Kapitel VI

Fourier-Reihen

1 Definition einer Fourier-Reihe

1.1 Def. Sei $\omega > 0$. Eine **Fourier-Reihe** ist Funktionsreihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x).$$

Partialsummen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

von Fourier-Reihen nennt man **trigonometrische Polynome**.

1.2. Wir werden sehen, dass man mit einem geeigneten Definitions- und Wertebereich die Abbildung

$$f \xmapsto{\mathrm{FR}} (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 \ldots)$$

mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

definieren kann, die einer Funktion f die Folge der Koeffizienten der Fourier-Reihe von f zuordnet. Diese Abbildung ist <u>linear</u> ist, d.h., es gilt

$$\mathrm{FR}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{FR}(f) + \beta\,\mathrm{FR}(g)$$

für Funktionen f, g und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.3 Def. Sei $T > 0$. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-**periodisch** wenn $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Den Wert T nennt man **Periode** von f.

1.4. Glieder der Fourierreihe entstehen aus T-periodischen Funktionen $\cos k\omega x$ und $\sin k\omega x$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Die T-Periodizität von f ist somit notwendig für die Zerlegbarkeit von f in die Fourier-Reihe.

1.5. Warum man in der Fourier-Reihe die additive Konstante lieber als $\frac{a_0}{2}$ und nicht als a_0 darstellt, wird im Folgenden geklärt. Mit der Darstellung $\frac{a_0}{2}$ werden die Formeln für die Koeffizienten a_k mit $k \in \mathbb{N}_0$ einheitlicher.

1.6. Die Konstante ω ist lediglich ein Skalierungsfaktor für x. Daher reicht es aus, den Fall $\omega = 1$ zu betrachten, da man in der Fourier-Reihe ωx durch x austauschen kann, um zum Fall $\omega = 1$ kommen. Mit anderen Worten: um eine T-periodische Funktion $f(x)$ in eine Fourier-Reihe bzgl. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zu zerlegen, kann man die 2π-periodische Funktion $f(\frac{T}{2\pi}x)$ bzgl. $\omega = 1$ in die Fourier-Reihe zerlegen.

1.7. Eine T-periodische Funktion ist durch die Angabe auf einem Intervall $[a, b]$ der Länge T eindeutig bestimmt.

Umgekehrt: eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall der Länge T und mit $f(a) = f(b)$, kann T-periodisch auf die gesamte reelle Achse eindeutig erweitert werden.

1.8. Ist $[a, b]$ Intervall der Länge $T > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, die über $[0, T]$ integrierbar ist, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

Das bedeutet: das Integral über jedes Intervall der Länge T ist gleich.

2 Fourierreihen, Signalverarbeitung und weitere Anwendungen

2.1. Fourier-Reihen wie auch ihre Analoga (Diskrete Fourier-Transformation und die Fourier-Transformation) haben sehr viele Anwendungen, die mit der Signalverarbeitung zusammenhängen, oder die Theorie von Schwingungen und Wellen im Hintergrund haben.

- Signalverarbeitung allgemein
- Physik, unter anderem Astronomie und Optik
- Tomographie (insb. MRT und Ultraschaltomographie)
- Geologie
- Lösung von Differentialgleichungen

2.2. In der Signalverarbeitung ist x der Zeitpunkt (wird deswegen auch oft als t bezeichnet). Der Term

$$h_k(x) := a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

bestimmt die Phase und die Amplitude der k-ten Frequenz. Der Vektor (a_k, b_k) kann in Polarkoordinaten als

$$\begin{aligned} a_k &= A_k \cos \phi_k \\ b_k &= A_k \sin \phi_k \end{aligned}$$

mit $A_k \geq 0$ beschrieben werden. Dann gilt

$$h_k(x) := A_k \cos(k\omega x - \phi_k).$$

Der Term $h_k(x)$ ist der Beitrag der k-ten Frequenz, A_k ist die Amplitude und ϕ_k die Phase der k-ten Frequenz.

2.3. Hier noch Kommentare zur Terminologie und Einheiten:

- x ist Zeit. Wir nehmen an, x ist in Sekunden gegeben.

- A_k ist die Amplitude. Die Einheiten von A_k hängen von der Natur des Signals ab (elektrisch, mechanisch, akustisch usw.).

- $k\omega$ ist die Kreisfrequenz von $h_k(x)$. Wenn man $k\omega x$ als einen Winkel, und somit als einen Punkt auf dem Einheitskreis interpretiert, dann ist $k\omega x$ die Geschwindigkeit dieses Punktes in Radianten pro Sekunde). Radianten sind dimensionslos, also ist die Einheit der Kreisfrequenz $\frac{1}{\text{Sekunde}} = \text{Hz}$.

- $\frac{2\pi}{k\omega}$ ist die Periode von $h_k(x)$ in Sekunden. In so viel Zeit mach $k\omega x$ die volle Runde auf dem Einheitskreis.

- $\frac{k\omega}{2\pi} = (\frac{2\pi}{k\omega})^{-1}$ ist die Anzahl der Runden pro Sekunde, also die Frequenz. Die Einheit dazu ist $\frac{1}{\text{Sekunde}} = \text{Hz}$.

2.4. Bei der Darstellung in der “Exponentialbasis” ergibt sich die k-te Amplitude und Phase aus den Koeffizienten c_k und c_{-k}.

3 Vektorräume, Euklidische Räume und Hilberträume

3.1 Def. Ein (abstrakter) **Vektorraum** V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Menge, die mit einem Skalarprodukt und einer Vektoraddition ausgestattet ist, für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + \mathbf{0} = a$$

$$a + (-a) = \mathbf{0}$$

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$$

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$$

$$1 \cdot a = a.$$

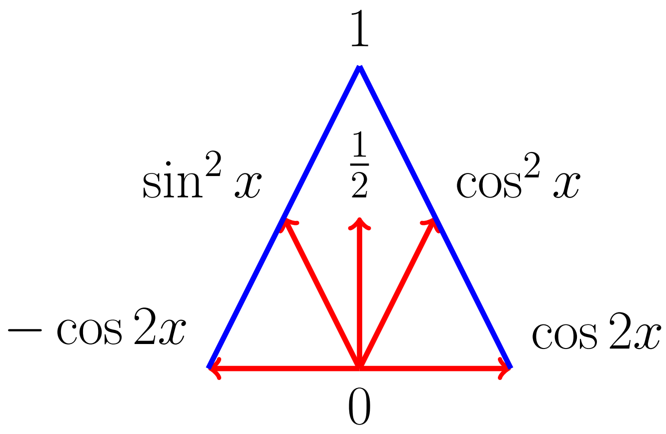
Hierbei sind $a, b, c \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

3.2. Man ist gewohnt, die konkreten Vektorräume wie $\mathbb{R}^3$ zu betrachten und in diesen Räumen zu rechnen: ,etwa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Definition eines abstrakten Vektorraums ist aber viel allgemeiner, sodass man nicht nur die Tupeln von reellen Zahlen als Vektoren auffassen kann. Um eine Menge V als einen Vektorraum aufzufassen, braucht man für diese Menge V eine sinnvolle Addition und eine sinnvolle Skalarmultiplikation. Sinnvoll heißt dabei, dass die definierenden Bedingungen des Vektorraums erfüllt sind.

3.3 Bsp. Die Funktionen $1, 1/2, \sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x$ sind Vektoren im Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Wir wir wissen, gilt $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Diese Art Gleichungen kann man als Gleichungen für Vektoren auffassen und z.B. auch graphisch darstellen:



An diesem Bild erkennt man verschiedene Zusammenhänge von $1, 1/2, \sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x$. Unter anderem sieht man auch die Basen des zweidimensionalen Vektorraums, der durch diese Vektoren aufgespannt ist: $1/2$ und $\cos 2x$ bilden z.B. eine Basis, $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ bilden eine andere Basis.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \text{für } x$$

3.4 Def (Abstrakte Euklidische Räume über $\mathbb{R}$)**.** Ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$, der mit einer Funktion $\langle\,.\,,\,.\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ausgestattet ist, heißt **Euklidischer Raum** mit dem **Skalarprodukt** $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v, w\rangle &= \alpha \langle u, w\rangle + \beta \langle v, w\rangle \\ \langle u, v\rangle &= \langle v, u\rangle \\ \langle v, v\rangle &\geq 0 \qquad \text{mit } \langle v, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Hierbei sind $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Der Wert

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

heißt die **Euklidische Norm** von u und der Wert $\|u - v\|$ heißt der **Euklidische Abstand**

$\mathbb{R}^4$ $\mathbb{R}^3$

von u und v. Zwei Vektoren u und v heißen orthogonal, wenn $\langle u, v\rangle = 0$ gilt.

3.5. Auch für Euklidische Räume gilt: neben den konkreten Räumen wie $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,$$

an die wir gewöhnt sind, kann man auch weitere Euklidische Räume betrachten. Analog zum Skalarprodukt

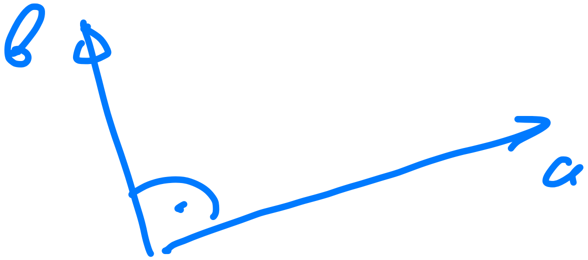
$$\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

für Vektoren $u = (u_i), v = (v_i) \in \mathbb{R}^n$ des Raums $\mathbb{R}^n$ kann man auch das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^T f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

auf geeigneten Räumen von T-periodischen Funktionen einführen.

3.6 Def. Eine System u_i $(i \in I)$ von Vektoren aus einem Euklidischen Raum V heißt **Orthogonalsystem**, wenn alle u_i ungleich $\mathbf{0}$ sind und für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ die Bedingung $\langle u_i, v_j \rangle = 0$ gilt. Gilt für ein Orthogonalsystem $\|u_i\| = 1$ für alle $i \in I$, so nennt man es ein **Orthonormalsystem**.



3.7. Jedes Orthogonalsystem ist linear unabhängig.

3.8 Def. Der Begriff einer Orthogonalbasis (bzw. Orhtononormalbasis) wird in der Theorie von unendlich-dimensionalen Vektorräumen oft folgendermaßen erweitert: man nennt ein Orthogonalsystem (bzw. Orthonormalsystem) u_i $(i \in I)$ von Vektoren aus einem Euklidischen Raum V eine **Orthogonalbasis** (bzw. **Orthonormalbasis** von V, wenn jeder Vektor $v \in V$ beliebig gut durch eine endliche Linearkombination der Vektoren u_i approximiert werden kann. Das heißt, für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\|v - (\alpha_1 u_{i_1} + \cdots + \alpha_n u_{i_n})\| < \epsilon$$

für endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_t \in I$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Im Folgenden werden wir diese Verallgemeinerung nutzen.

3.9. Im Fall von endlich-dimensionalen Euklidischen Räumen V lassen sich die Orthogonal- und Orthonormalbasen einfacher beschreiben. Im Raum der Dimension $d \in \mathbb{N}$ ist eine Orthogonal- bzw. Orthonormalbasis ein Orthogonal- bzw. Orthonormalsystem $u_1, \ldots, u_d$ aus genau d Vektoren. Jeder Vektor $v \in V$ kann direkt (ohne Approximation) als Linearkombination von Vektoren der Basis dargestellt werden.

3.10 Def. Einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, der eine Orthogonalbasis besitzt, nennt man einen (reellen) **Hilbertraum**.

3.11 (Orthogonalbasen)**.** Orthogonalbasen sind sehr praktisch. Ist $b_1, \ldots, b_d$ Orthogonalbasis eines Euklidischen Raums so kann man die Zerlegung

$$f = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_d b_d$$

für einen gegeben Vektor f durch die Berechnung der Skalarprodukte bestimmen. Skalarmultiplikation mit b_i ergibt

$$\alpha_i = \frac{\langle f, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle}$$

Bei Orthonormalsystemen hat man $\langle b_i, b_i \rangle = 1$.

$$f = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_d b_d$$

$$\langle f, b_1 \rangle = \alpha_1 \langle b_1, b_1 \rangle + \alpha_2 \underbrace{\langle b_2, b_1 \rangle}_{= 0} + \ldots + \alpha_d \underbrace{\langle b_d, b_1 \rangle}_{= 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle f, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$$

3.12 (Der Satz des Pythagoras)**.** Ist $f = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_d b_d$ für ein Orthogonalsystem $b_1, \ldots, b_d$, so hat man

$$\|f\|^2 = \alpha_1 \|b_1\|^2 + \cdots + \alpha_d^2 \|b_d\|^2.$$

Ist $b_1, \ldots, b_n$ ein Orthonormalsystem, so gilt

$$\|f\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_d^2.$$

b_1, b_2 $\qquad \langle b_1, b_2 \rangle = 0$

$\langle b_1, b_1 \rangle = \langle b_2, b_2 \rangle = 1$

$f = 2b_1 + 3b_2$

$$\|f\|^2 = \langle 2b_1 + 3b_2, 2b_1 + 3b_2 \rangle = 4\langle b_1, b_1 \rangle + 9\langle b_2, b_2 \rangle$$

$$= 13 \Rightarrow \|f\| = \sqrt{13}.$$

3.13 Thm. *Ist* b_k $(k \in \mathbb{N})$ *eine Orthogonalbasis eines (reellen) Hilbertraums, so gilt für jeden Vektor* $f \in V$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_k b_k \right\| = 0$$

mit

$$\alpha_k = \frac{\langle f, b_k \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle}.$$

Darüber hinaus gilt

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|b_k\|^2.$$

3.14. Das vorige Theorem ist ein Analogon der Orthogonalbasiszerlegung und des Satzes von Pythagoraus für unendlich-dimensionale Euklidische Räume.

3.15 Aufgabe. Finden Sie die Darstellungen von Vektoren in einer Basis:

(a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ in der Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle v, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} = \frac{17}{4} \quad \alpha_2 = \frac{-3}{4} \quad \alpha_3 = \frac{-7}{4} \quad \alpha_4 = \frac{1}{4}$$

(a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

$$\langle v, b_1 \rangle = \alpha_1 \langle b_1, b_1 \rangle \qquad \langle v, b_2 \rangle = \alpha_2 \langle b_2, b_2 \rangle$$

$$5 = \alpha_1 \cdot 2 \qquad -1 = \alpha_2 \, 2$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{2} \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{v = \frac{5}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2}$$

3.16 Def. Sei V Euklidischer Raum sei $f \in \cancel{f}$ V und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus V. Dann sagt man, dass f_k gegen f in der Norm konvergiert, wenn $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\| = 0$ gilt.

3.17 Def. Sei V Euklidische Raum. Eine Reihe mit Elementen aus V ist ein Ausdruck der Form $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ mit $g_k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man sagt, dass die Reihe gegen ein $f \in V$ in der Norm konvergiert, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\| = 0$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k.$$

4 Der Raum $\mathcal{L}^2(0,T)$

4.1 Def. Wir führen den Vektorraum $\mathcal{L}^2(0,T)$ ein, als den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller T-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $[0,T]$, Lebesgue-integrierbar sind, und die Bedingung

$$\int_0^T |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\, x < +\infty.$$

erfüllen. In diesem Raum führen wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(0,T)} = \int_0^T f(x) g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

ein und die zugehörige Norm

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(0,T)} := \sqrt{\int_0^T f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x}.$$

Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^2(0,T)$ werden identifiziert, wenn man $\|f - g\|_{\mathcal{L}^2(0,T)} = 0$ hat. Das ist z.B. der Fall, wenn sich f und g innerhalb von $[0,T]$ nur in endlich vielen Stellen unterscheiden.

4.2. In der vorigen Definition benutzen wir das Lebesgue-Integral, das wir in diesem Kurs gar nicht eingeführt haben. Das ist für uns kein Problem: für die Beispiele, die wir betrachten, reicht die Theorie der Riemann-Integrale aus.

4.3 Thm. *Die Funktionen des Systems*

$$\frac{1}{2},\ \cos\omega x, \cos 2\omega x, \cos 3\omega x, \dots,\ \sin\omega x, \sin 2\omega x, \sin 3\omega x, \dots \tag{VI.1}$$

bilden eine Orthogonalbasis für den Raum $\mathcal{L}^2(0,T)$ *mit* $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$\cos k\omega x \quad (k \in \mathbb{N})$

$\sin k\omega x \quad (k \in \mathbb{N})$

$1/2$

4.4 Aufgabe. Verifizieren Sie, dass (VI.1) tatsächlich ein orthogonales System bilden. Berechnen Sie auch die $\mathcal{L}^2(0,T)$-Norm jeder Funktion aus (VI.1).

4.5. Manchmal definiert man das Skalarprodukt in $\mathcal{L}^2(0,T)$ geringfügig anders, als

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}^2(0,T)} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Mit dieser Definition ist das System (VI.1) sogar eine Orthonormalbasis.

5 Formeln für die Koeffizienten

5.1 (Formeln für die Koeffizienten der Fourier-Reihe)**.** Für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x) \in \mathcal{L}^2(0,T)$$

mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gilt

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k\omega x \,\mathrm{d}\, x \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin k\omega x \,\mathrm{d}\, x \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos k\omega x \rangle_{\mathcal{L}^2(0,T)}}{\langle \cos k\omega x, \cos k\omega x \rangle_{\mathcal{L}^2(0,T)}},$$

b_k genauso (nur mit sin).

5.2 (Formeln für die Koeffizienten der Fourier-Reihe im Fall $\omega = 1$). Für

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$$

gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}\, x \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}\, x \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

$[0, 2\pi]$ $[\pi, 3\pi]$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$\Downarrow$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

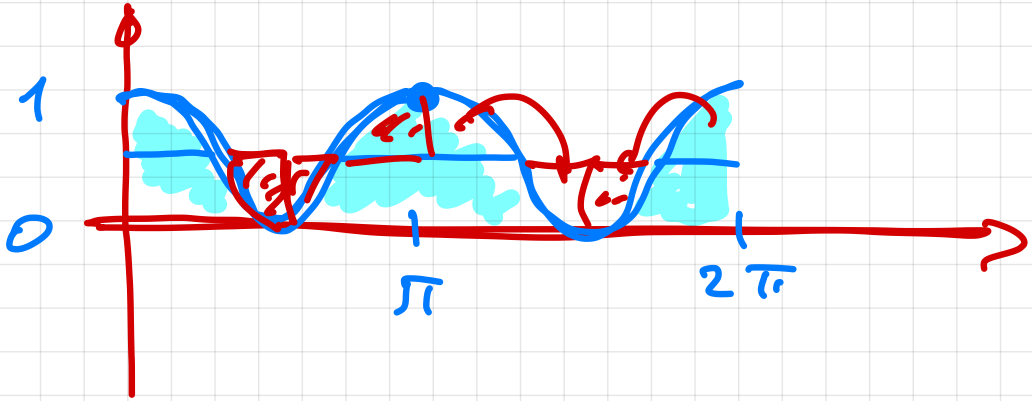
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx =$$

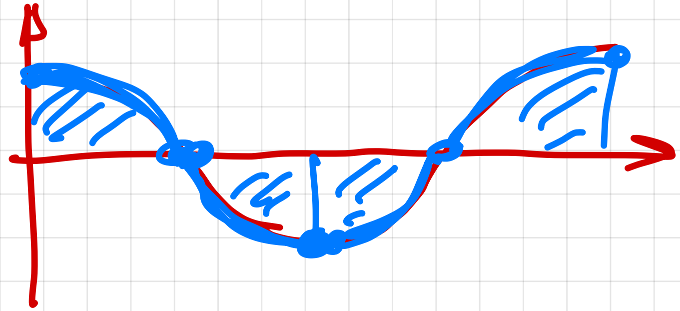
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2x + 1) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx$$

$$= 0 + \pi = \pi$$





$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi$$

$(k \in \mathbb{N})$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi$$

5.3 Aufgabe (Realitätscheck)**.** Was sind die Fourier-Entwicklungen von $\sin x$, $\cos 2x$ und $2\sin x - \cos 2x$? Muss man integrieren, ob diese Entwicklungen zu bestimmen?

$\sin x$

$\cos 2x$

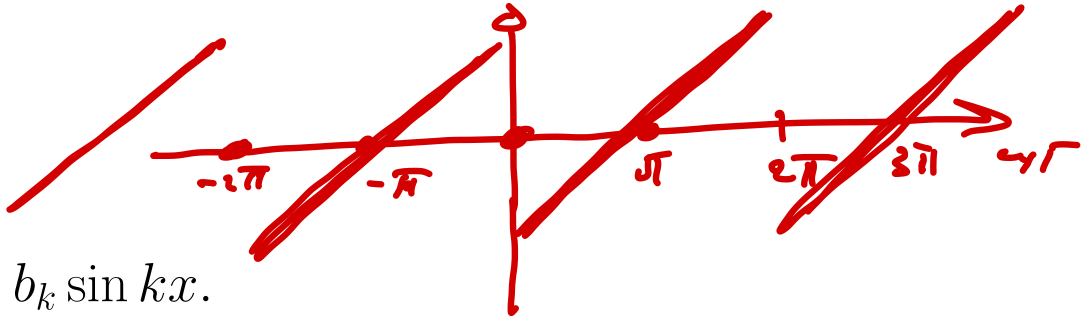
$2 \sin x - \cos 2x$

5.4 (Tipps und Tricks)**.** Man beachte dass $\cos x$ eine gerade und $\sin x$ eine ungerade Funktion ist. Das hat die folgenden Auswirkungen auf die Entwicklung in die Fourier-Reihe:

(a) f gerade, d.h., $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle b_k gleich 0.

(b) f ungerade, d.h., $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle a_k gleich 0.

5.5 Bsp. Sei $f(x)$ die Funktion mit $f(x) = x - \pi$ für $0 < x < 2\pi$, die wir 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ erweitern. Da f ungerade ist, gilt

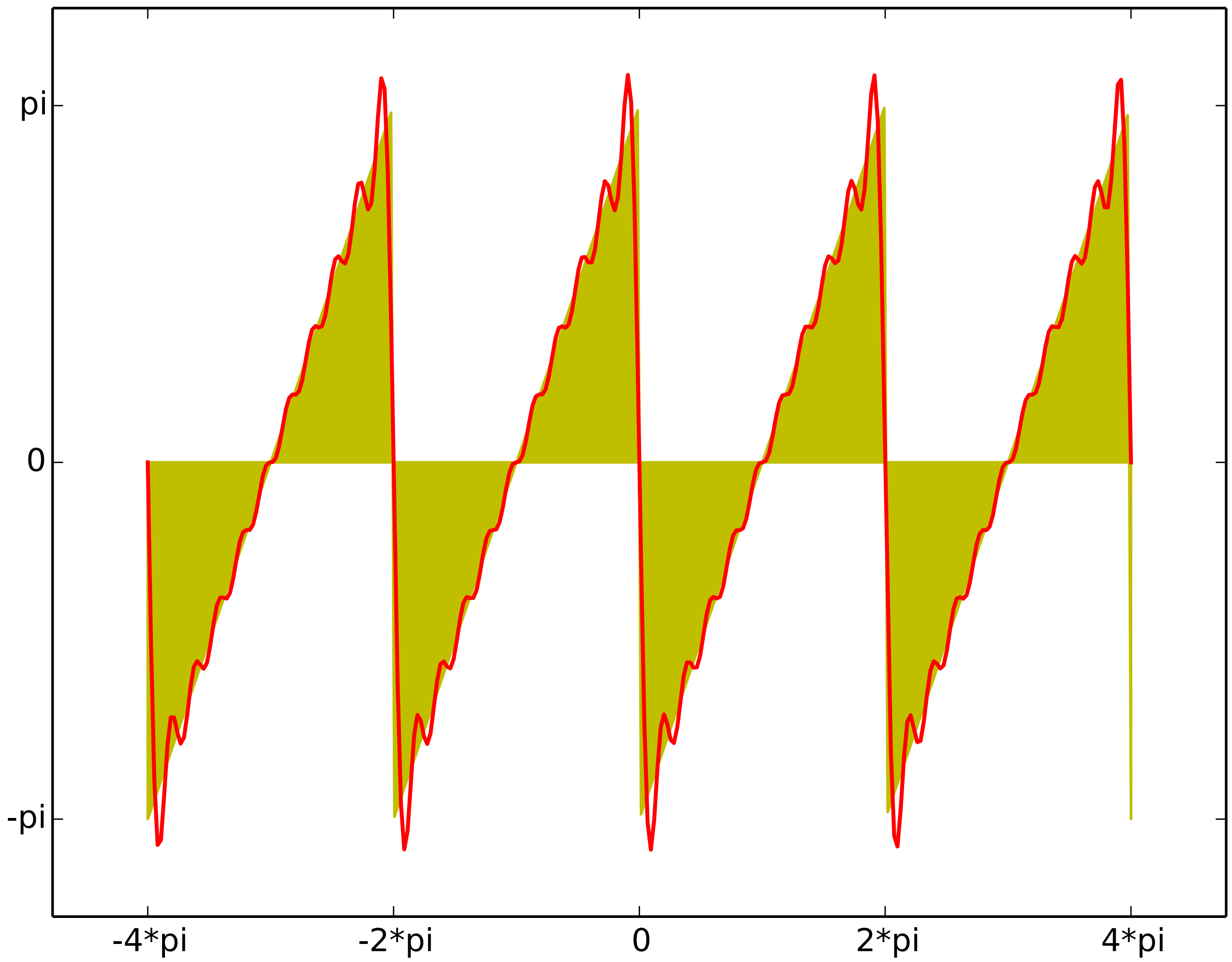


$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Die Koeffizienten:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x - \pi)\sin kx \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin kx \, \mathrm{d}\, x \overset{\text{P.E.}}{=} -\frac{2}{k}$$

Approximation durch $\sum_{k=1}^{10} b_k \sin kx$:


pi
0
-pi
-4*pi
-2*pi
0
2*pi
4*pi

5.6 Aufgabe. Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung folgender Funktionen:

(a) $f = \operatorname{sign}(\cos(x))$

(b) $g = \sin x \cos x$

(c) $f + g$

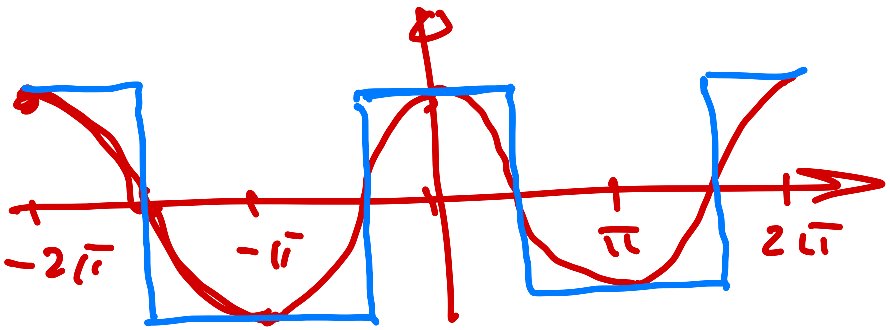
(d) $h = \cos^4 x$

(e) $f(x + \pi/4)$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

x

$x + \sin x$



$\cos x$

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos kx \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos kx \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} - \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{x=\pi/2}^{3\pi/2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,k} \left(\sin \frac{k\pi}{2} - \sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} k\right) + \sin \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,k} \left(3 \underbrace{\sin \frac{k\pi}{2}}_{\begin{array}{ll} = 0 & k = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ = 1 & k = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ = -1 & k = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{array}} - \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2} k\right)}_{\begin{array}{ll} 0, & k = 0, 2, 4, 6, \ldots \\ -1, & k = 1, 5, 9, \ldots \\ 1, & k = 3, 7, 11, \ldots \end{array}} \right) =$$

(b) $g = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

(c)

5.7 Aufgabe. Nehmen wir an, Sie haben die Fourier-Entwicklung einer Funktion $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ ausgerechnet. Wie kann man daraus die Fourier-Entwicklung von $f(x+\alpha)$ für ein gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ bestimmen? Geben Sie die Formeln für die Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots$ der Fourier-Entwicklung von $f(x+\alpha)$ in Abhängigkeit von den Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ der Fourier-Entwicklung von $f(x)$. Wie hängen $\tilde{a}_k^2 + \tilde{b}_k^2$ und $a_k^2 + b_k^2$ für $k \in \mathbb{N}$ zusammen?

5.8 Aufgabe. Seien f und g die 2π-periodische Funktionen mit

$$f(x) = x^2 \qquad \text{für } x \in [-\pi, \pi]$$
$$g(x) = x^2 \qquad \text{für } x \in [0, 2\pi).$$

Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$. Berechnen Sie die Fourier-Entwicklungen der beiden Funktionen. Welche Wahl der Integrationsbereiche ist bei Berechnung der Fourier-Koeffizienten günstig?

5.9 Aufgabe. Man betrachte 2π-periodische Funktionen f und g mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi] \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

und

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi] \\ 1 & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung von f, g und $f + 2g$. Vgl. diese Aufgabe mit Aufgabe 5.6(a).

6 Differenzieren von Fourier-Reihen

6.1 Thm. *Sei f die 2π-periodische Erweiterung einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(2\pi)$. Wenn f und f' zu $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ gehören, dann ergibt sich die Fourier-Entwicklung von f' durch gliederweise Differenzieren der Fourier-Entwicklung von f.*

Mit anderen Worten: unter den genannten Voraussetzungen an $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ gilt

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)' = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)'.$$

6.2 (Begründung)**.** Wir betrachten die beiden Fourier-Entwicklungen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$
$$f'(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k' \cos kx + b_k' \sin kx).$$

Man hat

$$\begin{aligned} a_k' &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx \,\mathrm{d}\, x && \mid \text{Formeln für die Koeffizienten} \\ &= \underbrace{\Big[f(x)\cos kx\Big]_{x=0}^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos kx)' \,\mathrm{d}\, x && \mid \text{Partielle Integration} \\ &= \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

Also ist $a_0' = 0$ und $a_k' = kb_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Analog zeigt man auch $b_k' = -ka_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Das führ zur Formel:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)'.$$

6.3 Bsp. Wir erweitern $f(x) = (x - \pi)^2$ periodisch von $[0, 2\pi]$ auf $\mathbb{R}$. Da wir die Funktion $x - \pi$ auf $[0, 2\pi)$ bereits in die Fourier-Reihe entwickelt haben, wissen wir, dass man für $f'(x) = 2(x - \pi)$ die Entwicklung

$$f'(x) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

Nun können wir darauf basierend die Entwicklung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

bestimmen. Das Differenzieren dieser Entwicklung gliederweise gibt uns die Entwicklung von $f'(x)$. Daraus lassen sich die Koeffizienten a_k und b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ bestimmen. Wir erhalten

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Zur Berechnung des Koeffizienten a_0 können wir die Standard-Formel

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}\, x$$

benutzen. Wir erhalten

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

6.4. Warnung! Beim Anwenden von Theorem 6.1 sollen die Voraussetzungen beachtet werden! Theorem 6.1 ist für unstetige 2π-periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **nicht** anwendbar.

7 Pythagoras in $\mathcal{L}^2(0,T)$

7.1. Wenn wir zwei Funktionen $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ haben:

$$f_s(x) = \frac{a_{s,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{s,k} \cos kx + b_{s,k} \sin kx) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi),$$

so gilt

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} f_1(x) f_2(x) \,\mathrm{d}\, x}_{\text{Skalarprodukt von Funktionen}} = \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = \pi \underbrace{\left(\frac{1}{2} a_{1,0} a_{2,0} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{1,k} a_{2,k} + b_{1,k} b_{2,k}) \right)}_{\substack{\text{ein Skalarprodukt von zwei Folgen} \\ \text{von Fourier-Koeffizienten}}}$$

Im Fall $f_1 = f_2 = f$ erhalten wir. . .

7.2 Thm (Parseval'sche Gleichung). *Für*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi).$$

gilt

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} f(x)^2 \, \mathrm{d}\, x = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

7.3. Parseval'sche Gleichung ist der Satz von Pythagoraus in unendlich vielen Dimensionen.

7.4 Bsp. Wir berechnen $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung. Wir wählen als $f(x)$ die Funktion mit $f(x) = x - \pi$ für $0 < x < 2\pi$, die wir 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ erweitern. Da f ungerade ist, gilt

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \,\mathrm{d}\, x = \pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

Die linke Seite ist

$$\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \,\mathrm{d}\, x = \left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{3}.$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Die Koeffizienten b_k sind

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)\sin kx \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin kx \,\mathrm{d}\, x = -\frac{2}{k}$$

Das ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^2 = \frac{2\pi^2}{3}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8 Fourier-Reihen für komplexwertige Funktionen

8.1. Vgl. lineare Algebra bzgl. der Definition der Euklidischen Räume über $\mathbb{C}$. Orthogonal- und Orthonormalbasen für Vektorräume über $\mathbb{C}$ können analog definiert werden. Ein komplexer Hilbertraum ist ein (endlich oder unendlich-dimensionaler) Euklidischer Raum über $\mathbb{C}$, der eine Orthogonalbasis besitzt.

8.2. Wegen der Euler-Formel sind wir motiviert $e^{\mathbf{i}kx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ als die Basis der Fourier-Entwicklung zu nutzen. Dementsprechend müssen wir

8.3. Oft arbeitet man auch mit komplexwertigen T-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. In diesem Fall definiert man $\mathcal{L}^2(0,T)$ entsprechend als einen $\mathbb{C}$-Vektorraum mit

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}^2(0,T)} = \int_0^T f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

und

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(0,T)} := \sqrt{\int_0^T |f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x}.$$

Das bedeutet, dass man den Euklidischen Raum $\mathcal{L}^2(0,T)$ über $\mathbb{R}$ zu einem entsprechenden Raum über $\mathbb{C}$ erweitert. Wir benutzen die selbe Bezeichnung für diesen größeren Raum.

8.4. Das System $\left(e^{\mathbf{i}kx}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist die Standardwahl einer Orthogonalbasis für den Vektorraum $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ (über $\mathbb{C}$). Man definiert die Fourier-Entwicklung dazu als:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathbf{i}kx}.$$

Diese Gleichung interpretiert man als den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathbf{i}kx} \right\|_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = 0.$$

Die Formel für die Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\mathbf{i}kx} \,\mathrm{d}\, x.$$

8.5 Bsp. Wir berechnen die Fourier-Entwicklung der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases},$$

die auf die gesamte reelle Achse 2π-periodisch erweitert wird, in der "exponentiellen Basis" $(e^{\mathbf{i}kx})_{k\in\mathbb{Z}}$ und anschließend in der "trigonometrischen Basis". Man hat

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}.$$

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ hat man

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\mathbf{i}kx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-\mathbf{i}kx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \left[\frac{\mathbf{i}}{2\pi k}e^{-\mathbf{i}kx}\right]_{x=0}^{\pi}. \\ &= \frac{\mathbf{i}}{2\pi k}(e^{-\mathbf{i}k\pi}-1). \\ &= \begin{cases} -\frac{\mathbf{i}}{\pi k} & k \text{ ungerade}, \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Das ergibt die Entwicklung

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\mathbf{i}}{\pi}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\ell+1}e^{\mathbf{i}(2\ell+1)x}$$

in der exponentiellen Basis. Um die Entwicklung in der trigonometrischen Basis zu erhalten, werden die Glieder in Paare zerlegt, sodass $e^{\imath kx}$ und $e^{-\mathbf{i}kx}$ in ein neues Glied aufgenommen werden, das als Summe von zwei Gliedern der vorigen Entwicklung entsteht.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2m-1}\mathbf{i}\Big(e^{\mathbf{i}(2m-1)x} - e^{-\mathbf{i}(2m-1)x}\Big).$$

Durch die Anwendung der Euler-Formel erhalten wir nun auch die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$$

in der trigonometrischen Basis. (Diese Darstellung kann man natürlich auch direkt erhalten.)

8.6 (Pythagoras)**.** Für zwei Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ mit

$$f_s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{s,k} e^{\mathbf{i}kx}$$

gilt

$$\int_0^{2\pi} f_1(x)\overline{f_2(x))}\,\mathrm{d}\,x = \langle f_1, f_2\rangle_{\mathcal{L}^2(0,2\pi)} = 2\pi \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1,k}\overline{c_{2,k}}}_{\text{ein Skalarprodukt von zwei komplexwertigen Folgen}} .$$

Insbesondere hat man im Fall $f = f_1 = f_2$:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\,x = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

8.7. Der Raum $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ ist also isometrisch zum komplexen Euklidischen Raum ℓ^2 aller Folgen $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ und mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

Die Norm in diesem Raum ist:

$$\|c\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}.$$

Das Skalarprodukt zu dieser Norm ist:

$$\langle c, d\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

für $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$.

8.8 (Übergang von der Exponentialbasis zur trigonometrischen Basis)**.**

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathbf{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Man hat

$$a_0 = 2c_0$$

und, nach der Euler-Formel,

$$c_k \underbrace{(\cos kx + \mathbf{i} \sin kx)}_{=e^{\mathbf{i}kx}} + c_{-k} \underbrace{(\cos kx - \mathbf{i} \sin kx)}_{=e^{-\mathbf{i}kx}} = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Also gilt

$$a_k = c_k + c_{-k}$$

$$b_k = \mathbf{i}(c_k - c_{-k})$$

für $k \in \mathbb{N}$.

8.9 (Übergang von “trigonometrischen Basis” zur “Exponentialbasis”)**.**

$$c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$c_k = \frac{a_k - \mathbf{i}b_k}{2}$$
$$c_{-k} = \frac{a_k + \mathbf{i}b_k}{2}$$

9 Die Verwandten der Fourier-Reihe

9.1 (Diksrete Fourier-Transformation (=DFT)). Analog zu Stetigen periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ kann man n-Periodische Funktionen auf $\mathbb{Z}$ betrachten. Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) ist eine Art Fourier reihe für solche Funktionen.

9.2 (Diskrete harmonische Funktionen und 'diskrete Fourier-Reihen')**.** Den analogen harmonischen Funktionen $e^{\mathbf{i}kx}$ entsprechen in der Welt der n-periodischen diskreten Signale die Folgen

$$p_k := \left(e^{\frac{2\pi \mathbf{i} kj}{n}}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$$

für $k \in \{0,\ldots,n-1\}$. Ein n-periodisches Signal $f = (f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ kann man mit dem Vektor $(f_j)_{j=0,\ldots,n} \in \mathbb{C}^n$ identifizieren, weil es ausreicht die Werte, in einer Periode zu notieren.

Die Zerlegung von $f = (f_j)_{j=0,\ldots,n} \in \mathbb{C}^n$ in harmonische Signale ist somit eine Darstellung der Form

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi \mathbf{i} jk}{n}} c_k \tag{VI.2}$$

mit $j = 0,\ldots,n-1$ und $c = (c_k)_{k=0,\ldots,n-1} \in \mathbb{C}^n$.

9.3. Bei der digitalen Darstellung eines Signals fixiert man die Sampling Rate r (etwa in Frames Per Sekunde). Ist i der Index des Frames so ist die Zeit $t = i/r$ der Zeitpunkt, in dem dieser Frame beim Abspielen dran ist. Den reine (Sinus)Ton mit der Frequenz ν hat die Form

$$\sin(2\pi\nu t) = \sin(\frac{2\pi\nu}{r}i).$$

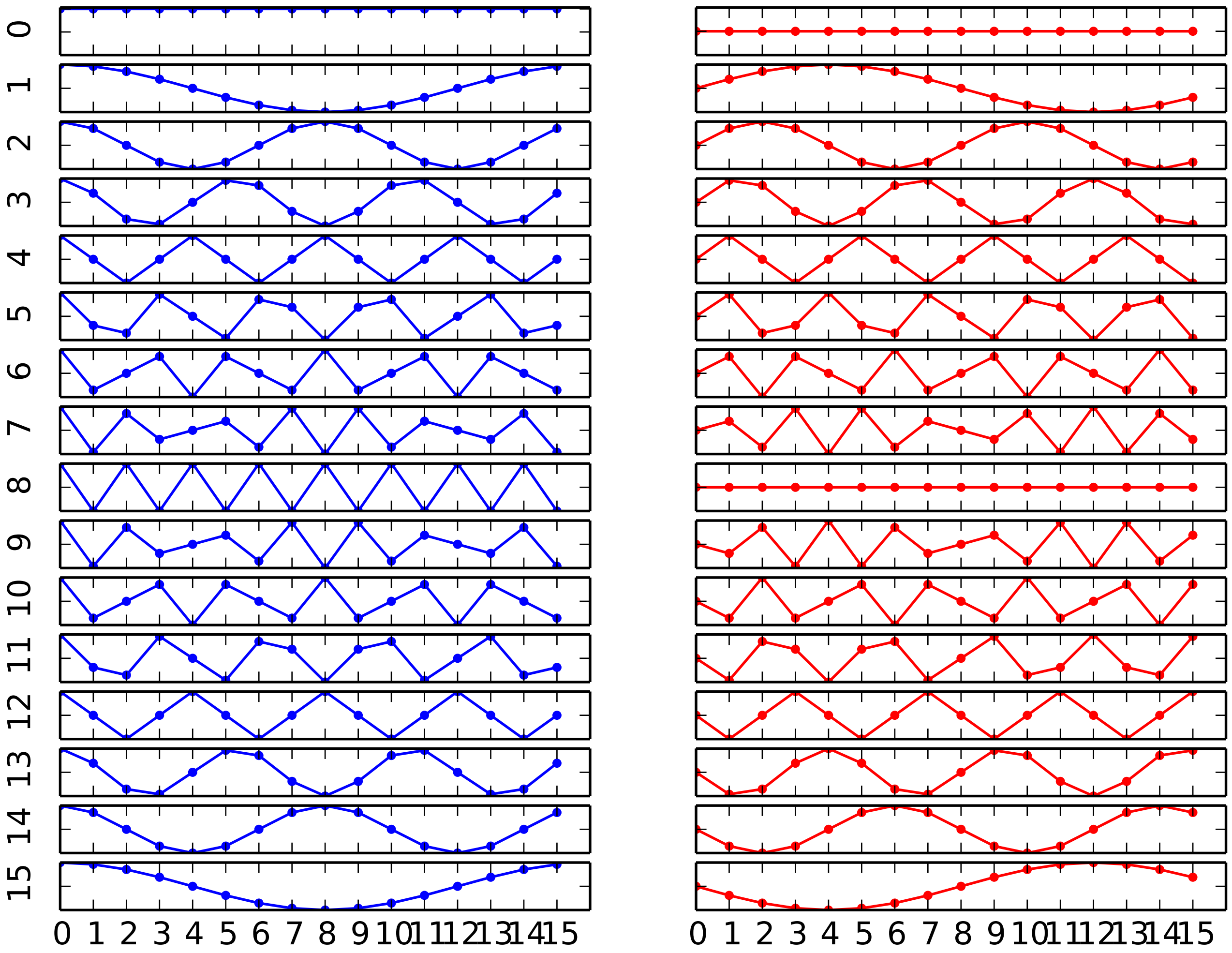
Die typische Wahl der Sampling Rate bei Audioaufzeichnungen ist 44100 und 48000 Frames pro Sekunde. Den Standard-Kammerton (den A-Ton) hat man für $\nu = 440$ Hz. Ist N die Anzahl der Frames, so dauert die Wiedergabe N/r Sekunden. Der folgende Code spielt eine Sekunde lang den Standard-Kammerton ab:

```
import sounddevice as sd
from math import *
r=48000
nu=440
a=[sin(2*pi*nu*i/r) for i in range(r)]
sd.play(a,r)
```

Die diskrete Fourier-Transformation ermöglicht einem, aus einer Aufzeichnung, die Amplituden und Phaen der Töne, aus denen die Aufzeichnung zusammengesetzt ist, abzulesen. Mit diesem Code kann man ein Signal mit der Dauer von 2 Sekunden vom Mikrofon aufzeichnen.

```
a=sd.rec(2*r,r,1)
```

9.4 Bsp. Hier die Darstellung der komplexen harmonischen Funktionen. Der Realteil der harmonischen Funktionen wird in Blau und der Imaginärteil in Rot dargestellt. Fall $n = 16$:


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

9.5. FFT (= Fast Fourier Transform) ist der schnelle Algorithmus zur Berechnung der DFT. In Matlab als die Funktion fft verfügbar. Hier ein Beispiel zum "Entrauschen" mit Hilfe der DFT: `https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html`

9.6. Fourier-Integrale:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} \,\mathrm{d}\, x$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (hier muss f nicht periodisch sein). Im Gegenteil zu Fourier-Reihen ist hier das Spektrum (die Anzahl der Frequenzen in der Zerlegung) nicht mehr diskret.

9.7. Wenn man die Potenz-Reihen in einer komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$ betrachtet, kann man diese mit den Fourier-Reihen verbinden. Betrachten wir zum Beispiel die Darstellung

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}.$$

Das Einsetzen von $z = e^{\mathbf{i}x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ ergibt die Fourier-Entwicklung

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{\mathbf{i}kx} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{\mathbf{i}x}}$$

bzgl. der Basis $(e^{\mathbf{i}kx})_{k\in\mathbb{Z}}$. Mit der Verwendung der Euler-Formel erhalten wir zu den Fourier-Reihen erstellen. Der Real-Teil der letzten Gleichung ergibt – nach der Verwendung der Euler-

Formel – die Entwicklung

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\cos kx &= \operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{\mathbf{i}x}}\\ &= \operatorname{Re}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}\cos x)-\frac{1}{2}\mathbf{i}\sin x}\\ &= \operatorname{Re}\frac{1-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\mathbf{i}}{(1-\frac{1}{2}\cos x)^2+\frac{1}{4}\sin^2 x}\\ &= \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{(1-\frac{1}{2}\cos x)^2+\frac{1}{4}\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Analog lässt sich auch eine Verbindung in die umgekehrte Richtung erstellen. Man hat zum Beispiel

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

für $z = e^{\mathbf{i}kx}$.

9.8. Sind $(u_k)_k$ und $(v_\ell)_\ell$ Basen der Räume $\mathcal{L}^2(0,S)$ und $\mathcal{L}^2(O,T)$ mit $S,T>0$, so kann man darauf basierend die Fourier-Reihen der Form

$$\sum_{k,\ell} c_{k,\ell} u_k(x) v_\ell(y)$$

betrachten, die von zwei Variablen x und y abhängig sind. Das System der Funktionen $u_k(x)v_\ell(y)$ bildet dann die Basis des Raums $\mathcal{L}^2(0,S)\times(0,T) = \mathcal{L}^2(0,S)\otimes\mathcal{L}^2(0,T)$. Um $\mathcal{L}^2(0,S)\times(O,T)$ zu definieren, braucht man zwei-dimensionale Lebesgue-Integrale.

Ganz analog definiert lassen sich n-dimensionale Fourier-Reihen für ein beliebiges $n\in\mathbb{N}$.

Multi-dimensionale Fourier-Reihen tauchen in vielen Anwendungen auf (Physik, Bildverarbeitung, Lösung der Wellengleichung usw.), weil man in der Praxis oft mit mehr als einer Variablen zu tun hat (bei Wellen - Zeit- und Raumvariablen).

9.9 Thm. *Fúr jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein Polynom P_n mit*

$$\cos n\phi = P_n(\cos\phi)$$

für alle $\phi \in \mathbb{R}$.

Beweis. Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \leq 2$ gilt die Behauptung mit $P_0 = 1$ und $P_1 = x$ und $P_2 = 2x - 1$ wegen $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$.

Sei $n \geq 3$ und sei $\cos k\phi = P_k(\cos\phi)$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit P_k vom Grad k. Dann gilt erhalten wir mit der Verwendung der Formel für $\cos(\alpha+\beta)$ mit $\alpha = (n-2)\phi$ und $\beta = 2\phi$ die Gleichung

$$\cos n\phi = \cos(n-2)\phi\cos 2\phi - \sin(n-2)\phi\sin 2\phi.$$

In dieser Gleichung benutzen wir die Formel $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$ für den Sinus des doppelten

Winkels und erhalten

$$\cos n\phi = \cos(n-2)\phi\cos 2\phi - 2\sin(n-2)\phi\sin\phi\cos\phi$$

Um die beiden Sinus-Funktionen auf der rechten Seite loszuwerden, benutzen wir die Formel für $\cos(\alpha+\beta)$ mit $\alpha = (n-1)\phi$ und $\beta = \phi$ und erhalten

$$\cos n\phi = \cos(n-2)\phi\cos 2\phi - 2(\cos(n-1)\phi - \cos(n-2)\phi\cos\phi)\cos\phi$$

Mit der Berücksichtigung der Induktionsvoraussetzung sehen wir, dass wir

$$P_n(x) = P_{n-2}(x)P_2(x) - 2\big(P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)x\big)x$$

fixieren können. Es bleibt zu zeigen, dass die so gewählte Polynome den Grad n haben. Das der Grad höchstens n ist, sieht man aus der Rekursion für P_n mit der Verwendung der Induktionsvoraussetzung. Um zu sehen, dass der Grad genau n ist, können wir den Koeffizienten für x^n des Polynoms $P_n(x)$ ausrechnen. $\square$

9.10 Def. Das Polynom P_n aus dem Beweis von Theorem 9.9 nennt man das n-te **Tschebyscheff-Polynom**.