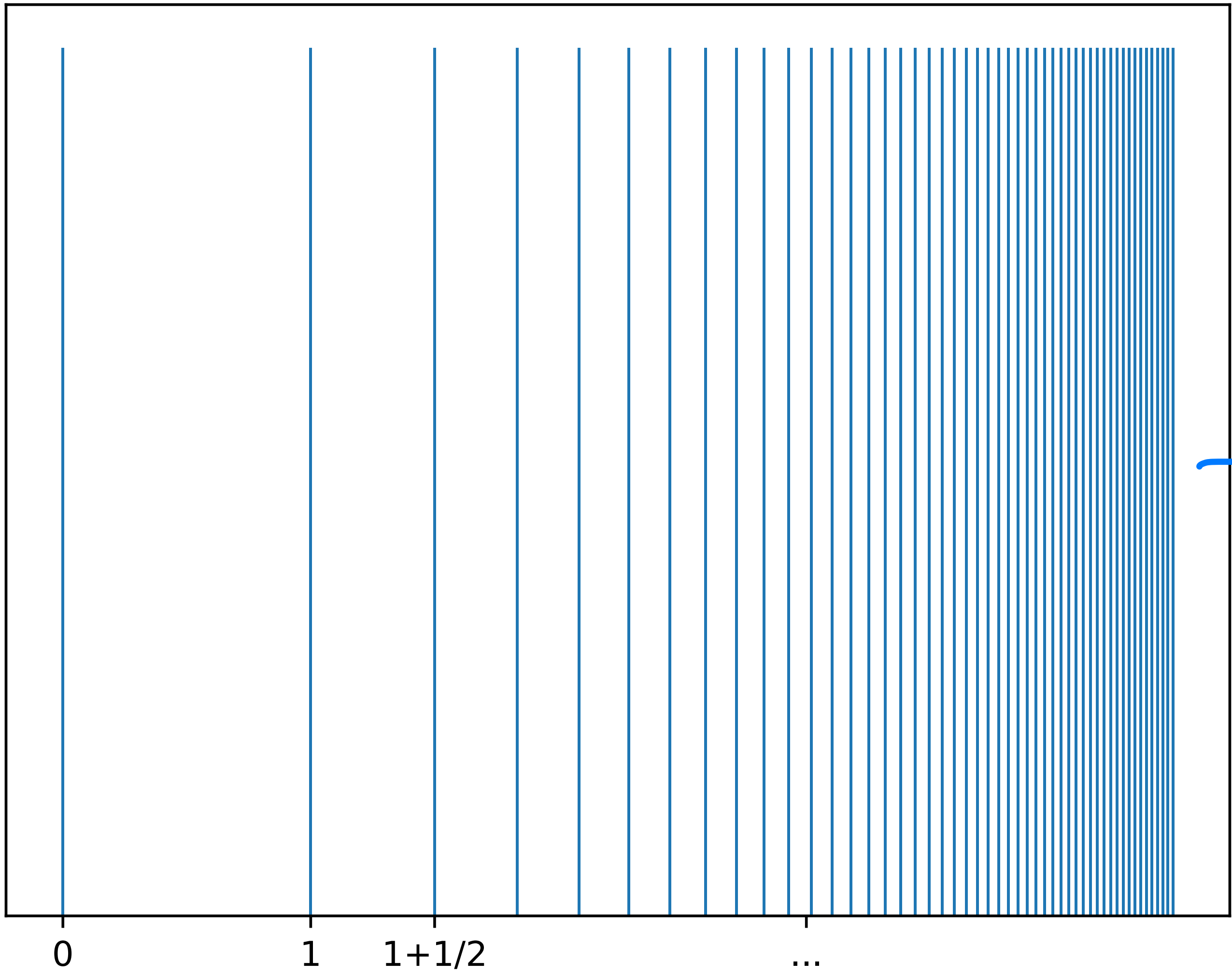
3.8 Bsp. Dass die Folge der Glieder gegen 0 konvergiert, ist im Allgemeinen keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe. Betrachten wir die Reihe

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ mal}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{3 \text{ mal}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k}}_{k \text{ mal}} + \cdots$$

Das heißt, die Glieder sind $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = a_4 = a_5 = \frac{1}{3}$ usw. Die Folge der Glieder geht gegen 0. Die Summe der Reihe ist aber unendlich, denn die k Glieder mit dem Wert $\frac{1}{k}$ ergeben insgesamt $k \cdot \frac{1}{k} = 1$. Da wir aber für jedes k, eine Gruppe aus k Gliedern mit dem Wert $\frac{1}{k}$ haben, ist die Summe der Reihe unendlich.

3.9 Bsp (Harmonische Reihe)**.** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt harmonisch. Die Summe der Reihe ist unendlich!



$\longrightarrow \infty$

Wir zerlegen die Glieder in Gruppen, indem wir ab jeder Zweierpotenz eine neue Gruppe starten:

$$\underbrace{1} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}} + \ldots$$

$$\geq \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + 16 \cdot \frac{1}{32} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

$$= \infty$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{k} \\
&\geq \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{2^{i+1}}}_{2^i \text{ Terme}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

3.10. Es stellt sich heraus, dass die Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ der harmonischen Reihe ziemlich gut durch den natürlichen Logarithmus $\ln n$ approximiert werden kann.

Dass der QuickSort im Durchschnitt die Laufzeit der Ordnung $n \ln n$ hat, hängt auch mit der Partialsumme der harmonischen Reihe zusammen. Mehr Details dazu findet man im Buch von Cormen, Leiserson, Rivest und Stein "Algorithmen: Eine Einführung".

3.11 Bsp (Geometrische Reihe)**.** Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ zu Basis $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist eines der bekanntesten Beispiele einer Reihe. Wir analysieren diese Reihe auf Konvergenz. Es ist nicht besonders schwer, eine abgeschlossene Formel für die Partialsummen

$$s_n = q^0 + \cdots + q^n$$

zu erstellen. Der Wert qs_n ist die Summe $q^1 + \cdots + q^{n+1}$. Wenn wir also von qs_n die Summe s_n abziehen, kompensieren sich die meisten Terme und man erhält $qs_n - s_n = q^{n+1} - 1$. Somit ist

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{I.1}$$

Nun sieht man, dass die geometrische Reihe genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt. In der Tat:

(a) Für $|q| < 1$, geht q^n in der Darstellung (I.1) von s_n gegen 0, woraus man $s_n \to \frac{1}{1-q}$ erhält.


$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 + 1$

$$\begin{aligned} S_n &= q^0 + \dots + q^n \\ - \quad qS_n &= \quad q^1 + \dots + q^{n+1} \\ \hline (1-q)S_n &= q^0 - q^{n+1} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q|<1 \\ \infty & \text{für } q \geq 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{9}{10}} - 1 = 9$$

(b) Für $|q| \geq 1$, ist das Glied q^k der Reihe keine Nullfolge, weil man $|q^k| \geq 1$ hat. Bei $|q| \geq 1$ kann noch zwischen der bestimmten Divergenz und unbestimmten Divergenz unterscheiden, denn:

- Bei $q > 1$, geht s_n gegen ∞.
- Bei $q = -1$ geht die Partiasumme s_n gegen "gar nichts": sie zwischen zwei festen Werten.
- Bei $q < -1$ schwankt die Partialsumme s_n zwischen "sehr positiven" und "sehr negativen" Werten und geht somit ebenfalls gegen "gar nichts".

Zusammenfassend: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist

(a) bei $|q| < 1$ der endliche Wert $\frac{1}{1-q}$ (die Reihe ist konvergent).

(b) bei $q > 1$ der unendliche Wert $+\infty$ (die Reihe ist bestimmt divergent gegen $+\infty$

$$\sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{k+10}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{k}$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{k}$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{10} \frac{1}{1-\frac{2}{5}}$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^{10} \cdot \frac{5}{3}$$

Noch allgemeiner:

$a \in \mathbb{N}_0$

$|q| < 1 \implies$

$$\sum_{k=a}^{\infty} q^{k} = \frac{q^{a}}{1-q}$$

(c) bei $q \leq -1$ "gar nichts" (die Reihe ist unbestimmt divergent).

$0{,}11111111111 \ldots\ldots = \frac{1}{9}$

$$
\begin{array}{l}
1{,}0 : 9 = 0{,}11111 \\
\underline{\;9\;} \\
\;\;10 \\
\;\;\underline{\;9\;} \\
\;\;\;\;10 \\
\;\;\;\;\underline{\;9\;} \\
\;\;\;\;\;\;10
\end{array}
$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 = \frac{10}{9} - 1$$

$$= \frac{1}{9}$$

$$0{,}111111\ldots_2 = 1$$

$$10_2 = 2_{10}$$

$$11_2 = 3_{10}$$

3.12 Bsp (Dezimaldarstellung von Zahlen)**.** Eigentlich ist die Darstellung von reellen Zahlen mit Hilfe von potenziell unendlich vielen Nachkommastellen ebenfalls eine Reihe. Wenn wir zum Beispiel die Zahl $0{,}\overline{1} = 0{,}1111\cdots$ betrachten, so meinen wir darunter die Summe der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}.$$

Schreiben Sie diese Zahl als Bruch. Bei allgemeinen Zahlen der Form $0{,}z_1 z_2 z_3 \cdots$ mit den Nachkommastellen $z_1, z_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$ ist die entsprechende Summe gleich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{10^k}.$$

Aufgabe: Man bestimme die Summe der Reihe

$$\sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

3.13 Aufgabe. Eine Programmfunktion wirft innerhalb einer While-Schleife iterativ eine faire Münze. Sobald eine Zahl geworfen wird, terminiert Ihre Funktion. Dabei ist der Rückgabewert 1, wenn die Funktion nach einer ungeraden Anzahl der Iterationen terminiert hat, und 0 sonst. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Funktion mit dem Rückgabewert 1 terminiert? Was hat diese Wahrscheinlichkeit mit Reihen zu tun?

Hinweis: Die elementare Wahrscheinlichkeitstheorie hatten Sie in der Schule.

```
import random

KOPF=0
ZAHL=1

def unfaire_muenze():
    cntr=0
    while True:
        cntr+=1
        if random.randint(KOPF,ZAHL)==ZAHL:
```

```
        return cntr % 2


# TEST
print([unfaire_muenze() for i in range(50)])
```

3.14 Aufgabe. Bestimmen Sie die Werte $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots \in \{0, 1\}$ derart, dass die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{2^k} = \frac{1}{3}$$

erfüllt ist.

Hinweis: Im Binärsystem kann man sehr bequem rechnen. ~~Da Sie Informatiker/innen/ sind, muss das Binärsystem eines Ihrer Lieblingssysteme sein, oder?~~

Diese Aufgabe hängt wegen $\frac{1}{2^k}$ mit dem Binärsystem zusammen.

3.15 Bsp. Bei manchen elementaren Reihen, deren Glieder in rationaler Arithmetik erstellt werden, kommt erstaunlicherweise als Summe ein interessanter irrationaler Wert aus. Man hat zum Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wer hätte gedacht, das in einem so einfachen Ausdruck wie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ die Kreiszahl versteckt ist! Wir könne diese Formel noch nicht herleiten, aber nach einigen Vorlesungen schon...

3.16 Thm (Linearkombination von Reihen). *Sind* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen, dann ist Ihre Linearkombination* $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ *mit Koeffizienten* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ebenfalls eine konvergente Reihe und es gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

3.17 Def (Absolute Konvergenz)**.** Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ der Beträge der Glieder konvergent ist.

3.18 Thm. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt.*

Absolute Konvergenz $\Longrightarrow$ Konvergenz.

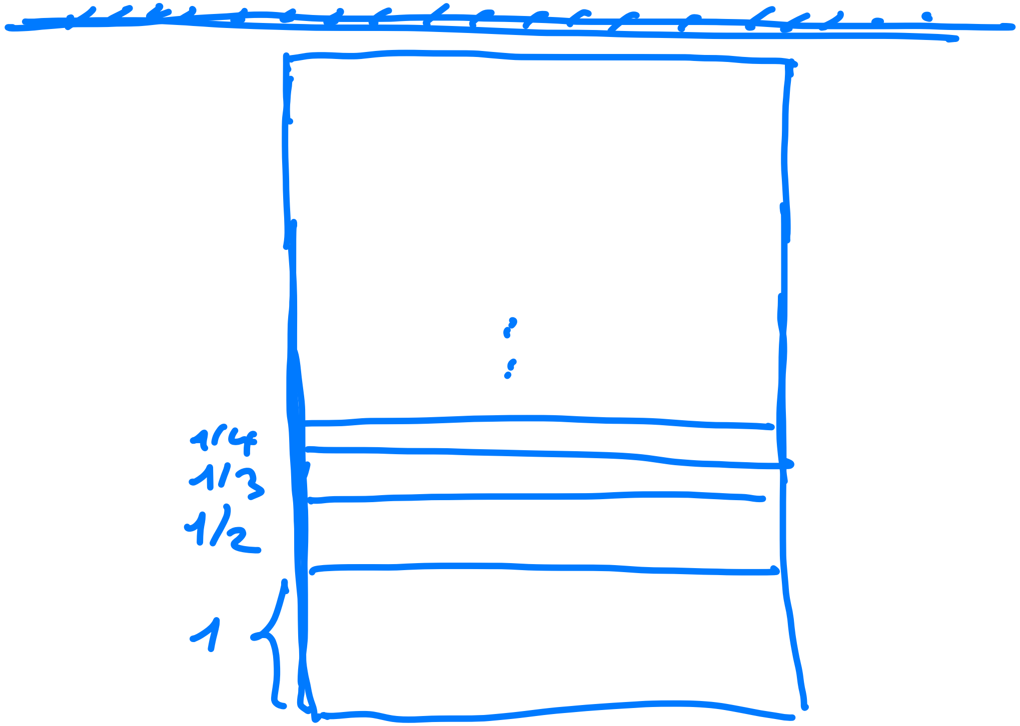
3.19 Bsp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent,

denn $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe.

Wieso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ dennoch konvergent ist, wird noch geklärt.

3.20. **WARNUNG!** Die konvergenten Reihen, die nicht absolut konvergent sind, sind ziemlich eigenartig!!! Ihr Grenzwert hängt zum Beispiel von der Reihenfolge der Glieder ab.

Die absolut konvergenten Reihen sind dagegen ganz in Ordnung: sie sind im gewissen Sinne ähnlicher zu endlichen Summen.



3.21 Bsp. Aus den Werten der Menge $M := \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots\}$ kann man durch eine geeignete Anordnung der Werte eine Reihe erstellen, die eine beliebige von uns gewünschte Summe hat. Zum Beispiel:

- Starte mit $s_0 := 0$ (vorige Patialsumme) und Zähler $n := 1$ (aktuelles Glied) sowie $i := 1$ (Index zum Verbrauch der positiven Werte) und $j := 1$ (Index zum Verbrauch der negativen Werte).

- Iteriere unendlich wie folgt:

  Ist $s_{n-1} \leq 20$, setze $a_n := 1/i$ und $i := i+1$, sonst setze $a_n := -1/j$ und $j := j+1$.

  Generiere die nächste Partialsumme $s_n := s_{n-1} + a_n$ und setze $n := n + 1$.

- Ende der Iteration.

Dieses Verfahren produziert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit der Summe 20. Hierbei werden alle Elemente von M als Glieder von a_n auftauchen, weil die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ gleich ∞ ist, was dazu führt, dass man sowohl bei den negativen Elementen als auch bei den positiven Elementen aus M nie aufhört, diese Elemente zu verbrauchen.

Genauso könnte man aber an der Stelle von 20 einen beliebigen Wert vorgeben, etwa 40, und eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ produzieren, die bis auf die Änderung der Anordnung, dieselben Glieder aber eine andere Summe (die 40) hat!

3.22. Wir wollen nun Produkte von Reihen einführen. Wir sind also an einer Reihe interessiert, die auf irgendeine Weise das Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

von zwei Reihen darstellen soll. Wenn wir diesen Ausdruck formal ausmultiplizieren, so erhalten wir die formale Summe

$$s := \sum_{n,k\in\mathbb{N}_0} a_n b_k,$$

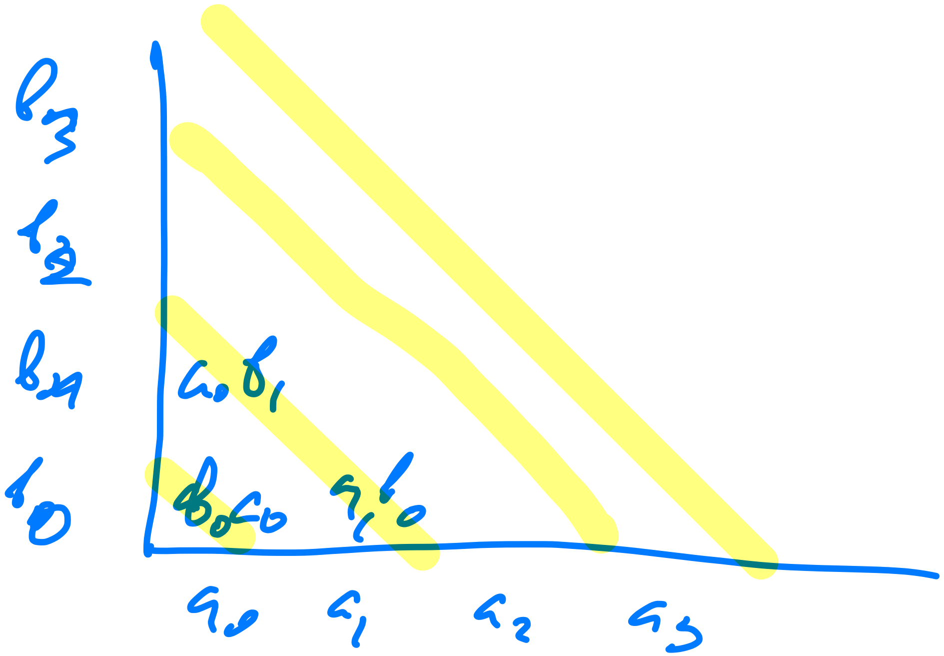
in welcher Glieder nicht von einem sondern von zwei Indizes n, k abhängig sind. Das heißt, die Glieder sind nicht durch aufsteigend geordnete ganze Zahlen indexiert, sondern durch Paare aus $\mathbb{N}_0^2$. Für die Paare ganzer Zahlen haben wir aber keine feste Anordnung. Bei der Diskussion der absoluten Konvergenz haben wir aber festgestellt, dass die Anordnung der Glieder im Allgemeinen Auswirkungen auf den Wert der Reihe hat. Das bedeutet, dass man das Produkt von

	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$
a_0	$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$	$a_0 b_3$	$\dots$
a_1	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	$\dots$
a_2	$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	$\dots$
a_3	$a_3 b_0$	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	$\dots$
a_4	$a_4 b_0$	$a_4 b_1$	$a_4 b_2$	$a_4 b_3$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

allgemeinen konvergenten Reihen nicht (sinnvoll) einführen kann. Wenn man sich aber auf die absolut konvergenten Reihen einschränkt, hat man das beschriebene Problem nicht, sodass die formale Summe s durch eine absolut konvergente Reihe beschrieben werden kann, zum Beispiel so:

$$s := \underbrace{a_0b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0b_1 + a_1b_0}_{c_1} + \underbrace{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0}_{c_2} + \underbrace{a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3}_{c_3} + \cdots .$$

Man zerlegt hier die Gesamtsumme der Werte a_nb_k in Gruppen nach dem Wert von $n + k$.



3.23 Def (Produkt absolut konvergenter Reihen)**.** Das **Cauchy-Produkt** von zwei absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ is als die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right)}_{c_k}$$

mit den Gliedern $c_0, c_1, c_2, \ldots$ definiert.

3.24 Thm. *Das Cauchy-Produkt von absolut konvergenten Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *ist eine absolut konvergente Reihe, für welche die Gleichung*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

erfüllt ist.

3.25 Bsp. Jede konvergente geometrische Reihe ist absolut konvergent, denn

$$|q| < 1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} q^k \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} |q^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |q|^k.$$

$$2^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

Cauchy-Produkt-Formel

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k \implies \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)2^{-k} = 4$$

$$4 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k 2^{-k} + 2^{-k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-k} + 2$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k 2^{-k} = 4 - 2 = 2 .$$

3.26 Bsp (Quadrat einer geometrischen Reihe.)**.** Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$. Da diese Reihe absolut konvergent ist (das ist klar - die Glieder sind nichtnegativ), können wir das Quadrat dieser Reihe als das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst darstellen. Man hat

$$\begin{aligned} 2^{-0}2^{-0} &= 1 \cdot 2^{-0}, \\ 2^{-0}2^{-1} + 2^{-1}2^{-0} &= 2 \cdot 2^{-1}, \\ 2^{-0}2^{-2} + 2^{-1}2^{-1} + 2^{-2}2^{-0} &= 3 \cdot 2^{-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gilt also

$$4 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k2^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-k} + 2$$

Das gibt uns die interessante Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} k2^{-k} = 2.$$

Zufällige Zahl: "Die Nummer des Münzwurfs, in dem man bei einem Wurf einer fairen Münze das erste Mal den Kopf geworfen hat".

Was ist der Erwartungswert dieser Zahl! Vgl. die Diskussion oben!

3.27 Aufgabe. Finden Sie eine Formel für $\sum_{k=0}^{\infty} kq^k$ im Fall $|q| < 1$.

3.28 Aufgabe. In einem Casino zahlen Sie für ein Spiel den Eintrittspreis von g Euro und dürfen dann eine faire Münze solange werfen, bis sie eine Zahl geworfen haben. Haben Sie die Zahl das erste mal beim k-ten Wurf erhalten, dann zahlt Ihnen das Casino k Euro. Wenn Ihre Würfe zum Beispiel Kopf, Kopf, Kopf, Kopf, Kopf, Zahl waren, erhalten Sie 6 Euro.

Was ist der faire Preis für dieses Spiel? Oder anders formuliert: bestimmen Sie für dieses Spiel den Wert g^* derart, dass das Casino beim Eintrittspreis $g > g^*$ Geld (im Durchschnitt) gewinnt und beim Eintrittspreis $g < g^*$ Geld (im Durchschnitt) verliert.

Hinweise: Die Wahrscheinlichkeitstheorie hatten Sie in der Schule. Es gibt mehrere Weisen, diese Aufgabe zu lösen, unter anderem eine sehr direkte Weise, die auf den oben diskutierten Formeln für Reihen basiert.

3.29 Def. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k a_{k+1} \leq 0$ für alle $k \geq 0$ nennt man **alternierend**.

Genauso definiert man alternierende Reihen bei Indexierung ab einem anderen Index (wie 1).

3.30 Bsp. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist ein Standardbeispiel einer alternierenden Reihe.

3.31. Bis auf das Vorzeichen kann jede alternierende reellwertige Reihe als

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

mit $a_k \geq 0$ für alle geschrieben werden. Der Faktor $(-1)^k$ im Glied der Reihe sorgt also für die Wahl des Vorzeichens des aktuellen Glieds $(-1)^k a_k$, während der Faktor a_k den Betrag des Glieds bestimmt.

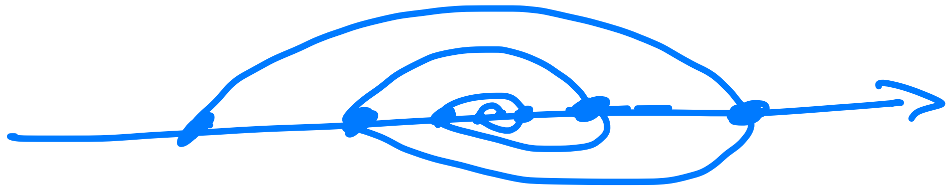
3.32 Thm (Leibniz-Kriterium). *Ist* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge nicht-negativer reeller Zahlen, dann ist die alternierende Reihe*

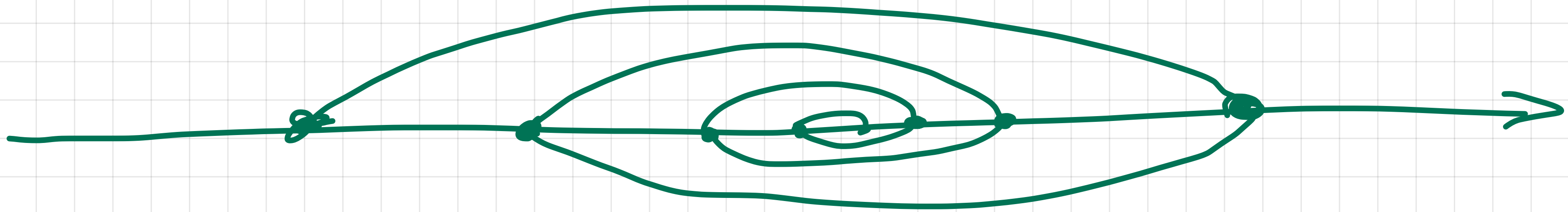
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$$

konvergent. Darüber hinaus wird die Summe s *dieser Reihe durch die Partialsummen* s_n *mit der folgenden Präzision approximiert:*

$$\underbrace{|s - s_n| \leq a_{n+1}.}$$

Das gibt uns
die Kontrolle über
die Geschwindigkeit der Konvergenz
der Reihe.





$$-a_{n+1} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \le a_{n+1}$$

$n+1$ gerade $\Rightarrow$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k = \underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}_{\geq 0} + \dots$$

$$\geq 0$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k = a_{n+1} \underbrace{- a_{n+2} + a_{n+3}}_{\le 0} \underbrace{- a_{n+4} + a_{n+5}}_{\le 0}$$

$$\le a_{n+1}.$$

Bei $n+1$ gerade analog: $-a_{n+1} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \le 0$

3.33. Die Glieder der alternierenden Reihe “schwanken” um den Nullwert. Das Leibniz-Kriterium besagt, dass im Fall von Schwankungen, die immer geringer werden und im Grenzwert verschwinden die zugrundeliegende Reihe konvergent ist.

3.34 Def. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit nichnegativen Gliedern b_k nennt man eine Majorante der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn für ein k_0 die Ungleichung $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$ erfüllt ist.

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$|a_k| \leq b_k$$

Bsp.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$= 1 + \frac{2}{4}$$

$$= 1.5$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} k^k \geq 2^k & \text{für alle } k \geq 2 . \\ \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k} & \text{für alle } k \geq 2 \end{array}}$$

3.35 Thm (Majorantenkriterium)**.** *Eine Reihe, die eine konvergente Majorante besitzt, ist absolut konvergent.*

3.36 Def. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit nichnegativen Gliedern b_k nennt man eine Minorante der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn für ein k_0 die Ungleichung $a_k \geq b_k$ für alle $k \geq k_0$ erfüllt ist.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Bsp

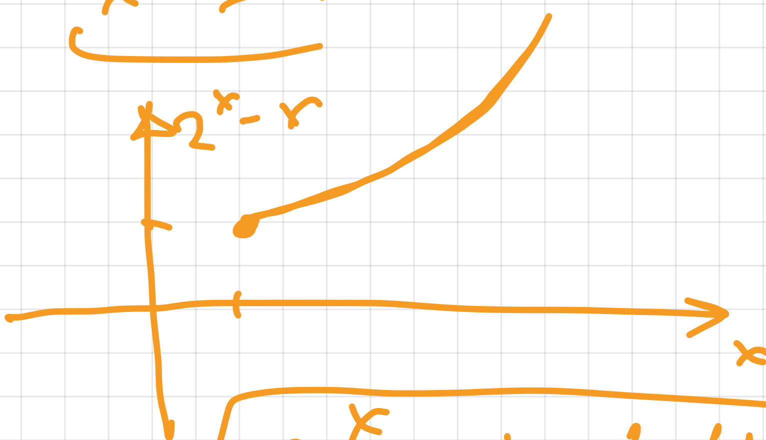
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3$$

$$k \le 2^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

$$(2^x - x)' = \ln 2 \; 2^x - 1 \ge \frac{1}{2} 2^x - 1 \overset{?}{\ge} 0$$

$$\ln 2 \ge \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 \ln 2 \ge 1$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{2 \ln 2} \ge e$$
$$\Leftrightarrow \quad (e^{\ln 2})^2 \ge e$$
$$\Leftrightarrow \quad 2^2 \ge e \qquad \text{ja :)}$$

$$2^{x-1} \ge 1$$
$$x - 1 \ge 0$$
$$\underline{x \ge 1}$$



$$\boxed{2^x \ge x + 1 \quad \text{für } x \ge 1}$$

$k \le 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktion über k

(IA) $k=0$: $0 \le 2^0$ v.

(IV). Sei $k \in \mathbb{N}_0$ ein Wert, für welchen $k \le 2^k$ gilt.

(IS). $k \rightsquigarrow k+1$.

z.z.: $k+1 \le 2^{k+1}$

$$k+1 \overset{(IV)}{\le} 2^k + 1 \overset{?}{\le} 2^{k+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 \le 2^k$$ stimmt!

3.37 Bsp. Wir analysieren die Reihe $\sum_{k=\cancel{1}\,0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ auf Konvergenz:

$$\sum_{k=\cancel{1}\,0}^{\infty} \frac{k}{3^k} \leq \sum_{k=\cancel{1}\,0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \sum_{k=\cancel{1}\,0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cancel{<\infty}. = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 < \infty$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{k=\cancel{1}\,0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ ist konvergent. und wir wissen sogar, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} \leq 3$ gilt.

3.38 Thm (Minorantenkriterium)**.** *Eine Reihe, die eine divergente Minorante besitzt, ist divergent.*

3.39 Bsp. Wir analysieren die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ auf Konvergenz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ ist divergent.

$$\frac{1}{\ln k} \overset{?}{\geq} \frac{1}{k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln k \leq k$$

$$(x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$$

für $x \geq 1$

3.40 Thm (Quotientenkriterium für Konvergenz). *Gibt es für* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *Werte* $k_0 \in \mathbb{N}$ *und* $0 \leq q < 1$ *derart, dass* $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$ *für alle* $k \geq k_0$ *erfüllt ist, dann ist diese Reihe absolut konvergent.*

Nehmen wir als Beispiel den Fall $k_0 = 0$.

Aus $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$ erhält man

$$|a_k| \leq q^k |a_0| \text{ durch Induktion}$$

Daher hat man $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k |a_0| = \frac{|a_0|}{1-q} < \infty.$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \exists q \in [0,1)\ \forall k \in \mathbb{N}: k \geq k_0 \Rightarrow \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q.$

Die Voraussetzung aus dem Quotientenkriterium als Wächter aufgeschrieben.

Bedeutung: Eine Schrumpfung (mindestens) des Glieds um einen festen Faktor ist vorhanden

$\Longrightarrow$ Reihe konvergent.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\qquad \frac{1/(k+1)}{1/k} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$ wächst in k und bleibt unter 1,

aber man findet keinen festen Faktor q, der passt.

3.41 Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{3^k}}_{=a_k}$ ist nach dem Quotientenkriterium konvergent, denn

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)3^k}{3^{k+1}k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{1}{3} \leq \underbrace{\frac{2}{3}}_{=q} < 1.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k < \infty$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Die Voraussetzung des Theorems 3.40 ist für die harmonische Reihe nicht erfüllt.

$$\frac{1/(k+1)}{1/k} = \frac{k}{k+1} < 1$$ aber

Können wir $q = 0.9$ garantieren? Nein $k = 99$

Ab $k \geq 99$ gilt $\frac{k}{k+1} \geq q$ nicht?

Können wir $q = 0.99$ garantieren? Vgl. $k \geq 999$

3.42 Thm (Quotientenkriterium für Divergenz)**.** *Gibt es für* $\sum_{k=0}^{n} a_k$ *Werte* $k_0 \in \mathbb{N}$ *und* $q > 1$ *derart, dass* $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq q$ *für alle* $k \geq k_0$ *erfüllt ist, dann ist diese Reihe divergent.*

Version Light:

Wachstum des Glieds einen festen Faktor $\Longrightarrow$ Divergenz der Reihe

Version Pro:

Wachstum des Glieds (vom Betrag her) um einen festen Faktor ab einem festen Index $\Longrightarrow$ Divergenz der Reihe.

3.43 Thm (Quotientenkriterium für Konvergenz in der Grenzwertform). *Gilt für die Reihe* $\sum_{k=0}^{n} a_k$ *die Ungleichung*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1,$$

dann ist diese Reihe absolut konvergent.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ $\qquad \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cdot 3^k}{3^{k+1}\cdot k}$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

$\Longrightarrow$ die Reihe konvergiert absolut.

3.44 Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\overset{kq^k}{\cancel{\frac{k}{q^k}}}}_{=a_k}$ ist nach dem Quotientenkriterium konvergent für jedes $0 \leq q < 1$, denn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{kq^{k+1}}{(k+1)q^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) q = q \in [0,1).$$

3.45 Thm (Quotientenkriterium für die Divergenz in der Grenzwertform)**.** *Gilt für die Reihe* $\sum_{k=0}^{n} a_k$ *die Ungleichung*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1,$$

dann ist diese Reihe divergent.

3.46. Bei $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1$ kann man a priori nichts sagen:

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent und

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

Kapitel II

Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

1 Grenzwert einer Funktion

Wann kann man x entlang einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ schicken.

1.1 Def. Der topologische **Abschluss** $\overline{M}$ einer Teilmenge M der reellen Zahlen ist die Menge der Grenzwerte konvergenter Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Menge M mit $M = \overline{M}$ nennt man **abgeschlossen**.

$\overline{(0,1)} = [0,1]$

1.2. M ist stets eine Teilmenge von $\overline{M}$.

1.3 Bsp.

(a) $[0, 1]$ ist abgeschlossen. Mit anderen Worten: wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten aus $[0, 1]$ einen Grenzwert besitzt, dann liegt dieser Grenzwert ebenfalls in $[0, 1]$.

(b) $[0, 1)$ ist nicht abgeschlossen, denn $\overline{[0, 1)} = [0, 1]$.

(c) Für $M = \left\{\frac{1}{t} : t \in \mathbb{N}\right\}$ gilt $\overline{M} = \{0\} \cup M$.

1.4 Def. Sei $p \in \mathbb{R}$ und M Teilmenge von $\mathbb{R}$. Mann nennt p **Häufungspunkt** von M, wenn p im Abschluss von $M \setminus \{p\}$ liegt.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M: 0 < |x-p| < \varepsilon \iff: p$ Häufungspunkt von M

Informell:
Man kann innerhalb von M beliebig nah an p herankommen, ohne direkt in p zu sein.

Das bedeutet: man kann x innerhalb von M gegen p schicken.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und sei $p \in \mathbb{R}$.
Dann heißt p Häufungspunkt von M, wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : 0 < |x-p| < \varepsilon$$

Bsp. $[0,1)$

$[0,1]$ ist die Menge aller Häufungspunkte von $(0,1)$.

Bsp. $\{ \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \} = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \}$

0 ist der Häufungspunkt dieser Menge.

Bsp. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}$ in einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt isoliert, wenn $\exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in M : |x-p| \geq \varepsilon$.

$[0,1] \cup \{2\}$

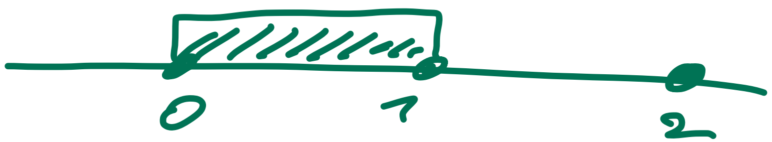
Die 2 ist der isolierte Punkt dieser Menge

1.5 Bsp.

(a) Jeder Punkt von $[0,1]$ ist ein Häufungspunkt von $[0,1]$.

(b) 0 ist der einzige Häufungspunkt der Menge $M = \{1/t : t \in \mathbb{N}\}$. Die Elemente von M häufen sich nur in 0, und nirgendwo sonst.

(c) Alle Punkte aus $[0,1]$ sind Häufungspunkte von $M = [0,1] \cup \{2\}$. Es gibt keine anderen Häufungspunkte. Insbesondere ist der Punkt 2 in M kein Häufungspunkt von M.



$\subseteq \mathbb{R}$

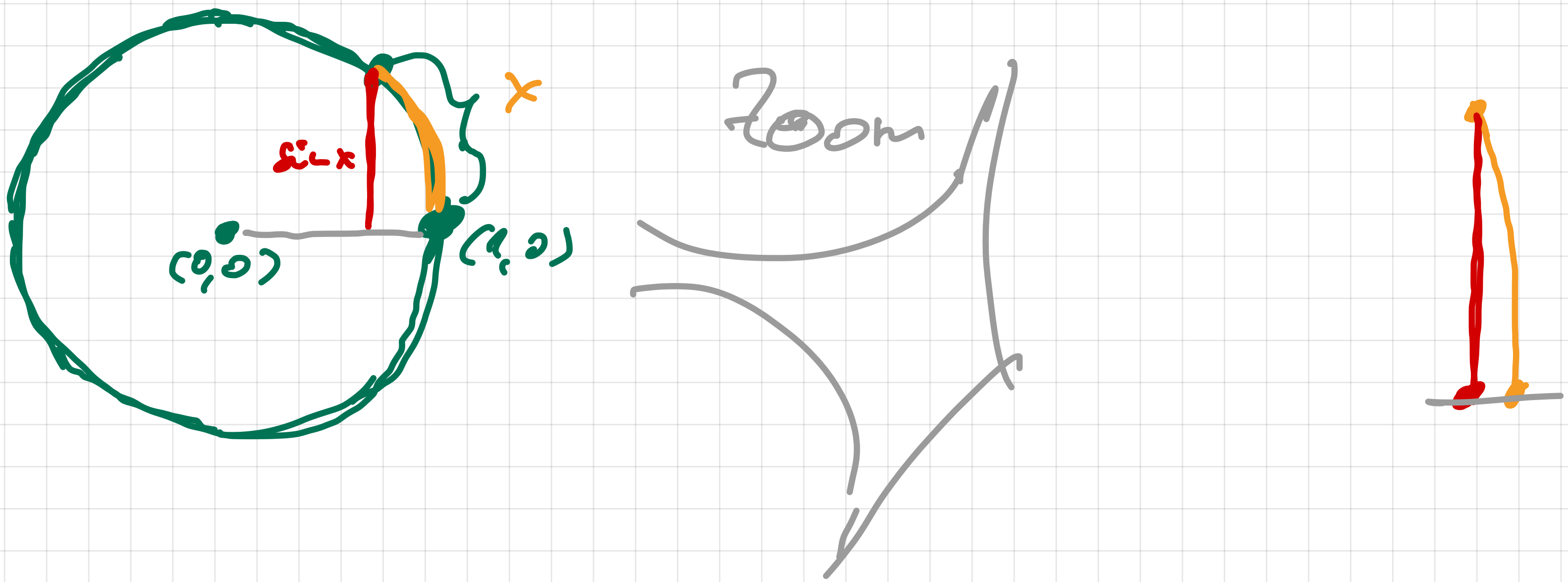
1.6 Def. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion und a Häufungspunkt von X. Man sagt, dass f für $x \to a$ gegen einen reellen Wert y konvergiert, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, für welches $|f(x) - y| < \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $0 < |x - a| < \delta$ erfüllt ist. Schreibweise: $\lim_{x\to a} f(x) = y$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon.$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\frac{\sin x}{x} : \underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

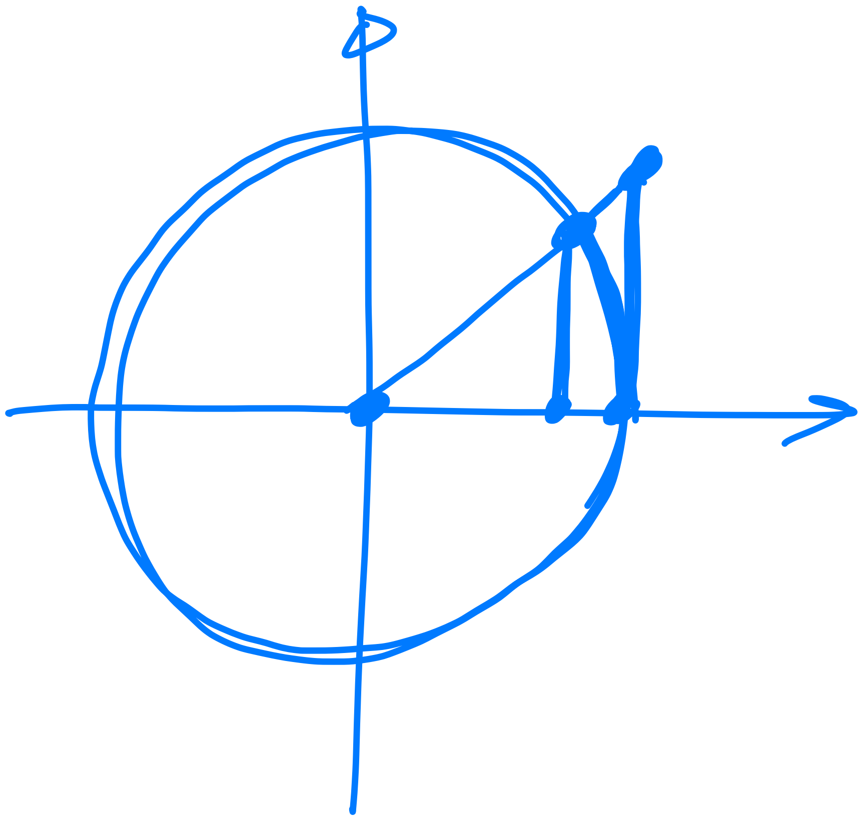
0 ist der Häufungspunkt dieser Menge.



1.7 Bsp. Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Die Null ist der Häufungspunkt des Definitionsbereiches. Es gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$x > 0$



$\sin x \leq x \leq \tan x$

$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$\cos x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \leq 1$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\text{geht gegen } 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{zwischen } -1 \text{ und } 1} = 0$$

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

1.8 Bsp. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. denn $\left|x \sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

1.9 Def. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt

(a) **nach oben beschränkt**, wenn für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $f(x) \leq C$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.

(b) **nach unten beschränkt**, wenn für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $f(x) \geq c$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.

(c) **beschränkt**, wenn f nach oben und unten beschränkt ist.

1.10 Thm. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion und a Häufungspunkt von f. Konvergiert f gegen y für $x \to a$, so gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X \setminus \{a\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.*

$x_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$

$f(x) \longrightarrow y$ für $x \longrightarrow a$

$\Downarrow$

$f(x_n) \longrightarrow y$ für $n \longrightarrow \infty$

1.11 Bsp. Die Funktion $\sin(1/x)$ besitzt weder einen linksseitigen noch einen rechtseitigen Grenzwert im Punkt 0, denn:

Für $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, gilt

$2\pi n$

$\|$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin(1/x_n) = \underline{\underline{0}}.$$

Für $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, gilt

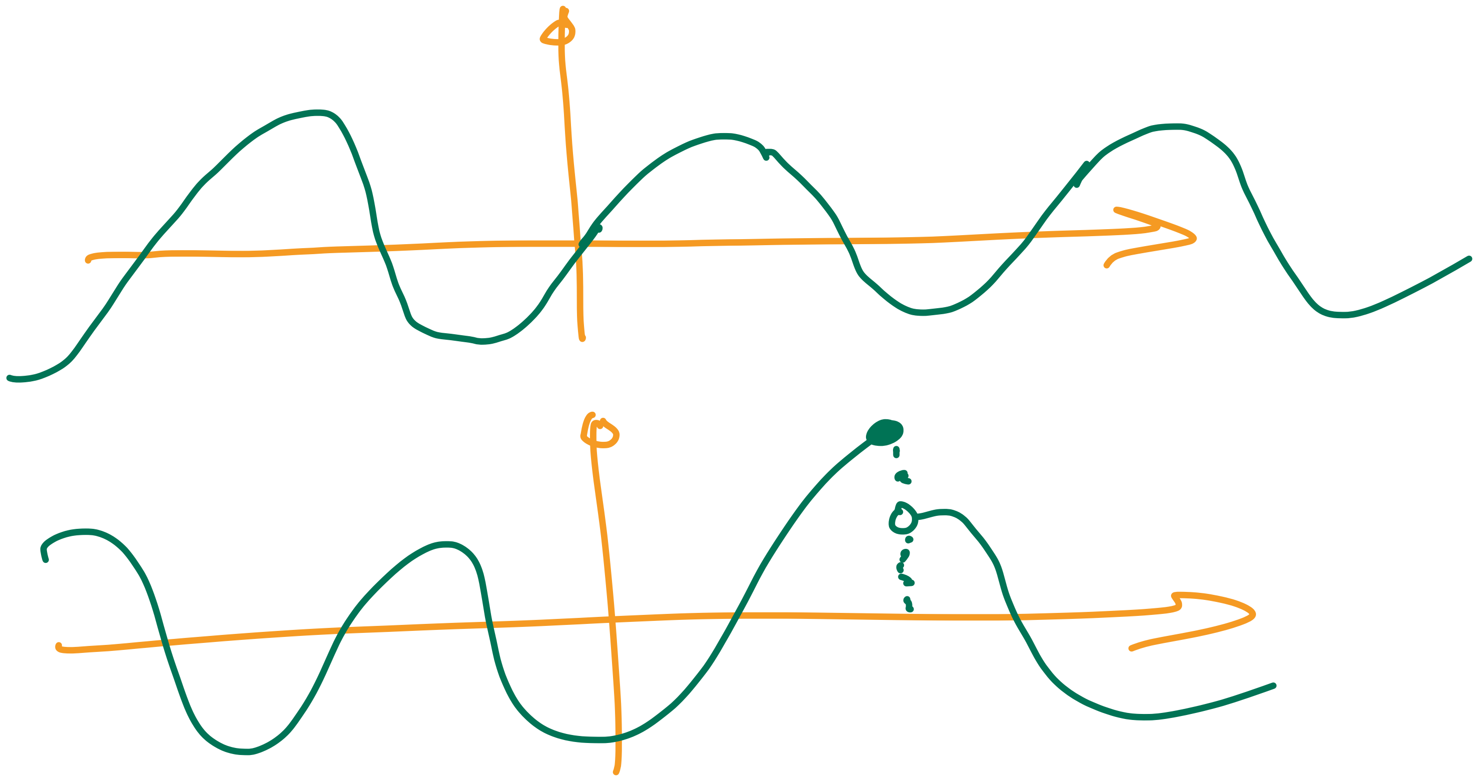
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$

$\|$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin(1/x_n) = \underline{\underline{1}}.$$

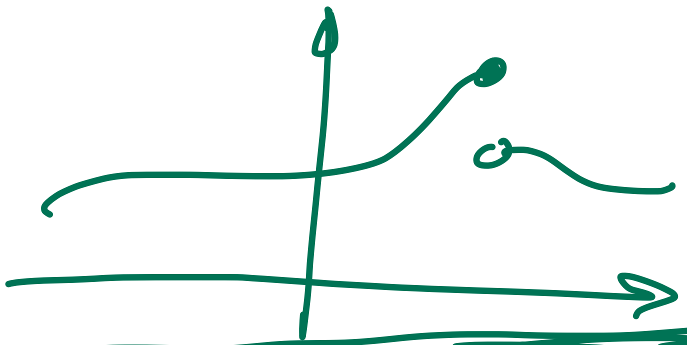
$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat keinen Grenzwert für $x \to 0$.

2 Stetige Funktionen und Unstetigkeiten

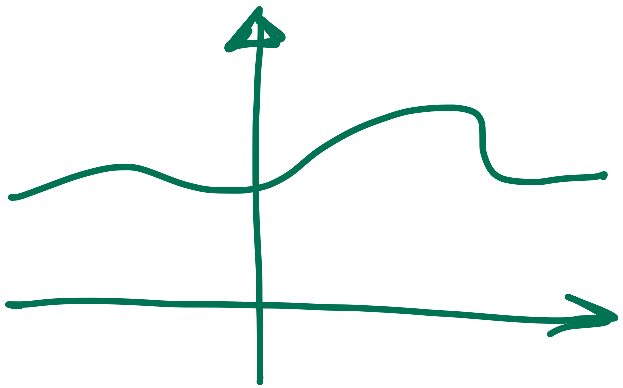


2.1 Def. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und ei $a \in X$ Häufungspunkt von X. Mann nennt f **stetig** in a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt. Man nennt f eine stetige Funktion, wenn die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs X stetig ist.

Informelle Bedeutung: keine Risse!



vs.



$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)}$$

2.2 Thm. *Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so gilt für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ für alle n und*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

2.3 Thm. *Komposition, Produkt, Quotient und Summe stetiger Funktion sind stetige Funktionen.*

2.4 Thm. *Die folgenden Funktionen sind stetig:*

(a) *Polynomialfunktionen und ihre Quotienten.*

(b) *Funktionen* $f(x) = x^a$ *mit* $a \in \mathbb{R}$ *auf* $(0, +\infty)$

(c) *Exponentialfunktionen* $f(x) = a^x$ *mit* $a > 0$,

(d) *Logarithmische Funktionen* $f(x) = \log_a x$ *mit* $a > 0$ *und* $a \neq 1$,

(e) *Sinus, Kosinus, Tangens*

(f) *Arcus Sinus, Arcus Kosinus, Arcus Tangens.*

2.5 Def (Rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $X \cap [a, +\infty)$. Man nennt f konvergent für $x \to a+$, wenn ein Wert $y \in \mathbb{R}$ existiert mit der Eigenschaft, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in X$ mit $a < x < a + \delta$ die Ungleichung $|f(x) - y| < \epsilon$ erfüllt ist.

Den Wert nennt man den rechtsseitigen Grenzwert und bezeichnet als

$$y = \lim_{x \to a+} f(x).$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Bsp.

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sign} x = 1$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x + 2|x|}{3x - |x|} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x + 2|x|}{3x - |x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x + 2x}{3x - x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin x}{2x} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

2.6 Def (Linksseitiger Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $X \cap (-\infty, a]$. Der rechtsseitiger Grenzwert

$$y = \lim_{x \to a-} f(x)$$

ist ein Wert y mit der Eigenschaft, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in X$ mit $a - \delta < x < a$ die Ungleichung $|f(x) - y| < \epsilon$ erfüllt ist.

2.7.

(a) Alternative Bezeichnungen:

$x \downarrow a$ an der Stelle von $x \to a+$ und

$x \uparrow a$ an der Stelle von $x \to a^-$

(b) Bestimmte Divergenz gegen ∞ und $-\infty$ für $x \to a+$ und $x \to a^-$ kann analog zur bestimmten Divergenz für $x \to a$ eingeführt werden.

2.8 Thm (Beschreibung der Konvergenz über die rechts- und linksseitige Konvergenz). *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von $X \cap [a, +\infty)$ und $(-\infty, a] \cap X$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $f(x)$ *ist konvergent für* $x \to a$.

(ii) $f(x)$ *ist konvergent für* $x \to a+$ *und für* $x \to a-$, *und es gilt* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Gegebenenfalls gilt $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$.

2.9 Bsp.

$$\lim_{x \to 0+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x \to 0-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

$\Rightarrow f(x)$ ist divergent für $x \to 0$.

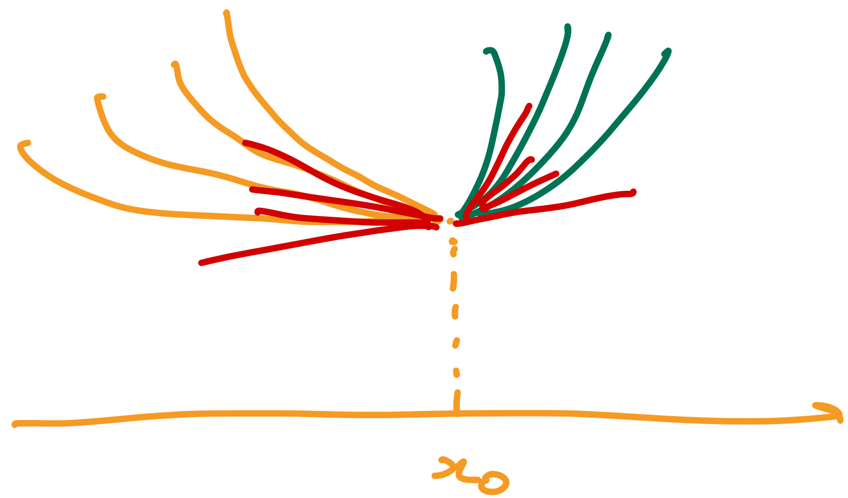
2.10 Def. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, die beschränkt und abgeschlossen ist, nennt man **kompakt**.

2.11 Bsp.

(a) $[a, b]$ ist kompakt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

2.12 Thm (Satz von Weierstraß). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall. Dann erreicht die Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum und Maximum. Das heißt, es gibt $s,t \in \cancel{I}$ mit $f(s) \leq f(x) \leq f(t)$ für alle $x \in [a,b]$.*

$[a,b]$



2.13 Thm (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetige Funktion auf einem Intervall* $[a, b]$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $a < b$. *Sei* $f(a) \leq y \leq f(b)$ *oder* $f(b) \leq y \leq f(a)$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit* $f(\xi) = y$.

2.14. Der Beweis vom Zwischenwertsatz basiert auf einem konstruktiven Ansatz. Man kann den Suchraum für ξ iterativ halbieren.

Beweis dieses Theorems ist algorithmisch:
man kann ein solches ξ beliebig gut
approximieren.

Dichotomie – Approximation.

Mit dem goldenen Schnitt – eine
noch bessere Approximation.

Vorteile dieser Methoden: keine
starken Voraussetzungen an f
(nur Stetigkeit)

3 Asymptotisches Verhalten

3.1 Def. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt

(a) **nach oben beschränkt**, wenn für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \leq C$ für alle $x \in M$ erfüllt ist.

(b) **nach unten beschränkt**, wenn für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x \geq c$ für alle $x \in M$ erfüllt ist.

(c) **beschränkt**, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

3.2 Def. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf einer Menge X, die nach oben nicht beschränkt ist. Mann nennt y den Grenzwert der Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ existiert, für welches die Ungleichung $|f(x) - y| \leq \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $x \geq N$ erfüllt ist. Schreibweise: $\lim_{x\to\infty} f(x) = y$.

Analog zum Grenzwert einer Folge.

3.3 Def. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ Funktion auf einer Menge X, die nach unten nicht beschränkt ist. Mann nennt y den Grenzwert der Funktion $f(x)$ für $x \to -\infty$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, für welches die Ungleichung $|f(x) - y| \leq \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $x \leq M$ erfüllt ist. Schreibweise: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y$.

„Gespiegelt" im Vergleich zu 3.2.

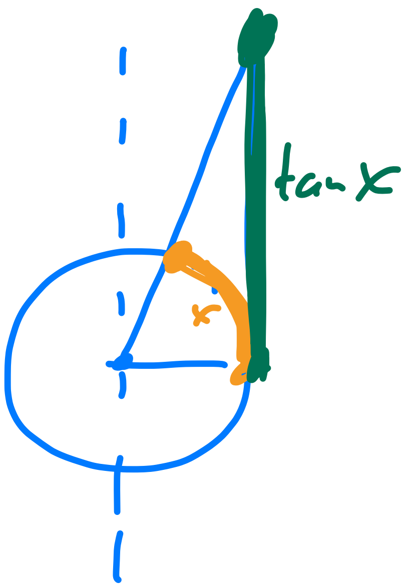
3.4 Bsp.

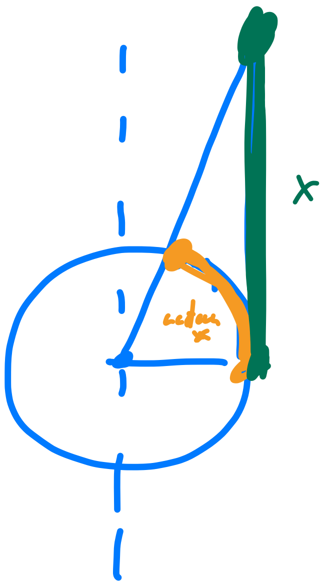
(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Wir hatten bereits ein solches Beispiel mit einer Variablen n aus $\mathbb{N}$. Nun haben wir eine Variable x, die innerhalb der reellen Zahlen gegen ∞ geht.

(b) $\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$

(c) $\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$

ToDo: GeoGebra installieren um solche Bilder zu generieren (und dann als TikZ zu speichern!)





Kapitel III

Differentialrechnung I

Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

1 Ableitung

1.1 Def (Ableitung)**.** Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und $a \in X$ Häufungspunkt von X. Man nennt f **differenzierbar** in a, wenn ein endlicher Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Man nennt $f'(a)$ die **Ableitung** von an der Stelle a. Somit ist die **Ableitung** f' eine Funktion auf der Menge aller $a \in X$, in deren die Funktion f differenzierbar ist.

1.2. Wenn man $h = x - a$ an der Stelle von x benutzt, kann man die Formel für die Ableitung als

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

umschreiben.

Man schreibt auch in manchen Quellen ~~an:~~ die Formel für die Ableitung so hin:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Quotient der Änderung des Wertes der Funktion zur Änderung des Wertes des Arguments

mit $\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x)$. Hierbei ist

Δx eine (beliebig klein werdende) Änderung von x und

Δf die entsprechende Änderung von f bzgl. einer festen Stelle x.

Ist als ein Variablennamen aufzufassen.

1.3 (Leibniz-Notation für die Ableitung und Differentiale)**.** Leibniz hat die Ableitung als einen formalen Quotienten geschrieben

$$\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} = f'(x).$$

Motivation zu dieser Bezeichnung: die Ableitung ist der Grenzwert eines Quotienten. Diese Gleichung kann man auch formal ~~auch~~ als

$$\mathrm{d}\, f = f'(x)\, \mathrm{d}\, x.$$

umformulieren.

Hierbei nennt man $\mathrm{d}\, f$ Differential von f und $\mathrm{d}\, x$ Differential von x. Das sind formale Symbole. Die intuitive Bedeutung dieser Gleichung ist:

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x.$$

Das Vorige Bedeutet: $\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ mit $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ für $\Delta x \to 0$.

1.4 (Approximation, Tangente)**.** Die (affin)lineare Funktion $f(a)+f'(a)(x-a)$ hat den gleichen Wert und die gleiche Ableitung in a wie die Funktion f. Mit Hilfe des Wertes $f(a)$ von f an der Stelle f und der Ableitung von f an der Stelle a erhält man eine Approximation der Funktion f in einer kleinen Umgebung der Stelle a.

Geometrisch gesehen, beschreibt $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ den Graphen der Tangente zum Graphen von f an der Stelle $(a, f(a))$.