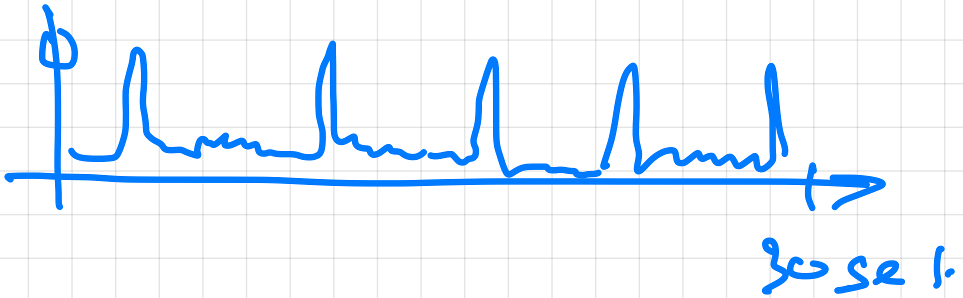
Kapitel VI

Fourier-Reihen

1 Basics

Fourier-Transformation



Zeitdarstellung des Signals. ⟶ Darstellung in Frequenzen und Phasenraum.

Diskrete Fourier Transformation: endliche viele Zeitpunkte

Fourier-Reihen-Entwicklung: beschränkter kontinuierlicher Raum, diskrete Frequenzen

Fourier-Integral: unbeschränkter kontinuierlicher Raum für die Zeit und für Frequenzen.

1.1 Def. Sei $\omega > 0$. Eine **Fourier-Reihe** ist Funktionsreihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)}_{\text{die kte Frequenz}}.$$

Partialsummen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

von Fourier-Reihen nennt man **trigonometrische Polynome**.

einfach nur eine Konstant
(somit $\frac{1}{2}$ wird die Formel schöner)

$$f \xmapsto{FR} \left((a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \right)$$

Lineare Transformation

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$f \xmapsto{\mathcal{F}} (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots)$$

Eine lineare Abbildung!

$(a_k, b_k) \longleftrightarrow$ Amplitude und Phase zur k-ten Frequenz

Bsp $\cos x + \frac{1}{10} \sin(100x)$

Bsp $\cos^2 x$

Bsp $\sin^2 x$

Bsp. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

1.2 Def. Sei $T > 0$. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-**periodisch** wenn $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Den Wert T nennt man **Periode** von f.

$$\cos\left(k\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$$

$$= \cos(k\omega x + 2\pi k)$$

$k \in \mathbb{N}_0$

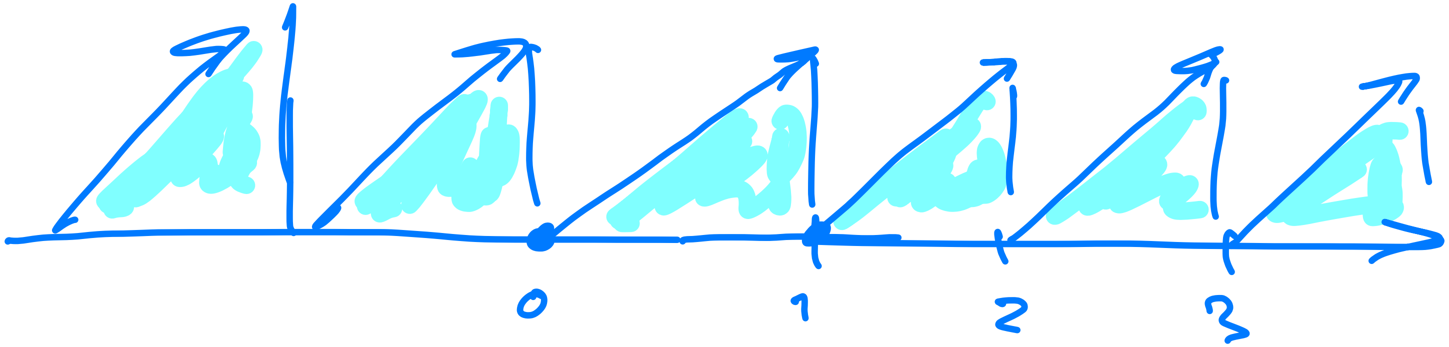
$$= \cos(k\omega x)$$

Das Gleiche für Sinus.

1.3. Wieso $\frac{a_0}{2}$ und nicht einfach a_0? Die Konstante a_0 würde natürlich auch gehen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor a_0 macht aber später die Formeln einheitlicher.

1.4. Glieder der Fourierreihe sind T-periodisch mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1.5. ω ist lediglich ein Skalierungsfaktor für x. Daher reicht es aus, den Fall $\omega = 1$ zu betrachten.



$f(x) = x \qquad 0 \leq x < 1$

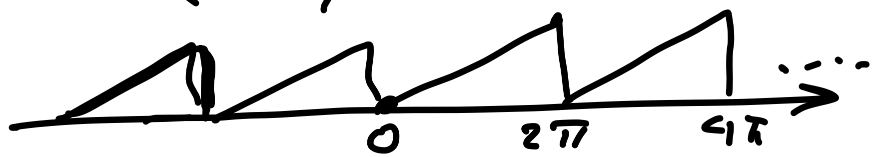
und 1-periodisch erweitert auf $\mathbb{R}$.

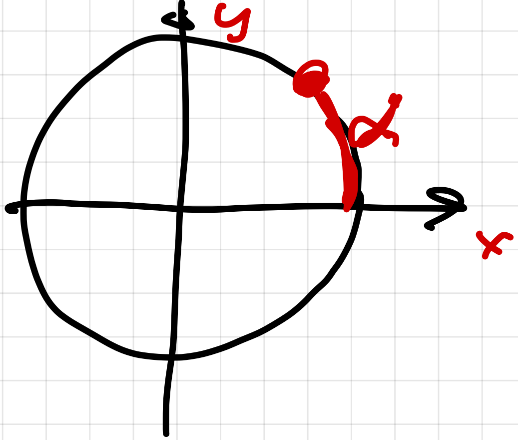
Welches ω soll man wählen, um

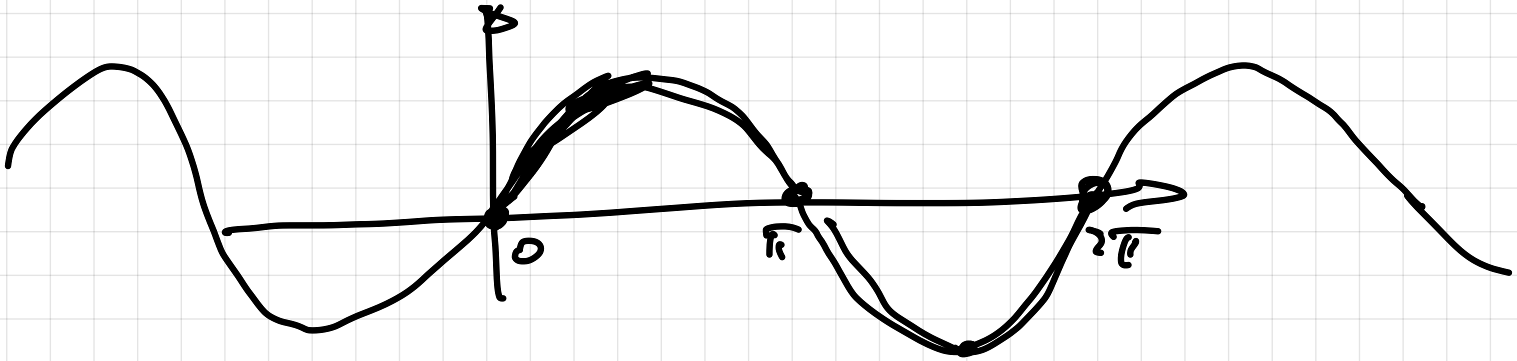
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x)$$

$$\Updownarrow$$

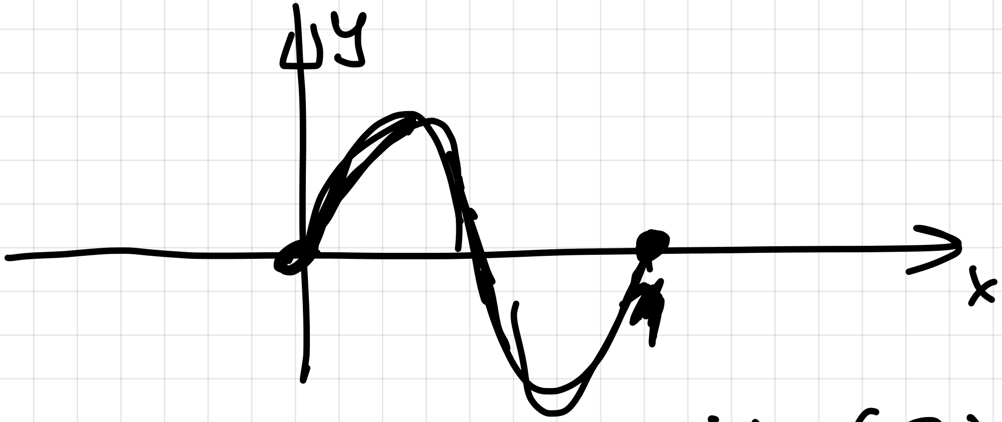
$$f\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$







$\sin(x + 2\pi) = \sin x$



$\sin(2\pi x)$

1.6. Eine T-periodische Funktion ist durch die Angabe auf einem Intervall $[a, b]$ der Länge T eindeutig bestimmt.

Umgekehrt: eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall der Länge T und mit $f(a) = f(b)$, kann T-periodisch auf die gesamte reelle Achse eindeutig erweitert werden.

1.7. Ist $[a, b]$ Intervall der Länge $T > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, die über $[0, T]$ integrierbar ist, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

Das bedeutet: das Integral über jedes Intervall der Länge T ist gleich.

Auch eine Funktion kann ein Vektor sein.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

2 Der Raum $\mathcal{L}^2(0,T)$

V Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit

$\langle u,u\rangle \geq 0$ und $\langle u,u\rangle = 0 \iff u=0$

$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ für alle u,v

$\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$

Abstrakte Definition eines Vektorraums.

2.1 Def. Wir führen den Vektorraum $\mathcal{L}^2(0,T)$ ein, als den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller T-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $[0,T]$, Lebesgue-integrierbar sind, und die Bedingung

$$\int_0^T |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\, x < +\infty.$$

erfüllen. In diesem Raum führen wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}^2(0,T)} = \int_0^T f(x)g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

ein und die zugehörige Norm

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(0,T)} :== \sqrt{\int_0^T f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x}.$$

Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^2(0,T)$ werden identifiziert, wenn man $\|f - g\|_{\mathcal{L}^2(0,T)} = 0$ hat. Das ist z.B. der Fall, wenn sich f und g innerhalb von $[0,T]$ nur in endlich vielen Stellen unterscheiden.

2.2. In der vorigen Definition benutzen wir das Lebesgue-Integral, das wir in diesem Kurs gar nicht eingeführt haben. Das ist für uns kein Problem: für die Beispiele, die wir betrachten, reicht die Theorie der Riemann-Integrale aus.

2.3 (Exkurs in die Lineare Algebra - Orthogonalbasen)**.** Orthogonalbasen sind sehr praktisch. Ist $b_1, \ldots, b_n$ Orthogonalbasis eines Euklidischen Raums so kann man die Zerlegung

$$f = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

für einen gegeben Vektor f durch die Berechnung der Skalarprodukte bestimmen. Skalarmultiplikation mit b_i ergibt

$$\alpha_i = \frac{\langle f, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle}$$

Bei Orthonormalsystemen hat man $\langle b_i, b_i \rangle = 1$.

Wieso betrachtet
man abstrakte Vektorräume?
Abstrakte Euklidische Räume?

Flexibilität

2.4. Die Funktionen des Systems

$$\frac{1}{2},\ \cos\omega x, \cos 2\omega x, \cos 3\omega x, \dots,\ \sin\omega x, \sin 2\omega x, \sin 3\omega x, \dots \tag{VI.1}$$

bilden eine Art “unendliche Orthogonalbasis” für den Raum $\mathcal{L}^2(0,T)$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Das bedeutet:

(a) Je zwei Funktionen dieses Systems sind stets orthogonal bzgl. des Skalarprodukts von $\mathcal{L}^2(0,T)$.

(b) Jedes $f \in \mathcal{L}^2(0,T)$ ist eine “unendliche Linearkombination” der Funktionen des Systems. Das heißt: es gibt eindeutige $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots \in \mathbb{R}$ mit

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x),$$

wobei man diese Gleichung im Raum $\mathcal{L}^2(0,T)$ als den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)\right\|_{\mathcal{L}^2(0,T)} = 0$$

interpretiert.

2.5 Aufgabe. Verifizieren Sie, dass (VI.1) tatsächlich ein orthogonales System bilden. Berechnen Sie auch die $\mathcal{L}^2(0,T)$-Norm jeder Funktion aus (VI.1).

3 Formeln für die Koeffizienten

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \, dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin\alpha\cos\beta = \ldots \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

3.1 (Formeln für die Koeffizienten der Fourier-Reihe)**.** Für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x) \in \mathcal{L}^2(0,T)$$

mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gilt

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos k\omega x \,\mathrm{d}\, x \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin k\omega x \,\mathrm{d}\, x \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

3.2 (Formeln für die Koeffizienten der Fourier-Reihe im Fall $\omega = 1$)**.** Für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$$

gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx \,\mathrm{d}\,x \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}\,x \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Vom Spezialfall zum allgemeinen Fall

$$f\left(\frac{x}{\omega}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{x}{\omega}\right)\cos kx \, dx = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{x}{\omega}\right)\cos\left(k\omega\frac{x}{\omega}\right) d\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

$$= \ldots$$

3.3 (Tipps und Tricks)**.** Man beachte dass $\cos x$ eine gerade und $\sin x$ eine ungerade Funktion ist. Das hat die folgenden Auswirkungen auf die Entwicklung in die Fourier-Reihe:

(a) f gerade, d.h., $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle b_k gleich 0.

(b) f ungerade, d.h., $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle a_k gleich 0.

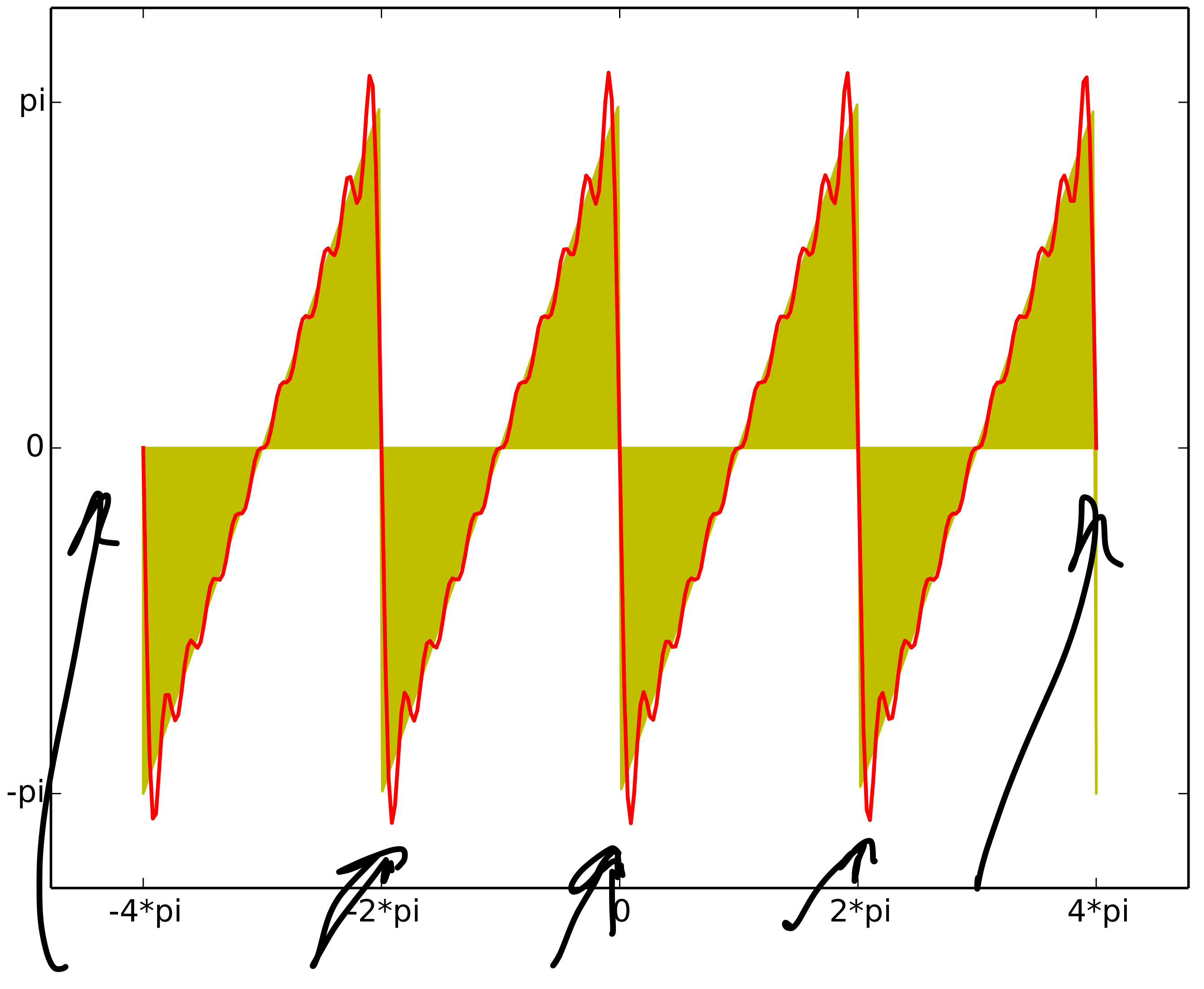
3.4 Bsp. Sei $f(x)$ die Funktion mit $f(x) = x - \pi$ für $0 < x < 2\pi$, die wir 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ erweitern. Da f ungerade ist, gilt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Die Koeffizienten:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin kx \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \, \mathrm{d}\, x = -\frac{2}{k}$$

Approximation durch $\sum_{k=1}^{10} b_k \sin kx$:


pi
0
-pi
-4*pi
-2*pi
0
2*pi
4*pi

3.5 Aufgabe. Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung von $f(x) = \operatorname{sign}(\cos(x))$.

3.6 Aufgabe. Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung von $f(x) = \sin x \cos x$.

geht ohne
Integrieren.

3.7 Aufgabe. Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung von $f(x) = \cos^4 x$.

geht so wie
bei vorigen.

3.8 Aufgabe. Nehmen wir an, Sie haben die Fourier-Entwicklung einer Funktion $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ ausgerechnet. Wie kann man daraus die Fourier-Entwicklung von $f(x+\alpha)$ für ein gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ bestimmen? Geben Sie die Formeln für die Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots$ der Fourier-Entwicklung von $f(x+\alpha)$ in Abhängigkeit von den Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ der Fourier-Entwicklung von $f(x)$. Wie hängen $\tilde{a}_k^2 + \tilde{b}_k^2$ und $a_k^2 + b_k^2$ für $k \in \mathbb{N}$ zusammen?

4 Differenzieren von Fourier-Reihen

4.1 Thm. *Sei f die 2π-periodische Erweiterung einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(2\pi)$. Wenn f und f' zu $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ gehören, dann ergibt sich die Fourier-Entwicklung von f' durch gliederweise Differenzieren der Fourier-Entwicklung von f.*

4.2 (Begründung)**.** Wir betrachten die beiden Fourier-Entwicklungen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$
$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_k \cos kx + b'_k \sin kx).$$

Man hat

$$\begin{aligned}
a'_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx \,\mathrm{d}\, x && \mid \text{Formeln für die Koeffizienten} \\
&= \underbrace{\Big[f(x) \cos kx \Big]_{x=0}^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos kx)' \,\mathrm{d}\, x && \mid \text{Partielle Integration} \\
&= \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}\, x
\end{aligned}$$

Also ist $a_0' = 0$ und $a_k' = kb_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Analog zeigt man auch $b_k' = -ka_k$ für $K \in \mathbb{N}$. Das führ zur Formel:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)'.$$

4.3 Bsp. Wir erweitern $f(x) = (x-\pi)^2$ periodisch von $[0, 2\pi]$ auf $\mathbb{R}$. Da wir die Funktion $x - \pi$ auf $[0, 2\pi)$ bereits in die Fourier-Reihe entwickelt haben, wissen wir, dass man für $f'(x) = 2(x-\pi)$ die Entwicklung

$$f'(x) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

Nun können wir darauf basierend die Entwicklung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

bestimmen. Das Differenzieren dieser Entwicklung gliederweise gibt uns die Entwicklung von $f'(x)$. Daraus lassen sich die Koeffizienten a_k und b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ bestimmen. Wir erhalten

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Zur Berechnung des Koeffizienten a_0 können wir die Standard-Formel

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}\, x$$

benutzen. Wir erhalten

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

4.4. Warnung! Beim Anwenden von Theorem 4.1 sollen die Voraussetzungen beachtet werden! Theorem 4.1 ist für unstetige 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **nicht** anwendbar.

5 Pythagoras in $\mathcal{L}^2(0,T)$

5.1. Wenn wir zwei Funktionen $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ haben:

$$f_s(x) = \frac{a_{s,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{s,k} \cos kx + b_{s,k} \sin kx) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi),$$

so gilt

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} f_1(x) f_2(x) \,\mathrm{d}\, x}_{\text{Skalarprodukt von Funktionen}} = \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = \pi \underbrace{\left(\frac{1}{2} a_{1,0} a_{2,0} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{1,k} a_{2,k} + b_{1,k} b_{2,k}) \right)}_{\substack{\text{ein Skalarprodukt von zwei Folgen} \\ \text{von Fourier-Koeffizienten}}}$$

Im Fall $f_1 = f_2 = f$ erhalten wir...

5.2 Thm (Parseval'sche Gleichung). *Für*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in \mathcal{L}^2(0,2\pi).$$

gilt

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \right).$$

5.3. Parseval'sche Gleichung ist der Satz von Pythagoraus in unendlich vielen Dimensionen.

5.4 Bsp. Wir berechnen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung. Wir wählen als $f(x)$ die Funktion mit $f(x) = x - \pi$ für $0 < x < 2\pi$, die wir 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ erweitern. Da f ungerade ist, gilt

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x = \pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

Die linke Seite ist

$$\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \,\mathrm{d}\, x = \left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{3}.$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Die Koeffizienten b_k sind

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi) \sin kx \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx \,\mathrm{d}\, x = -\frac{2}{k}$$

Das ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{3}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6 Komplexwertige Funktionen

6.1. Oft arbeitet man auch mit komplexwertigen T-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. In diesem Fall definiert man $\mathcal{L}^2(0,T)$ entsprechend als einen $\mathbb{C}$-Vektorraum mit

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(0,T)} = \int_0^T f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

und

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(0,T)} := \sqrt{\int_0^T |f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x}.$$

6.2. Das System $\left(e^{\mathbf{i}kx}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist die Standardwahl einer "Orthogonalbasis" der komplexen Version von $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$. Man definiert die Fourier-Entwicklung dazu als:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathbf{i}kx}.$$

Diese Gleichung interpretiert man als den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathbf{i}kx} \right\|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = 0.$$

Die Formel für die Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\mathbf{i}kx} \,\mathrm{d}\, x.$$

6.3 Bsp. Wir berechnen die Fourier-Entwicklung der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases},$$

die auf die gesamte reelle Achse 2π-periodisch erweitert wird, in der "exponentiellen Basis" $(e^{\mathbf{i}kx})_{k\in\mathbb{Z}}$ und anschließend in der "trigonometrischen Basis". Man hat

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}.$$

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ hat man

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\mathbf{i}kx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-\mathbf{i}kx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{\mathbf{i}}{2\pi k}e^{-\mathbf{i}kx}\right]_{x=0}^{\pi}. \\ &= \frac{\mathbf{i}}{2\pi k}(e^{-\mathbf{i}k\pi} - 1). \\ &= \begin{cases} -\frac{\mathbf{i}}{\pi k} & k \text{ ungerade,} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Das ergibt die Entwicklung

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\mathbf{i}}{\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} e^{\mathbf{i}(2\ell+1)x}$$

in der exponentiellen Basis. Um die Entwicklung in der trigonometrischen Basis zu erhalten, werden die Glieder in Paare zerlegt, sodass $e^{\imath kx}$ und $e^{-\mathbf{i}kx}$ in ein neues Glied aufgenommen werden, das als Summe von zwei Gliedern der vorigen Entwicklung entsteht.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2m-1} \mathbf{i} \big(e^{\mathbf{i}(2m-1)x} - e^{-\mathbf{i}(2m-1)x} \big).$$

Durch die Anwendung der Euler-Formel erhalten wir nun auch die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$$

in der trigonometrischen Basis. (Diese Darstellung kann man natürlich auch direkt erhalten.)

6.4 (Pythagoras)**.** Für zwei Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ mit

$$f_s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{s,k} e^{\mathbf{i}kx}$$

gilt

$$\int_0^{2\pi} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,\mathrm{d}\,x = \langle f_1, f_2\rangle_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = 2\pi \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1,k}\overline{c_{2,k}}}_{\text{ein Skalarprodukt von zwei komplexwertigen Folgen}} .$$

Insbesondere hat man im Fall $f = f_1 = f_2$:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

6.5. Der Raum $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ ist also isometrisch zum komplexen Euklidischen Raum ℓ^2 aller Folgen $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ und mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

Die Norm in diesem Raum ist:

$$\|c\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}.$$

Das Skalarprodukt zu dieser Norm ist:

$$\langle c, d\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

für $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$.

6.6 (Übergang von der "Exponentialbasis" zur "trigonometrischen Basis")**.**

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathbf{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Man hat

$$a_0 = 2c_0$$

und, nach der Euler-Formel,

$$c_k \underbrace{(\cos kx + \mathbf{i} \sin kx)}_{=e^{\mathbf{i}kx}} + c_{-k} \underbrace{(\cos kx - \mathbf{i} \sin kx)}_{=e^{-\mathbf{i}kx}} = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Also gilt

$$a_k = c_k + c_{-k}$$
$$b_k = \mathbf{i}(c_k - c_{-k})$$

für $k \in \mathbb{N}$.

6.7 (Übergang von “trigonometrischen Basis” zur “Exponentialbasis”)**.**

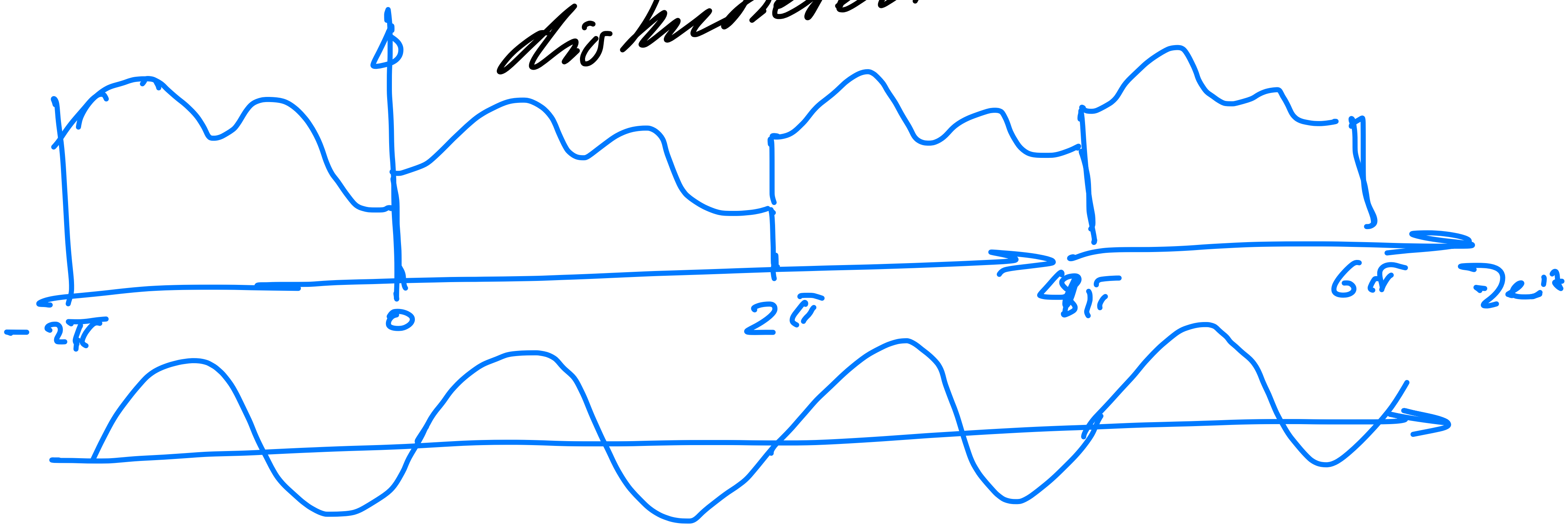
$$c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$c_k = \frac{a_k - \mathbf{i} b_k}{2}$$
$$c_{-k} = \frac{a_k + \mathbf{i} b_k}{2}$$

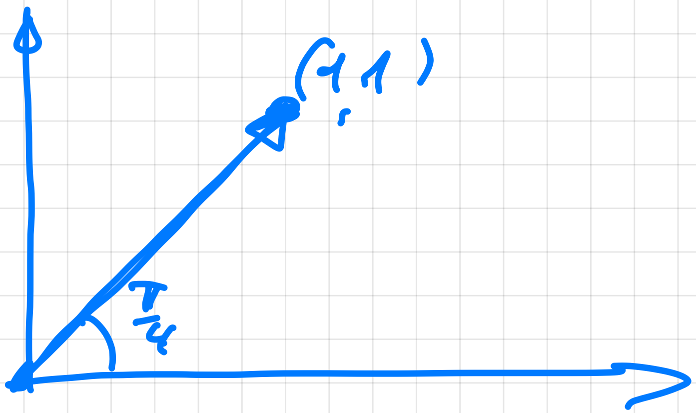
7 Fourierreihen bei Signalverarbeitung

Am besten gleich diskretisieren



Bsp. $1\cdot\cos x + 1\cdot\sin x = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



a_k, b_k

Reine Frequenzen:

$\frac{1}{2}$

$\cos x \quad \sin x$

$\cos 2x \quad \sin 2x$

$\cos 3x \quad \sin 3x$

$\vdots \quad \vdots$

Bsp. $\cos^2 x = \;??$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{2} + \cos 2x$$

7.1. In der Signalverarbeitung ist x der Zeitpunkt (wird deswegen auch oft als t bezeichnet). Der Term

$$h_k(x) := a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

bestimmt die Phase und die Amplitude der k-ten Frequenz. Der Vektor (a_k, b_k) kann in Polarkoordinaten als

$$a_k = A_k \cos \phi_k$$
$$b_k = A_k \sin \phi_k$$

mit $A_k \geq 0$ beschrieben werden. Dann gilt

$$h_k(x) := A_k \cos(k\omega x - \phi_k).$$

Der Term $h_k(x)$ ist der Beitrag der k-ten Frequenz, A_k ist die Amplitude und ϕ_k die Phase der k-ten Frequenz.

7.2. Hier noch Kommentare zur Terminologie und Einheiten:

- x ist Zeit. Wir nehmen an, x ist in Sekunden gegeben.

- A_k ist die Amplitude. Die Einheiten von A_k hängen von der Natur des Signals ab (elektrisch, mechanisch, akustisch usw.).

- $k\omega$ ist die Kreisfrequenz von $h_k(x)$. Wenn man $k\omega x$ als einen Winkel, und somit als einen Punkt auf dem Einheitskreis interpretiert, dann ist $k\omega x$ die Geschwindigkeit dieses Punktes in Radianten pro Sekunde). Radianten sind dimensionslos, also ist die Einheit der Kreisfrequenz $\frac{1}{\text{Sekunde}} = \text{Hz}$.

- $\frac{2\pi}{k\omega}$ ist die Periode von $h_k(x)$ in Sekunden. In so viel Zeit mach $k\omega x$ die volle Runde auf dem Einheitskreis.

- $\frac{k\omega}{2\pi} = (\frac{2\pi}{k\omega})^{-1}$ ist die Anzahl der Runden pro Sekunde, also die Frequenz. Die Einheit dazu ist $\frac{1}{\text{Sekunde}} = \text{Hz}$.

7.3. Bei der Darstellung in der "Exponentialbasis" ergibt sich die k-te Amplitude und Phase aus den Koeffizienten c_k und c_{-k}.

8 Die Verwandten der Fourier-Reihe

8.1 (Diksrete Fourier-Transformation (=DFT))**.** Analog zu Stetigen periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ kann man n-Periodische Funktionen auf $\mathbb{Z}$ betrachten. Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) ist eine Art Fourier reihe für solche Funktionen.

8.2 (Diskrete harmonische Funktionen und 'diskrete Fourier-Reihen')**.** Den analogen harmonischen Funktionen $e^{\mathbf{i}kx}$ entsprechen in der Welt der n-periodischen diskreten Signale die Folgen

$$p_k := \left(e^{\frac{2\pi \mathbf{i} kj}{n}}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$$

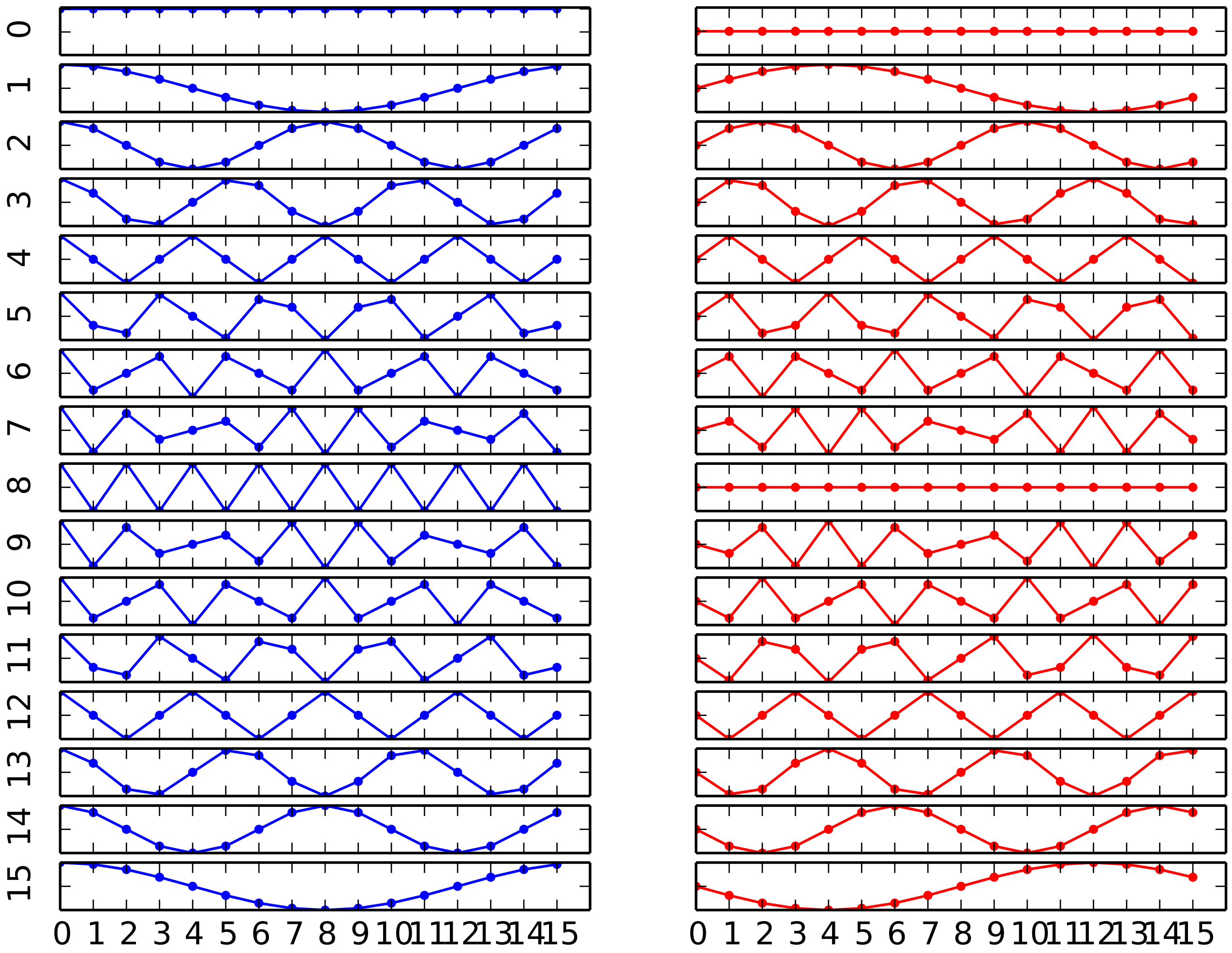
für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Ein n-periodisches Signal $f = (f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ kann man mit dem Vektor $(f_j)_{j=0,\ldots,n} \in \mathbb{C}^n$ identifizieren, weil es ausreicht die Werte, in einer Periode zu notieren.

Die Zerlegung von $f = (f_j)_{j=0,\ldots,n} \in \mathbb{C}^n$ in harmonische Signale ist somit eine Darstellung der Form

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi \mathbf{i} jk}{n}} c_k \tag{VI.2}$$

mit $j = 0, \ldots, n-1$ und $c = (c_k)_{k=0,\ldots,n-1} \in \mathbb{C}^n$.

8.3 Bsp. Hier die Darstellung der komplexen harmonischen Funktionen. Der Realteil der harmonischen Funktionen wird in Blau und der Imaginärteil in Rot dargestellt. Fall $n = 16$:


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

8.4. FFT (= Fast Fourier Transform) ist der schnelle Algorithmus zur Berechnung der DFT. In Matlab als die Funktion fft verfügbar. Hier ein Beispiel zum "Entrauschen" mit Hilfe der DFT: `https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html`

8.5. Fourier-Integrale:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\,x$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (hier muss f nicht periodisch sein). Im Gegenteil zu Fourier-Reihen ist hier das Spektrum (die Anzahl der Frequenzen in der Zerlegung) nicht mehr diskret.

8.6. Potenz-Reihen:

IM AUFBAU: ein Beispiel.

8.7. Multi-Dimensionalen Fourier-Reihen usw.

IM AUFBAU.

8.8. Tschebyscheff-Polynome: $\cos n\phi$ ist ein Polynom in $\cos\phi$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Man hat $\cos n\phi = P_n(\cos\phi)$. Das Polynom P_n wird das Tschebyscheff-Polynom genannt. Das Polynom P_n kann durch eine lineare Rekursion durch P_{n-1} und P_{n-2} dargestellt werden ($P_0 = 1, P_1 = x$).