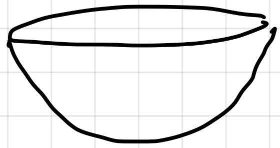
Agenda

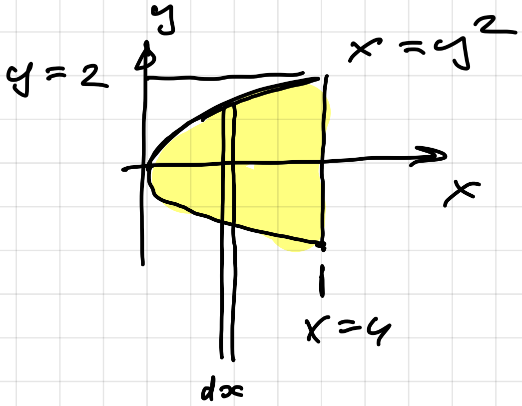
Integrale

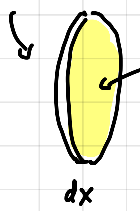
+ Anwendungsbeispiel: Volumina
+ Anwendung: Wahrscheinlichkeitstheorie
+ Substitutionsregel
+ Partielle Integration
+ Uneigentliche Integrale
+ Reihen und uneigentliche Integrale

Bsp.



← Volumen



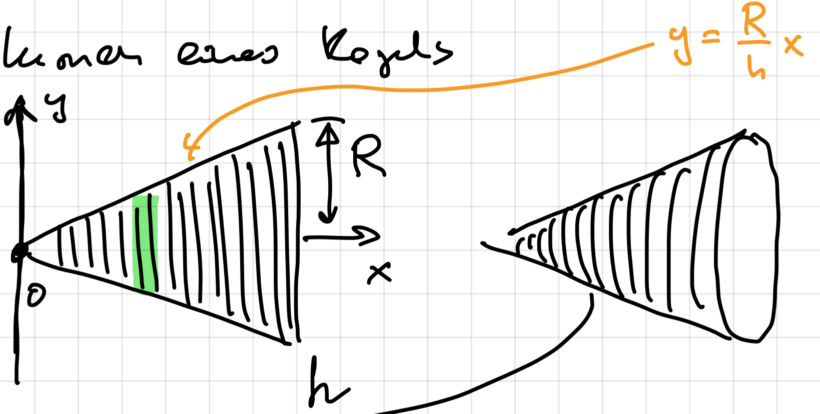


Fläche $\pi r^2 = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$

⇒ Das Volumen unserer parabolischen Schüssel gleich

$$\int_0^4 \pi x \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{4} = 8\pi.$$

Volumen eines Kegels



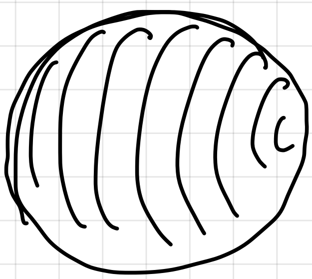
$$\text{Volumen} = \int_0^h \pi \cdot \left(\frac{R}{h} \cdot x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h^3$$

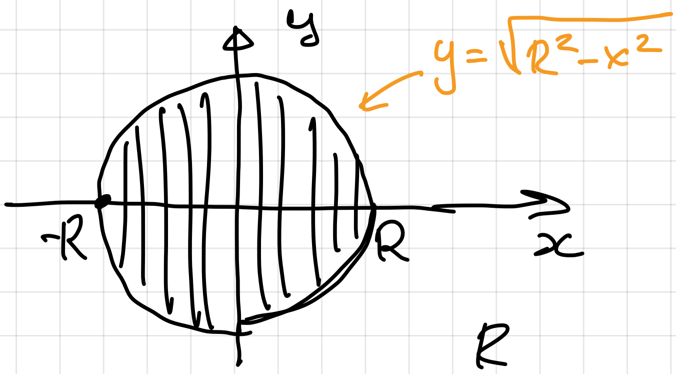
Fläche $\pi r^2 = \pi \left(\frac{R}{h} \cdot x\right)^2$

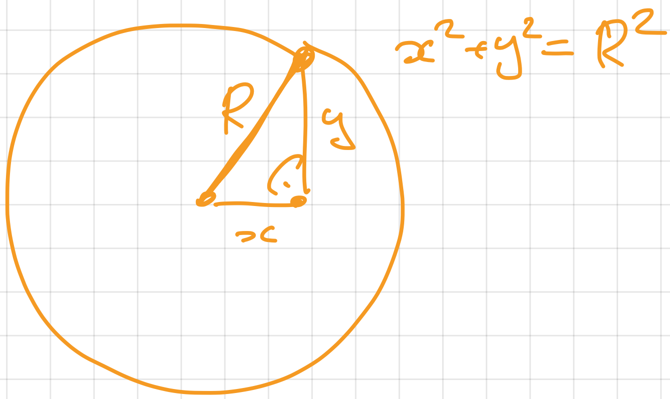
$$= \frac{1}{3} h \cdot \pi R^2$$

$$= \frac{1}{3} \text{ Höhe} \times \text{Grundfläche}$$



Volumen einer Kugel vom Radius $R > 0$.



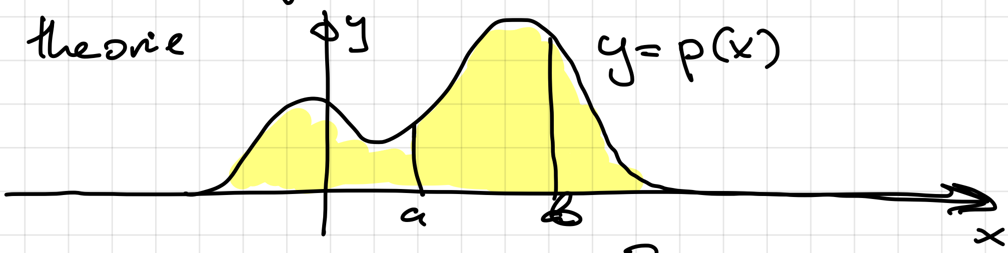


$$\text{Volumen} = \int_{-R}^{R} \pi \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2)\, dx = \int_{-R}^{R} \pi R^2 dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx = 2\pi R^3 - \frac{2\pi}{3} R^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Bem Anwendung der Integrale in der Wahrscheinlichkeitstheorie



p(x) – Dichte einer Zufallsvariable

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable im Intervall [a, b] liegt, ist

$$\int_a^b p(x)\,dx$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariable ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx$$

← solche Art Integrale (von $-\infty$ bis ∞) werden wir noch einführen.

Substitutionsregel

$$g(f(x))' = g'(\underbrace{f(x)}_{\text{Funktion } f(x)}) \cdot f'(x)$$

↑ Ableitung der Funktion f(x).

Diese Formel kann man auch so umformulieren

$$\int g'(f(x))\,f'(x)\,dx = g(f(x)) + C$$

$$\int h(f(x))\, f'(x)\, dx = g(f(x)) + C,$$

wobei g eine Stammfunktion von h ist.

Wenn Sie bestimmte Integrale vorziehen:

$$\int_a^b h(f(x))\, f'(x)\, dx = \left[g(f(x)) \right]_{x=a}^{b}$$

g Stammfunktion von h.

Bsp

$$\int x^4 (\cos x^5)\, dx = \frac{1}{5} \int 5x^4 (\cos x^5)\, dx$$

$y = x^5$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4$

$dy = 5x^4 dx$

$\cos x^5 = \cos y$

$$= \frac{1}{5} \int \cos y \cdot dy$$

$$= \frac{1}{5} \sin y + \text{Const}$$

$$= \frac{1}{5} \sin x^5 + \text{Const.}$$

Bsp

$$\int_0^2 e^{-x^2} x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-x^2} (x^2)'\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} &y = x^2 \\ &dy = 2x\,dx \\ &e^{-x^2} = e^{-y} \\ &x \in [0,2] \iff y \in [0,4] \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{-y}\, dy = \frac{1}{2} \left[-e^{-y}\right]\Big|_{y=0}^{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right)$$

$$\int h(f(x))\, f'(x)\,dx = g(f(x)) + C$$

wenn g Stammfunktion von h ist, d.h. $h = g'$.

Mit einer Zusatzvariable:

$$\int h(f(x))\, f'(x)\,dx = \int h(y)\, dy$$

mit $y = f(x)$

Mit Grenzen:

$$\int_a^b h(f(x))\, f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} h(y)\, dy$$

Partielle Integration

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$\Downarrow$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

$\Downarrow$

$$\int u'(x) v(x) dx = \int (u(x) \cdot v(x))' dx - \int u(x) v'(x) dx$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx}$$

Partielles Integrieren

Die Ableitung geht von einer Funktion im Produkt auf die andere über.

Bsp

$$\int x \cos x \, dx = \int x (\sin x)' dx$$

$$\overset{P.I.}{=} x \sin x - \int x' \sin x \, dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

Check: $(x\sin x + \cos x)' =$

$$x' \sin x + x (\sin x)' - \sin x$$

$$= \sin x + x\cos x - \sin x = x \cos x.$$

Bsp

$$\int \ln x \, dx = \int x' \cdot \ln x \, dx$$

$$= x \ln x - \int x (\ln x)' dx$$

$$= x \ln x - x + C.$$

Check: $(x\ln x - x)' = x' \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1$

$$= \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

Bestimmtes partielles Integrieren:

$$\boxed{\int_a^b u'(x) v(x) dx = \Big[u(x) v(x) \Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b u(x) v'(x) dx}$$

Bsp. $I = \int e^x \cos x \, dx = \int (e^x)' \cos x \, dx$

$$\overset{P.I.}{=} e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$= e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x \, dx$$

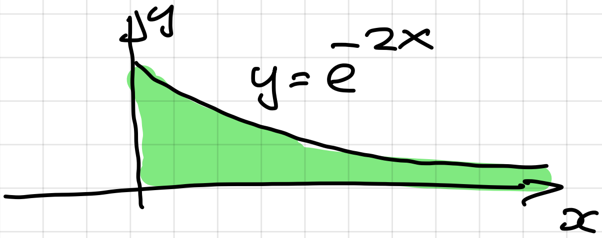
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{= I}$$

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I + \text{Const}$$

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x + \text{const}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right) + \text{const.}$$

Uneigentliche Integrale



Bsp

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_{x=0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Manchmal schreibt man kürzer:

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Man meint dabei genau das

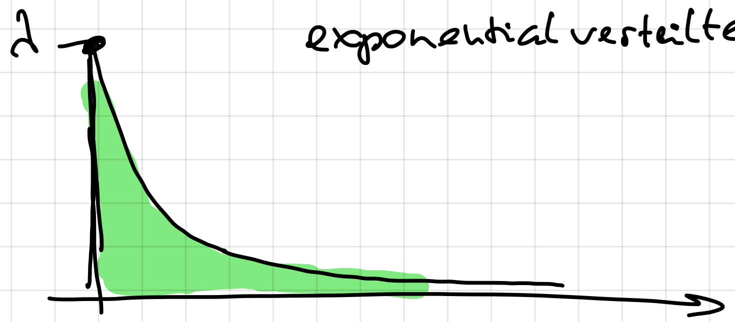
Bsp (Follow up) Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

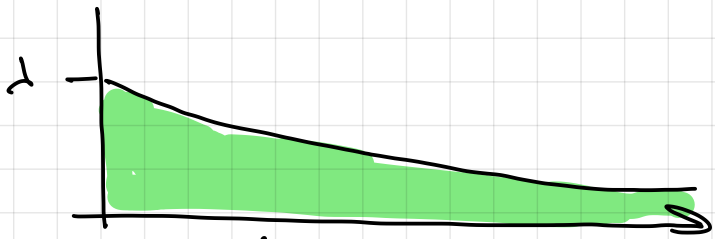
$\Rightarrow$ $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ist eine ~~eine~~ nichtnegative Funktion auf $[0, +\infty)$ mit

$$\int_0^\infty p(x)\,dx = 1. \Rightarrow$$

$p(x)$ ist die sogenannte Dichte einer Zufallsvariable, die in $[0,+\infty)$ verteilt ist. Das ist eine sogenannte exponentialverteilte Zufallsvariable.



λ groß



λ klein.

Der Erwartungswert dieser Zufallsvariablen ist

$$\int_0^\infty x\,p(x)\,dx = \lambda \int_0^\infty x\,e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^\infty x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)' dx$$

$$= -\int_0^\infty x \left(e^{-\lambda x}\right)' dx \overset{\text{P.I.}}{=} \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x' e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Um die Varianz auszurechnen, braucht man

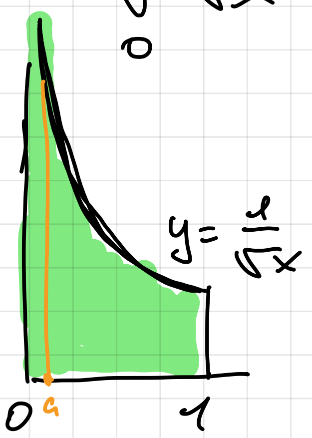
$$\int_0^\infty x^2 p(x)\,dx$$

Bsp

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

uneigentlich an der Stelle 0, denn

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$



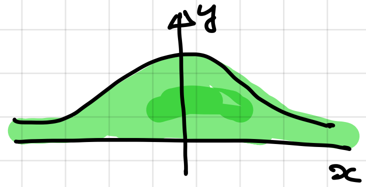
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{a\downarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{a\downarrow 0} \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_{x=a}^{1}$$

$$= \lim_{a\downarrow 0} 2(1-\sqrt{a}) = 2.$$

Bsp

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$



$$\parallel$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

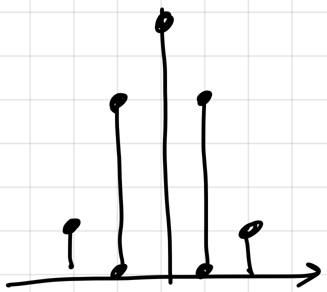
$$= 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

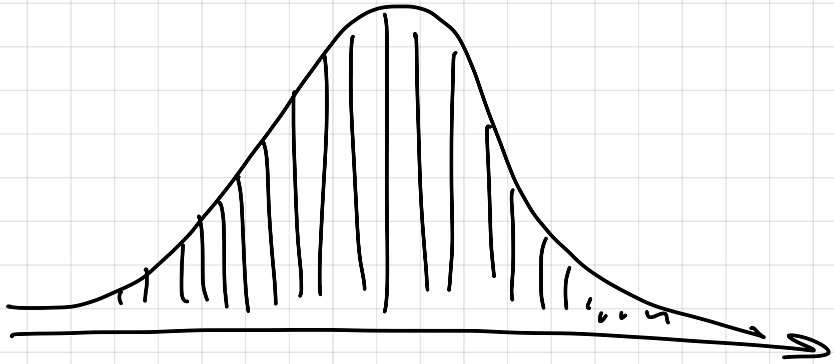
man braucht neue Methoden dazu, die wir noch nicht haben.

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist Dichte einer Zufallsvariablen.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 1\,1\,1\,1$$





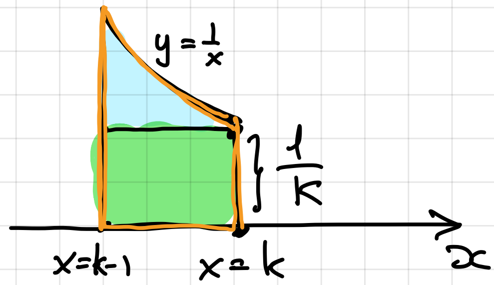
Zusammenhang zwischen Summen/Reihen und Integralen

Bsp.

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Wir wollen H_n abschätzen (nach oben und nach unten).

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$



$$\underbrace{[1,2],\ [2,3],\ \dots,\ [n-1,n]}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,dx$$

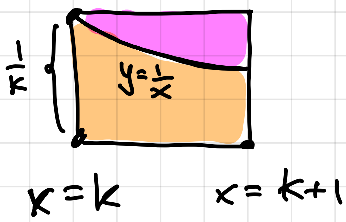
$$= 1 + \ln n$$

$$\Rightarrow \quad H_n \leq 1 + \ln n.$$

Andererseits:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$



$$[1,2],\ [2,3],\ \dots,\ [n,n+1]$$

Fazit: $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$

$$\left(1+\ln n\right) - \ln(n+1)$$
$$= 1 + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Bsp Wir können diese Art von Abschätzungen auch für Reihen nutzen.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$S \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\, dx = 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$
$$= 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{\infty} = 2$$

$$S \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{1 \leq S \leq 2.}_{\substack{\uparrow \\ \text{exakter Abschätzen ?}}}$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1{,}25 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\underbrace{\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx}_{\substack{\| \\ \frac{1}{3}}} \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx}_{\substack{\| \\ \frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}58 \leq 1{,}25 + \frac{1}{3} \leq S \leq 1{,}25 + \frac{1}{2} = 1{,}75$$

Wichtig in den beiden Beispielen war die Tatsache, dass $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ monoton für $x > 0$ sind.