Agenda:

- Call of Duty, Drehungen, Trigonom. Funktionen
- Potenzreihen, Welche Funktionen kann der Rechner?
- Die Form des Konvergenzbereiches
- Bestimmung des Konvergenzradius →
  Wenn man immer wieder Nullen als Glieder hat …
- Limes Superior, praktische Konsequenzen
- Potenzreihen sind Taylorreihen $\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1-x^2}$
- Differenzieren von Potenzreihen
- Konvergenzbereich wird durch Polstellen "blockiert"
  $1/(1-x)$, $1/(1+x^2)$
- e^x, $\cos x$, $\sin x$ als Potenzreihen
- Euler-Formel (Funktionentheorie)

Potenzreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ Werte, bei uns Elemente von $\mathbb{R}$

c ist der Entwicklungspunkt, bei uns auch ein Element von $\mathbb{R}$.

Bereich der Konvergenz:

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \text{ konvergiert} \right\}$$

nennt man den Konvergenzbereich.

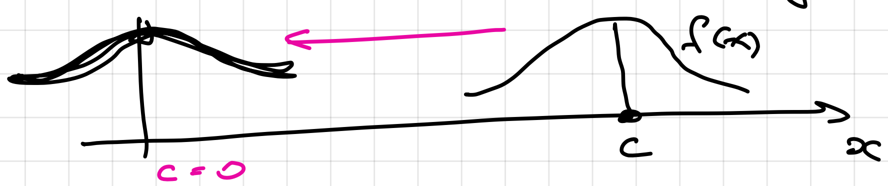
Die Reihe ergibt somit die Funktion $f: B \to \mathbb{R}$

mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$.

Bem: $c \in B$. Also ist $B \neq \emptyset$.

$$f(c) = a_0 \cdot 0^0 + a_1 \cdot 0^1 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots = a_0.$$

Bem. c sorgt für die Verschiebung. $c = 0$ kann immer festgelegt werden.



Bsp $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Was ist der Konvergenzbereich?

$$B = (-1, 1)$$

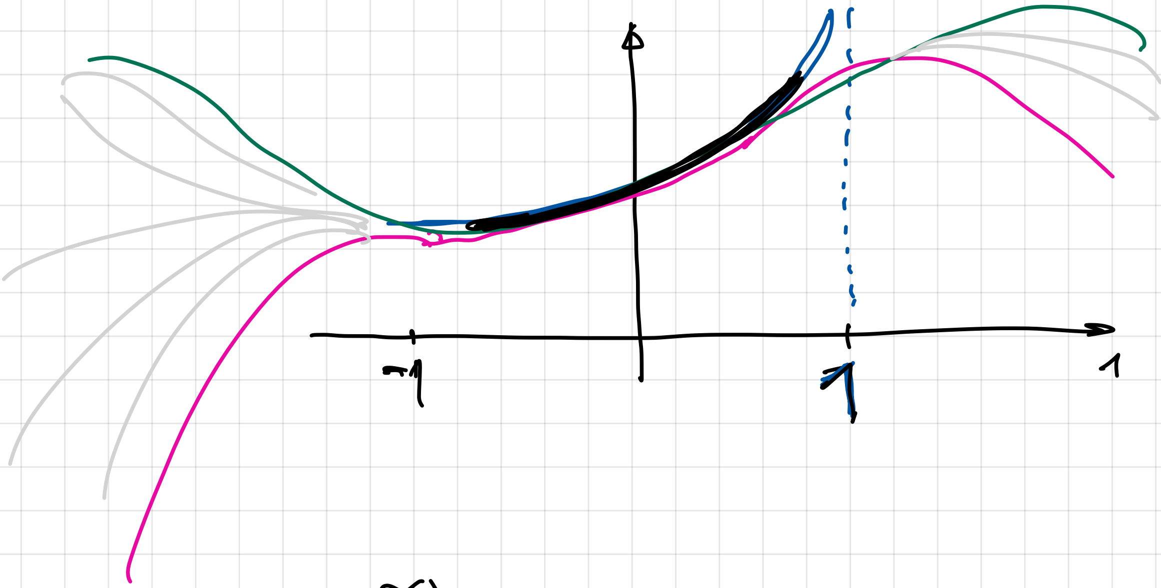
$$|x| < 1 \implies f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$x = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1+1+1+\ldots = \infty$

$x = -1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = (-1)+1-1+1-1+1$

$|x| \Rightarrow$ divergent.

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x) = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots \\ - \; & x f(x) = x^1 + x^2 + x^3 + \ldots \\ \hline & (1-x) f(x) = 1 \end{aligned}}$$



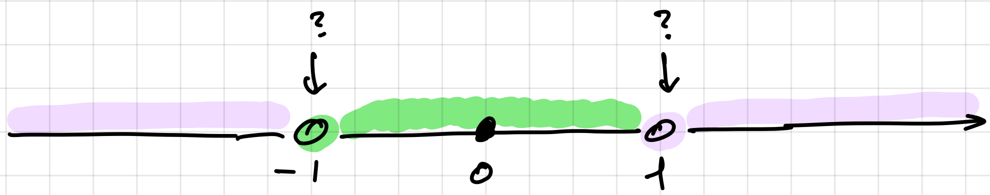
Bsp. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Was ist der Konvergenzbereich dieser Reihe?

Wir fixieren ein $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig und nutzen das Quotienten-Kriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|x^{k+1}/(k+1)\right|}{\left|x^k/k\right|} = \lim_{k\to\infty} |x|\cdot\frac{k}{k+1} = |x|$$

D.h. $|x| < 1 \Rightarrow$ die Reihe ist konvergent

$|x| > 1 \Rightarrow$ die Reihe ist divergent.



$x = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \Rightarrow$ divergent

$x = -1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \Rightarrow$ konvergent, nach dem Leibniz-Kriterium

$\Rightarrow$ Konvergenz-Bereich ist $B = [-1, 1)$.

Theorem Für jede Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ $(a_k, c \in \mathbb{R})$ gibt es einen eindeutigen Wert $R \in [0, \infty]$, den sogenannten Konvergenzradius, mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $|x-c| < R \Rightarrow$ die Reihe konvergiert

(b) $|x-c| > R \Rightarrow$ die Reihe ist divergent.

Die Konvergenzeigenschaften bei $x = c \pm R$ sind a priori unklar. Insbesondere hat man für den Konvergenzbereich B die folgenden Möglichkeiten

- $B = \{c\}$ $(R=0)$
- $B = \mathbb{R}$ $(R = \infty)$
- $B = (c-R, c+R)$
- $B = [c-R, c+R]$
- $B = (c-R, c+R]$
- $B = [c-R, c+R)$

Bsp. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ Was ist der Konvergenzradius? der Konvergenzbereich?

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

Quotientenkriterium $\frac{|x^{k+1}/(k+1)!|}{|x^k/k!|} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow$ konvergent.

Konvergenzbereich ist $B = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R = \infty$.

Bsp $f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{1-x^2}$. Können wir $f(x)$ als eine Potenzreihe darstellen? Ggf., was ist der Konvergenzradius der Reihe?

$$f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} + \frac{1}{1-x^2}$$

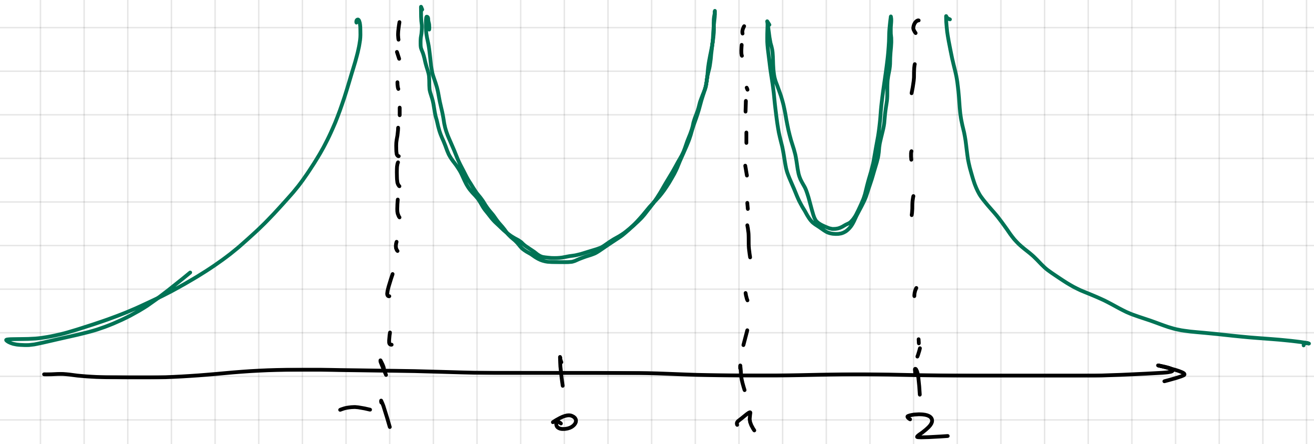
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k + \sum_{l=0}^{\infty} x^{2l}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^0 + \frac{1}{4}x^1 + \frac{1}{8}x^2 + \dots\right) + \left(x^0 + x^2 + x^4 + \dots\right)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}$$

$$\boxed{a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+1}} + 1 & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^{k+1}} & k \text{ ungerade} \end{cases}}$$



Der Konvergenzradius ist 1.

Ein Hintergrund dazu ist: Die Funktion $f(x)$, die wir entwickeln, hat Polen an den Stellen -1 und 1.

Das sind die nächsten Polen zum Entwicklungspunkt.

Wie berechnet man den Konvergenzradius allgemein?

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$x \neq 0$; Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1} x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = \underbrace{\left(\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\right) \cdot |x|}$$

$<1 \Rightarrow$ Reihe konvergent

$>1 \Rightarrow$ Reihe divergent.

$\Rightarrow$ Der Konvergenzradius ist

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}}}$$

Hierbei ist $\frac{1}{0}$ als ∞ zu interpretieren.

Es gibt noch eine zweite Möglichkeit:

$x \neq 0$; Wurzelkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k \cdot x^k|^{1/k} = \underbrace{\left(\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}\right) \cdot |x|}$$

$<1 \Rightarrow$ Reihe konvergent

$>1 \Rightarrow$ Reihe divergent

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}}$$

Auch hier $\frac{1}{0}$ heißt ∞.

Bsp. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2^k + 3^k) x^k$.

Was ist der Konvergenzradius?

$$\lim_{k\to\infty} (2^k + 3^k)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} (3^k)^{1/k} \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^k + 1 \right)^{1/k}$$

$$= 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^k + 1 \right)^{1/k} = 3$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{3}.$$

Nach der anderen Formel:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1} + 3^{k+1}}{2^k + 3^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^k + 1} = 3$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{3}.$$

Ein kleines technisches Problem:
Ein Grenzwert existiert nicht immer, der Konvergenzradius schon.
Wie berechnet man den Konvergenzradius, wenn der Grenzwert, wie z. B.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

nicht existiert.

Bsp.

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+1}} + 1 & , k \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^{k+1}} & , k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$|a_k|^{1/k} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + 1\right)^{1/k} & , k \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/k} & , k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} + 1\right)^{1/k} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{2}$$

Die Formel die immer gilt:

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}}$$

lim sup, limes superior

$\limsup_{k \to \infty} x_k$ ist das Maximum der Grenzwerte aller Teilfolgen der Folge x_k, welche einen endlichen oder unendlichen Grenzwert besitzen.