2.2 Thm. *Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so gilt für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ für alle n und*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

2.3 Thm. *Komposition, Produkt, Quotient und Summe stetiger Funktion sind stetige Funktionen.*

2.4 Thm. *Die folgenden Funktionen sind stetig:*

(a) Polynomialfunktionen und ihre Quotienten.

(b) Funktionen $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$ auf $(0, +\infty)$

(c) Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ mit $a > 0$,

(d) Logarithmische Funktionen $f(x) = \log_a x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$,

(e) Sinus, Kosinus, Tangens

(f) Arcus Sinus, Arcus Kosinus, Arcus Tangens.

2.5 Def (Rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $X \cap [a, +\infty)$. Man nennt f konvergent für $x \to a+$, wenn ein Wert $y \in \mathbb{R}$ existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in X$ mit $a < x < a + \delta$ die Ungleichung $|f(x) - y| < \epsilon$ erfüllt ist.

Den Wert nennt man den rechtsseitigen Grenzwert und bezeichnet als

$$y = \lim_{x \to a+} f(x).$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Bsp.

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sign} x = 1$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x + 2|x|}{3x - |x|} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x + 2|x|}{3x - |x|} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x + 2x}{3x - x}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin x}{2x} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

2.6 Def (Linksseitiger Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $X \cap (-\infty, a]$. Der rechtsseitiger Grenzwert

$$y = \lim_{x \to a-} f(x)$$

ist ein Wert y mit der Eigenschaft, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in X$ mit $a - \delta < x < a$ die Ungleichung $|f(x) - y| < \epsilon$ erfüllt ist.

2.7.

(a) Alternative Bezeichnungen:

$x \downarrow a$ an der Stelle von $x \to a+$ und

$x \uparrow a$ an der Stelle von $x \to a^-$

(b) Bestimmte Divergenz gegen ∞ und $-\infty$ für $x \to a+$ und $x \to a^-$ kann analog zur bestimmten Divergenz für $x \to a$ eingeführt werden.

2.8 Thm (Beschreibung der Konvergenz über die rechts- und linksseitige Konvergenz)**.** *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von $X \cap [a, +\infty)$ und $(-\infty, a] \cap X$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $f(x)$ *ist konvergent für* $x \to a$*.*

(ii) $f(x)$ *ist konvergent für* $x \to a+$ *und für* $x \to a-$*, und es gilt* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$*.*

Gegebenenfalls gilt $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$*.*

2.9 Bsp.

$$\lim_{x\to 0+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

$\Rightarrow f(x)$ ist divergent für $x \to 0$.

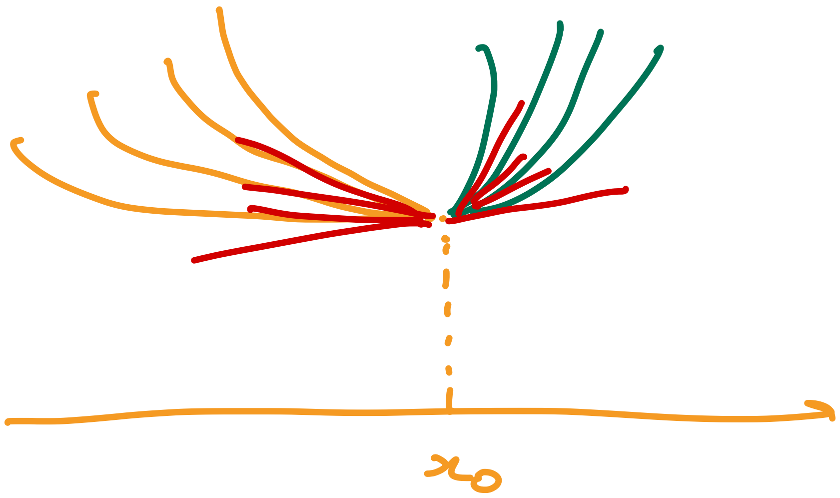
2.10 Def. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, die beschränkt und abgeschlossen ist, nennt man **kompakt**.

2.11 Bsp.

(a) $[a, b]$ ist kompakt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

2.12 Thm (Satz von Weierstraß). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall. Dann erreicht die Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum und Maximum. Das heißt, es gibt $s, t \in \cancel{I}$ mit $f(s) \leq f(x) \leq f(t)$ für alle $x \in [a,b]$.*

$[a,b]$



2.13 Thm (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetige Funktion auf einem Intervall* $[a,b]$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $a < b$. *Sei* $f(a) \leq y \leq f(b)$ *oder* $f(b) \leq y \leq f(a)$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit* $f(\xi) = y$.

2.14. Der Beweis vom Zwischenwertsatz basiert auf einem konstruktiven Ansatz. Man kann den Suchraum für ξ iterativ halbieren.

Beweis dieses Theorems ist algorithmisch:
man kann ein solches ξ beliebig gut
approximieren.

Dichotomie – Approximation.

Mit dem goldenen Schnitt – eine
noch bessere Approximation.

Vorteile dieser Methoden: keine
starken Voraussetzungen an f
(nur Stetigkeit)

3 Asymptotisches Verhalten

3.1 Def. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt

(a) **nach oben beschränkt**, wenn für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \leq C$ für alle $x \in M$ erfüllt ist.

(b) **nach unten beschränkt**, wenn für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \geq c$ für alle $x \in M$ erfüllt ist.

(c) **beschränkt**, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

3.2 Def. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf einer Menge X, die nach oben nicht beschränkt ist. Mann nennt y den Grenzwert der Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ existiert, für welches die Ungleichung $|f(x) - y| \leq \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $x \geq N$ erfüllt ist. Schreibweise: $\lim_{x\to\infty} f(x) = y$.

Analog zum Grenzwert einer Folge.

3.3 Def. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf einer Menge X, die nach unten nicht beschränkt ist. Mann nennt y den Grenzwert der Funktion $f(x)$ für $x \to -\infty$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, für welches die Ungleichung $|f(x) - y| \leq \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $x \leq M$ erfüllt ist. Schreibweise: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y$.

„Gespiegelt" im Vergleich zu 3.2.

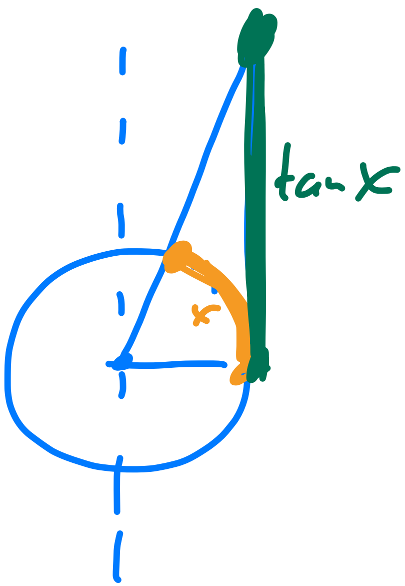
3.4 Bsp.

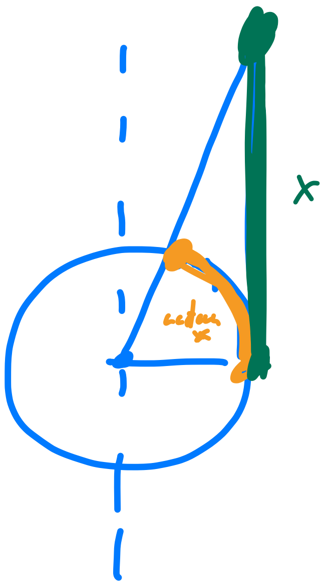
(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Wir hatten bereits ein solches Beispiel mit einer Variablen n aus $\mathbb{N}$. Nun haben wir eine Variable x, die innerhalb der reellen Zahlen gegen ∞ geht.

(b) $\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$

(c) $\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$

ToDo: GeoGebra installieren um solche Bilder zu generieren (und dann als Tikz zu speichern!





Kapitel III

Differentialrechnung I

Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

1 Ableitung

1.1 Def (Ableitung)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und $a \in X$ Häufungspunkt von X. Man nennt f **differenzierbar** in a, wenn ein endlicher Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Man nennt $f'(a)$ die **Ableitung** von an der Stelle a. Somit ist die **Ableitung** f' eine Funktion auf der Menge aller $a \in X$, in deren die Funktion f differenzierbar ist.

1.2. Wenn man $h = x - a$ an der Stelle von x benutzt, kann man die Formel für die Ableitung als

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

umschreiben.

Man schreibt auch in manchen Quellen ~~an:~~ die Formel für die Ableitung so hin:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Quotient der Änderung des Wertes der Funktion zur Änderung des Wertes des Arguments

mit $\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x)$. Hierbei ist

Δx eine (beliebig klein werdende) Änderung von x und

Δf die entsprechende Änderung von f bzgl. einer festen Stelle x.

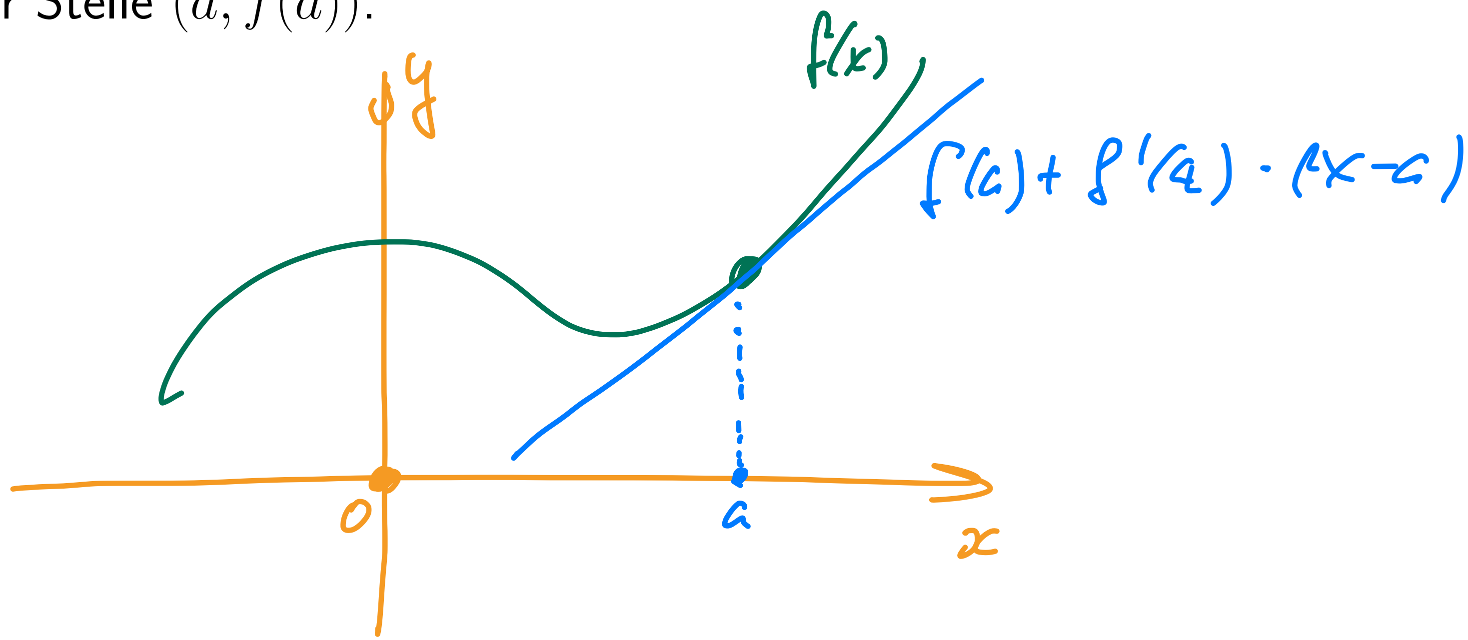
Ist also ein Variablennamen aufzufassen.

1.3 (Leibniz-Notation für die Ableitung und Differentiale)**.** Leibniz hat die Ableitung als einen formalen Quotienten geschrieben
$$\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x} = f'(x).$$
Motivation zu dieser Bezeichnung: die Ableitung ist der Grenzwert eines Quotienten. Diese Gleichung kann man auch formal ~~auch~~ als
$$\mathrm{d}\,f = f'(x)\,\mathrm{d}\,x.$$
umformulieren.

Hierbei nennt man $\mathrm{d}\,f$ Differential von f und $\mathrm{d}\,x$ Differential von x. Das sind formale Symbole. Die intuitive Bedeutung dieser Gleichung ist:
$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x.$$
Das Vorige ~~B~~bedeutet: $\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ mit $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ für $\Delta x \to 0$.

1.4 (Approximation, Tangente)**.** Die (affin)lineare Funktion $f(a)+f'(a)(x-a)$ hat den gleichen Wert und die gleiche Ableitung in a wie die Funktion f. Mit Hilfe des Wertes $f(a)$ von f an der Stelle f und der Ableitung von f an der Stelle a erhält man eine Approximation der Funktion f in einer kleinen Umgebung der Stelle a.

Geometrisch gesehen, beschreibt $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ den Graphen der Tangente zum Graphen von f an der Stelle $(a, f(a))$.



1.5.

(a) Ist $f(t) \in \mathbb{R}$ die Position eines Objekts zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$, dann ist $f'(t)$ die Geschwindigkeit des Objekts im Zeitpunkt t.

(b) Hat man auf der reellen Achse einen Stab $[0, L]$ der Länge $L > 0$, bei dem die Masse des Abschnitts $[0, x]$ für $0 < x < L$ gleich $m(x)$ ist, dann ist die Ableitung $\rho(x) = m'(x)$ die (lineare) Dichte im Punkt x.

1.6 Bsp. Wir berechnen einige Ableitungen direkt aus der Definition.

(a) Quadratische Funktion:

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

(b) Quadratische Wurzel:

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Die Wurzel im Nenner stört, daher wir der Bruch mit $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ ergänzt, um von der Wurzel im Zähler loszuwerden. Mit der Verwendung der dritten binomischen Formel erhalten wir dann

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Hierbei sollen wir voraussetzen, dass man $x > 0$ hat.

(c) Die Funktion $1/x$:

$$(1/x)' = \lim_{h\to 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h}.$$

Es bietet sich an, den Quotienten unter dem Grenzwert durch die Erweiterung mit $(x+h)x$ zu svereinfachen:

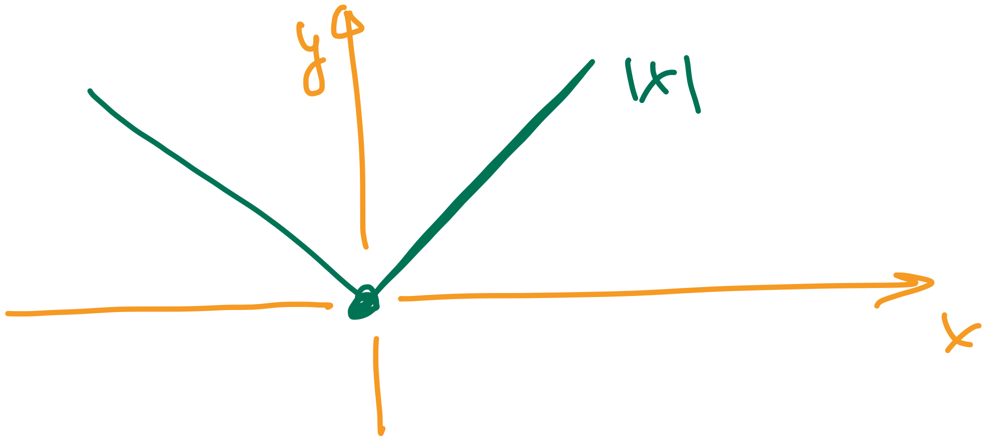
$$(1/x)' = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Hierbei sollen wir $x \neq 0$ voraussetzen.

1.7 Thm. *Jede differenzierbare Funktion ist stetig, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt.*

Beweis später.

1.8 Bsp. $|x|$ ist stetig aber in 0 nicht differenzierbar. Es gibt Beispiele von Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ stetig aber an keiner Stelle differenzierbar sind.



1.9 Thm (Rechenregeln für Differenzierbarkeit)**.** *Für differenzierbare Funktionen f und g gelten die folgenden Regel:*

(a) *Linearität:* $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ *mit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(b) *Produktregel:* $(fg)' = f'g + fg'$

(c) *Quotientenregel:* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(d) *Kettenregel:* $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

1.10. Intuition hinter der Produktregel:

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= (f+\Delta f)(g+\Delta g) - fg\\ &= (\Delta f)g + f(\Delta g) + (\Delta f)(\Delta g).\end{aligned}$$

Wenn Δf und Δg klein sind, dann ist $(\Delta f)(\Delta g)$ noch kleiner (zu klein). Wenn man durch Δx teilt, und dann Δx gegen 0 schickt, erhält man

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

1.11 Bsp (zu Produktregel)**.**

$$
\begin{aligned}
(x^2 \sin x)' &= (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' && \mid \text{Produktregel} \\
&= 2x \sin(x) + x^2 \cos(x). && \mid \text{Formeln für } (x^2)' \text{ and } (\sin x)'
\end{aligned}
$$

Ableitungsrechner und wieso man sie manchmal doch vermeiden soll.

1.12. Intuition hinter der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f+\Delta f}{g+\Delta g} - \frac{f}{g} && \mid \text{Aus der Def. von } \Delta \text{ einer Funktion} \\
&= \frac{(f+\Delta f)g - f(g+\Delta g)}{g(g+\Delta g)} && \mid \text{Als ein Quotient umgeschrieben} \\
&= \frac{(\Delta f)g - f\Delta g}{g(g+\Delta g)} && \mid \text{Klammern aufgelöst, } fg \text{ verschwindet.}
\end{aligned}$$

Wenn man durch Δx teilt und dann Δx gegen 0 schickt, erhält man:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

1.13 Bsp (zu Quotientenregel)**.**

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{(\sin x)' x^2 - \sin x (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2x \sin x}{x^3}.$$

1.14 Bsp (Intuition hinter der Kettenregel an einem Beispiel)**.** Wir berechnen die Ableitung von $z(x) = \sin(x^2)$, wie es Leibniz gemacht hätte. Man hat $z = \sin y$ und $y = x^2$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} &= \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} \cdot \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}. && \text{(Ableitung ist “Quotient”, wir ergänzen formal)}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \sin y\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^2\right)\\ &= (\cos y) \cdot (2x)\\ &= (\cos x^2) \cdot (2x)\\ &= 2x \cos x^2.\end{aligned}$$

Wie man es sonst schreibt is:

$$(\sin x^2)' = (\cos x^2) \cdot (x^2)' = (\cos x^2) \cdot (2x) = 2x \cos x^2.$$