二年作者从决策的三个层次——即战略层、战术层和作业层——分别对随机需求情况下库存—运输联合优化问题展开了进一步研究。谢秉磊在讨论随机车辆路径问题时，作为研究的拓展，在论文最后将随机车辆路径问题与库存决策结合，研究了一个随机库存路径问题，他使用近似方法将顾客的随机需求转化为确定需求，将库存路径问题转换为多周期车辆路径问题，并设计了一个启发式算法进行求解。

赵达、李军、马丹祥(2006)提出了一种基于马尔科夫决策过程与修正的 C-W 节约算法的启发式分解算法，用于求解车辆数量有限的随机库存路径问题。赵达和李军在第二年发表了一篇综述文章，分析了 IRP 与常见的车辆路径问题、旅行商问题的联系与区别，总结了近年来关于求解随机需求库存路径问题所建立的模型及算法求解。

傅成红、符卓(2010)研究了单周期一对多结构的随机库存路径问题，也是通过把库存路径问题转换成车辆路径问题来求解，构造了求解模型的自适应单亲遗传算法，用 MATLAB 编程并用测例进行了测试。朱晨波等人(2007)提出了一种

有车辆限制、直接配送的无限时间三层随机库存路径问题，运用了马尔可夫决策过程来解决此问题。孙茂等人(2008)也采用了 C-W 节约算法，但研究的是作业层的滚动周期策略下的确定需求随机库存路径问题。刘立辉、叶春明在 2009 年对库存路径问题发表了综述文章，对国外文献按照战略 IRP、有限时间 IRP、无限时间 IRP 分类进行了回顾。傅成红 2010 年在其博士论文中系统地研究了不同周期策略的随机库存路径问题，针对滚动多周期策略的 IRP 基于贪婪思想提出了局部邻域搜索算法进行求解。

赵达、李军、马丹祥在 2014 年以具有硬时间窗约束的随机需求库存路径问题为研究对象，将该问题分解为直接配送的随机库存路径问题和具有硬时间窗约束的路径优化问题两个子问题，并以最小化系统运行成本和用车数量为目标，设计了一个基于(s，S) 库存策略和修正 C-W 节约法的启发式算法。三人在 2016 年通过引入固定分区策略，将随机库存路径问题分解为若干个独立的子问题，并采用拉格朗日对偶理论以及次梯度算法确定最优的客户分区，在此基础上证明了各子问题的最优周期性策略由分区内各客户的（T，S） 库存策略以及相应的最优旅行商路径构成，进而给出了客户需求服从泊松分布时求解最优（T，S） 策略各参数的方程组，并设计了求解算法。赵达等人在 2017 年又考虑了修正固定分区策略下的随机库存路径问题，并设计了相应算法进行求解。

陈德良、陈治亚(2010)构建了随机库存路径问题的机会约束规划模型，并将随机模拟、人工神经网络和遗传算法结合在一起，设计了求解问题的混合智能算法。 魏江宁、夏唐斌(2015)研究了多阶段的确定需求的库存路径问题，作者们采用混合模拟退火算法求解问题，并在算法中加入了 C-W 节约算法产生初始解，通过多路径的插入与交换操作来对初始可行解进行改进。秦磊(2017)研究了基于模拟退火算法的易逝品库存路径问题，采用分解法将问题分解为库存问题和车辆路径问题进行研究。

与国外研究类似，国内研究库存路径问题时的目标也是追求总成本最低，几乎没有考虑过服务水平这一因素。此外，将鲁棒优化的技术应用于库存路径问题的研究在国内还非常少见。因此，本文以服务水平为目标导向，将分布鲁棒优化技术应用于问题的建模中，然后设计高效的启发式算法来研究随机库存路径问题，

具有较大的开拓意义。

1.3 研究内容和结构

本文主要研究以服务水平为目标导向的随机库存路径问题。在传统的 IRP 问题中，目标大多数是追求总成本最少或者期望成本最少，少有人考虑其他的目标。本文将以服务水平为目标导向，构建服务水平满足指数，结合风险测度理论和分布鲁棒优化技术，构造需求分布不确定集，刻画服务水平满足指数与风险测度之间的关系，重构一个供应商在有限时间内的多个期间向多个客户供货的随机库存路径问题模型，然后设计高效的变邻域搜索算法进行求解，最后通过实证研究验证方法的有效性。

本文结构如下：

第一章绪论。简述本文的研究背景及意义，并回顾库存路径问题的国内外研究，着重从库存路径问题、鲁棒优化、启发式算法三个方面回顾国外的研究，分析国内外在这个领域的研究现状。

第二章理论基础。对研究将要使用的理论进行介绍，分别是服务水平刻画、满足测度理论、分布鲁棒优化、变邻域搜索算法。

第三章以服务水平为目标导向的库存路径问题。首先针对拟研究的问题进行背景介绍，然后按照构造需求不确定集、刻画服务水平目标、构造服务水平满足指数的顺序正式建立以服务水平为目标的鲁棒库存路径模型，再对模型进行近似处理，利用对偶理论等将模型转化为易于求解的混合整数规划模型，最后，分别采用 Gurobi 求解器、设计变邻域优化算法进行求解。

第四章数值实验。按照第三章模型求解部分的算法设计思路，将算法代码化，然后开展数值实验，对比 Gurobi 和变邻域算法两种方法的求解结果，验证算法的高效性，最后针对部分参数进行敏感性分析。

第五章总结与展望。总结全文的研究成果，提出未来继续探索的方向。

1.4 论文创新点

本文的创新点在于：

1、不同于以往以成本为目标的库存路径问题，本文以服务水平为目标导向，选择与其他研究不同的服务水平测度，构建相应的服务水平满足指数，能拓展库存路径问题的优化方向。

2、将风险测度理论和分布鲁棒优化技术应用于库存路径问题的研究，促进了理论之间的交叉融合发展。

3、为采用分布鲁棒优化技术的库存路径问题设计高效的启发式算法，提升求解速度，提供算法设计思路。

第2章 理论基础

本文研究的是服务水平为目标导向的随机库存路径问题，将以服务水平为目标导向，构建服务水平满足指数，再结合分布鲁棒优化技术，重构一个供应商在有限时间内的多个期间向多个客户供货的随机库存路径问题模型，然后设计高效的变邻域搜索算法进行求解。因此，本章就拟研究问题涉及到的相关理论进行梳理，分别从服务水平刻画、满足测度理论、分布鲁棒优化、变邻域搜索算法四个部分展开，了解学习理论基础。

2.1 服务水平刻画

现有文献（Sereshti(2021)等[66] 、Tempelmeier(2007)等[67]、Tempelmeier(2011)等[68]、Gade 和 Küçükyavuz(2013)[69]、Helber(2013)等[70]）在处理需求不确定时提出过四种不同类型的服务水平。四种类型的服务水平的具体公式如表所示。公式中 T 表示整个规划期，t 表示规划期内的周期，K 表示总产品集合，k 表示具体产品类型，I_{k0}表示第k种产品的期初库存，x_{kj}表示在j期间累计接收k产品的数量，$\overline{D}_{kj}$表示在j期间k产品的需求，$\overline{BO}_{kt}$表示在j期间k产品未满足需求的量，$\bar{B}_{kt}$表示直到j期间k产品累计未满足需求的量，$E[\cdot]$符号表示期望值，$pr(\cdot)$符号表示概率。

服务水平类型	公式
α_c	$\min\limits_{t\in T}\left(pr\left(I_{k0}+\sum_{j=1}^{t}\left(x_{kj}-\overline{D}_{kj}\right)\geq 0\right)\right)\geq \alpha_c \quad \forall k\in K$
α_p	$\underset{t\in T}{E}\left[pr\left(I_{k0}+\sum_{j=1}^{t}\left(x_{kj}-\overline{D}_{kj}\right)\geq 0\right)\right]\geq \alpha_p \quad \forall k\in K$
β	$1-\frac{\sum_{t\in T} E[\overline{BO}_{kt}]}{\sum_{t\in T} E[\overline{D}_{kt}]}\geq \beta \quad \forall k\in K$
β_p	$1-\frac{E[\overline{BO}_{kt}]}{E[\overline{D}_{kt}]}\geq \beta_p \quad \forall k\in K,\forall t\in T$

γ	$1-\frac{\sum_{t\in T}\ E[\bar{B}_{kt}]}{\sum_{t\in T}\ E[\bar{D}_{kt}]}\geq\gamma\quad\forall k\in K$
γ_p	$1-\frac{E[\bar{B}_{kt}]}{E[\bar{D}_{kt}]}\geq\gamma_p\quad\forall k\in K,\forall t\in T$
δ	$1-\frac{\sum_{t\in T}\ E[\bar{B}_{kt}]}{\sum_{t\in T}\ (T-t+1)E[\bar{D}_{kt}]}\geq\delta\quad\forall k\in K$
δ_p	$1-\frac{E[\bar{B}_{kt}]}{\sum_{j=1}^{t}\ E[\bar{D}_{kj}]}\geq\delta_p\quad\forall k\in K,\forall t\in T$

α服务水平要求在生产或采购周期内不发生缺货的概率要大于α。α服务水平是以事件发生为导向的服务水平，可以是整个规划期间内的最低和平均服务水平要求，分别用α_c和α_p表示。β、γ和δ服务水平既可以在整个规划范围内实施，也可以在每个周期内单独要求。β服务水平表示为直接用库存满足需求的比例，是数量导向的服务水平，等于 1 减去未满足需求和总需求的商。γ和δ服务水平都是以时间和数量为导向的服务水平，γ服务水平等于 1 减去累积未满足需求和总需求的商，而δ服务水平等于 1 减去累积未满足需求和允许的最大未满足需求的商。

大部分文献均采用了α_c服务水平，要求在生产或采购周期内不发生缺货的概率要大于α_c。然而在现实中，将目标设定为不发生缺货，并不利于库存的有效管理，大多数客户都会设定一定的安全库存水平，希望库存水平维持在合理的区间内。因此，本研究基于α_c服务水平的思想，设定目标库存水平区间，将供应商的服务水平以是否违反库存水平的目标区间来衡量，以此作为多周期随机库存路径问题的求解目标。

2.2 满足测度理论

Simon(1955)提出了著名的有限理性模型，其核心观点之一是，在现实世界的决策过程中，决策者首先制定一个愿望水平，然后考察现有的备择方案，如果看到一个备择方案能较好地满足定下的愿望水平，他就不愿意再去研究或寻找更好的备择方案了。换句话说，现实中决策者可能更倾向于追求满足愿望水平的利润，而不是追求利润的最大化，这样的决策者被称为是以目标为导向的决策者。

Simon(1959)定义了 Satisficing 这一术语来描述这种现象。2009 年 David B. Brown 和 Melvyn Sim 利用该愿望水平的概念来量化了具有不确定回报的投资机会，其发表在 MANAGEMENT SCIENCE 上的文章，首次提出了满足测度(Satisficing Measures)的概念，他们给出了满足测度的定义，并且证明了满足测度和风险测度具有对偶关系，每个满足测度都可以写成用一系列参数表示的风险测度的形式。

以前已有学者探索过基于满足理念的愿望水平模型，通常是通过概率测度来构建关联，也就是最大化实现目标的概率。但这样的测度在计算上是难以处理的，并且没有考虑偏离目标的风险程度，它假设决策者对损失和收益的水平不敏感，并没有考虑极端情况。事实上，决策者并非对其不敏感，尤其是对于巨额损失而言。而 Brown 和 Sim(2009)提出的满足测度与风险测度可以相互转换，对收益或损失的幅度具有敏感性，这与概率测度形成了鲜明对比。现在已有研究已经利用风险价值(VaR)、条件风险价值(CVaR)、熵风险测度、确定性等价凸风险测度等来构建满足测度，从而将偏离目标的风险考虑进去。

鉴于本文是以服务水平为目标导向的，因此，纳入目标影响并解决概率测度的弊端的满足测度，是更适合本研究的方法。

2.3 分布鲁棒优化

在优化问题中，如何准确地刻画不确定参数是一大难题，学术界对此提出了随机规划、鲁棒优化两大类方法。其中，鲁棒优化又分为经典鲁棒优化和分布鲁棒优化。在经典鲁棒优化框架下，不确定性通常被建模为具有真实分布的随机变量，除了上下界之外，其他与具体分布相关的信息都是未知的，指定一个不确定集合，求出这一不确定集合中最坏情况的解，这样求得的解过于保守。为了克服这一缺点，Scarf(1958)提出了分布鲁棒模型，

通用的分布鲁棒优化模型是：

$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\left\{\mathcal{R}_P[h(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \mid \mathcal{R}_P[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] \le \boldsymbol{0}\right\}$$

其中$x \in X \subseteq R$是决策变量，$\tilde{\xi}$是测度空间(Ξ, F)的随机变量，它服从$P \subset D$分布，$h(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$是随机函数，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$是随机函数向量，函数$\mathcal{R}_P$用于量化决策结果中的

不确定性。

不确定参数ξ的分布不确定集的选择非常灵活，通常有两个原则，一是应尽可能小，二是应包含未知的确定性真实分布，或至少有较高的置信度。遵循这两个原则不仅降低了问题的保守性，而且使问题对未知的真实分布具有鲁棒性。文献中的分布不确定集通常分为两类，基于矩的分布不确定集和基于差异的分布不确定集。基于矩的模糊集包含矩满足某些特性的分布，而基于差异的模糊集包含在某种差异度量意义上接近于名义分布的分布。在建立模型时，已有研究更多考虑建立基于矩的分布不确定集，即基于上下界、平均值、标准差、协方差等矩信息建立分布不确定集。

本研究考虑的库存路径问题，客户的准确需求分布的刻画非常困难，但可以通过历史需求数据对矩信息进行估计，从而建立需求分布不确定集。考虑到方差信息的准确预估，需要长时间地数据观察，这在现实中往往难以实现，此外，方差对应的分布鲁棒等价形式包含一个高阶矩（标准差）或交叉矩（协方差），这会使模型在计算上变得难以处理。因此，为了便于预估矩信息和计算，用上下界和均值定义分布不确定集是建模求解的有效选择。

2.4 变邻域搜索算法

变邻域搜索算法（Variable Neighborhood Search Algorithm）是由 Mladenovi'c 和 Hansen(1997)提出的基于邻域搜索思想的元启发式算法。变邻域搜索(VNS)的基本思想是：（1）一个邻域结构的局部最优解不一定是另一个邻域结构的局部最优解；（2） 全局最优解是所有可能邻域的局部最优解。VNS 主要由邻域变化(Neighborhood Change)、局部搜索(Local Search)和扰动程序（Shaking Procedure）三部分组成。局部搜索方法主要是指可变邻域下降（Variable Neighborhood Descent）。

邻域变化(Neighborhood Change)是指将现有值$f(x)$与从第k个邻域获得的新值$f(x')$进行比较。如果获得了改进，则更新现有值并将k返回到其初始值。否则，考虑下一个邻域。

邻域变化的逻辑框架：

输入：用于局部搜索的邻域结构集合$N_l, l = 1, \dots, l_{max}$;

分别来自两个不同的邻域的解x和x'；

迭代：

从$l = 1$开始循环，直到$l = l_{max}$：

如果$f(x') < f(x)$，那么$x = x', l = 1$;

否则$l = l + 1$;

输出：$x, f(x)$

如果以特定的方式进行邻域搜索，则称为可变邻域下降法(VND)。其步骤在下面表格中给出。原理是，给定一个初始解和用于结构搜索的邻域结构集合，从初始解开始搜索邻域，如果在当前邻域搜索找不出一个比当前解更优的解的时候，就跳到下一个邻域继续进行搜索； 如果在当前邻域搜索找到了一个比当前解更优的解的时候，就跳回第一个邻域重新开始搜索，直到迭代结束，输出找到的解。大多数局部搜索启发式算法在下降阶段使用很少的邻域(通常是一个或两个，即$l_{max} \le 2$)，最终的解是关于所有l_{max}邻域的局部最小值。因此，使用 VND 获得全局最优解的机会比使用单一的邻居结构更大。

可变邻域下降法的逻辑框架：

输入：用于局部搜索的邻域结构集合$N_l, l = 1, \dots, l_{max}$;

初始解$x = x'$;

迭代：

从$l = 1$开始循环，直到$l = l_{max}$：

在x'的邻域$N_l(x')$内搜索最好的邻居x''；

如果$f(x'') < f(x')$，那么$x' = x'', l = 1$;

否则$l = l + 1$;

直到找不到更好的解;

输出：$x, f(x)$

如果仅进行可变邻域下降，得到的结果会受初始解的很大限制，选择不同的初始解，搜索结果也可能不一样。此外，以确定规则进行搜索的方法，也容易陷

入局部最优，为了跳出局部最优，通常需要设置扰动程序。常用的可变邻域搜索算法包括简化 VNS、基本 VNS 和一般 VNS。

如果从$N_l(x)$中选择随机点且未进行下降，然后将新点的值与现有值进行比较，并在有改进的情况下进行更新，这称为简化 VNS 方法。简化 VNS 通常会假设一个停止条件，例如允许的最大 CPU 时间t_{max}或两个改进之间的最大迭代次数。此外，简化的 VNS 加入了扰动程序，便于跳出局部最优。简化的 VNS 在求解大规模问题中很有用，能缩短局部搜索的时间，达到快速求解的目的。

基本 VNS(BVNS）和一般 VNS(GVNS)都包含了邻域变化、局部搜索和扰动程序三个部分。只是 BVNS 的局部搜索采用的是最佳改进法，即沿着最陡的下降方向进行邻域搜索，而 GVNS 的局部搜索采用的是可变邻域下降法。

一般变邻域搜索算法(GVNS)的逻辑框架：

输入：用于局部搜索的邻域结构集合N_l,$l = 1, \dots, l_{max}$;

用于扰动的邻域结构集合N_k,$k = 1, \dots, k_{max}$;

初始解$x = x_0$;

迭代：

从$k = 1$开始循环，直到$k = k_{max}$：

扰动：从N_k中选择一个随机解$x = x'$;

局部搜索：从$l = 1$开始循环，直到$l = l_{max}$：

在x'的邻域$N_l(x')$内搜索邻居x''；

如果$f(x'') < f(x')$，那么$x' = x'', l = 1$;

否则$l = l + 1$;

如果局部最优解$f(x'')$好于初始解$f(x)$：

那么$x = x''$，继续在邻域$N_1(k = 1)$内搜索；

否则$k = k + 1$;

直到满足停止程序标准;

输出：找到的最好的解

第3章 以服务水平为目标的库存路径问题

本章正式展开对以服务水平为目标的随机库存路径问题的研究，将分为四小节，分别是随机库存路径问题描述、建立以服务水平为目标的库存路径模型、模型近似转化以及变邻域搜索算法设计求解。

3.1 问题描述

本文研究有限规划时间内的多周期随机库存路径问题，即一个供应商 0 负责在一定的规划期内向 n 个客户配送产品，来满足 n 个客户的随机需求。在整个过程中，供应商 0 需要负责 n 个客户的库存管理，供应商 0 的供应能力不受限制，并且拥有一支不限数量的有装载容量限制的同质车队，同质车队意味着车辆的装载能力、运输效率和成本一致，但是供应商需要在每期决定向 n 个客户配送的产品数量以及配送路线。面对 n 个客户进行路径决策和补货决策，以满足 n 个客户的随机需求，并且要将客户的库存成本以及配送的运输成本控制在一定的预算之内，最终目标是使规划期内 n 个客户的库存水平维持在一定的目标区间内，也就是最小化客户库存水平超出目标区间的风险。

具体描述为：

a) 给定规划的时间范围 T，$T = \{1,2,\dots,|T|\}$，T 被划分为多个周期，在$t \in T$期，每个客户的需求是不确定的，除了用于刻画不确定集的部分信息外，其他与需求有关的信息均未知；

b) 一个供应商，可供产品数量无限制，通过一支容量限制为 V 的同质车队向 n 个客户供货，车辆的数量和访问客户的数量不受限制，n 个客户的仓库有存储容量限制，供应商和客户同属于集合 N，0 代表供应商，$N = \{0,1,\dots,\mathrm{n}\}$；

c) 客户的需求可以被拆分，即同一个客户在同一期间内的需求可以由多辆车来满足；

d) 一辆车在同一时期内可以向多个客户送货，但只能完成一条访问路线；

e) 允许缺货的情况发生，但缺货会导致相应的惩罚成本，并且缺货一旦发生就代表损失了销售机会，不能再通过补货来弥补；

f) 问题具有预算限制，必须控制总成本，使其不超过预算，总成本由库存成本、固定运输成本、可变运输成本、缺货成本组成；

g) 目标是最大化客户服务水平，客户对每一周期的库存水平存在区间要求，服务水平由整个规划期内客户库存水平维持在目标区间内的期望概率来衡量。

3.2 模型建立

3.2.1 需求不确定集

在本文研究的问题中，客户的需求是随机的，因此针对问题建立起来的模型也就是不确定的，分布鲁棒优化是求解不确定的 OM 模型的方法之一。随机参数的具体分布是未知的、难以准确预估的，因此，求得模型的精确解是非常困难的，现有研究都致力于寻求各种方法去求得更接近于精确解的近似解。依照分布鲁棒优化的思想，通过矩信息来建立分布不确定集是求得模型的近似解的一种途径，而矩信息如上下界、均值、方差等，在现实中也可以凭借需求的历史数据来预估，是比较便利可行的方法。

如前文所述，本文意图设计高效的启发式算法求解大规模的库存路径问题，在客户不确定需求的刻画上，如果选用均值和方差，会使模型在计算上变得难以处理，此外，在现实中方差信息的正确预估依赖于大量的历史数据，这往往很难获取到。因此，为了便于计算和正确预估矩信息，本文选择采用上下界和均值来定义需求不确定集。

客户需求不确定集具体表示为：

$$\mathbb{F} := \left\{ \mathbb{P}: \tilde{\xi} \sim \mathbb{P}, \mathbb{P}(\tilde{\xi} \in \mathcal{Z}) = 1, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\xi}] = U \right\}$$

$$\mathcal{Z} = [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$$

$\mathbb{F}$代表需求分布不确定集，$\tilde{\xi}$表示客户的不确定需求，该需求服从概率分布$\mathbb{P}$，

不确定需求$\tilde{\xi}$的取值均在上下界范围$\mathcal{Z}$内，均值为U。虽然这样构造的分布不确定集相对简单，但是 Hall 等人(2016)和 Qi 等人(2015)已经证明，即使在分布不确定集中没有指定协方差和方差，仅采用上下界和均值来定义，仍然能有令人满意的表现。

3.2.2 刻画服务水平目标

在过去对库存路径问题的研究中，问题目标大多追求成本最小化，而不是最大化客户满意度，但在具体实践中，为了在激烈的行业竞争中存活下去，各个企业都会考虑在维持良好的服务水平和投入成本中争取达到一定的平衡。所以研究者也开始将服务水平作为一种约束条件纳入研究模型中来考虑，但直接以服务水平为目标的研究还非常少，这样的处理表明在潜意识里还是将利润作为企业考虑的第一要素。而在如今的竞争环境中，企业已从利润导向转变为服务导向，愿意牺牲部分利润来实现更高的客户满意度，希望长久地屹立于市场。因此，在这样的实际情况下，直接以服务水平为目标，同时将成本作为约束条件来研究库存路径问题可能是更贴合实践的选择。

在库存路径问题中，提高客户满意度，也就是提高供应商的服务水平，有两种方法，一是制定能保证所有客户的需求都得到满足的最佳策略，二是在一定的需求满足率下满足客户的需求。第一种方法要求供应商的供货量必须不低于客户的需求，但在客户需求是随机不确定的情况下，这样的保证势必会带来高额的库存持有成本，即使这样也仍然存在需求得不到满足的风险。而第二种方法则允许一定程度上不满足客户需求，但这种情况不能太频繁，以至于对服务水平产生过大影响。显然，第二种方法在现实中更为普遍。

本文以服务水平为目标来研究库存路径问题，如何刻画服务水平目标是建立模型的关键步骤。理论基础中已经总结了四种刻画服务水平的方法，鉴于除α服务水平外的其他三种服务水平在刻画上均把随机需求放在了分母的位置，这在技术上处理起来非常困难，因此，为了模型简洁，本文拟采用α服务水平的刻画方式。传统的α服务水平是要求在规划周期内不发生缺货的概率要大于α_c，公式为

$$\min_{t\in T}\left(pr\left(I_{k0}+\sum_{j=1}^{t}\left(x_{kj}-\bar{D}_{kj}\right)\geq 0\right)\right)\geq \alpha_c \quad \forall k\in K,$$

具体符号含义已在前文说明过，这里不再赘述。公式中$I_{k0}+\sum_{j=1}^{t}\left(x_{kj}-\bar{D}_{kj}\right)\geq 0$表示每一期库存加上补货量需要不小于需求量，最低限度是刚好满足，也就是不缺货。然而在现实中，将目标设定为不发生缺货，并不利于库存的有效管理，大多数客户都会设定一定的安全库存水平，希望满足需求后的库存水平能维持在合理的区间内，以使应对紧急情况的发生或是补货期的需求。因此，本研究基于α_c服务水平的思想，设定目标库存水平区间，将供应商的服务水平以违反库存水平的目标区间的风险来衡量，以此作为多周期随机库存路径问题的求解目标。

假设每个客户每一期都存在一个维持库存水平的目标区间，用数学符号表示为$\bar{\tau}_{it}\geq I_{i,t}\geq \underline{\tau}_{it}$，库存水平目标区间用$[\underline{\tau}_{it},\bar{\tau}_{it}]$表示，库存水平表示为$I_{i,t}$，$I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})=I_{i,t-1}(\tilde{\xi}_{i,t-1})+d_{it}-\tilde{\xi}_{i,t},\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z},i\in N\setminus\{0\},t\in T$，其中$d_{it}$表示客户$i$在$t$期从供应商处接收的供货量，$\tilde{\xi}_{i,t}$是整数，表示客户$i$在$t$期的随机需求。

注意，本文仅基于α_c服务水平的思想，并不直接采用α_c服务水平的刻画方式，因为这种刻画本质是通过概率测度来构建关联，概率测度在计算上是难以处理的，并且没有考虑偏离目标的风险程度。如前文所述，2009 年 David B. Brown 和 Melvyn Sim 首次提出的满足测度(Satisficing Measures)概念，既纳入了目标影响又解决了概率测度的弊端，是更适合本研究的方法。

基于满足测度的思想，任何满足测度都可以被表示为相应的风险测度的对偶问题，因此，本文首先构建服务水平满足指数ρ，然后选择 shortfall 风险测度来具体化服务水平满足指数ρ的等价表示形式，采用这种风险测度，风险可以在跨越多个周期的规划范围内被统一测量。这样一来，问题的目标最大化供应商服务水平，即最大限度降低客户库存水平违反目标区间的潜在风险，应用基于效用函数的多周期 shortfall 风险测度，可以表示为

$$\psi_{\underline{\tau},\overline{\tau}}\left(I(\tilde{\xi})\right)=\inf_{\boldsymbol{\alpha}}\left\{\sum_{i}\sum_{t}\alpha_{it}:\alpha_{it}>0,\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mu\left(\frac{\overline{\tau}_{it}-I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})}{\alpha_{it}}\right)\right]\right.$$

$$\left.\geq 0,\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mu\left(\frac{I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})-\underline{\tau}_{it}}{\alpha_{it}}\right)\right]\geq 0,\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T\right\},$$

$$I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})=I_{i,t-1}(\tilde{\xi}_{i,t-1})+d_{it}-\tilde{\xi}_{i,t},\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z},i\in N\setminus\{0\},t\in T,$$

α_{it}是客户i在t期需求未被满足的风险，μ表示凹效用函数。

为了便于求解，本文提出用分段线性函数来近似效用函数μ，令$\mu(z)=\min_{k\in K}\{a_k z+b_k\}$，则基于效用函数的多周期 shortfall 风险测度转化为

$$\psi_{\underline{\tau},\overline{\tau}}\left(I(\tilde{\xi})\right)$$

$$=\inf_{\boldsymbol{\alpha}}\left\{\begin{array}{l}\sum_{i}\sum_{t}\alpha_{it}:\alpha_{it}>0,\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min\left\{a_k\cdot\left(\frac{\overline{\tau}_{it}-I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})}{\alpha_{it}}\right)+b_k\right\}\right]\geq 0,\\ \inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min\left\{a_k\cdot\left(\frac{I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})-\underline{\tau}_{it}}{\alpha_{it}}\right)+b_k\right\}\right]\geq 0,\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T\end{array}\right\}$$

$$=\inf_{\boldsymbol{\alpha}}\left\{\sum_{i}\sum_{t}\alpha_{it}:\alpha_{it}>0,\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\overline{\tau}_{it}-I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,\right.$$

$$\left.\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})-\underline{\tau}_{it}\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T\right\},$$

由于客户i在t期的库存实际上就是期初库存加上累计进出货物的差，因此$I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})$也可表示为$I_{i,t}(\tilde{\xi}_{i,t})=I_{i0}+\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})$，那么

$$\psi_{\underline{\tau},\overline{\tau}}(I(\tilde{\xi}))=\inf_{\boldsymbol{\alpha}}\left\{\sum_{i}\sum_{t}\alpha_{it}:\alpha_{it}>0,\right.$$

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\overline{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,$$

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(I_{i0}+\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})-\underline{\tau}_{it}\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,$$

$$\left.\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z},i\in N\setminus\{0\},t\in T\right\}$$

3.2.3 服务水平目标导向的鲁棒库存路径模型

基于研究问题的假设条件，随机需求服从概率分布$\mathbb{P}$，$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}$表示下界，将刻画好服务水平目标加入基本的库存路径模型中，同时将传统的成本最小化目标转换为约束条件加入进去，就得到了以服务水平为目标的鲁棒库存路径模型。

模型的具体参数和变量说明如表所示：

表 参数和变量说明

参数	描述
T	规划时间长度，$T=\{1,2,\dots,\lvert T\rvert\}$
N	供应商和客户集$N=\{0,1,\dots,\mathrm{n}\}$，0 代表供应商，$1,\dots,\mathrm{n}$代表客户
I_{i0}	客户i的初始库存数量
ζ_{it}	客户i在周期t的随机需求
C_i	客户i的最大仓储容量
c_{ij}	节点i到j的单位运输成本
f	每辆车的固定使用成本
c_{i0}^b	空车返回成本
V	每辆车的载货容量
h_i	客户i单位存储成本
s_i	客户i的单位缺货成本
B	最大预算
$I_{i,t}$	客户i在t周期末的库存水平
决策变量	描述
d_{it}	连续变量，在t周期交付给客户i的产品数量
q_{ijt}	连续变量，在t周期途经弧(i,j)时车辆的产品运输量
x_{ijt}	整数变量，在t周期途经弧(i,j)的次数

以服务水平为目标的鲁棒库存路径优化模型具体为

P_1：

$$\inf_{\alpha}\sum_{i}\sum_{t}\alpha_{it}$$

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0$$

$$\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z}, i\in N\backslash\{0\}, t\in T \quad (1)$$

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(I_{i0}+\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})-\underline{\tau}_{it}\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,$$

$$\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z}, i\in N\backslash\{0\}, t\in T \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{c}\sum_{t\in T}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N,j\neq i}c_{ij}\cdot q_{ijt}+\sum_{t\in T}\sum_{i\in N\backslash\{0\}}f\cdot x_{0it}+\sum_{i\in N\backslash\{0\}}\sum_{t\in T}c_{i0}^{b}\cdot x_{i0t}\\ +\sum_{i\in N\backslash\{0\}}\sum_{t\in T}max\left\{I_{i,0}+\sum_{s=1}^{t}d_{is}-\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is},0\right\}\cdot h_i\\ +\sum_{i\in N\backslash\{0\}}\sum_{t\in T}max\left\{\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is}-I_{i,0}-\sum_{s=1}^{t}d_{is},0\right\}\cdot s_i\end{array}\right)\leq B$$

(3)

$$q_{ijt}\leqslant V\cdot x_{ijt},\forall i\in N, j\in N\setminus\{0\}, j\neq i, t\in T \quad (4)$$

$$\sum_{j\in N,j\neq i}x_{ijt}=\sum_{j\in N,j\neq i}x_{jit},\forall i\in N, t\in T \quad (5)$$

$$\sum_{j\in N,j\neq i}q_{jit}-\sum_{j\in N,j\neq i}q_{ijt}=d_{it},\forall i\in N, t\in T \quad (6)$$

$$\sum_{i\in N\backslash\{0\}}q_{0it}=\sum_{i\in N\backslash\{0\}}d_{it},\forall t\in T \quad (7)$$

$$\alpha_{it}>0,\forall i\in N\setminus\{0\},\forall t\in T \quad (8)$$

$$d_{it}\geqslant 0,\forall i\in N\setminus\{0\},\forall t\in T \quad (9)$$

$$q_{ijt}\geqslant 0,\forall i,j\in N, j\neq i,\forall t\in T \quad (10)$$

$$x_{ijt}\in\mathbb{Z}^{+},\forall i,j\in N, i\neq j,\forall t\in T \quad (11)$$

该模型的目标函数为最大限度降低违反目标区间的潜在风险，即最小化潜在风险，最大化服务水平。约束条件（1）和（2）为应用基于效用函数的多周期 shortfall

风险测度后分解出来的相应约束，以保证库存水平维持在目标区间内；约束（3）为系统预算约束，包括可变运输成本、固定运输成本、空车返回成本、客户存储成本以及缺货成本；约束（4）为车辆装载约束，运输量不可超过车辆载重限制；约束（5）为车辆进出平衡约束，每辆车经过客户点均需满足进出次数相等；约束（6）为子环消除约束；约束（7）表示从供应商发出的商品总量等于规划期内所有客户收到的商品总量；约束（8）-（11）为变量的定义域。该模型的构建主要参考了 Liu(2019)等[26]提出的库存路径模型，但与之不同的是，Liu 的文章考虑了客户处理模块这一因素，并采用概率模型来刻画服务水平这一目标，而本文则采用的是基于效用函数的多周期 shortfall 风险测度来刻画服务水平，并将之作为目标函数，能有效克服概率模型不能反映偏离目标程度的弊端。

3.3 模型近似转化

在 3.2 节建立好的库存路径优化模型，仅仅是将研究问题用具体的数学公式表示出来了，模型中还存在不确定参数$\tilde{\xi}$和最大、最小化算子，且模型为鲁棒形式，这些都造成模型难以直接求解，因此，还需要对模型进行近似处理，以将模型转换为易于求解的混合整数规划模型。

3.3.1 预算约束近似

首先处理模型中的预算约束，约束（3）中包含两个最大化算子，将之提取出来分别进行近似化处理，为了方便表示，令

$$L_{it} = max\left\{I_{i,0} + \sum_{s=1}^{t} d_{is} - \sum_{s=1}^{t} \tilde{\xi}_{is}, 0\right\},$$

$$S_{it} = max\left\{\sum_{s=1}^{t} \tilde{\xi}_{is} - I_{i,0} - \sum_{s=1}^{t} d_{is}, 0\right\},$$

一个变量要大于两个值中的最大值，其潜在含义就是这个变量一定比两个值都大，其近似处理就是让变量同时大于这两个值。因此，可以将一个最大化算子近似化为两个约束，则P_1中的约束（3）可以转化为以下形式：

$$\sum_{t\in T}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N,j\neq i} c_{ij}\cdot q_{ijt}+\sum_{t\in T}\sum_{i\in N\backslash\{0\}} f\cdot x_{0it}+\sum_{i\in N\backslash\{0\}}\sum_{t\in T} c_{i0}^{b}\cdot x_{i0t}$$

$$+\sum_{i\in N\backslash\{0\}}\sum_{t\in T} L_{it}\cdot h_i+\sum_{i\in N\backslash\{0\}}\sum_{t\in T} S_{it}\cdot s_i\leq B,$$

$$L_{it}\geq 0,\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$$

$$L_{it}\geq I_{i,0}+\sum_{s=1}^{t} d_{is}-\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$$

$$S_{it}\geq 0,\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$$

$$S_{it}\geq\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is}-I_{i,0}-\sum_{s=1}^{t} d_{is},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$$

此外，由于公式中的随机变量$\tilde{\xi}_{is}\in\left[\underline{\xi_{it}},\overline{\xi_{it}}\right]$，采用同样的近似方法，可以将$L_{it}\geq I_{i,0}+\sum_{s=1}^{t} d_{is}-\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$近似为

$$L_{it}\geq I_{i,0}+\sum_{s=1}^{t} d_{is}-\sum_{s=1}^{t}\underline{\xi_{is}},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$$

同理，$S_{it}\geq\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is}-I_{i,0}-\sum_{s=1}^{t} d_{is},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$可以近似为

$$S_{it}\geq\sum_{s=1}^{t}\overline{\xi_{is}}-I_{i,0}-\sum_{s=1}^{t} d_{is},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T$$

经过转化后，新的模型表示为

P_2：

$$\inf_{\alpha}\sum_{i}\sum_{t}\alpha_{it}$$

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,$$

$$\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z},i\in N\backslash\{0\},t\in T\quad(1)$$

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(I_{i0}+\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})-\underline{\tau}_{it}\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,$$

$$\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z},i\in N\backslash\{0\},t\in T\quad(2)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\sum_{t\in T}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N,j\neq i} c_{ij}\cdot q_{ijt}+\sum_{t\in T}\sum_{i\in N\setminus\{0\}} f\cdot x_{0it}+\sum_{i\in N\setminus\{0\}}\sum_{t\in T} c_{i0}^{b}\cdot x_{i0t} \\ +\sum_{i\in N\setminus\{0\}}\sum_{t\in T} L_{it}\cdot h_i+\sum_{i\in N\setminus\{0\}}\sum_{t\in T} S_{it}\cdot s_i\end{array}\right\}\leq B \tag{3}$$

$$q_{ijt}\leqslant V\cdot x_{ijt},\forall i\in N,j\in N\setminus\{0\},j\neq i,t\in T \tag{4}$$

$$\sum_{j\in N,j\neq i} x_{ijt}=\sum_{j\in N,j\neq i} x_{jit},\forall i\in N,t\in T \tag{5}$$

$$\sum_{j\in N,j\neq i} q_{jit}-\sum_{j\in N,j\neq i} q_{ijt}=d_{it},\forall i\in N,t\in T \tag{6}$$

$$\sum_{i\in N\setminus\{0\}} q_{0it}=\sum_{i\in N\setminus\{0\}} d_{it},\forall t\in T \tag{7}$$

$$\alpha_{it}>0,\forall i\in N\setminus\{0\},\forall t\in T \tag{8}$$

$$d_{it}\geqslant 0,\forall i\in N\setminus\{0\},\forall t\in T \tag{9}$$

$$q_{ijt}\geqslant 0,\forall i,j\in N,j\neq i,\forall t\in T \tag{10}$$

$$x_{ijt}\in\mathbb{Z}^{+},\forall i,j\in N,i\neq j,\forall t\in T \tag{11}$$

$$L_{it}\geq 0,\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T \tag{12}$$

$$L_{it}\geq I_{i,0}+\sum_{s=1}^{t} d_{is}-\sum_{s=1}^{t}\underline{\xi_{is}},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T \tag{13}$$

$$S_{it}\geq 0,\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T \tag{14}$$

$$S_{it}\geq\sum_{s=1}^{t}\overline{\xi_{is}}-I_{i,0}-\sum_{s=1}^{t} d_{is},\forall i\in N\setminus\{0\},t\in T \tag{15}$$

3.3.2 服务水平目标近似

将预算约束做近似处理后得到的P_2模型，只剩下服务水平目标的处理了，由于需求是不确定的，建立的鲁棒模型需要进行对偶转化。接下来将对约束（1）和（2）进行处理，利用对偶理论，将之转换为相应的对偶形式。

P_2模型中约束（1）和（2）分别为

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z},i\in N\backslash\{0\},t\in T$$

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(I_{i0}+\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})-\underline{\tau}_{it}\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]\geq 0,\forall\tilde{\xi}\in\mathcal{Z},i\in N\backslash\{0\},t\in T$$

对于$\forall k\in K,i\in N\setminus\{0\},t\in T$，约束（1）左边部分等价于

$$\inf_{\mathbb{P}\in\mathbb{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]$$

$$=\inf_{\tilde{\xi}}\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it}\right\}\right]$$

$$s.t.\quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{\xi}_{is}\right]=U_{is},\forall i\in N\setminus\{0\},s\in[t]\quad\langle H_{its}\rangle$$

$$\mathbb{P}\left(\tilde{\xi}_{is}\in\left[\underline{\xi_{is}},\overline{\xi_{is}}\right],s\in[t]\right)=1\quad\langle H_{i0t}\rangle$$

$$=\sup\nolimits_S\quad H_{i0t}+\sum_{s=1}^{t}U_{is}H_{its}$$

$$s.t.\quad H_{i0t}+\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is}H_{its}\leq\min_{k\in K}\left\{a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it}\right\},$$

$$\forall\tilde{\xi}_{is}\in\left[\underline{\xi_{it}},\overline{\xi_{it}}\right],s\in[t]$$

上式等价于

$$=\sup\nolimits_S\quad H_{i0t}+\sum_{s=1}^{t}U_{is}H_{its}$$

$$s.t.H_{i0t}+\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is}H_{its}\leq a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{it}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}(d_{is}-\tilde{\xi}_{is})\right)+b_k\alpha_{it},$$

$$\forall\tilde{\xi}_{is}\in\left[\underline{\xi_{it}},\overline{\xi_{it}}\right],s\in[t]$$

约束等价于

$$\max\nolimits_{\tilde{\xi}}\left\{\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is}H_{its}-a_k\sum_{s=1}^{t}\tilde{\xi}_{is}\right\}\leq -H_{i0t}+a_k\cdot\left(\bar{\tau}_{i,t}-I_{i0}-\sum_{s=1}^{t}d_{is}\right)+b_k\alpha_{it}$$

左边等价于

$$\max_{\tilde{\xi}} \ \sum_{s=1}^{t} \tilde{\xi}_{is}(H_{its}-a_k),\ \forall s \in [t]$$

$$s.t.\ \ \tilde{\xi}_{is} \le \overline{\xi_{is}} \quad \forall s \in [t]\ \langle u_{ik}^{ts} \rangle$$

$$-\tilde{\xi}_{is} \le -\underline{\xi_{is}} \quad \forall s \in [t]\ \ \langle v_{ik}^{ts} \rangle$$

其对偶形式为：

$$min_{u,v} \quad \sum_{s=1}^{t} (\overline{\xi_{is}} \cdot u_{ik}^{ts} - \underline{\xi_{is}} \cdot v_{ik}^{ts})$$

$$u_{ik}^{ts} - v_{ik}^{ts} = H_{its} - a_k,\ \ \forall s \in [t]$$

$$u_{ik}^{ts}, v_{ik}^{ts} \ge 0$$

因此，针对P_2中的约束（1）可以提出命题 3-1。

命题 3-1 给定需求不确定集$\mathbb{F}$，P_2约束（1）和下面的形式是等价的：

$$\left\{\begin{array}{c} H_{i0t} + \sum_{s=1}^{t} U_{is} H_{its} \ge 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \\ \sum_{s=1}^{t} (\overline{\xi_{is}} \cdot u_{ik}^{ts} - \underline{\xi_{is}} \cdot v_{ik}^{ts}) \le -H_{i0t} + a_k \cdot \left(\bar{\tau}_{i,t} - I_{i0} - \sum_{s=1}^{t} d_{is} \right) + b_k \alpha_{it}, \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T \\ u_{ik}^{ts} - v_{ik}^{ts} = H_{its} - a_k, \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \\ u_{ik}^{ts}, v_{ik}^{ts} \ge 0 \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \end{array}\right\}$$

同理，针对P_2中的约束（2）提出命题 3-2。

命题 3-2 给定需求不确定集$\mathbb{F}$，P_2约束（2）和下面的形式是等价的：

$$\left\{\begin{array}{c} G_{i0t} + \sum_{s=1}^{t} U_{is} G_{its} \ge 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \\ \sum_{s=1}^{t} (\overline{\xi_{is}} \cdot o_{ik}^{ts} - \underline{\xi_{is}} \cdot e_{ik}^{ts}) \le -G_{i0t} + a_k \cdot \left(I_{i0} + \sum_{s=1}^{t} d_{is} - \underline{\tau}_{it} \right) + b_k \alpha_{it}, \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T \\ o_{ik}^{ts} - e_{ik}^{ts} = G_{its} + a_k \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \\ o_{ik}^{ts}, e_{ik}^{ts} \ge 0 \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \end{array}\right\}$$

因此，在不确定集条件下应用对偶理论，最终将以服务水平为目标的鲁棒库存路径优化模型P_1转化成了便于求解的混合整数规划模型P_3。

P_3：

$$\inf_{\alpha} \sum_{i} \sum_{t} \alpha_{it}$$

$$H_{i0t} + \sum_{s=1}^{t} U_{is} H_{its} \geq 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{1}$$

$$\sum_{s=1}^{t} (\overline{\xi_{\iota s}} \cdot u_{ik}^{ts} - \underline{\xi_{is}} \cdot v_{ik}^{ts}) \leq -H_{i0t} + a_k \cdot \left(\bar{\tau}_{i,t} - I_{i0} - \sum_{s=1}^{t} d_{is} \right) + b_k \alpha_{it},$$

$$\forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{2}$$

$$u_{ik}^{ts} - v_{ik}^{ts} = H_{its} - a_k, \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \tag{3}$$

$$u_{ik}^{ts}, v_{ik}^{ts} \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \tag{4}$$

$$G_{i0t} + \sum_{s=1}^{t} U_{is} G_{its} \geq 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{5}$$

$$\sum_{s=1}^{t} (\overline{\xi_{\iota s}} \cdot o_{ik}^{ts} - \underline{\xi_{is}} \cdot e_{ik}^{ts}) \leq -G_{i0t} + a_k \cdot \left(I_{i0} + \sum_{s=1}^{t} d_{is} - \underline{\tau}_{it} \right) + b_k \alpha_{it},$$

$$\forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{6}$$

$$o_{ik}^{ts} - e_{ik}^{ts} = G_{its} + a_k \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \tag{7}$$

$$o_{ik}^{ts}, e_{ik}^{ts} \geq 0 \quad \forall k \in K, i \in N \setminus \{0\}, t \in T, s \in [t] \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{gathered} \sum_{t \in T} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} c_{ij} \cdot q_{ijt} + \sum_{t \in T} \sum_{i \in N \setminus \{0\}} f \cdot x_{0it} + \sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{t \in T} c_{i0}^{b} \cdot x_{i0t} \\ + \sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{t \in T} L_{it} \cdot h_i + \sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{t \in T} S_{it} \cdot s_i \end{gathered} \right\} \leq B \tag{9}$$

$$q_{ijt} \leqslant V \cdot x_{ijt}, \forall i \in N, j \in N \setminus \{0\}, j \neq i, t \in T \tag{10}$$

$$\sum_{j \in N, j \neq i} x_{ijt} = \sum_{j \in N, j \neq i} x_{jit}, \forall i \in N, t \in T \tag{11}$$

$$\sum_{j \in N, j \neq i} q_{jit} - \sum_{j \in N, j \neq i} q_{ijt} = d_{it}, \forall i \in N, t \in T \tag{12}$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} q_{0it} = \sum_{i \in N \setminus \{0\}} d_{it}, \forall t \in T \tag{13}$$

$$\alpha_{it} > 0, \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{14}$$

$$d_{it} \geqslant 0, \forall i \in N \setminus \{0\}, \forall t \in T \tag{15}$$

$$q_{ijt} \geqslant 0, \forall i,j \in N, j \neq i, \forall t \in T \tag{16}$$

$$x_{ijt} \in \mathbb{Z}^{+}, \forall i,j \in N, i \neq j, \forall t \in T \tag{17}$$

$$L_{it} \geq 0, \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{18}$$

$$L_{it} \geq I_{i,0} + \sum_{s=1}^{t} d_{is} - \sum_{s=1}^{t} \underline{\xi_{is}}, \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{19}$$

$$S_{it} \geq 0, \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{20}$$

$$S_{it} \geq \sum_{s=1}^{t} \overline{\xi_{is}} - I_{i,0} - \sum_{s=1}^{t} d_{is}, \forall i \in N \setminus \{0\}, t \in T \tag{21}$$

3.4 模型求解

上一节已将建立的以服务水平为目标的鲁棒库存路径模型进行了近似转化，得到了便于求解的混合整数规划模型，求解这样的混合整数规划模型，有两种方式，一种是采用优化求解器直接求解，另一种是设计算法进行求解，两种不同的方式具有不同的特点，本章将分别采用这两种方式来求解建立的模型。

3.4.1 Gurobi 求解

求解模型的优化求解器有很多，国内外主要有 CPLEX、Gurobi、Xpress、MOSEK、SAS、COPT、MindOpt 等，不同的求解器支持不同的模型、编程和建模语言，有各自的优势。美国亚利桑那州立大学的 Hans Mittelmann 教授针对多种开源与商业数学规划求解器进行测评已有近 20 年的历史，他建立的专业优化器评比网站 Decision Tree for Optimization Software (http://plato.asu.edu/bench.html) 是全球著名的可靠的第三方测评平台。由于本文待求解的模型属于混合整数线性规划模型，因此查找了该网站针对混合整数线性规划模型的测评结果，最新数据显示，针对混合整数线性规划的三个测试基准实例，Gurobi 在求解数量和求解时间上都处于领先位置。因此，本文选择采用 Gurobi 求解本文研究的服务水平目

标导向的随机库存路径问题模型。

Gurobi 是由美国 Gurobi Optimization 公司开发新一代大规模优化器。无论在生产制造领域，还是在金融、保险、交通、服务等其他各种领域，当实际问题越来越复杂，问题规模越来越庞大的时候，需要一个经过证明可以信赖的大规模优化工具，为决策提供质量保证。在理论和实践中，Gurobi 优化工具都被证明是全球性能领先的大规模优化器，具有突出的性价比，可以为客户在开发和实施中极大降低成本。Gurobi 是全局优化器，可以求解大规模线性问题，二次型问题和混合整数线性和二次型问题，支持非凸目标和非凸约束的二次优化，支持多目标优化，并且问题尺度只受限制于计算机内存容量，不对变量数量和约束数量有限制。此外，Gurobi 支持并行计算、支持 C++, Java, Python, .Net, Matlab 和 R 编程语言。

3.4.2 变邻域算法设计求解

本研究建立的多周期库存路径混合整数规划模型，虽然可以使用求解器进行求解，但是这类求解器一般采用精确算法进行求解，因此在一些小规模问题上的比较适用，一旦问题规模变大，求解时间就会显著增加，求解效率不能满足实际需求。而在现实中，待解决的问题总是有着复杂的背景以及大规模的数据，并且要求快速做出决策，求解器的效率无法满足现实的需求。因此，对于大规模问题一般会采用启发式算法，虽然启发式算法不一定能够找到最优解，但能在较短的时间内找到足够优秀的次优解，在能够在保证解质量的前提下，设计高效的启发式算法快速求解是更好的选择。

在解决所提出的问题时，可以使用不同的元启发式算法，例如，GRASP、迭代邻域搜索、禁忌搜索、遗传算法、模拟退火、变邻域搜索（VNS）等。Hansen 和 Mladenovi´c (2014) 认为变邻域搜索算法相对更容易实现，因为它不包含大量需要耗时设置的参数，并且无论是在解决方案质量方面还是在计算时间方面，VNS 都在简单性和性能之间提供了极好的权衡。

变邻域搜索算法（VNS）是启发式算法的一种，用于解决组合优化和全局优

化问题，其基本思想是通过在下降阶段找到局部最优和在扰动阶段离开山谷来实现邻域的系统变化。变邻域搜索算法的分类和大致的逻辑框架已在理论基础章节进行了叙述，本节基于一般变邻域搜索算法(GVNS)的逻辑框架来设计求解上节转化后的混合整数规划模型P_3。算法设计将分为两个步骤，初始解构造和变邻域搜索算法优化。

3.4.2.1 初始解构造

Gruler 和 Panadero（2020）[65]提出了一套建设性的启发式方法来构造库存路径模型的初始解，这个启发式方法背后的思想是为每个零售商$i \in S$，$S = N\backslash\{0\}$，每个周期$t \in T$都分配一个共同的策略，也就是构造一个所有单元格具有相同值的（S,T）矩阵，所选的策略将是提供最低期望总成本的策略，其中包括期望库存和车辆路径成本。启发式分为两个阶段，在第一个阶段，将测试不同的补货策略，并估计要服务的相关数量以及期望库存成本。在第二阶段，将针对每个补货策略采用 C-W 节约算法规划具体路径，并计算路径成本。最后，在每个零售商每个周期实施提供最低总期望成本的策略。

由于 Gruler 和 Panadero 求解的库存路径问题模型在问题背景上与本文建立的问题有诸多共同点，因此可以考虑将他们提出的求解方法应用到本文的研究中。由于他们的目标是最小化总成本，与本文最小化违背目标库存水平区间的风险的目标不一样，因此考虑对算法进行调整。

算法 1 详细地描述了构造初始解的建设性启发式方法。输入参数分别是零售商集合、周期集合、初始库存水平、每个零售商的最大库存容量、每个零售商在每个周期的随机需求、补货策略集合以及最大迭代次数。考虑的补货策略是：

- 没有库存补充，也就是说，RC 只能依靠其当前的库存水平来满足其客户在下一个时期的需求。
- 重新补货最多为总库存容量的四分之一。
- 补货量高达总库存容量的一半。
- 最多可填充总库存容量的四分之三。
- 最多补货到总库存容量。

算法 1:初始解构造算法逻辑

输入：零售商集合$S = N\backslash\{0\}, N = \{0,1,\dots,\mathrm{n}\}$;

规划周期集合T;

零售商i在周期 1 的期初库存水平I_{i1}^{0};

零售商i的最大库存容量C_i；

零售商i在周期t的随机需求ζ_{it};

补货策略R（补货水平占总库存容量的比例$r\,\%$）;

阶段 1：计算每种补货策略在规划内违背目标库存水平的风险

$For\ r \in R\ do$:

$Risk[r] \leftarrow 0$;

$For\ i \in S\ do$:

总风险$accumrisk[r][i] \leftarrow 0$;

$For\ t \in T\ do$:

补货量$d_{it}[r] \leftarrow \max\{r \cdot C_i - I_{it}^{0}, 0\}$;

随机需求ζ_{it};

下期期初库存水平 $I_{i(t+1)}^{0} = \max\{I_{it}^{0} + d_{it}[r] - \zeta_{it}, 0\}$;

t期违反目标库存水平的风险$risk_{it}[r]$；

计算库存成本、缺货成本；

$End\ for$;

$accumrisk[r][i] = accumrisk[r][i] + \sum_1^T risk_{it}[r]$;

$End\ for$；

$Risk[r] = Risk[r] + \sum_1^S accumrisk[r][i]$;

$End\ for$；

阶段 2:使用 C-W 节约算法确定车辆访问零售商的先后顺序

$For\ t \in T\ do$:

计算供应商与零售商、零售商之间的距离l_{ij}；

按照 C-W 节约算法计算零售商间的节约值$S(i,j) = l_{0i} + l_{0j} - l_{ij}$；

28. 将$S(i,j)$从大到小排序；

29. 构建路线；

30. 计算运输成本；

31. $End\ for$；

32. 阶段 3:判断成本是否满足预算约束,若不满足，改变补货策略和运输路线重复阶段 1 和阶段 2

在算法 1 中，行 1-7 是算法输入的参数，行 8-23 是采用同一种补货策略在各周期为所有零售商补货，补货策略制定好后，根据实际的需求和库存消耗情况，计算出每种补货策略在规划期内违背目标库存水平的风险，最后将风险汇总，得到每种补货策略面临的风险值。风险值的具体计算方式设计为，如果库存水平位置在目标区间内，则风险值=0；如果库存水平超出目标区间，则计算实际库存水平与上下界$[\underline{\tau}_{it},\bar{\tau}_{it}]$的差距，取最小差距计算风险值，即$risk_{it}[r]=\min\{I_{i(t+1)}^{0}-\bar{\tau}_{it},\underline{\tau}_{it}-I_{i(t+1)}^{0}\}$。行 24-31 是使用 C-W 节约算法确定车辆访问零售商的行驶路线。行 32 是做出预算判断。初始解就是供应商选择满足预算约束的风险值最小的补货策略，按照阶段 2 制定的访问顺序进行补货。

3.4.2.2 变邻域搜索算法优化

初始解构造完成后，本文选择应用 Hansen 等（2010）[72]提出的 VNS 算法进行初始解的优化，该算法的具体逻辑见算法 2。首先将算法 1 生成的初始解决方案分配给当前的基本解决方案$baseSol$，并将在算法 1 得到的部分可行解添加到优秀可行解集合$eliteSols$中。然后，进行主 VNS 循环，直到达到最大迭代次数。在主 VNS 循环中，不断通过扰动和邻域搜索产生新的解，并更新优秀可行解集合$eliteSols$以及基本解决方案$baseSol$，最后在优秀可行解集合$eliteSols$中选出最优解$bestSol$。

算法 2:变邻域搜索算法优化逻辑

1. 输入：零售商集合$S=N\backslash\{0\}, N=\{0,1,\dots,\mathrm{n}\}$;

2. 规划周期集合T;

最大迭代次数M;
最大补货比例r_{max}；
优秀可行解集合大小$eliteSetSize$
阶段 1:变邻域搜索:
$baseSol$ ←算法 1 求得的初始解；
$eliteSol$ ←算法 1 得到的优秀可行解；
$While\ m < M\ do$:
  $k = 1$;
  R$epeat$:
    扰动产生新的解$newSol$;
    在扰动的基础上进行局部搜索，再次产生新的解$newSol$；
    If 优秀可行解集合里的解数量< $eliteSetSize$，$then$:
      将产生的新解$newsol$加入优秀可行解集合$eliteSols$；
    End;
    $Else$：
      $If\ Risk(newSol) < Risk(worstSol(eliteSols))\ \ then$:
        将产生的新解$newsol$替换优秀可行解集合中的$worstSol$；
      End；
    End;
    $If\ \ Risk(newSol) < Risk(baseSol)\ \ then$:
      $baseSol \leftarrow newSol$;
      $k = 1$;
    End;
    $Else$:
      $k = k + 1$;
    End;
  $Until\ k > k_{max}$;
End;

31. 阶段 2:选择现有最优解$bestSol$

32. $bestSol \leftarrow baseSol$;

33. $For\ sol \in eliteSols\ do$:

32. $\quad If\ Risk(sol) < Risk(bestSol)\ then$:

33. $\qquad bestSol \leftarrow sol$;

34. $\quad End$;

35. End;

算法 2 的重要部分在于第 12 行的扰动算子以及第 13 行的局部搜索算子，扰动和局部搜索的邻域结构通过补货比例r来确定，r的取值范围为$[0, r_{max}]$，可以在范围内任意变化。由于算法 1 构造了一个所有单元格具有相同值的（S,T）矩阵，所以可以通过一定的扰动规则改变矩阵中单元格的值（补货比例r），然后代入算法 1 求解，就能得到新的解。接着在新解的邻域进行局部搜索，找到当前解邻域内的局部最小值，则再次得到新解。反复重复此过程，不断更新优秀可行解集合$eliteSols$以及基本解决方案$baseSol$，达到变邻域搜索优化的目的，寻找最优解或局部最优解。

第4章 数值实验

4.1 数据描述

4.2 结果分析

4.3 敏感性分析

第5章 总结与展望

5.1 总结

5.2 展望

致谢

参考文献

[1] Kleywegt A, Nori VS, Savelsbergh MWP. The stochastic inventory routing problem with direct deliveries. Transportation Science 2002, 36:94–118.

[2] Coelho, L. C., Cordeau, J.-F., & Laporte, G. (2013). Thirty years of inventory routing.Transportation Science. 2013, 48, 1–19.

[3] Federgruen A, Zipkin P. A combined vehicle routing and inventory allocation problem. Oper. Res. 1984, 32(5):1019–1037.

[4] Aghezzaf E-H. Robust distribution planning for the supplier managed inventory agreements when demand rates and travel times are stationary. J. Oper. Res. Soc. 2008, 59(8):1055–1065.

[5] Bell WJ, et al. Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer. Interfaces. 1983,13:4–23.

[6] Dror M, Ball M, Golden BL. A computational comparison of algorithms for the inventory routing problem. Annals of Operations Research 1985,4:3–23.

[7] Campbell AM, Clarke L, Kleywegt AJ, Savelsbergh MWP. The inventory routing problem. Crainic TG, Laporte G, eds. Fleet Management and Logistics. 1998, 95–113.

[8] Andersson H, Hoff A, Christiansen M, Hasle G, Løkketangen A. Industrial aspects and literature survey: Combined inventory management and routing. Comput. Oper. Res. 2010, 37(9):1515–1536.

[9] Gallego G, Simchi-Levi D. On the effectiveness of direct shipping strategy for the one-warehouse multi-retailer r-systems. Management Sci. 1990, 36(2):240–243.

[10] Carter MW, Farvolden JM, Laporte G, Xu J. Solving an integrated logistics problem arising in grocery distribution. INFOR 1996, 34(4):290–306.

[11] Bertazzi L, Speranza MG, Ukovich W. Minimization of logistic costs with given frequencies. Transportation Res. Part B: Methodological. 1997, 31(4):327–340.

[12] Bertazzi L, Speranza MG. Continuous and discrete shipping strategies for the

single link problem. Transportation Sci. 2002, 36(3):314–325.

[13] Persson JA, Göthe-Lundgren M. Shipment planning at oil refineries using column generation and valid inequalities. Eur.J. Oper. Res. 2005, 163(3):631–652.

[14] Reinman MI, Rubio R, Wein LM. Heavy traffic analysis of the dynamic stochastic inventory routing problem. Transportation Sci. 1999, 33(4):361–380.

[15] Qu WW, Bookbinder JH, Iyogun P. An integrated inventory transportation system with modified periodic policy for multiple products. Eur. J. Oper. Res. 1999, 115:254–269.

[16] Schwartz LB, Ward JE, Zhai X. On the interactions between routing and inventory management policies in a one-warehouse N-retailer distribution system. Manufacturing Service Oper. Management. 2006, 8(3):253–272.

[17] Barnes-Schuster D, Bassok Y. Direct shipping and the dynamic single-depot multi-retailer inventory system. Eur. J. Oper. Res. 1997, 101(3):509–518.

[18] Minkoff AS. A Markov decision model and decomposition heuristic for dynamic vehicle dispatching. Oper. Res. 1993, 41(1):77–90.

[19] Adelman D. A price-directed approach to stochastic inventory routing. Oper. Res. 2004, 52(4):499–514.

[20] Kleywegt AJ, Nori VS, Savelsbergh MWP. Dynamic programming approximations for a stochastic inventory routing problem. Transportation Science. 2004, 38, 42–70.

[21] Jaillet P, Bard JF, Huang L, Dror M. Delivery cost approximations for inventory routing problems in a rolling horizon framework. Transportation Sci. 2002, 36(3):292–300.

[22] Yu Y, Chu C, Chen H, Chu F. Large scale stochastic inventory routing problems with split delivery and service level constraints. Ann. Oper. Res. 2012, 197(1):135–158.

[23] Crama Y, Rezaei M, Savelsbergh M and Woensel TV. Stochastic inventory routing for perishable products. Transportation Science, 2018, Vol. 52 No. 3, pp. 526-546.

[24] Solyali O, Cordeau JF, Laporte G. Robust inventory routing under demand uncertainty. Transportation Science.2012, 46, 3, 327–340.

[25] Bertazzi L, Bosco A, Guerriero F, Laganà D. A stochastic inventory routing problem with stock-out[J]. Transportation Research Part C. 2013, 27.

[26] Liu M, Liu X, Chu F, Zheng FF, Chu CB. Distributionally robust inventory routing problem to maximize the service level under limited budget. Transportation Research Part E. 2019, 126, 190-211.

[27] Nikzad E, Bashiri M, Oliveira F. Two-stage stochastic programming approach for the medical drug inventory routing problem under uncertainty. Computers & Industrial Engineering. 2019,128:358–70.

[28] Bijvank M, Vis IFA. Lost-sales inventory systems with a service level criterion. Eur. J. Oper. Res. 2012, 220 (3), 610–618.

[29] Singh T, Arbogast JE, Neagu N. An incremental approach using local-search heuristic for inventory routing problem in industrial gases. Comput. Chem. Eng. 2015, 80, 199–210.

[30] Rahimi M, Baboli A, Rekik Y. Multi-objective inventory routing problem: a stochastic model to consider profit, service level and green criteria. Transp. Res. Part E. 2017, 101, 59–83.

[31] Soyster AL. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Oper. Res. 1973, 21(5) 1154–1157.

[32] El-Ghaoui L, Lebret H. Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997, 18(4) 1035–1064.

[33] El-Ghaoui L, Oustry F, Lebret H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. SIAM J. Optim. 1998, 9(1) 33–52.

[34] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust convex optimization. Math. Oper. Res. 1998, 23(4) 769–805.

[35] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions to uncertain programs. Oper. Res. Lett. 1999, 25(1) 1–13.

[36] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Math. Programming, Ser. A 2000, 88(3) 411–424.

[37] Bertsimas D, Sim M. Robust discrete optimization and network flows. Math. Programming, Ser. B 2003, 98(1–3) 49–71.

[38] Bertsimas D, Sim M. The price of robustness. Oper. Res. 2004, 52(1) 35–53.

[39] Ben-Tal A, Goryashko A, Guslitzer E, Nemirovski A. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. Math. Programming, Ser. A 2004, 99(2) 351–376.

[40] Abdelmaguid TF, Dessouky MM, Ordóñez F. Heuristic approaches for the inventory-routing problem with backlogging. Comput. Indust. Engrg. 2009, 56(4) 1519–1534.

[41] Huang SH, Lin PC. A modified ant colony optimization algorithm for multiitem inventory routing problems with demand uncertainty. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 2010, 46(5), 598–611.

[42] Li M, Wang Z, and Chan FT. A robust inventory routing policy under inventory inaccuracy and replenishment lead-time. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 2016, 91, 290–305.

[43] Lefever W, Hadj-Hamou K, and Aghezzaf EH. Robust inventory routing problem with variable travel times. In 16ème Congrès Annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF 2015).

[44] Sokol CZGNJ, and Papageorgiou MSCD. Robust inventory routing with flexible time window allocation. Working paper. 2015.

[45] Jafarkhan F, Yaghoubi S. An efficient solution method for the flexible and robust inventory-routing of red blood cells. Computers & Industrial Engineering. 2018, 117, 191–206.

[46] Agra A, Christiansen M, Hvattum LM, Rodrigues F. Robust Optimization for a Maritime Inventory Routing Problem. Transport. Sci. 2018, 52, 509–525.

[47] Liu BT, Zhang Q, Yuan ZH. Two-stage distributionally robust optimization for

maritime inventory routing. Computers and Chemical Engineering. 2021, 149, 107307.

[48] Abdelmaguid TF, Dessouky MM, and Ordóñez F. Heuristic approaches for the inventory-routing problem with backlogging. Computers & Industrial Engineering. 2009, 56, 1519–1534.

[49] Archetti C, Bertazzi L, Hertz A, and Speranza MG. A hybrid heuristic for an inventory routing problem. INFORMS Journal on Computing.2012, 24, 101–116.

[50] Cordeau J-F, Laganá D, Musmanno R, and Vocaturo F. A decomposition-based heuristic for the multiple-product inventory-routing problem. Computers & Operations Research. 2015, 55, 153–166.

[51] Liu S-C, and Lee W-T. A heuristic method for the inventory routing problem with time windows. Expert Systems with Applications. 2011, 38, 13223–13231.

[52] Aksen D, Kaya O, Salman FS, and Ö-zge, Tüncel. An adaptive large neighborhood search algorithm for a selective and periodic inventory routing problem. European Journal of Operational Research. 2014, 239, 413–426.

[53] Popović, D., Vidović, M., & Radivojević, G. (2012). Variable neighborhood search heuristic for the inventory routing problem in fuel delivery. Expert Systems with Applications, 39, 13390–13398.

[54] Mjirda, A., Jarboui, B., Macedo, R., Hanafi, S., & Mladenović, N. (2014). A two phase variable neighborhood search for the multi-product inventory routing problem. Computers & Operations Research, 52, 291–299.

[55] Moin, N., Salhi, S., & Aziz, N. (2011). An efficient hybrid genetic algorithm for the multiproduct multi-period inventory routing problem. International Journal of Production Economics, 133, 334–343.

[56] Park, Y.-B., Yoo, J.-S., & Park, H.-S. (2016). A genetic algorithm for the vendor-managed inventory routing problem with lost sales. Expert Systems with Applications, 53, 149–159.

[57] Shaabani, H., & Kamalabadi, I. N. (2016). An efficient population-based simulated

annealing algorithm for the multi-product multi-retailer perishable inventory routing problem. Computers & Industrial Engineering, 99, 189–201.

[58] Zhao, Q.-H., Chen, S., & Zang, C.-X. (2008). Model and algorithm for inventory/routing decision in a three-echelon logistics system. European Journal of Operational Research, 191, 623–635.

[59] Nambirajan, R., Mendoza, A., Pazhani, S., Narendran, T., & Ganesh, K. (2016). Care:Heuristics for two-stage multi-product inventory routing problems with replenishments. Computers & Industrial Engineering, 97, 41–57.

[60] Vansteenwegen, P., & Mateo, M. (2014). An iterated local search algorithm for the singlevehicle cyclic inventory routing problem. European Journal of Operational Research, 237, 802–813.

[61] Chitsaz, M., Divsalar, A., & Vansteenwegen, P. (2016). A two-phase algorithm for the cyclic inventory routing problem. European Journal of Operational Research, 254, 410–426.

[62] Raa, B., & Dullaert, W. (2016). Route and fleet design for cyclic inventory routing. European Journal of Operational Research, 1–8.

[63] Zachariadis, E. E., Tarantilis, C. D., & Kiranoudis, C. T. (2009). An integrated local search method for inventory and routing decisions. Expert Systems with Applications, 36, 10239–10248.

[64] Gruler, A., et al. Combining variable neighborhood search with simulation for the inventory routing problem with stochastic demands and stock-outs. Computers & Industrial Engineering. 2018, 123, 278–288.

[65] Gruler, A., & Panadero, J.(2020). A variable neighborhood search simheuristic for the multiperiod inventory routing problem with stochastic demands. INTERNATIONAL TRANSACTIONS INOPERATIONAL RESEARCH, 27, 314-335.

[66] Sereshti N., & Adulyasak, Y.(2021).The value of aggregate service levels in stochastic lot sizing problems. Omega, 102.

[67] Tempelmeier H. On the stochastic uncapacitated dynamic single-item lotsizing problem with service level constraints. Eur J Oper Res 2007;181(1):184–94.
[68] Tempelmeier H, Herpers S. Dynamic uncapacitated lot sizing with random demand under a fillrate constraint. Eur J Oper Res 2011;212(3):497–507.
[69] Gade D, Küçükyavuz S. Formulations for dynamic lot sizing with service levels. Nav Res Logist 2013;60(2):87–101.
[70] Helber S, Sahling F, Schimmelpfeng K. Dynamic capacitated lot sizing with random demand and dynamic safety stocks. OR Spectrum 2013;35(1):75–105.
[71] Clarke, G., Wright, J., 1964. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. Operations Research 12, 568–581.
[72] Hansen, P., Mladenovi´c, N., Moreno-P´erez, J.A., 2010. Variable neighbourhood search: methods and applications. Annals of Operations Research 175, 367–407.
[73] 袁庆达,游斌.库存——运输联合优化问题简介[J].物流技术,2001(05):9-10+17.
[74] 袁庆达. 随机库存—运输联合优化问题研究[D].西南交通大学,2002.
[75] 谢秉磊. 随机车辆路径问题研究[D].西南交通大学,2003.
[76] 赵达,李军,马丹祥.求解随机需求库存-路径问题的一种算法[J].系统工程,2006(05):23-28.
[77] 赵达,李军,李妍峰,孙斌锋.随机需求库存-路径问题:研究现状及展望[J].系统工程,2007(08):38-44.
[78] 傅成红,符卓.库存路径问题及其最新进展[J].计算机应用,2010,30(02):453-457.
[79] 朱晨波,叶耀华,戴锡.直接配送的三层随机库存路径问题[J].系统工程理论与实践,2007(12):16-22.
[80] 孙茂,李文年,周永务.基于确定需求的作业层库存路径问题研究[J].计算机集成制造系统,2008(02):341-348.
[81] 刘立辉,叶春明.库存路径问题的研究综述[J].工业工程,2009,12(03):1-6.
[82] 傅成红. 多周期库存路径问题及其算法研究[D].中南大学,2010.
[83] 赵达,李军,马丹祥,李妍峰.求解硬时间窗约束下随机需求库存-路径问题的优化算法[J].运筹与管理,2014,23(01):26-32+38.

[84]赵达,李军,马丹祥,李妍峰.固定分区下随机需求 IRP 问题最优策略及算法[J].管理科学学报,2016,19(12):25-35+70.
[85]赵达,周永务,李军,吉清凯.修正固定分区策略下随机需求库存-路径问题的最优策略及其算法[J].系统管理学报,2017,26(06):1158-1167.
[86]陈德良,陈治亚.随机的库存—路径问题的机会约束规划模型与算法[J].模糊系统与数学,2010,24(03):168-174.
[87]魏江宁,夏唐斌.基于混合模拟退火算法的多阶段库存路径问题研究[J].工业工程与管理,2015,20(03):90-97.
[88]秦磊.基于模拟退火算法的易逝品库存路径问题[J].计算机工程与设计,2017,38(02):424-429.