Mathematik IT-3

Analysis für Informatik-Studiengänge

8. Oktober 2021

Prof. G. Averkov

Institut für Mathematik, Fakultät 1

Fachgebiet Algorithmische Mathematik

Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

0.1 (Vorlesung)**.**

(a) In Präsenz. Bei Bedarf Aufzeichnung.

(b) Hilfsmittel: diese Präsentation (in der Form eines Skripts im Moodle verfügbar) und das Skript von Martin Henk (ebenfalls im Moodle).

(c) Ziel der Vorlesung: Theorie erklären und mit vielen Beispielen bzw. Lösungen von Aufgaben illustrieren.

(d) Fragen sehr willkommen. ~~Nutzen Sie dazu den BigBlueButton Chat.~~

0.2 (Übung)**.**

(a) Zwei Übungstermine pro Woche.

(b) Die Teilnehmer werden <u>nicht</u> in zwei Übungsgruppen eingeteilt. Jede Woche kann eine der beiden Übungen frei gewählt werden.

(c) Aufgabenblatt Nummer x (mit $x \geq 1$) wird in der Vorlesungswoche $x+1$ diskutiert und zum Ende der Woche x abgegeben.

(d) Abgabe der Blätter digital über Moodle.

(e) Blatt Nummer 0 wird in der ersten Woche diskutiert und wird nicht abgegeben.

0.3 (Prüfung)**.**

(a) Zulassung zur Klausur bei mind. 50% aller Punkte für die Aufgabenblätter

(b) Bei mind. 75% aller Punkte für die Aufgabenblätter gibt es einen 10% Bonus in der Klausur

(c) Keine Rechengeräte in der Klausur zugelassen

(d) Anregung: während des Semesters mitarbeiten

Bezeichnungen

$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}_0$	die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen
$\mathbb{N}$	die Menge positiver ganzen Zahlen (wir nennen die Elemente von $\mathbb{N}$ natürliche Zahlen).
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_{\geq 0}$	die Menge der nichnegativen reellen Zahlen

Kennt man noch die Lineare Algebra?

Wichtiges Hinweis:

Mathe $\neq$ Rechnen.

Kapitel I

Folgen und Reihen

1 Folgen

1.1. Die (klassische) **Mathematische Analysis** – deren dieser Kurs gewidmet ist – ist die Theorie, die auf dem Begriff des Grenzwertes aufgebaut ist. Wir werden Summen von verschiedenen Arten von Reihen, einfache und partielle Ableitungen, ein- und mehr-dimensionale Integrale betrachten. Das sind <u>alles</u> Grenzwerte. Wir beginnen mit dem Grenzwert in der einfachsten Situation: dem Grenzwert einer Folge.

en

einer der

Als eine Anwendung werden wir Optimierungsaufgaben in einer sowie mehreren Variablen lösen

1.2 Def (Folge)**.** Eine unendliche **Folge** über einer Menge besteht aus unendlich vielen durchgängig indexierten Elementen der gegebenen Menge, den sogenannten **Gliedern der Folge**. Das Anfangsglied der Folge wird in der Regel mit 0 oder 1 indexiert. Eine Indexierung ab einer anderen ganzen Zahl ist auch möglich. Streng mathematisch formuliert ist eine ab 1 indexierte Folge über X eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X, welche für jeden Index $n \in \mathbb{N}$ vorschreibt, was für einen Wert in X das Glied mit dem Index n hat. Die typischen Schreibweisen für eine Folge sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \in X$ oder auch $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Hierbei ist a_n das Glied zum Index n.

$a: \mathbb{N} \to X$ $\quad a(n) \quad$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a: \mathbb{N}_0 \to X$ $\quad$ $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen aus X heißt $a_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a_n heißt das n-te Glied der Folge bzw. das Glied mit dem Index n.

1.3 Bsp (Beispiele von Folgen)**.**

(a) Eine ziemlich langweile Folge ist die Folge, in der jedes Glied gleich ist, etwa die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Wir können die Folge der immer besser werden Approximationen der Kreiszahl π betrachten, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = 3,\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n \text{ Nachkommastellen der Zahl } \pi}$$

Bei dieser Folge ist $a_1 = 3{,}1$, $a_2 = 3{,}14$, $a_3 = 3{,}141$ usw.

(c) Die Folge $a_n = \frac{1}{2^n}$ der Potenzen von $\frac{1}{2}$. Diese Folge kann auch **rekursiv** als

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } n = 1 \\ \frac{1}{2}a_{n-1}, & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Die Glieder dieser Folge werden sehr schnell sehr klein, wenn man n wachsen lässt.

1.4 Aufgabe. Zeigen Sie, dass jedes Glied der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 2^{2^n} + 2$ durch 3 teilbar ist.

1.5 Aufgabe. Beschreiben Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{für } n = 1, \\ 1 + \prod_{i=1}^{n-1} a_i, & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

durch die Rekursion

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{für } n = 1, \\ F(a_{n-1}), & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

für eine geeignete Funktion F. Hinweis: Versuchen Sie das Produkt von $n-1$ Gliedern zu vermeiden, indem Sie die Rekursion (nochmals) benutzen.

1.6 Aufgabe. Man betrachte die Folge $x_n = 3^n + 2^n$. Geben Sie eine rekursive Beschreibung dieser Folge durch

$$x_n = \begin{cases} 5, & \text{für } n = 1, \\ 13, & \text{für } n = 2, \\ ax_{n-1} + bx_{n-2}, & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

für geeignet gewählte Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Vergewissern Sie sich, dass Ihre rekursive Darstellung tatsächlich die selbe Folge definiert. Hinweis: Die elementare Lineare Algebra kann Ihnen helfen.

Umkehraufgabe dazu: Wie kann man die Folge

$$x_n = \begin{cases} 2, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ 4x_{n-1} - x_{n-2} \end{cases}$$

durch eine explizite Formel für das Glied x_n beschreiben?

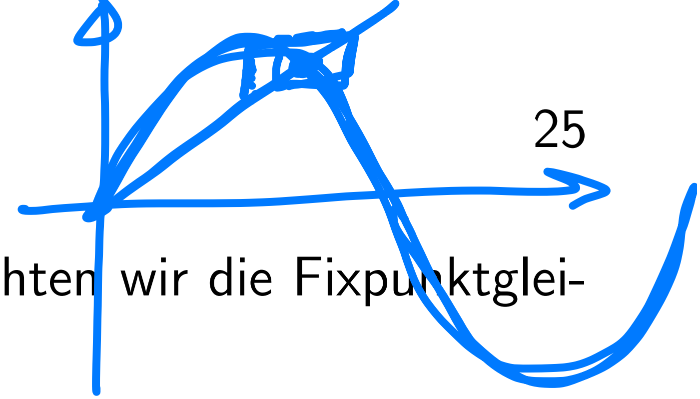
1.7 Aufgabe. Die Folge der sogenannten Fibonacci-Zahlen ist rekursiv durch

$$f_n = \begin{cases} 1, & \text{für } n \in \{1,2\}, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

definiert. Haben Sie bereits eine nicht-rekursive Darstellung dieser Folge gesehen? Die Darstellung hat etwas mit den Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ zu tun (die positive Lösung heißt der goldene Schnitt). Leiten Sie diese Darstellung her. Hinweis: Berechnen Sie die beiden Nullstellen u, v von $x^2 - x - 1$ und versuchen Sie dann f_n geeignet als Linearkombination von u^n und v^n darzustellen.

1.8. Wir werden im Folgenden vor allem reellwertige Folgen betrachten, da es in diesem Kurs vorrangig um die **Reelle Analysis** geht: das ist die Analysis, die auf reellen Zahlen aufgebaut ist. Das heißt, unsere Menge für die Werte der Folgen wird in den meisten Fällen $\mathbb{R}$ sein.

1.9. Folgen betrachtet man unter anderem in iterativen Rechenprozessen, die theoretisch unendlich lang laufen können, bei denen man in jeder Iteration ein aktuelles Ergebnis a_n ausrechnet. Abhängig von der vorliegenden Situation kann dieses aktuelle Ergebnis eine Zahl oder ein Vektor, oder evtl. auch ein anderes, komplexeres Objekt sein.



1.10 Bsp (Iterative Lösung von Fixpunktgleichungen)**.** Betrachten wir die Fixpunktgleichung

$$f(x) = x$$

für eine reellwertige Funktion f einer reellen Variablen x. In der Schule ist es so, dass jede Gleichung, die man betrachtet, eine Lösung in einer netten abgeschlossen Form darstellbar ist. In der realen Wert ist die Situation etwas anders. Betrachten wir zum Beispiel die Gleichung $2\sin(x) = x$. Diese Gleichung hat eine positive Lösung, aber als eine nette Formel werden wir diese Lösung nicht hinschreiben können. Die Lösung ist $x \approx 1{,}89$.

Man kann versuchen, die Gleichung $f(x) = x$ annähernd auf die folgende Weise zu lösen. Man beginnt mit einem Startwert x_0 und setzt in der n-ten Iteration $x_n = f(x_{n-1})$ für $n > 0$. Wenn man Glück hat (das heißt, gewisse Voraussetzungen an f und x_0 sind erfüllt), ist x_n für genügend große n eine beliebig gute Approximation einer Lösung von

$f(x) = x$. In diesem Beispiel reden wir also von einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Approximationen einer Lösung. Aber was heißt es eigentlich, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ einen gewissen Wert $a \in \mathbb{R}$ beliebig gut approximiert? Genau das wird durch den Grenzwertbegriff geklärt, den wir einführen wollen.

Übrigens: der PageRank wurde durch eine solche Lösung einer Gleichung $F(x) = x$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $F(x) = Ax$ ermittelt.

1.11 Aufgabe. Berechnen Sie die (eindeutige) positive Lösung von $2\sin(x) = x$ mit der Benutzung von $x_0 = 2$ als Startwert ~~wie oben dargestellt~~. Als Hilfsmittel können Sie beliebige Soft- bzw. Hardware benutzen. Was kriegen Sie für Werte für x_n für $n \in \{1, \ldots, 10\}$?

mit dem obigen Verfahren

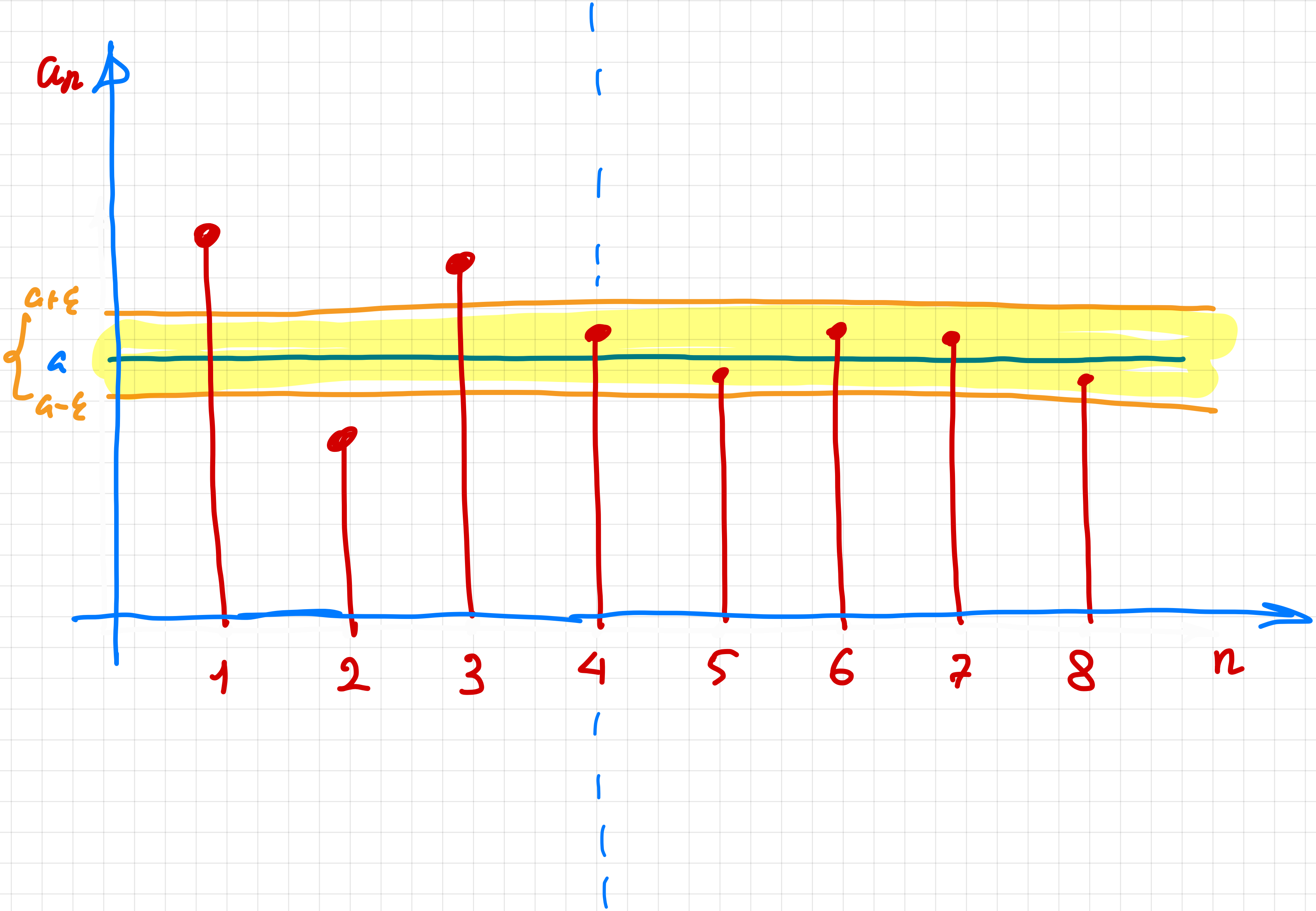
2 Grenzwerte von Folgen

2.1 Def (Grenzwert einer Folge). Man sagt, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen gegen einen reellen Wert a konvergiert wenn Folgendes gilt: für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| < \epsilon$ erfüllt ist.

In diesem Fall schreibt man $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Man sagt:

- a ist Grenzwert von a_n für $n \to \infty$ oder
- a ist Limes von a_n für $n \to \infty$ oder
- a_n geht gegen a für $n \to \infty$ oder

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: (n \geq n_0) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$



a_n
$a+\varepsilon$
a
$a-\varepsilon$
1
2
3
4
5
6
7
8
n

- a_n konvergiert gegen a für $n \to \infty$.

2.2. Wir schauen uns den Begriff des Grenzwerts in Ruhe an. Die Bedingung $|a_n - a| < \epsilon$ können wir etwa als "a_n ist ϵ-Approximation von a" mit Worten beschreiben. Die Bedingung $n \geq n_0$ heißt "n muss groß genug sein", mindestens so groß wie ein passend gewähltes n_0. Also beschreibt unsere Grenzwert-Definition die folgende Situation: egal welche Güte $\epsilon > 0$ der Approximation des Wertes a wir vorschreiben, wird diese Güte durch alle Glieder a_n der Folge erreicht, bei denen der Index n genügend groß ist.

2.3. Ab wann n genügend groß ist wird in der Definition durch eine natürliche Zahl n_0 vorgeschrieben. Streng genommen brauchen wir für den Wert n_0 nicht unbedingt Ganzzahligkeit. Daher findet man in der Literatur auch die folgende äquivalente Definition des Grenzwerts einer Folge: für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| < \epsilon$ erfüllt ist. In dieser Definition ist n_0 durch eine reelle Zahl N ersetzt.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}: (n \geq N) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n_0 \longmapsto N = n_0$$

$$n_0 = \max\{\lceil N \rceil, 1\} \longleftarrow N$$

2.4. Der Begriff des Grenzwerts einer Folge kann ganz analog über den Mengen eingeführt werden, in denen ein Abstandsbegriff festgelegt ist: die Bedingung $|a_n - a| < \epsilon$, dass der Abstand von a_n und a. Für die komplexen Zahlen ist der Abstand von zwei Zahlen ebenso der Betrag der Differenz dieser Zahlen. Also kann unsere Definition des Grenzwerts ohne Änderungen für Folgen komplexer Zahlen benutzt werden.

Def. Sei X Menge und $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dann (X, d) **metrischer Raum** mit **Metrik** d

(Metrik heißt Abstand), wenn folgendes gilt:

- $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$ mit $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ist.
- $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$
- $d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y)$ für alle $x,y,u \in X$, (Dreiecksungleichung).

Bsp. $d(x,y) = |x-y|$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

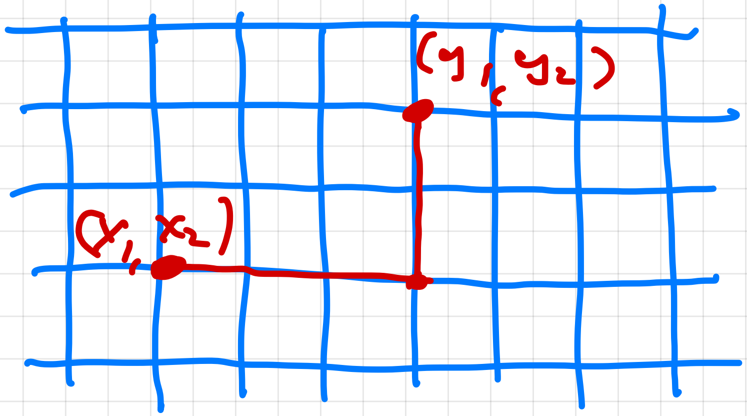
Abstand auf $\mathbb{R}$.

Bsp. $d(x,y) = \|x-y\|$ für $x,y \in \mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$

Abstand auf $\mathbb{R}^k$, Hier: $\|.\|$ Norm auf $\mathbb{R}^k$

z. B. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$

Bsp.



Manhattan

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| := |x_1| + |x_2|$$

Allgemeinere Def. eines Grenzwertes.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge der Punkte eines einem metrischen Raum (X,d).

Dann heißt $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in X$, wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} \ \forall n\in\mathbb{N}: n\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$$

2.5 Aufgabe. Der Quotient $a_n = f_{n+1}/f_n$ der aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen ist ebenfalls eine Folge, über deren Eigenschaften für große n man reflektieren könnte. Rechnen Sie die ersten Zehn Glieder $a_1, \ldots, a_{10}$ dieser Folge mit Computer/Taschenrechner in Gleitkomma-Arithmetik aus. Was stellen Sie experimentell fest? Sieht es wie eine konvergente Folge aus? Was ~~könnte~~ der Grenzwert ~~sein~~?

ist

2.6 Bsp.

(a) In der Folge $a_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n}$ schwanken die Glieder um die Zahl 5 und liegen mal oberhalb mal unterhalb dieser Zahl. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ ist gleich 5, weil die Abweichungen von 5 für große n beliebig klein werden. Wir können es auch formal aus der Definition des Grenzwerts herleiten. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir können nun als $N = \frac{2}{\epsilon}$ fixieren. Für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - 5| \leq \frac{1}{2\epsilon} < \epsilon$.

(b) Die Folge $a_n = (-1)^n$ besteht aus Werten -1 und 1, welche in dieser Folge abwechselnd auftreten. Diese Folge konvergiert gegen keinen Wert. Das ist intuitiv klar. Wenn die Folge für n überhaupt was approximieren kann, dann nur -1 oder 1, da der Wert beim wachsenden n ständig zwischen -1 und 1 wechselt, approximiert die Folge weder -1 noch 1.

Bsp. $f(x)=\frac{1}{e^{x^2}}$ $\qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad a_n=\frac{1}{e^{n^2}}$

Wir zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{n^2}}=0$

Direkt nach der Definition: Sei $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{1}{e^{n^2}}-0\right|<\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{e^{n^2}}<\varepsilon \qquad n\geq n_0 \text{ mit } n_0=\lceil \ln\tfrac{1}{\varepsilon}\rceil+1$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{n^2}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$e^n>\frac{1}{\varepsilon} \iff n>\ln\frac{1}{\varepsilon}$$

Wieso gilt $5 + \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 5$?

Wir verifizieren das direkt nach der Definition.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir sind auf der Suche nach einem passenden n_0 wie in der Def.

Wir betrachten die Ungleichung:

$$\left| 5 + \frac{(-1)^n}{n} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Big| \cdot \frac{n}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

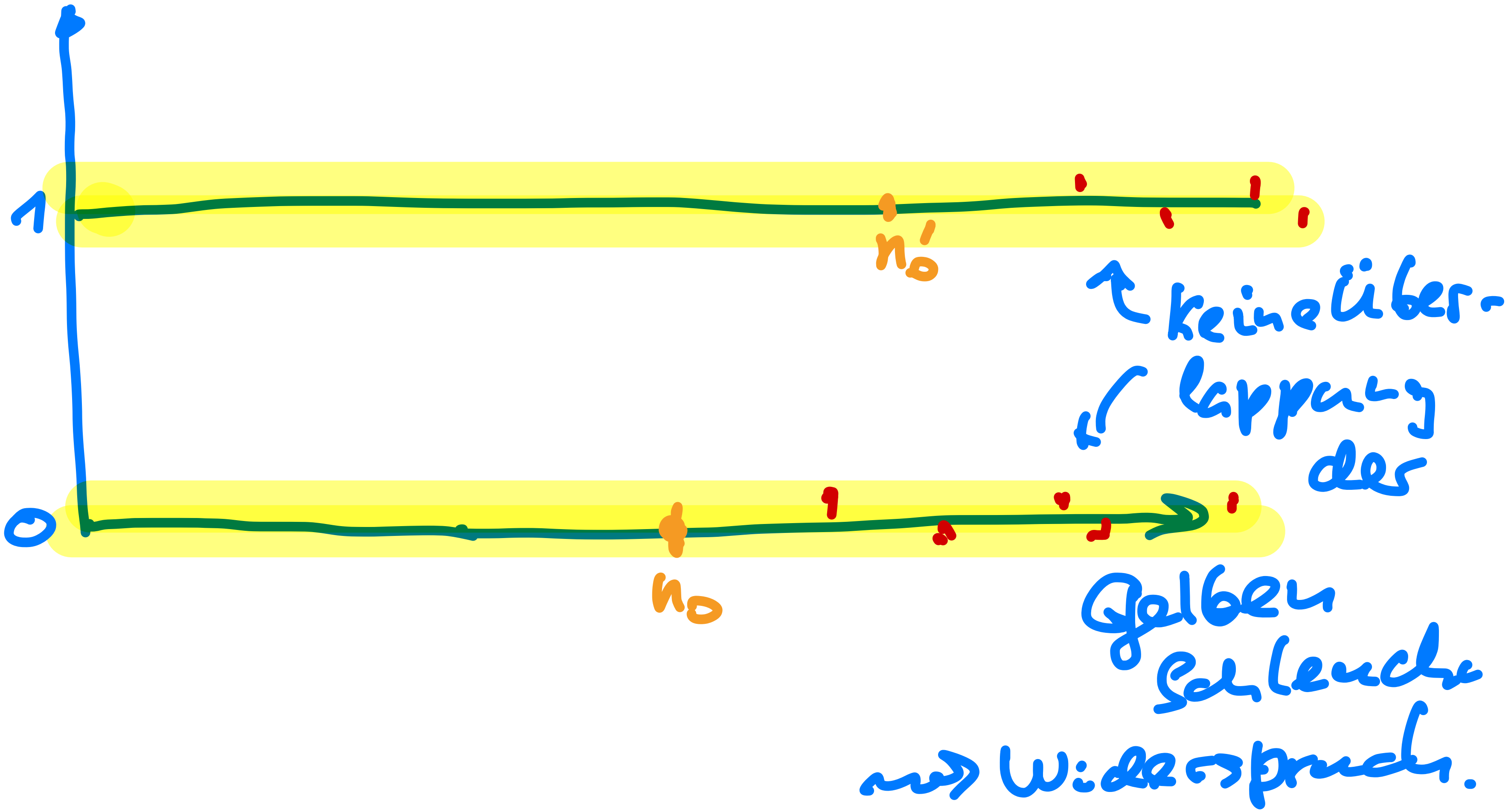
$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Das bedeutet: für $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ gilt:

$$n \geq n_0 \implies n > \frac{1}{\varepsilon} \implies \Big| \underbrace{5 + \frac{(-1)^n}{n}}_{= a_n} - \underset{\substack{\| \\ a}}{5} \Big| < \varepsilon$$

2.7 Thm (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Jede konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.*

2.8. Dieser Satz ist intuitiv klar: Eine konvergente Folge kann nur einen Wert approximieren. Wenn a_n für große n gleich zwei verschiedene Werte, etwa 0 und 1, approximieren würde, dann wäre a_n gleichzeitig sehr nah an 0 und sehr nah an 1. Das geht natürlich nicht.



Elementare Eigenschaften einer Folge

2.9 Def (Beschränktheit & Monotonie)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt:

(a) **nach oben beschränkt**, wenn für eine Konstante C $\in \mathbb{R}$ die Ungleichung $a_n \leq C$ für alle n erfüllt ist;

(b) **nach unten beschränkt**, wenn für eine Konstante c $\in \mathbb{R}$ die Ungleichung $a_n \geq c$ für alle n erfüllt ist.

(c) **beschränkt**, wenn die Folge nach oben sowie nach unten beschränkt ist;

(d) **monoton steigend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n erfüllt ist;

(e) **strikt monoton steigend**, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle n erfüllt ist;

(f) **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n erfüllt;

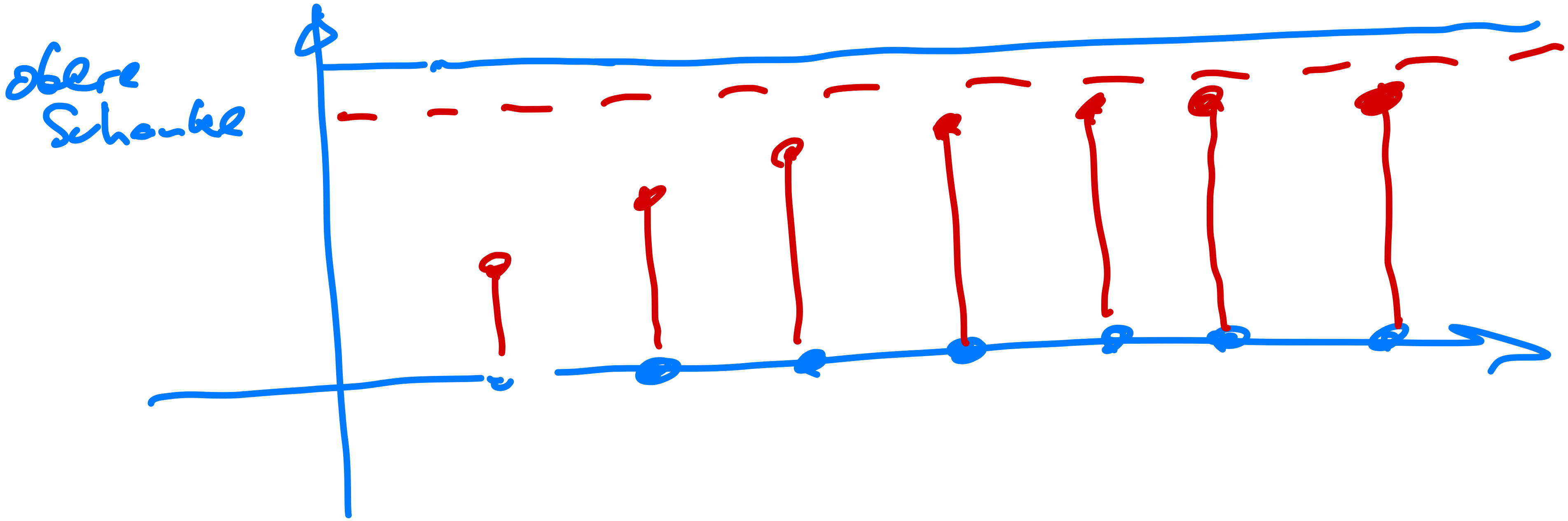
(g) **strikt monoton fallend**, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle n erfüllt ist;

(h) **monoton**, wenn die Folge monoton steigend oder monoton fallend ist.

2.10 Thm (Zusammenhang der Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz)**.** *Für Folgen reeller Zahlen gilt Folgendes:*

(a) *Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.*

(b) *Jede konvergente Folge ist beschränkt (aber im Allgemeinen, nicht umgekehrt).*



2.11. Wenn wir in einer Folge endlich viele Glieder ändern, hat so eine Änderung keine Auswirkung auf Konvergenz und Grenzwert. Denn in der Definition des Grenzwerts geht es um die genügend großen n. Man kann sich also auf so große n einschränken, bei denen man nur die Glieder sieht, die unverändert geblieben sind. Daraus folgt, dass wir in der Behauptung (a) die Monotonie durch die Monotonie ab irgendeinem Glied ersetzen können: wenn eine Folge beschränkt und ab einem Glied monoton ist, ist sie konvergent.

2.10

2.12 Bsp. ~~Dies~~ Theorem gibt uns eine hinreichende und eine notwendige Bedingung für Konvergenz. Probieren wir es mal aus.

(a) Die Folge $a_n = 2^{1/n}$ ist monoton und beschränkt. Je höher die Wurzel ist, die wir aus 2 ziehen, desto kleiner ist das Ergebnis (daher die Monotonie). Beschränktheit ist ebenfalls klar, denn der Wert $2^{1/n}$ liegt offensichtlich zwischen 1 und 2. Auf diese Weise sehen wir dass die Folge a_n konvergent ist, ohne dass wir den genauen Grenzwert dieser Folge angeben. Es kommen tatsächlich manchmal Situationen vor, in denen man weiß, dass der Grenzwert der vorliegenden Folge existiert, aber kein schöner einfacher Ausdruck für den Grenzwert vorhanden ist. So, weiß man zum Beispiel, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ existiert, den Grenzwert kann man aber nicht “elementar beschreiben”. Und so hat man einfach für diesen Wert den Buchstaben e reserviert und den Wert die Euler-Zahl genannt.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exponent: geht gegen ∞
Basis: $1+\frac{1}{n}$ geht gegen 1.

$$2 = \lim_{n\to\infty} 2 = \lim_{n\to\infty} \left(2^{1/n}\right)^n$$

Exponent: gegen ∞
Basis: gegen 1

$$3 = \lim_{n\to\infty} 3 = \lim_{n\to\infty} \left(3^{1/n}\right)^n$$

Exponent: gegen ∞
Basis: gegen 1

"Elementar beschreiben" hat eine genaue mathematische Bedeutung.

(b) Die Folge $a_n = n$ konvergiert nicht, denn diese Folge ist unbeschränkt.

und Definition

2.13 Thm. *Die Folge* $(1+1/n)^n$ *ist konvergent. Der Grenzwert dieser Folge wird als* e *bezeichnet und die Euler-Zahl genannt.*

2.14 Bsp. Kehren wir zurück zur Folge $2^{1/n}$. Wir bestimmen nun den Grenzwert dieser Folge. Wir zeigen, dass der Grenzwert gleich 1 ist. Dafür sollen wir zeigen, dass für ein beliebiges festes $\epsilon > 0$, die Ungleichung $|2^{1/n} - 1| < \epsilon$ für alle genügend großen n erfüllt ist. Schreiben wir unsere Ungleichung ohne Betrag als eine untere und obere Schranke an $2^{1/n}$:

$$1 - \epsilon < 2^{1/n} < 1 + \epsilon.$$

Die untere Schranke ist für alle n erfüllt, denn $2^{1/n}$ ist sogar durch 1 nach unten beschränkt. Nun zur oberen Schranke: diese kann als $1/n < \log_2(1 + \epsilon)$ und dann als $n > \frac{1}{\log_2(1+\epsilon)}$ umformuliert werden. Also ist die obere Schranke tatsächlich für alle genügend großen n erfüllt.

2.15 Def. Eine nicht-konvergente Folge nennt man divergent.

2.16. Man muss aber an dieser Stelle etwas Ordnung in die Menge der divergenten Folgen bringen. Manche dieser Folgen gehen tatsächlich gegen keinen Wert, wie etwa $(-1)^n$, manche anderen gehen schon gegen etwas, aber dieses etwas ist kein reeller Wert, sondern $+\infty$ oder $-\infty$.

2.17 Def. Man sagt, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** ∞ (bzw. ist **bestimmt divergent gegen** $+\infty$), wenn für jede Schranke C für genügend große n überschritten wird: das heißt, für jede Konstante C existiert ein n_0 derart, dass die Ungleichung $a_n > C$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt ist. Komplett analog definiert man auch die bestimmte Divergenz gegen $-\infty$.

2.18 Bsp.

(a) Die Folge $a_n = n$ konvergiert gegen ∞, das schreibt man als $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

(b) Die Folge $a_n = -n$ konvergiert gegen $-\infty$. Das schreibt man als $\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

(c) Die Folge $a_n = (-1)^n n$ ist divergent, geht aber weder gegen ∞ noch gegen, denn a_n schwankt für große n zwischen großen positiven Werten und betragsmäßig großen negativen Werten. Der Betrag $|a_n| = n$ aber konvergiert gegen ∞.

(d) Die Folge $a_n = (1 + (-1)^n)n$ schwankt für große n zwischen 0 und sehr großen Werten. Die Folge ist divergent und sie geht weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$.

2.19 Def. Eine **Polynomialfunktion** ist eine Funktion der Form

$$f(x) = c_d x^d + \cdots + c_0 x^0$$

mit Koeffizienten $c_d, \ldots, c_0$ und $d \in \mathbb{N}_0$. Sind alle Koeffizienten von f gleich 0, so setzen man den Grad $\deg(f)$ gleich $-\infty$. Ist $c_d \neq 0$, so definiert man den Grad von f durch $\deg(f) = d$ und nennt den Term $c_d x^d$ den **Leitterm** von f.

2.20 Bsp.

(a) Der Leitterm von $2x^3 - 7x^2 + 8x - 6$ ist $2x^3$.

(b) Der Leitterm von $(2x-1)^{10}$ ist $(2x)^{10}$. (Wieso?)

2.21. Eigentlich gibt es einen Unterschied zwischen Polynomen und Polynomialfunktionen. Polynome sind formale Ausdrücke und Polynomialfunktionen sind spezielle Abbildungen, aber im Kontext der Analysis ist dieser Unterschied nicht so wichtig, sodass wir Polynomialfunktionen auch einfach Polynome nennen werden.

2.22 Thm. *Seien f, g Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und sei g nicht identisch gleich null. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\textit{Leitterm von } f)(n)}{(\textit{Leitterm von } g)(n)}.$$

2.23 Bsp.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 - 2n^2 + 7}{10n^3 + 3n^2 + 4n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3}{10n^3} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

(b) Der Leitterm des Produkts ist Produkt der Leitterme. Darauf basierend haben wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2 + 1)^3}{(5n^3 + n^2 - 1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2)^3}{(5n^3)^2} = \frac{8}{25}.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + 1}{3n^2 - 7n + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n^2} = 0.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 100}{3n - 1000} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n} = \infty.$$

2.24 Thm (Rechenregeln für Folgen)**.** *Für konvergente Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$*.*

(c) $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$*.*

(d) $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$*.*

2.25. **WARNUNG!** Wenn man mit Folgen mit Hilfe der obigen Regeln rechnet, soll man das Folgende beachten: Es kann passieren, dass $a_n + b_n$ konvergiert, auch wenn weder a_n noch b_n konvergieren. Zum Beispiel bei $a_n = -b_n = (-1)^n$. Die Summe $a_n + b_n = 0$ konvergiert gegen 0, aber a_n und b_n konvergieren nicht. Wenn man also einer Folge etwa in die Summe von zwei Folgen ungünstig zerlegt hat, sodass die beiden Folgen divergent sind, heißt es noch lange nicht, dass die zugrundeliegende Folge divergent ist!

2.26 Def (Teilfolge und ihr Grenzwert)**.** Eine **Teilfolge** über einer Menge X besteht aus den Gliedern $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ aus der Menge X, die durch ganze Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ indexiert sind.

Der einzige Unterschied zu Folgen: Im Gegensatz zu Folgen sind die Glieder nicht unbedingt durchgängig nummeriert. Mit anderen Worten: Teilfolgen unterscheiden sich von den Folgen nur durch die Art der Nummerierung.

Die für Folgen eingeführten Begriffe wie **Grenzwert**, **Konvergenz** und **Divergenz** werden für Teilfolgen völlig analog definiert.

Teilfolge über einer Menge X ist eine Abbildung $a: I \to X$, bei der I eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist.

2.27 Bsp. $(a_p)_{p \text{ ist Primzahl}}$ mit $a_p = \frac{1}{p^2}$ ist eine Teilfolge, die durch die Menge der Primzahlen indexiert ist. Man hat $a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{9}, a_5 = \frac{1}{25}$ usw.

2.28 Def. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge und $1 \leq n_1 < n_2 < n_2 \cdots$ unendlich viele Indizes, so nennt man $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge der Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mit anderen Worten: Eine Teilfolge einer Folge $a: \mathbb{N} \to X$ ist eine Einschränkung von a auf eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$.

2.29 Thm. *Konvergiert eine Folge gegen einen Wert a, so konvergiert jede Teilfolge dieser Folge gegen den selben Wert a.*

2.30 Bsp. Das vorige Theorem kann benutzt werden, um Divergenz nachzuweisen.

(a) Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent, denn

die Teilfolge $a_{n_k} = -1$ mit $n_k = 2k - 1$ konvergiert gegen -1 und

die Teilfolge $a_{n_k} = 1$ mit $n_k = 2k$ konvergiert gegen ~~den~~ einen anderen Wert (die 1).

(b) Die Folge

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ Zweierpotenz}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist divergent, denn

die Teilfolge $a_{n_k} = 1$ mit $n_k = 2^k$ geht gegen 1 und die Teilfolge $a_{n_k} = 0$ mit $n_k = 2k + 1$ geht gegen 0.

3 Reihen

3.1. Salopp gesagt sind Reihen unendliche Summen. Etwas genauer sind es formale Summen der Glieder einer gegebener Folge.

Wir reden im Folgenden meistens über Reihen mit reellwertigen Gliedern.

Noch etwas genauer sind Reihen Summen von abzählbar vielen Termen.

Und noch etwas genauer sind Reihen Summen von abzählbar vielen durchnummerierten Gliedern.

3.2 Def (Reihe)**.** Eine **Reihe** ist ein formaler Ausdruck der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die Elemente a_k nennt man **Glieder** der Reihe. Die Glieder werden bei uns in der Regel reelle Werte sein.

Der Wert $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ist **Partialsumme** zum Index n.

Eine Reihe nennt man **konvergent**, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen einen endlichen Grenzwert $s \in \mathbb{R}$ besitzt. In diesem Fall nennt man s die Summe der Reihe und schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s.$$

Man benutzt in Bezug auf Reihen die gleiche Terminologie wie bei Folgen wie **divergent**, **bestimmt divergent gegen** $\pm\infty$, indem man sich dabei auf die Folge der Partialsummen bezieht.

3.3. Neben den Reihen mit den Gliedern, die ab 0 indexiert sind, kann man natürlich auch Reihen betrachten, deren Gliedern ab einem anderen Wert indexiert sind. Neben der 0 ist die 1 ist ebenfalls sehr verbreitet.

3.4 Def. Eine **Nullfolge** ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert.

3.5 Thm (Notwendige Bedingung für Konvergenz einer Reihe)**.** *Die Folge der Glieder einer konvergenten Reihe ist eine Nullfolge.*

3.6. Die Begründung zu diesem Theorem ist total einfach: hat $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ einen Grenzwert s für $n \to \infty$, dann hat natürlich auch s_{n-1} den Grenzwert s, für $n \to \infty$. Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

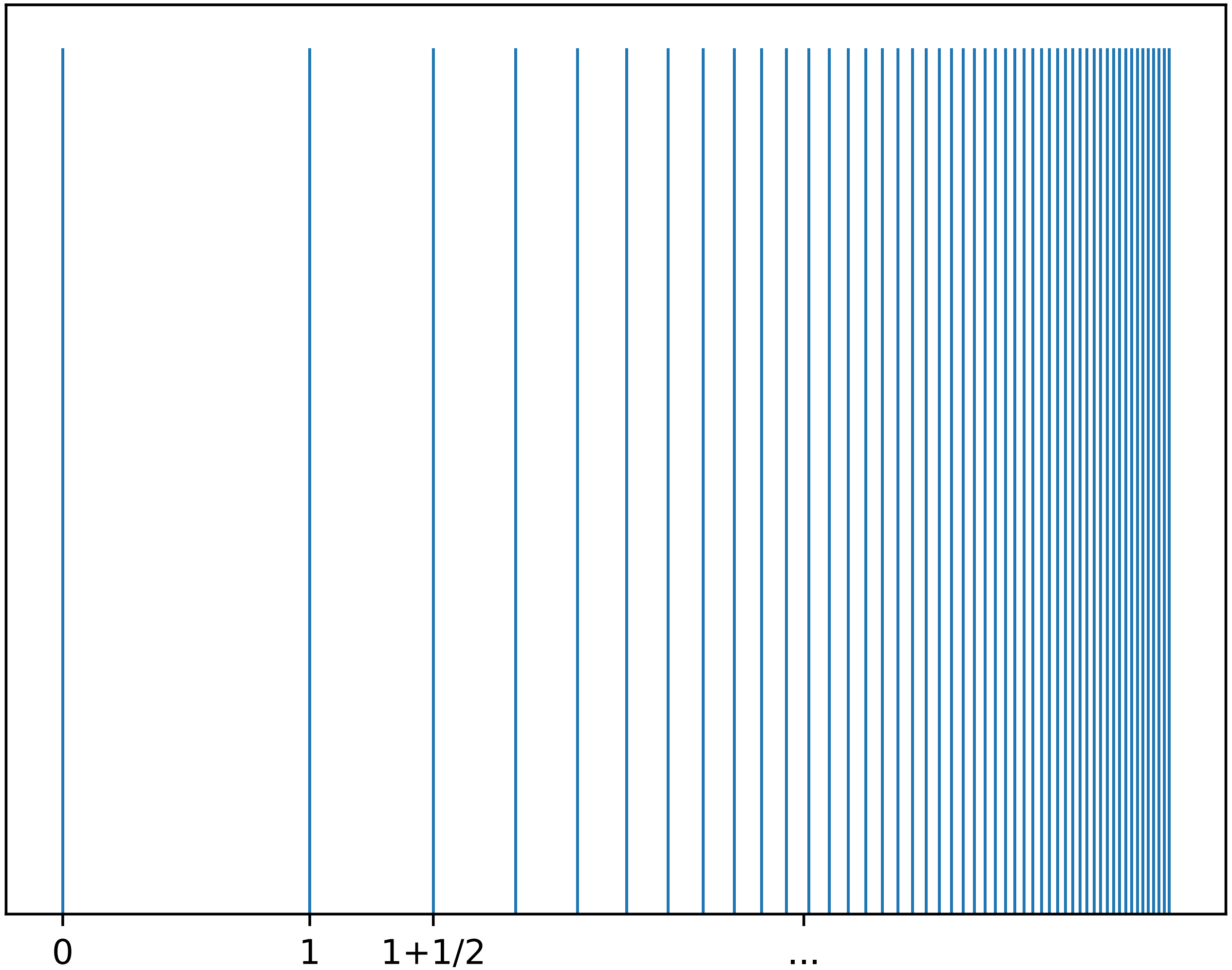
3.7 Bsp. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ ist divergent, da die Folge der Glieder nicht gegen 0 konvergiert. In diesem Fall konvergiert die Folge der Glieder gar nicht. Wie sehen die Partialsummen dieser Reihe aus?

3.8 Bsp. Dass die Folge der Glieder gegen 0 konvergiert, ist im Allgemeinen keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe. Betrachten wir die Reihe

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ mal}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{3 \text{ mal}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k}}_{k \text{ mal}} + \cdots$$

Das heißt, die Glieder sind $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = a_4 = a_5 = \frac{1}{3}$ usw. Die Folge der Glieder geht gegen 0. Die Summe der Reihe ist aber unendlich, denn die k Glieder mit dem Wert $\frac{1}{k}$ ergeben insgesamt $k \cdot \frac{1}{k} = 1$. Da wir aber für jedes k, eine Gruppe aus k Gliedern mit dem Wert $\frac{1}{k}$ haben, ist die Summe der Reihe unendlich.

3.9 Bsp (Harmonische Reihe)**.** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt harmonisch. Die Summe der Reihe ist unendlich!


0
1
1+1/2
...

Wir zerlegen die Glieder in Gruppen, indem wir ab jeder Zweierpotenz eine neue Gruppe starten:

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{k} \\
&\geq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{2^{i+1}}}_{2^i \ \text{Terme}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

3.10. Es stellt sich heraus, dass die Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ der harmonischen Reihe ziemlich gut durch den natürlichen Logarithmus $\ln n$ approximiert werden kann.

Dass der QuickSort im Durchschnitt die Laufzeit der Ordnung $n \ln n$ hat, hängt auch mit der Partialsumme der harmonischen Reihe zusammen. Mehr Details dazu findet man im Buch von Cormen, Leiserson, Rivest und Stein “Algorithmen: Eine Einführung”.

3.11 Bsp (Geometrische Reihe)**.** Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ zu Basis $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ist eines der bekanntesten Beispiele einer Reihe. Wir analysieren diese Reihe auf Konvergenz. Es ist nicht besonders schwer, eine abgeschlossene Formel für die Partialsummen

$$s_n = q^0 + \cdots + q^n$$

zu erstellen. Der Wert qs_n ist die Summe $q^1 + \cdots + q^{n+1}$. Wenn wir also von qs_n die Summe s_n abziehen, kompensieren sich die meisten Terme und man erhält $qs_n - s_n = q^{n+1} - 1$. Somit ist

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{I.1}$$

Nun sieht man, dass die geometrische Reihe genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt. In der Tat:

(a) Für $|q| < 1$, geht q^n in der Darstellung (I.1) von s_n gegen 0, woraus man $s_n \to \frac{1}{1-q}$ erhält.

(b) Für $|q| \geq 1$, ist das Glied q^k der Reihe keine Nullfolge, weil man $|q^k| \geq 1$ hat. Bei $|q| \geq 1$ kann noch zwischen der bestimmten Divergenz und unbestimmten Divergenz unterscheiden, denn:

- Bei $q > 1$, geht s_n gegen ∞.
- Bei $q = -1$ geht die Partiasumme s_n gegen "gar nichts": sie zwischen zwei festen Werten.
- Bei $q < -1$ schwankt die Partialsumme s_n zwischen "sehr positiven" und "sehr negativen" Werten und geht somit ebenfalls gegen "gar nichts".

Zusammenfassend: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist

(a) bei $|q| < 1$ der endliche Wert $\frac{1}{1-q}$ (die Reihe ist konvergent).

(b) bei $q > 1$ der unendliche Wert $+\infty$ (die Reihe ist bestimmt divergent gegen $+\infty$

(c) bei $q \leq -1$ “gar nichts” (die Reihe ist unbestimmt divergent).

3.12 Bsp (Dezimaldarstellung von Zahlen)**.** Eigentlich ist die Darstellung von reellen Zahlen mit Hilfe von potenziell unendlich vielen Nachkommastellen ebenfalls eine Reihe. Wenn wir zum Beispiel die Zahl $0{,}\overline{1} = 0{,}1111\cdots$ betrachten, so meinen wir darunter die Summe der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}.$$

Schreiben Sie diese Zahl als Bruch. Bei allgemeinen Zahlen der Form $0{,}z_1 z_2 z_3 \cdots$ mit den Nachkommastellen $z_1, z_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$ ist die entsprechende Summe gleich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}.$$

3.13 Aufgabe. Eine Programmfunktion wirft innerhalb einer While-Schleife iterativ eine faire Münze. Sobald eine Zahl geworfen wird, terminiert Ihre Funktion. Dabei ist der Rückgabewert 1, wenn die Funktion nach einer ungeraden Anzahl der Iterationen terminiert hat, und 0 sonst. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Funktion mit dem Rückgabewert 1 terminiert? Was hat diese Wahrscheinlichkeit mit Reihen zu tun?

Hinweis: Die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie hatten Sie in der Schule.

```
import random

KOPF=0
ZAHL=1

def unfaire_muenze():
    cntr=0
    while True:
```

```
        cntr+=1
        if random.randint(KOPF,ZAHL)==ZAHL:
            return cntr % 2


# TEST
print([unfaire_muenze() for i in range(50)])
```

3.14 Aufgabe. Bestimmen Sie die Werte $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots \in \{0, 1\}$ derart, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2^k} = \frac{1}{3}$$

erfüllt ist.

Hinweis: Im Binärsystem kann man sehr bequem rechnen. Da Sie Informatiker/innen/ sind, muss das Binärsystem eines Ihrer Lieblingssysteme sein, oder?

3.15 Bsp. Bei manchen elementaren Reihen, deren Glieder in rationaler Arithmetik erstellt werden, kommt erstaunlicherweise als Summe ein interessanter irrationaler Wert aus. Man hat zum Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wer hätte gedacht, dass in einem so einfachen Ausdruck wie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ die Kreiszahl versteckt ist! Wir können diese Formel noch nicht herleiten, aber nach einigen Vorlesungen schon...

3.16 Thm (Linearkombination von Reihen). *Sind* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen, dann ist Ihre Linearkombination* $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ *mit Koeffizienten* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ebenfalls eine konvergente Reihe und es gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

3.17 Def (Absolute Konvergenz)**.** Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ der Beträge der Glieder konvergent ist.

3.18 Thm. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt.*

3.19 Bsp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

3.20. **WARNUNG!** Die konvergenten Reihen, die nicht absolut konvergent sind, sind ziemlich eigenartig!!! Ihr Grenzwert hängt zum Beispiel von der Reihenfolge der Glieder ab.

Die absolut konvergenten Reihen sind dagegen ganz in Ordnung: sie sind im gewissen Sinne ähnlicher zu endlichen Summen.

3.21 Bsp. Aus den Werten der Menge $M := \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots\}$ kann man durch eine geeignete Anordnung der Werte eine Reihe erstellen, die eine beliebige von uns gewünschte Summe hat. Zum Beispiel:

- Starte mit $s_0 := 0$ (vorige Patialsumme) und Zähler $n := 1$ (aktuelles Glied) sowie $i := 1$ (Index zum Verbrauch der positiven Werte) und $j := 1$ (Index zum Verbrauch der negativen Werte).

- Iteriere unendlich wie folgt:

  Ist $s_{n-1} \leq 20$, setze $a_n := 1/i$ und $i := i + 1$, sonst setze $a_n := -1/j$ und $j := j + 1$.

  Generiere die nächste Partialsumme $s_n := s_{n-1} + a_n$ und setze $n := n + 1$.

- Ende der Iteration.

Dieses Verfahren produziert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit der Summe 20. Hierbei werden alle Elemente von M als Glieder von a_n auftauchen, weil die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gleich ∞ ist, was dazu führt, dass man sowohl bei den negativen Elementen als auch bei den positiven Elementen aus M nie aufhört, diese Elemente zu verbrauchen.

Genauso könnte man aber an der Stelle von 20 einen beliebigen Wert vorgeben, etwa 40, und eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ produzieren, die bis auf die Änderung der Anordnung, dieselben Glieder aber eine andere Summe (die 40) hat!

3.22. Wir wollen nun Produkte von Reihen einführen. Wir sind also an einer Reihe interessiert, die auf irgendeine Weise das Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

von zwei Reihen darstellen soll. Wenn wir diesen Ausdruck formal ausmultiplizieren, so erhalten wir die formale Summe

$$s := \sum_{n,k\in\mathbb{N}_0} a_n b_k,$$

in welcher Glieder nicht von einem sondern von zwei Indizes n, k abhängig sind. Das heißt, die Glieder sind nicht durch aufsteigend geordnete ganze Zahlen indexiert, sondern durch Paare aus $\mathbb{N}_0^2$. Für die Paare ganzer Zahlen haben wir aber keine feste Anordnung. Bei der Diskussion der absoluten Konvergenz haben wir aber festgestellt, dass die Anordnung