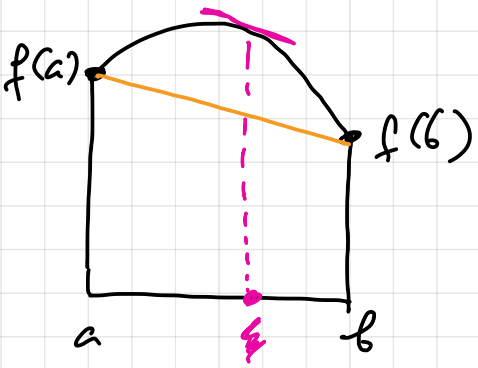
Theorem Sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall. Dann gilt:

(a) f monoton steigend auf $I \iff f' \geq 0$ auf I

(b) f monoton fallend auf $I \iff f' \leq 0$ auf I.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen (a). (b) ist analog. ($\Longrightarrow$) wurde bereits diskutiert. Nehmen wir an: f sei nicht monoton steigend. Dann gibt es $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) > f(b)$.

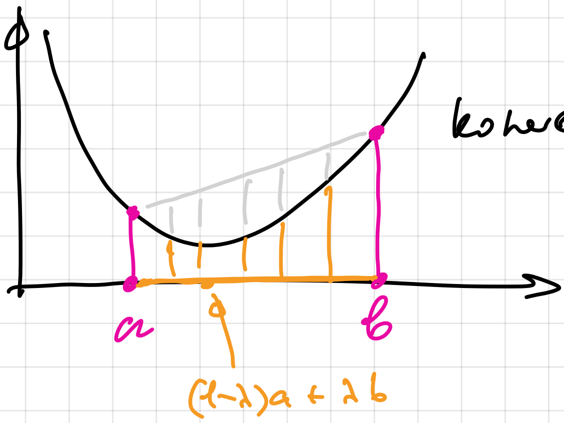


Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
für ein $\xi \in (a, b)$.

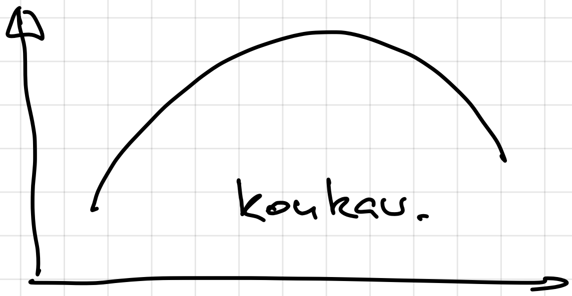
Somit ist
$$f'(\xi) = \frac{\overbrace{f(b) - f(a)}^{<0}}{\underbrace{b - a}_{>0}} < 0.$$

$\square$

Konvexität bzw. konvexe Funktionen.



konvex



Def. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nennt man:

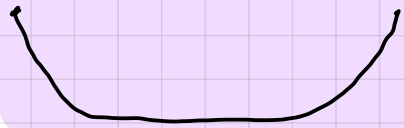
(a) konvex: $\forall a, b \in I\ \forall \lambda \in [0,1]$:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda) f(a) + \lambda \cdot f(b).$$

(b) konkav: $\forall a, b \in I\ \lambda \in [0,1]$:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \ge (1-\lambda) f(a) + \lambda \cdot f(b).$$

Schüsseln sind konvex



Hilfsproblem: Was ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

(Voraussetzung: f genügend oft differenzierbar).

L'Hospital

$$\lim_{h \to 0} \frac{-f'(x-h) + f'(x+h)}{2h}$$

L'Hospital

NR:

$$\frac{d}{dh} f(x-h) = f'(x-h) \cdot \frac{d}{dh}(x-h)$$

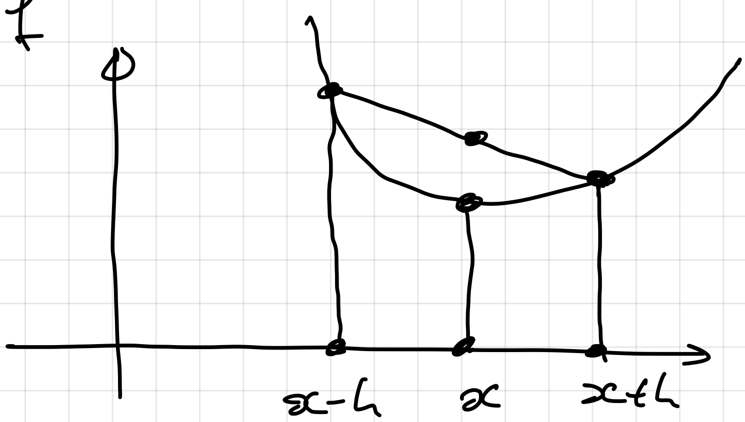
$$= -f'(x-h)$$

$$\frac{d}{dh} f(x+h) = f'(x+h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f''(x-h)+f''(x+h)}{2} = f''(x)$$

Die Herleitung unter der Voraussetzung, dass f'' existiert und stetig ist.

Was gilt im Fall einer konvexen Funktion f



$$\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2} \geq f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x-h) - 2f(x) + f(x+h) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) \geq 0.$$

Theorem Sei $f: I \to \mathbb{R}$ $2\times$ stetig differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (d.h. f'' existiert und ist stetig!).
Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:
(a) f konvex auf I
(b) $f'' \geq 0$ auf I
(c) f' monoton steigend auf I.

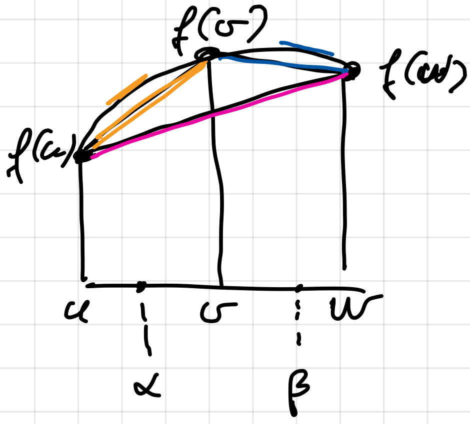
Beweis: (b) $\Leftrightarrow$ (c) sieht man durch die Anwendung des vorigen Theorems zur Funktion f'.

(a) $\Rightarrow$ (b): $$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \geq 0$$

für jedes $x \in I$ (vgl. die Berechnung oben).

Stand: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c).

Angenommen, (a) ist nicht erfüllt, d.h. f ist keine konvexe Funktion auf I. Dann



$$\frac{f(w)-f(v)}{w-v} < \frac{f(w)-f(u)}{w-u} < \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $\alpha \in (u,v)$ und $\beta \in (v,w)$, mit $$\frac{f(w)-f(v)}{w-v} = f'(\beta)$$

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = f'(\alpha)$$

$$\Rightarrow f'(\beta) < \frac{f(w)-f(u)}{w-u} < f'(\alpha)$$

$\Rightarrow f'(\beta) < f'(\alpha)$. Hierbei ist $\alpha < \beta$.

$\Rightarrow$ f' ist nicht monoton steigend.

Wir haben gezeigt: $\neg(a) \Rightarrow \neg(c)$. $\square$

Bemerkung Die konvexe Optimierung, das ist die Minimierung einer konvexen Funktion, gehört zum thematischen Kern der Optimierungstheorie.

Korollar Sei $f: I \to \mathbb{R}$ 2x stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall. Ist f konvex, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $f'(a) = 0$

(ii) $f(x)$ erreicht an der Stelle $x=a$ ein lokales Minimum

(iii) $f(x)$ erreicht an der Stelle $x=a$ ein globales Minimum.

<u>Beweis:</u> $(iii) \underset{\text{trivial}}{\Rightarrow} (ii) \Rightarrow (i)$

wir kennen bereits, $f'(a)=0$ ist notwendig für ein lokales Minimum.

Es bleibt $(i) \Rightarrow (iii)$ zu zeigen:

f konvex $\Rightarrow$ f' monoton steigend

$\Rightarrow$ $f'(x) \leq f'(a) = 0$ für $x \leq a$

und

$f'(x) \geq f'(a) = 0$ für $x \geq a$.

$\Rightarrow$ $f' \leq 0$ für alle $x \in I$ mit $x \leq a$

und

$f' \geq 0$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$

$\Rightarrow$ f sinkt im Bereich $x \in I$, $x \leq a$

und steigt im Bereich $x \in I$, $x \geq a$

$\Rightarrow$ $f(a)$ ist der kleinste Wert von $f(x)$ für $x \in I$. $\square$

Bsp

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (\underbrace{e^x + x^2}_{f(x)})$$

ist f konvex?

$$f''(x) = (e^x + 2x)' = e^x + 2 \geq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

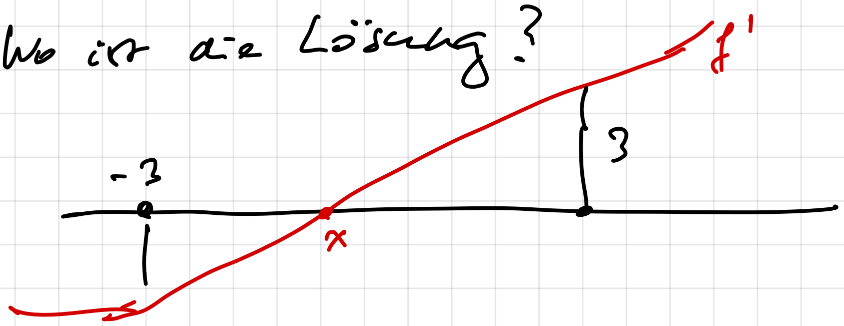
f ist konvex.

Das Optimum ist die Lösung von $f'(x) = 0$:

$$e^x + 2x = 0$$

Die Lösung kann man nicht exakt berechnen (nur numerisch).

Wo ist die Lösung?



$$e^{-3} + 2\cdot(-3) < 0$$
$$e^{3} + 2\cdot 3 > 0$$

Verfahren im Zwischenwert auf die Funktion f' im Bereich $[-3, 3]$ anwenden.

Bsp

$$\min_{x \in \mathbb{R}} (e^x + e^{-2x})$$