Kapitel V

Integralrechnung I

1 Riemann-Integral

1.1 Def. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ nennt man eine endliche Teilmenge Z mit

$$\{a, b\} \subseteq Z \subseteq [a, b]$$

eine **Zerlegung** von $[a, b]$.

Mit anderen Worten: Zerlegung eines abgeschlossenen Intervalls ist eine endliche Teilmenge des Intervalls, welche die beiden Endpunkte des Intervalls enthält.

1.2 Def. Eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a, b]$ aus $n+1$ Elementen mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ergibt eine Darstellung von $[a, b]$ als Vereinigung der n Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Wir definieren für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die **Unter-** und **Obersumme** von f bzgl. Z durch die Gleichungen:

$$U_f(Z) := \sum_{i=1}^{n} \inf \{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i=1}^{n} \sup \{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

In jeder der beiden Summe hat man einen Term pro jedes der n Intervalle.

1.3 Def. Direkt aus der Definition sieht man, dass $U_f(Z) \leq O_f(Z)$ für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ erfüllt ist.

1.4 (Verfeinerung)**.** Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt:

$$Z_1 \subseteq Z_2 \quad \Longrightarrow \quad U_f(Z_1) \leq U_f(Z_2)$$

$$Z_1 \subseteq Z_2 \quad \Longrightarrow \quad O_f(Z_1) \geq O_f(Z_2)$$

Das heißt:

(a) Je feiner Zerlegung, desto größer die Untersumme.

(b) Je feiner Zerlegung, desto kleiner die Obersumme.

1.5. Nehmen wir zwei Zerlegungen Z_1, Z_2, die nicht unbedingt kompatibel sind, d.h., weder $Z_1 \subseteq Z_2$ noch $Z_2 \subseteq Z_1$ ist vorausgesetzt. Dann ist die Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$ feiner als Z_1 und Z_2 also erhalten wir

$$U_f(Z_1) \leq U_f(Z_1 \cup Z_2) \leq O_f(Z_1 \cup Z_2) \leq O_f(Z_2).$$

Das zeigt

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$$

Also: jede beliebige Untersumme ist nicht höher als jede beliebige Untersumme.

1.6 Def. Wir definieren das **Riemannsche Unter**- bzw. **Oberintegral** als

$$U_f := \sup\{U_f(Z) \,:\, Z \text{ Zerlegung von} [a,b]\}\,,$$
$$O_f := \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \text{ Zerlegung von} [a,b]\}\,.$$

1.7. Untersummen sind nicht höher als die Obersummen von f. Also haben wir $U_f \leq O_f$. Es gibt "komische" Beispiele, für die man $U_f < O_f$ hat. Etwa, bei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Für dieses Beispiel hat man $U_f = 0$ und $O_f = 1$.

1.8 Def. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt über $[a,b]$ **Riemann-integrierbar**, wenn $U_f = O_f$ gilt. Gegebenenfalls nennt man $U_f = O_f$ das **Riemann-Integral** von f über $[a,b]$. Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Hierbei heißt a die **untere Integrationsgrenze**, b die **obere Integrationsgrenze**, x die **Integrationsvariable** und f der **Integrand**.

1.9. Ist f über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, so ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ der eindeutige Wert, der zwischen allen Untersummen und Obersummen liegt, also der Wert, für welchen die Ungleichungen

$$U_f(Z_1) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq O_f(Z_2)$$

für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$ erfüllt sind.

1.10. Riemann hat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ auf eine etwas andere (aber zur vorigen Definition äquivalente) Weise definiert. Für einer Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und ein System T von Punkten $t_1, \ldots, t_n$, mit $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, führt man die sogenannte *Riemann-Summe* ein:

$$S_f(Z,T) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ der Grenzwert aller solchen Riemann-Summen im Fall, dass die Feinheit

$$\Delta(Z) := \max\{x_i - x_{i-1} \,:\, i = 1, \ldots, n\}$$

gegen 0 geht.

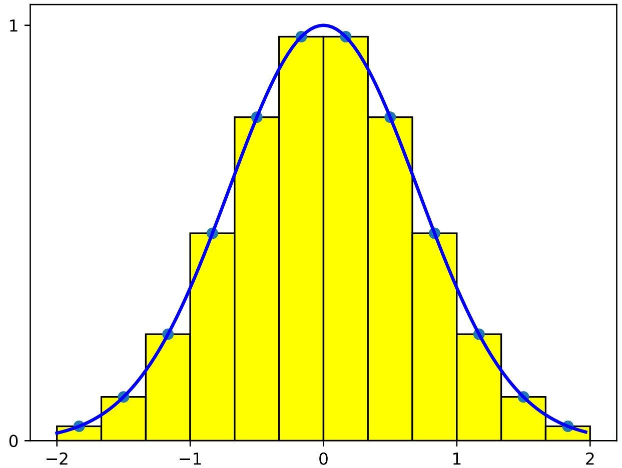
Man beachte: Die Anzahl der Elemente in Z ist nicht fest. Wenn die Feinheit von Z gegen 0 geht, geht n gegen ∞.

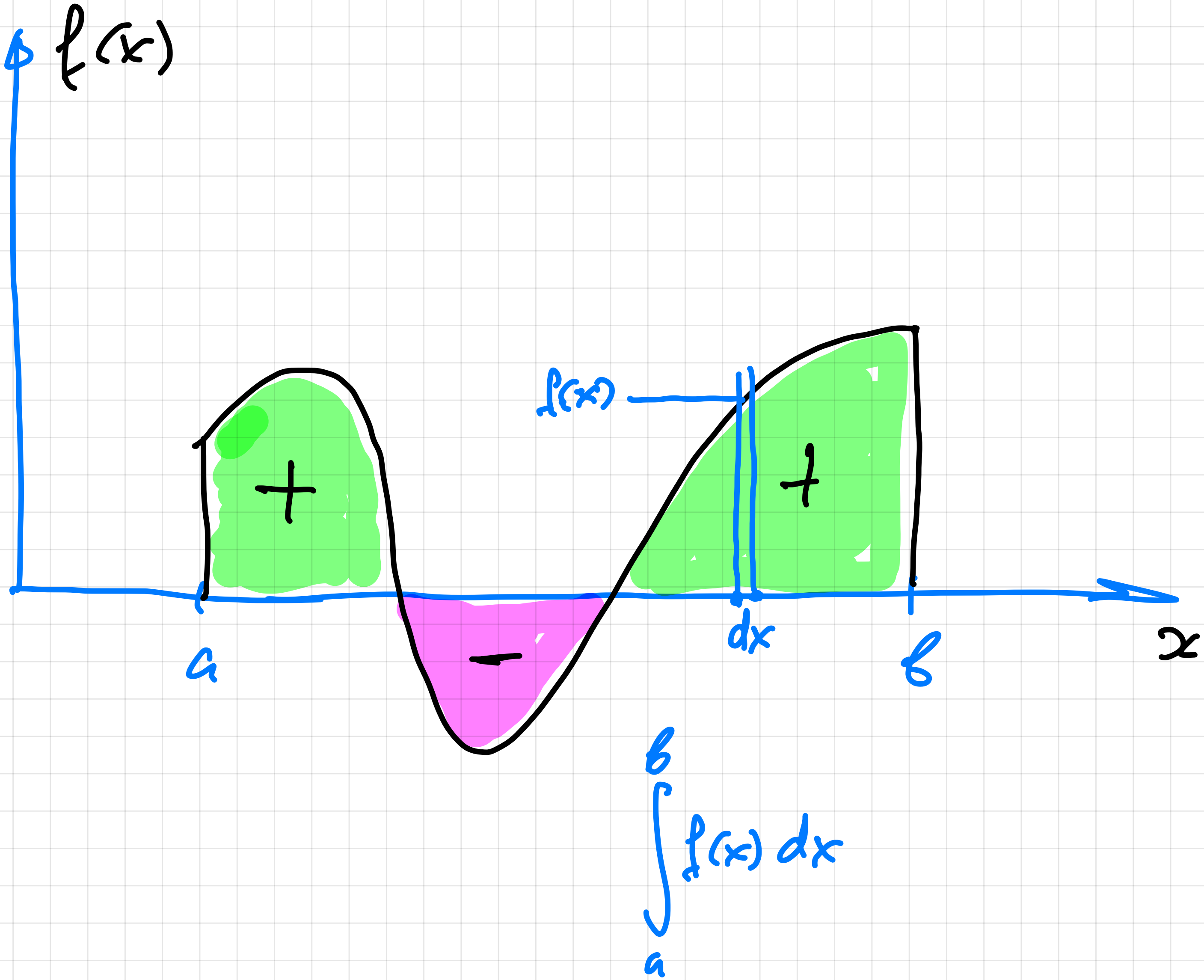
Ein weiterer Kommentar: Es gilt offensichtlich

$$U_f(Z) \leq S_f(Z,T) \leq O_f(Z).$$

Ist f Riemann-integrierbar gehen bei $\Delta(Z) \to 0$ konvergieren alle drei Summe $U_f(Z)$ (Untersumme) $S_f(Z,T)$ (Riemann-Summe) und $O_f(Z)$ (Obersumme), gegen den selben Wert $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$. Somit hat die Wahl des Punkts t_i in $[x_{i-1}, x_i]$ bei $\Delta(Z) \to 0$ keine großen Auswirkungen auf $S_f(Z,T)$.

1.11. Beispiele einer Riemann-Summe der Funktion e^{-x^2} für eine Zerlegung von $[-2, 2]$:




f(x)
f(x)
+
-
+
a
dx
b
x
$\int_a^b f(x)\,dx$

1.12 Def (Orientierte Version des Riemann-Integrals)**.** Wir haben $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $a < b$ definiert. Nun setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0, & \text{für } a = b, \\ -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}\,x & \text{für } a > b. \end{cases}$$

2 Grundeigenschaften des Riemann-Integrals

2.1 Thm. *Eine Riemann-integrierbare Funktion f auf $[a, c]$ ist auf jedem Unterintervall von $[a, c]$ ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

für alle $b \in [a, c]$.

2.2 Thm. *Sind f, g Riemann-integrierbar über $[a, b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f \cdot g$ und $\alpha f + \beta g$ Riemann integrierbar, uns es gilt:*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \,\mathrm{d}\, x = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

2.3 Thm. *Jede stetige Funktion auf* $[a, b]$ *ist Riemann-integrierbar.*

2.4 Thm. *Jede beschränkte Funktion auf* $[a, b]$*, die in nur in endlich vielen Punkten von* $[a, b]$ *nicht stetig ist, ist Riemann-integrierbar.*

2.5. Ungleichungen können integriert werden...

2.6 Thm. *Sind f und g über $[a,b]$ Riemann-integrierbar, dann folgt aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ die Ungleichung*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

2.7 Def. Gilt für Funktionen $f, F : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I die Relation $F' = f$ so nennt man F *Stammfunktion* von f.

2.8. Sind F_1, F_2 Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, dann ist ihre Differenz $F_1 - F_2$ eine Konstante Funktion auf dem Intervall I. Das folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Die Tatsache, dass I ein Intervall ist, ist wesentlich.

2.9 Def. Das **unbestimmte Integral** einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I ist die parametrische Familie aller Stammfunktionen von f. Bezeichnung: $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

2.10. Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ nennt man im Gegensatz zum unbestimmten Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ das **bestimmte Integral**.

2.11 Bsp. Es gilt
$$\int \cos x \,\mathrm{d}\, x = \sin x + C$$
wegen
$$(\sin x + C)' = \cos x.$$
Hier steht $C \in \mathbb{R}$ für eine Konstante.

Der Ausdruck $\sin x + C$ steht hier eigentlich für die Menge $\{\sin x + C \;:\; C \in \mathbb{R}\}$ aller Stammfunktion von $\cos x$, es ist aber üblich in solchen Situation die Schreibweise $\sin x + C$ zu benutzen.

2.12. Die Formeltafeln für die Stammfunktionen sind im Wesentlichen die Formeltafeln für Ableitungen, die man "rückwärts" aufgeschrieben hat. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x &\qquad\Longleftrightarrow\qquad& \int \cos x \,\mathrm{d}\, x = \sin x + C, \\
(\cos x)' &= -\sin x &\qquad\Longleftrightarrow\qquad& \int \sin x \,\mathrm{d}\, x = -\cos x + C, \\
(x^p)' &= p x^{p-1} &\qquad\Longleftrightarrow\qquad& \int x^a \,\mathrm{d}\, x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (\text{für } a \neq -1), \\
&&\vdots&
\end{aligned}$$

2.13. Das unbestimmte und das bestimmte Integral hängen zusammen...

2.14 Thm (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Ist F Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a).$$

$(F' = f)$

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

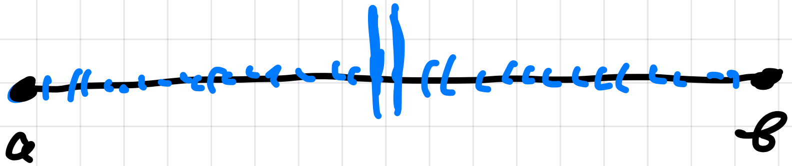
Das Integral der Ableitung einer Funktion von a bis b ist gleich der Änderung der Funktion beim Übergang von a bis b.

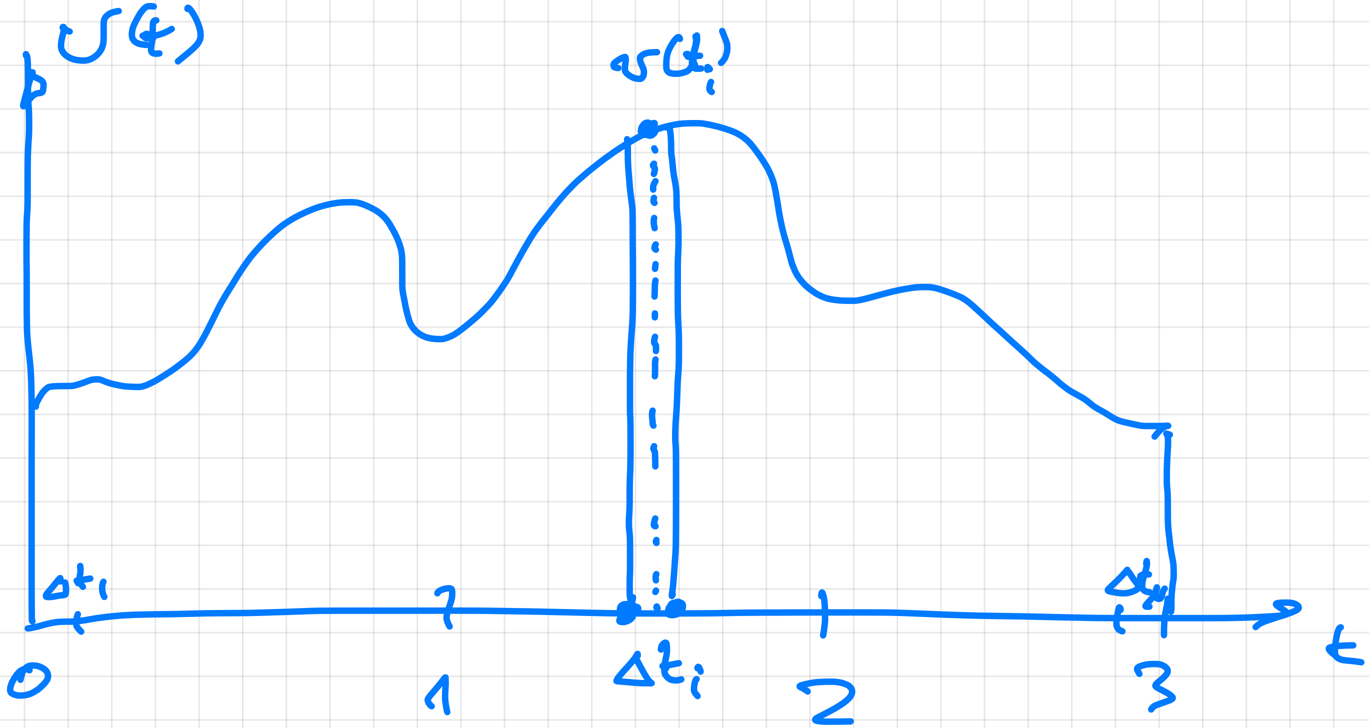
$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF}{dx}} \longleftarrow \text{nach Leibniz}$$

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} \cdot dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{dF}{dx} \cdot dx = dF$$





$$\sum_{i=1}^{N} v(t_i)\,\Delta t_i = \int_0^3 v(t)\,dt = x(3) - x(0)$$

$x(t)$ Position zum Zeitpunkt t.

$v(t) = x'(t)$.

2.15. Als Folgerung können wir die Ableitung von $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ nach x bestimmen. Ist F Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = F(x) - F(a).$$

Es folgt

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x).$$

Wir haben gezeigt, dass $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ als Funktion in x Stammfunktion von $f(x)$ ist.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big(F(x) - F(a)\Big) \qquad F' = f$$

$$= f(x)$$

2.16. Für $F(b)-F(a)$ benutzt man die folgenden Bezeichnungen: $F(x)\Big|_{x=a}^{b}$ oder $F(x)\Big|_{a}^{b}$ oder $\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$ oder $\big[F(x)\big]_{x=a}^{b}$.

2.17. Im Folgenden werden Regeln diskutieren, die man beim Ausrechnen von Integralen benutzen kann. Man muss aber gewarnt werden, dass nicht jede elementare Funktion eine elementare Stammfunktion besitzt. Eines der bekanntesten Beispiele ist die Funktion e^{-x^2}. Es gilt

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = F(x) + C,$$

für die Stammfunktion F (das ist die Funktion mit $F'(x) = e^{-x^2}$) hat man aber keine elementare Formel. Das bedeutet unter anderem, dass man zur Berechnung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

für gegebene a und b numerische Approximationen benutzen muss (Stichwort: Numerisches Integrieren).

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C} \Longrightarrow \int_a^b f(x) = F(b) - F(a).$$

$\Updownarrow$

Nichts anderes als

$$F'(x) = f(x).$$

Bsp

$$\int e^x dx = e^x + C \iff (e^x)' = e^x$$

$$\int 2^x dx = \int e^{\ln 2 \cdot x} dx = \frac{1}{\ln 2} e^{\ln 2 \cdot x} + C$$

$$\left(\frac{1}{\ln 2} e^{\ln 2 \cdot x}\right)' = e^{\ln 2 \cdot x}$$

Der Zug kommt in München an.

München ist der Ankunftsort des Zuges.

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad \longleftrightarrow \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad \longleftrightarrow \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \longleftrightarrow \quad \int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1} \quad \longleftrightarrow \quad \int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

$$(p \neq -1)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

Berechnungen anhand der Leibniz'schen Intuition

2.18 Bsp. Wir berechnen das Volumen eines Kegels K in $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von der Grundfläche und der Höhe. Sei A der Flächeninhalt der Grundfläche des Kegels und h die Höhe.

Wir platzieren den Kegel im Raum $\mathbb{R}^3$ so, dass die Spitze in $(0,0,0)$ ist und die Grundfläche in der Ebene $\{h\} \times \mathbb{R}^2$ liegt. Für $x \in [0,h]$ hat der Querschnitt des Kegels mit der Ebene $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ die Fläche

$$f(x) := \left(\frac{x}{h}\right)^2 A,$$

Wenn wir im Bereich $[0,h]$ eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $0 = x_0 < \cdots < x_n \leq n$ einführen, dann ist der "Ausschnitt" $\{(x,y,z) \in K : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ des Kegels K ein Kegelstumpf, den man zwischen zwei Zylindern schachteln kann: die beiden Zylinder haben Höhe $x_i - x_{i-1}$, der kleinere Zylinder hat die Fläche $f(x_{i-1})$ und der größere Zylinder hat die Fläche $f(x_i)$. Wir haben also das Volumen V des Kegels durch

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = U_f(Z) \leq V \leq O_f(Z) \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i)$$

approximiert. Da man $U_f(Z) \leq V \leq O_f(Z)$ hat und die Zerlegung Z beliebig ist, sehen wir dass $V = \int_0^h f(x)\,\mathrm{d}\,x$ ist.

Wir erhalten also für das Volumen die Beschreibung

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 A\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{A}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{A}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^h \\ &= \frac{A}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}hA. \end{aligned}$$

Volumen einer Sattelitenschüssel.

3 Substitutionsregel

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$ Kettenregel.

F Stammfunktion von f

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int F'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \int \big(F(g(x))\big)'\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hauptsatz}}}{=} F(g(x)) + C$$

3.1 (Substitution)**.** Sei F Stammfunktion von f und sei g differenzierbar. Die Kettenregel ergibt:

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Das heißt: $F \circ g$ ist eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$. Das kann man als die Gleichung

$$\int f(g(x))g'(x) \,\mathrm{d}\, x = F(g(x)) + C$$

für das unbestimmte Integral von $f(g(x))g'(x)$ hinschreiben. Durch das Anwenden des Hauptsatzes ergibt sich daraus die Substitutionsregel für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \,\mathrm{d}\, y.$$

Tatsächlich: Nach dem Hauptsatz kann man die linke Seite als $(F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)$ umschreiben und die rechte Seite als $F(g(b)) - F(g(a))$. Das ist aber dasselbe.

Bsp.

$$\int x \sin x^2 \, dx =$$

$$\frac{1}{2} \int (2x) \cdot \sin x^2 \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$ (Substitutionsregel).

$$\boxed{\begin{aligned} y &= g(x) \\ dy &= g'(x)\,dx \end{aligned}}$$

Man führt normalerweise eine neue Variable ein und benutzt diesen Formalismus.

Schreibweise mit einer neuen Variablen:

$$\int x \sin x^2 \, dx = \boxed{\begin{aligned} &\text{Substitution:} \\ y &= x^2 \\ dy &= (x^2)' \, dx \\ &= 2x \, dx \end{aligned}} = \int \frac{1}{2} \sin y \, dy$$

$$= -\frac{1}{2} \cos y + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C.$$

Bsp.

$$\int \sin x \cos x \, dx = \boxed{\begin{aligned} y &= \sin x \\ dy &= (\sin x)' \, dx \\ &= \cos x \, dx \end{aligned}}$$

$$= \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

3.2 (Leibniz'sche Sichtweise)**.** Erinnern wir uns an die Schreibweise von Leibniz:

$$q'(x) = \frac{\mathrm{d}\, q(x)}{\mathrm{d}\, x}.$$

Wenn wir nun diese Gleichung rein formal als $\mathrm{d}\, q(x) = q'(x)\,\mathrm{d}\, x$ umschreiben, so werden wir motiviert, die folgende Bezeichnung einzuführen:

$$\int p(x)\,\mathrm{d}\, q(x) := \int p(x) q'(x)\,\mathrm{d}\, x$$

Hier noch die analoge Bezeichnung für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\, q(x) := \int_a^b p(x) q'(x)\,\mathrm{d}\, x$$

Mit diesen Bezeichnungen kann nun die Substitutionsregel so beschrieben werden.

- *Für unbestimmte Integrale.* Zum Berechnen von

$$\int f(g(x))\,\underbrace{\mathrm{d}\, g(x)}_{= g'(x)\,dx}$$

reicht es aus,

$$\int f(y)\,\mathrm{d}\,y$$

zu berechnen (y ist neue Integrationsvariable) und dann

$$y = g(x)$$

einzusetzen. Als Formel:

$$\int f(g(x))\,\mathrm{d}\,g(x) = \left(\int f(y)\,\mathrm{d}\,y\right)\Big|_{y=g(x)} .$$

- *Bestimmte Integrale.*

$$\int_a^b f(g(x))\,\mathrm{d}\,g(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

3.3 Bsp (Substitution für unbestimmte Integrale)**.**

$$\begin{aligned}
\int e^{-x^2} x \,\mathrm{d}\, x &= -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}(-x^2) && \mid \text{wegen } (x^2)' = 2x \\
&= -\frac{1}{2}\int e^{y}\,\mathrm{d}\, y && \mid \text{mit } y = -x^2. \\
&= -\frac{1}{2}e^{y} + C && \mid e^{y} \text{ Stammfunktion von } e^{y} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C && \mid y = -x^2 \text{ einsetzen.}
\end{aligned}$$

Bsp.

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$$

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C \qquad F' = f.}$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = (\cos x)' \, dx = -\sin x \, dx \end{array} \right.$$

$$= -\int \frac{dy}{y} = -\ln y + C = -\ln \cos x + C$$

$$\int_0^{\pi/3} \tan(x)\,dx = \Big[-\ln\cos x\Big]_{x=0}^{\pi/3}$$

$$= -\ln\cos\frac{\pi}{3} - \left(-\ln\cos 0\right)$$

$$= -\ln\cos\frac{\pi}{3} + \ln\cos 0$$

$$= -\ln\frac{1}{2} + \ln 1$$

$$= \ln 2$$

$$\int_0^{\pi/3} \tan(x)\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \boxed{\begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = -\sin x\,dx \\ x \text{ von } 0 \text{ bis } \pi/3 \Rightarrow \\ y \text{ von } 1 \text{ bis } 1/2 \end{array}}$$

$$-\int_1^{1/2} \frac{dy}{y} = \Big[-\ln y\Big]_{y=1}^{1/2} = \ln 2.$$

3.4 Bsp (Substitution für bestimmte Integrale)**.**

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}\,x &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x\,\mathrm{d}\,x}{\cos x} && \mid \tan(x) \text{ ausschreiben} \\
&= -\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} && \mid \text{wegen } (\cos x)' = -\sin x \\
&= -\int_{\cos 0}^{\cos \pi/3} \frac{\mathrm{d}\,y}{y} && \mid \text{mit } y = \cos x \\
&= -\int_1^{1/2} \frac{\mathrm{d}\,y}{y} && \mid \text{Grenzen ausgerechnet} \\
&= -\Big[\ln y\Big]_1^{1/2} \\
&= -(\ln 1/2 - \ln 1) \\
&= \ln 2.
\end{aligned}
$$

4 Partielle Integration

$$(uv)' = uv' + u'v$$ Produktregel.

$$\Downarrow$$

$$\int (uv)'\,dx = \int uv'\,dx + \int u'v\,dx$$

$$uv + C = \int uv'\,dx + \int u'v\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx}$$

4.1. Partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel für das Differenzieren. Die Produktregel besagt $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$. Das bedeutet

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,\mathrm{d}\,x = u(x)v(x) + C.$$

Somit ergibt sich die Gleichung

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}\,x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x$$

für zwei unbestimmte Integrale. Die Ableitung "wandert" von v auf u, was in manchen Situationen zur einer Vereinfachung des Integrals führt.

Wir können die Gleichung auch in den folgenden Bezeichnungen formulieren:

$$\int u(x)\,\mathrm{d}\,v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}\,u(x)$$

Bsp.

$$\int x e^x \, dx = \int x (e^x)' \, dx$$

$$\overset{P.I.}{=} x e^x - \int x' e^x \, dx$$

$$= x e^x - \int e^x \, dx$$

$$= x e^x - e^x + C$$

Bsp.

$$\int_0^1 x e^x \, dx = \int_0^1 x (e^x)' \, dx$$

$$= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 x' e^x \, dx$$

$$= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= e - \left[e^x \right]_0^1$$

$$= e - (e^1 - e^0)$$

$$= e - e + 1 = 1$$

4.2 Bsp (Partielle Integration für unbestimmte Integrale)**.**

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^x \,\mathrm{d}\,x &= \int x^2 \,\mathrm{d}\, e^x && \mid \text{ wegen } (e^x)' = e^x \\
&= x^2 e^x - \int e^x \,\mathrm{d}\, x^2 && \mid \text{ partiell integrieren} \\
&= x^2 e^x - 2\int x e^x \,\mathrm{d}\, x && \mid \text{ wegen } (x^2)' = 2x \\
&= x^2 e^x - 2\int x \,\mathrm{d}\, e^x && \mid \text{ wegen } (e^x)' = e^x \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x \,\mathrm{d}\, x && \mid \text{ partiell integrieren} \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C && \mid \text{ wegen } (e^x)' = e^x \\
&= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.
\end{aligned}
$$

$\int x^2 (e^x)' dx$

$x^2 e^x = x^2 (e^x)' \xrightarrow{\text{P.I.}} x e^x = x(e^x)' \xrightarrow{\text{P.I.}} e^x \rightarrow$ gelöst.

__Bsp__

$$\int \ln x \, dx = \int x' \ln x \, dx$$

$$\overset{P.I.}{=} x \ln x - \int x (\ln x)' \, dx$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x$$

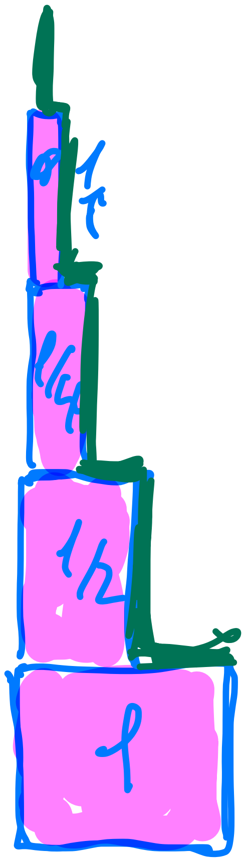
4.3 Bsp.

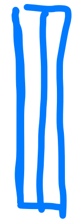
$$\begin{aligned}
\int \ln x \,\mathrm{d}\, x &= x \ln x - \int x \,\mathrm{d} \ln x && \mid \text{partielle Integration} \\
&= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x && \mid \text{wegen} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\
&= x \ln x - \int \mathrm{d}\, x \\
&= x \ln x - x + C
\end{aligned}$$

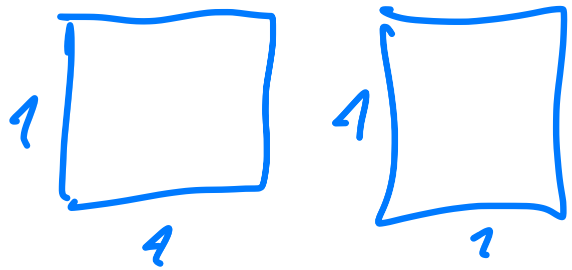
4.4. Partielle Integration für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}\,x = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

5 Uneigentliche Integrale



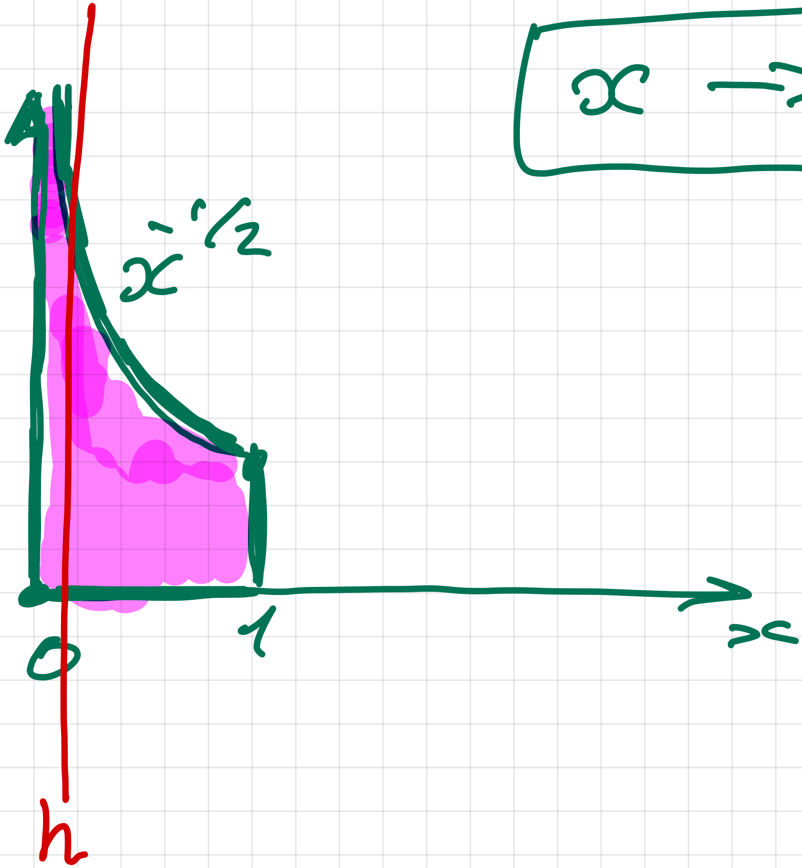




Bsp.

$x^{-1/2}$ auf $(0,1]$

$$\boxed{x \to 0+ \Longrightarrow x^{-1/2} \longrightarrow +\infty}$$



$$\lim_{h \to 0+} \int_h^1 x^{-1/2}\,dx$$

nennt man das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$$

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 x^{-1/2}\,dx$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left[2x^{1/2}\right]_{x=h}^{1}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left(2\cdot 1^{1/2} - 2\cdot h^{1/2}\right)$$

$$= 2$$

5.1 Bsp. Das Integral $\int_0^1 x^{-1/2} \,\mathrm{d}\, x$ existiert im Rahmen der oben angeführten Theorie der Riemann-Integrale nicht. Die Funktion $x^{-1/2}$ ist an der unteren Grenze 0 nicht definiert. Auch wenn wir die Funktion auf die Stelle erweitern würden, wäre eine solche Erweiterung über $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar. Wir können das Integral as ein sogenanntes **uneigentliches Integral** folgendermaßen einführen:

$$\int_0^1 x^{-1/2} \,\mathrm{d}\, x = \lim_{h \to 0+} \int_h^1 x^{-1/2} \,\mathrm{d}\, x.$$

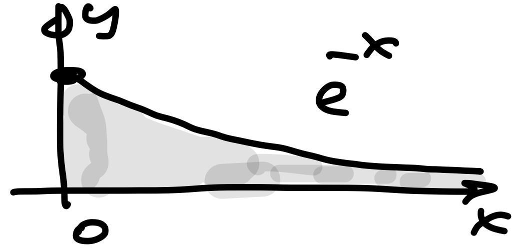
Weil man

$$\int_h^1 x^{-1/2} \,\mathrm{d}\, x = \Big[2x^{1/2} \Big]_{x=h}^{1} = 2 - 2\sqrt{h}$$

hat, erhalten wir

$$\int_0^1 x^{-1/2} \,\mathrm{d}\, x = \lim_{h \to 0+} (2 - 2\sqrt{h}) = 2.$$

5.2 Bsp. Wir können das Integrieren über unbeschränkte Intervalle ebenfalls als uneigentliche Integrale einführen. Zum Beispiel:



$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Weil man

$$\int_0^t e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \Big[-e^{-x}\Big]_{x=0}^{t} = 1 - e^{-t}$$

hat, erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = 1.$$

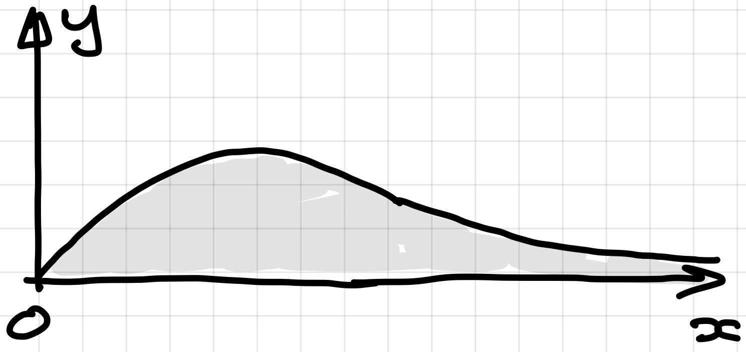
Diese Berechnung wird in der Regel folgendermaßen aufgeschrieben:

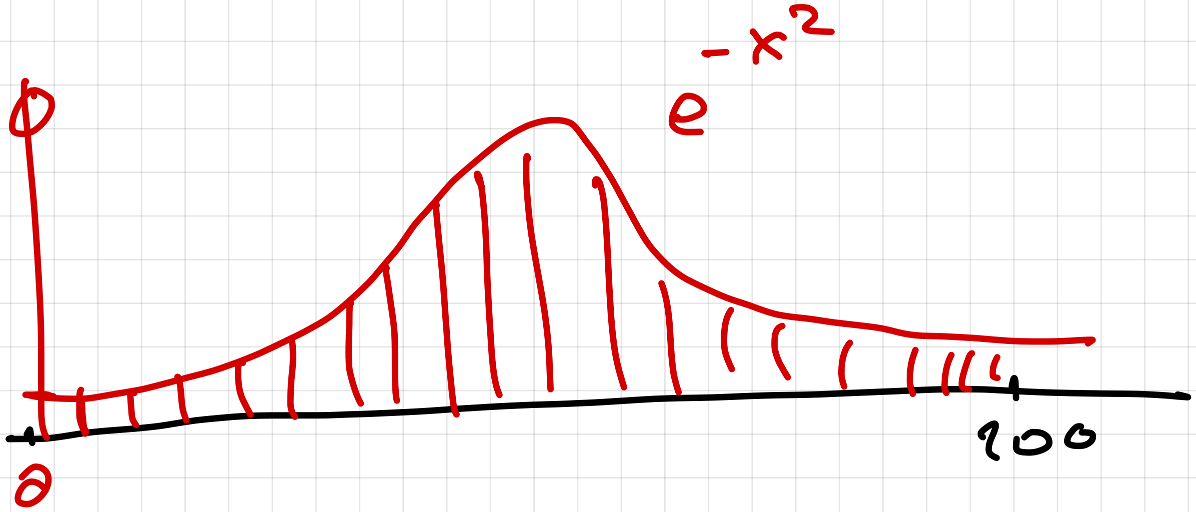
$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \Big[-e^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} = 1 - 0 = 1,$$

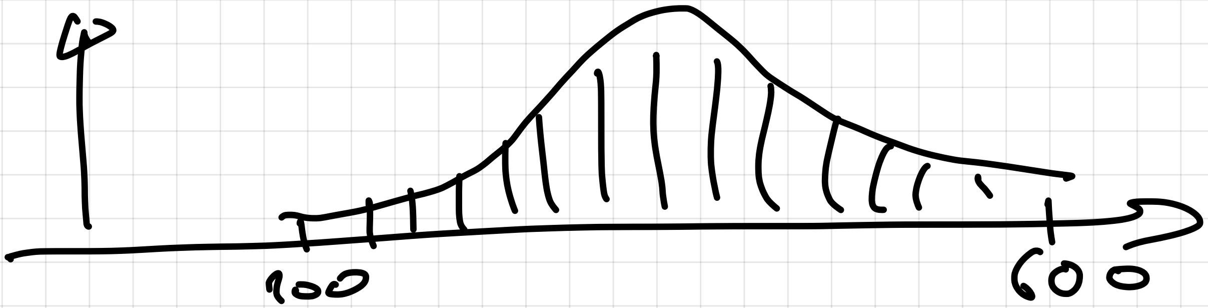
wobei man unter dem Einsetzen von ∞ einen Grenzwertübergang meint.

Bsp. $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\cdot 1$ (vgl. Beispiel oben)

$$\boxed{\begin{aligned} &y = x^2 \\ &dy = (x^2)'\,dx = 2x\,dx \\ &x \text{ von } 0 \text{ bis } \infty \\ &y \text{ von } 0 \text{ bis } \infty \end{aligned}}$$







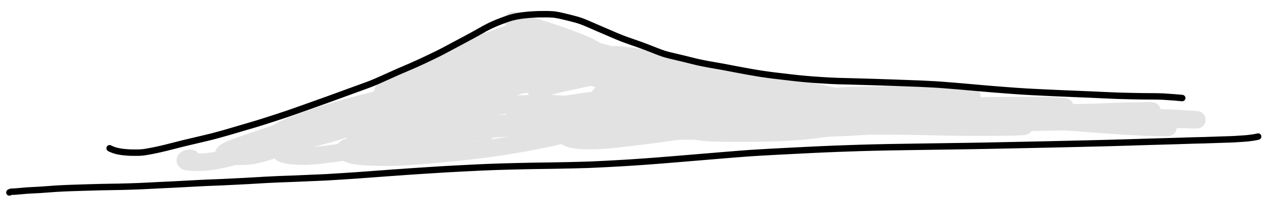
5.3 Def (Verschiedene uneigentliche Integrale)**.** Seien $-\infty < a < b < \infty$. Wir definieren die uneigentlichen Integrale:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x &:= \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\,x, \\
\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}\,x &:= \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}\,x, \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x &:= \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}\,x, \\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x &:= \lim_{h\to0+}\int_{a+h}^b f(x)\,\mathrm{d}\,x, && \text{bei } \lim_{h\to0+}|f(a+h)| = \infty. \\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x &:= \lim_{h\to0+}\int_a^{b-h} f(x)\,\mathrm{d}\,x, && \text{bei } \lim_{h\to0+}|f(b-h)| = \infty.
\end{aligned}$$

5.4. Da uneigentliche Integrale Grenzwerte sind, kann man für sie die Terminologie aus der Theorie der Grenzwert benutzen (Konvergenz, Divergenz, bestimmte Divergenz).

5.5 Bsp.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1} &= \Big[\arctan x\Big]_{x=-\infty}^{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi\end{aligned}$$



6 Exkurs in Lebesgue-Integrale

$$\text{Länge von}\left([1,2] \cup [3,5]\right) = (2-1) + (5-3) = 3$$

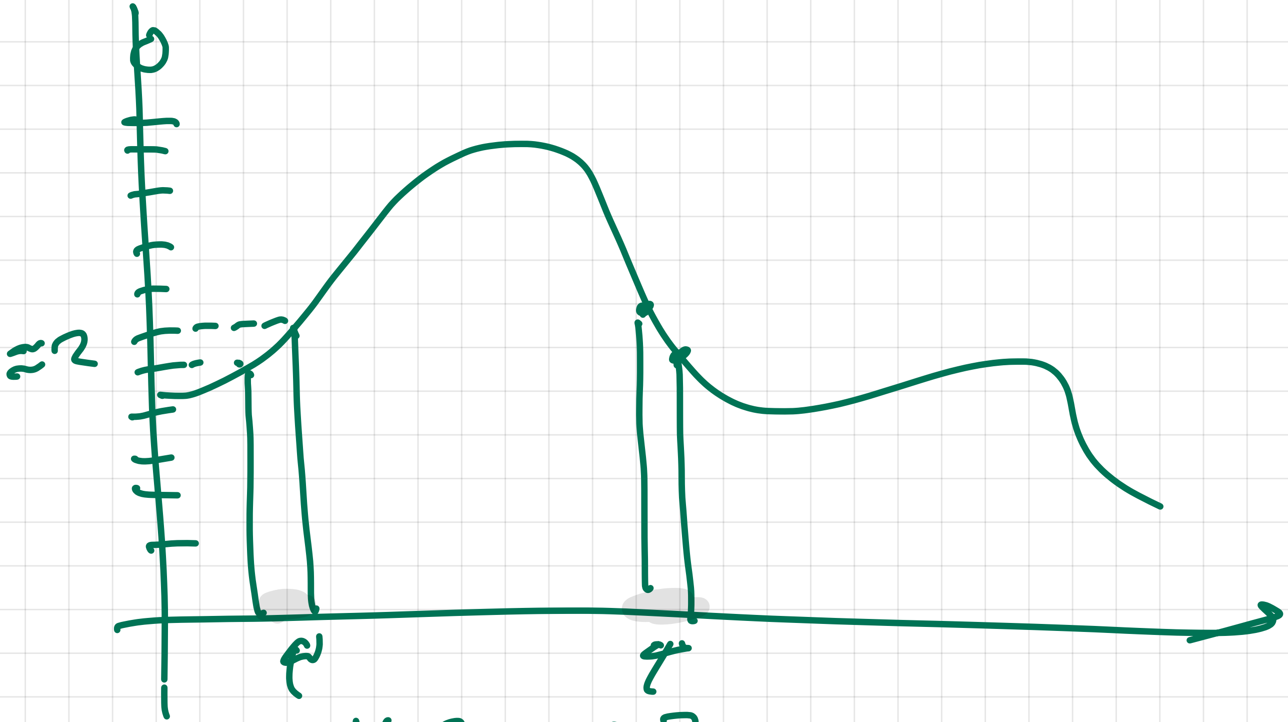
$$\text{Länge}\left(\mathbb{Q} \cap [0,1]\right) = 0$$

$0{,}1111111100\ldots \in [0,1]$

Zahl im Binärsystem

$0{,}10000000000000\ldots = \frac{1}{2}$

$0{,}10110001010101010\ldots$



Mp P = 0,7.

2 · 0,7.

6.1. Uneigentliche Integrale sind eine “schnelle Reparatur” einiger Probleme, die man mit der Theorie der Riemann-Integrale hat. Man kann über unbeschränkten Bereichen nicht direkt nach Riemann integrieren, man kann viele (gute) unbeschränkte Funktionen nicht direkt nach Riemann integrieren.

Eine “grundsätzliche Reparatur” bietet die Theorie von **Lebesgue-Integralen**. Lebesgue-Integrierbarkeit ist eine viel weniger einschränkende Eigenschaft einer Funktion. In der Theorie der Lebesgue-Integrale müssen die Integrale

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}\,x = 2, \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = 1$$

nicht gesondert behandelt werden: die beiden Funktionen sind über die jeweiligen Bereichen Lebesgue-integrierbar.

6.2. Basics zu Lebesgue-Integralen:

(a) In der Definition des Lebesgue-Integrals zerlegt man nicht den Defintionsbereich sondern den Wertebereich in Stückchen.

(b) Definition des Lebesgue-Integrals für Funktion einer Variable basiert auf dem Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$, d.h., für mache Teilmengen von $\mathbb{R}$ kann ihre Länge (im Lebesgue-Sinne) messen. Hierbei ist die Länge von $[a, b]$ gleich $b-a$. Die Länge von $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ ist aber zum Beispiel 0, weil $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ aus abzählbar vielen einelementigen Mengen zusammengesetzt ist, deren Länge gleich 0 ist.

(c) Wenn die Gleichung $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = I$ nach der Definition von Riemann gilt, nach gilt sie auch nach der Definition von Lebesgue. Das heißt, das Riemann-Integral ist eine Erewei-terung des Lebesgue-Integrals.

6.3 (Lebesgue-Integral und Wahrscheinlichkeitstheorie)**.** Für die Wahrscheinlichkeitstheorie reicht die Theorie der Riemann-Integrale nicht aus. Lebesgue-Integrale sind mit Hinblick auf Anwendungen in Wahrscheinlichkeitstheorie sehr natürliche Objekte.

7 Abschätzung von Summen und Reihen durch Integrale

$$\sum_{i=a}^{b} i^{10} \xleftrightarrow{\text{link}} \int_a^b x^{10}\,dx = \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_{x=a}^{b} = \frac{b^{11}-a^{11}}{11}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^{10}} \longleftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{10}}\,dx$$

7.1. Summen, Reihe und Integrale sind alles Varianten von Summen. Obwohl Integral umsetzungstechnisch die kompliziertesten Varianten von Summen sind, sind sie oft einfacher zu Berechnen als Summen oder Reihen. Was man also machen kann: Summen und Reihen durch Integrale Abschätzen.

7.2 Bsp (Partialsumme der harmonischen Reihe)**.** Wir geben Abschätzungen für

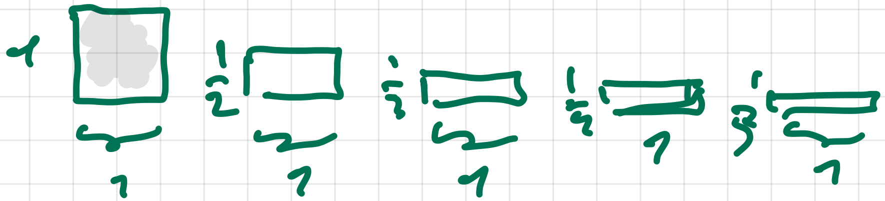
$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

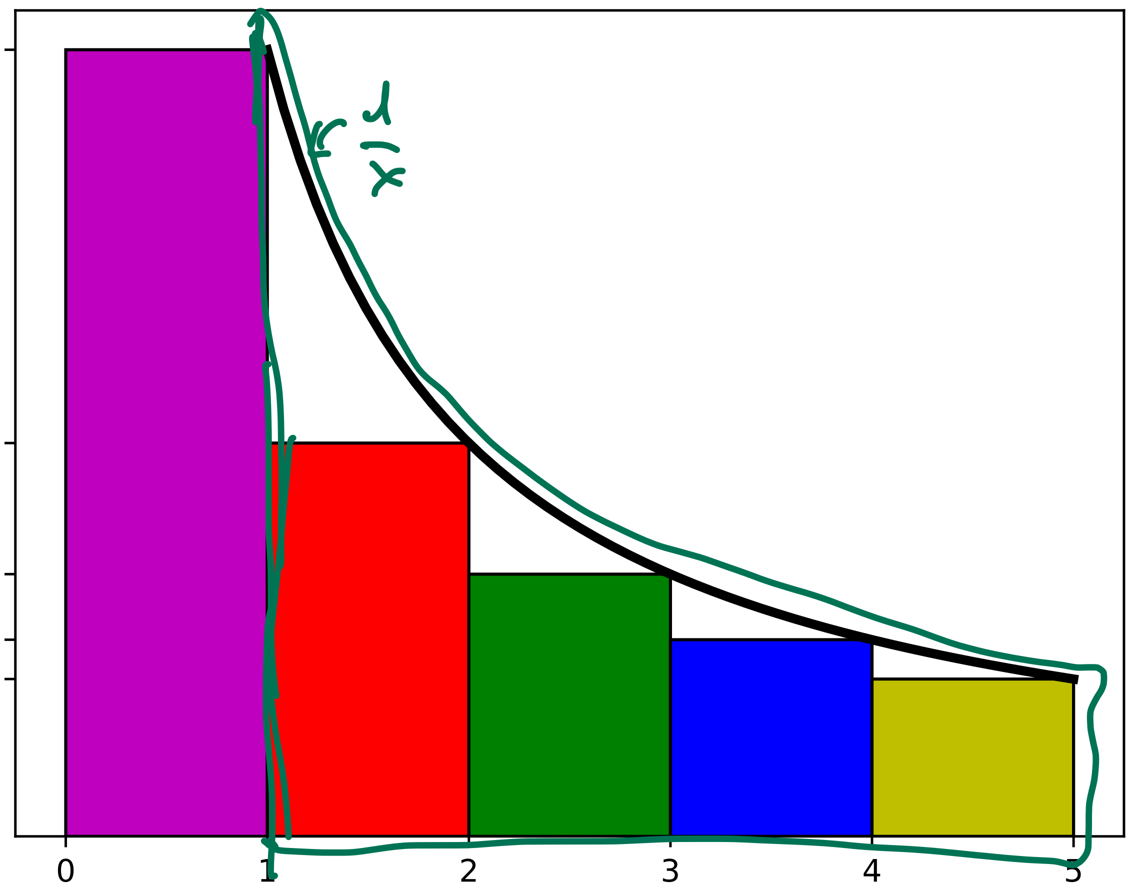
Die Abschätzung von s_n basiert auf dem Vergleich von s_n mit den bestimmten Integralen der Funktion $\frac{1}{x}$.

Hier die graphische Illustration im Fall $n = 5$. Wir haben fünf Balken der Höhen $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/$ und stellen die Balken der Höhen $1/2, 1/3, 1/4$ und $1/5$ unter den Graphen der Funktion $1/x$ auf dem Bereich $[1, 5]$. Das ermöglicht die Abschätzung von $1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 \leq \int_1^5 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x$.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

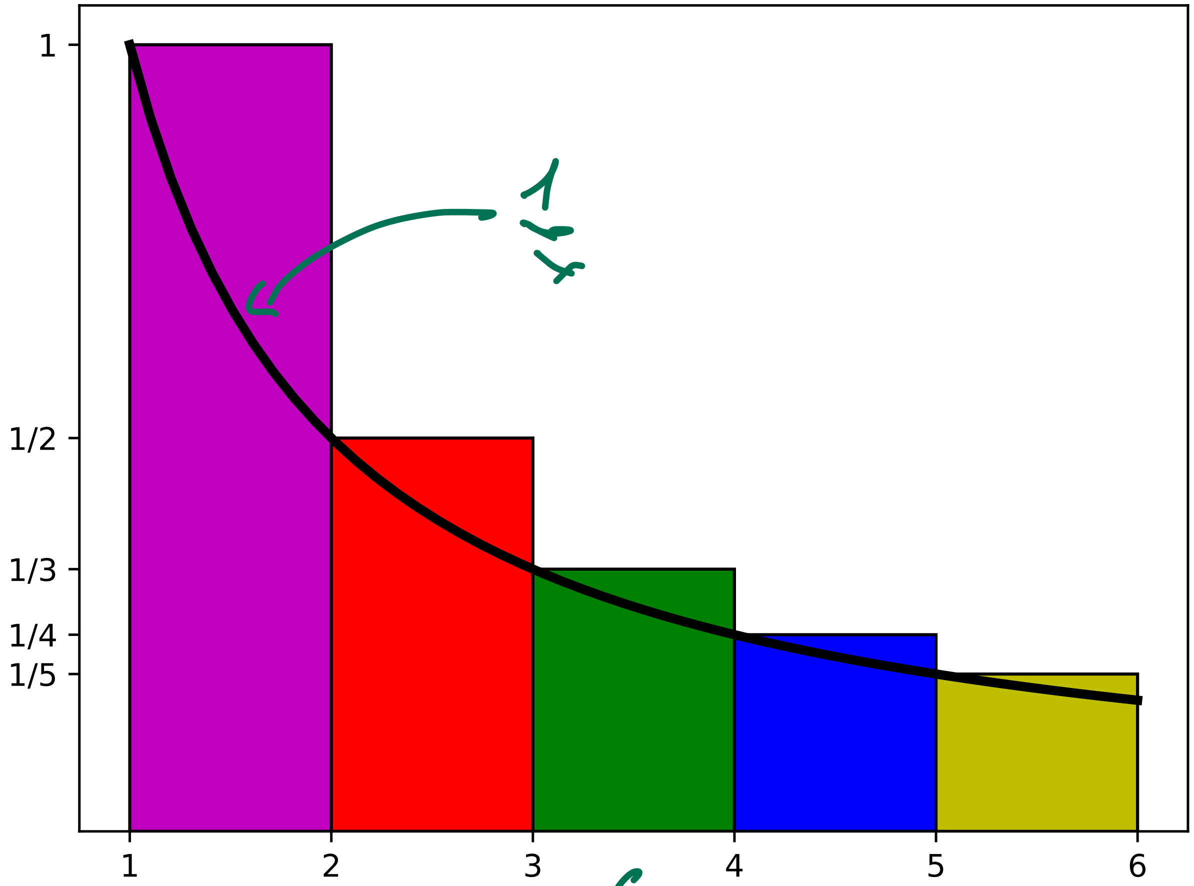
$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$





$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \leq 1 + \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = 1 + \left[\ln x\right]_{x=1}^{5}$$
$$= 1 + \ln 5$$

Wir können auch alle fünf Balken auf dem Bereich $[1, 6]$ abstellen. Dann geht der Graph Funktion $\frac{1}{x}$ durch die Balken durch und "sägt" die oberen Teile der Balken ab:



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \geq \int_1^6 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_{x=1}^{6} = \ln 6$$

$$\ln 6 \leq s_5 \leq \ln 5 + 1.$$

Das ergibt die Abschätzung $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 \geq \int_1^6 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x$.

$k \geq 2$

$$\frac{1}{k}\int_{k-1}^{k} dx = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\, dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\, dx$$

$\frac{1}{k}$ gegen $\frac{1}{x}$

Obere Schranke:

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} \,\mathrm{d}\, x && \Big| \text{ wegen } \int_{k-1}^{k} \mathrm{d}\, x = 1 \\
&\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x && \Big| \text{ wegen } x \leq k \text{ für } x \in [k-1, k] \\
&= 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x && \Big| \text{ Integrale zusammenfassen} \\
&= 1 + \Big[\ln x\Big]_{x=1}^{n} \\
&= 1 + \ln n.
\end{aligned}
$$

$(1,2], (2,3], \ldots, (n-1,n]$

Das ergibt

$$s_n \leq 1 + \ln n.$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k}\int_k^{k+1} dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx$$

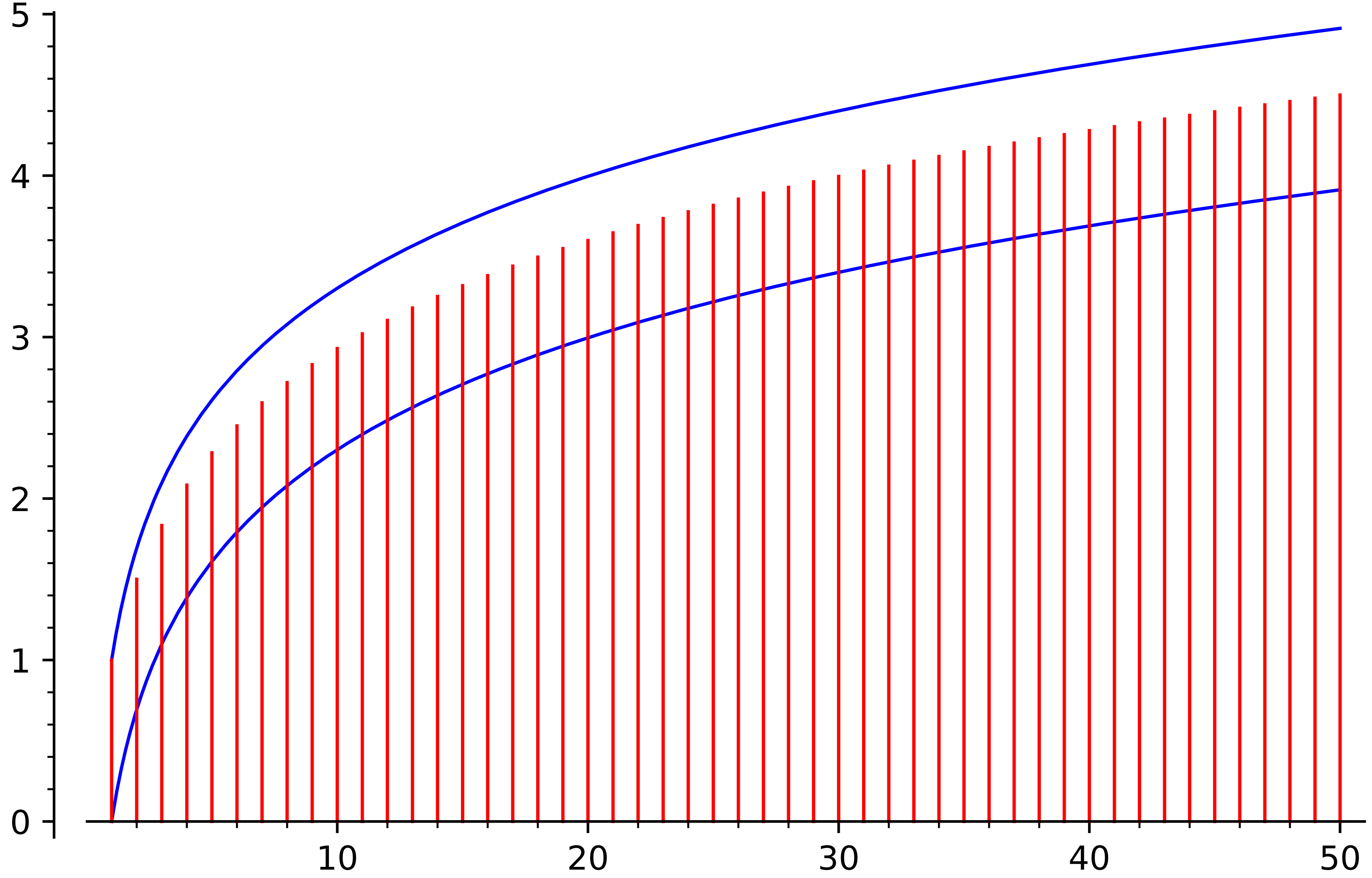
Untere Schranke:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}\,x && \Big|\ \text{wegen } \int_k^{k+1} \mathrm{d}\,x = 1.\\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x && \Big|\ \text{wegen } x \geq k \text{ für } x \in [k, k+1].\\
&= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x && \Big|\ \text{alle } n \text{ Integrale zusammengefügt}\\
&= \Big[\ln x\Big]_{x=1}^{n+1}\\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Das ergibt:

$$s_n \geq \ln(n+1).$$

Hier s_n im Vergleich zu $\ln x$ und $1 + \ln x$:



5
4
3
2
1
0
10
20
30
40
50

7.3 Bsp. Wir wissen, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist (das vorige Beispiel war ein weiterer Nachweis). Die harmonische Reihe ist Spezialfall $s = 1$ der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

Wir zeigen nun, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s > 1$ konvergent ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^s} &= \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^s} \,\mathrm{d}\, x \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s} \right]_{x=1}^{\infty} \\
&= \frac{1}{s-1}
\end{aligned}$$

Das ergibt die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^s} \leq 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

Bsp.

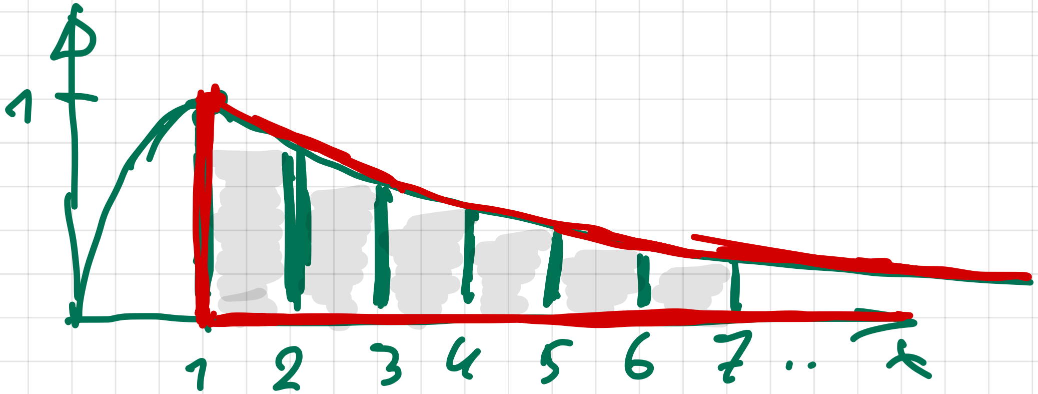
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k} = \frac{1}{e^1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{e^k} \leq \frac{1}{e} + \int_1^{\infty} \frac{x}{e^x}\,dx$$

NR: $x e^{-x}$ ist monoton steigend, fallend?

$$(xe^{-x})' = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x})$$

$$= (1-x)e^{-x} \Rightarrow$$

$x e^{-x}$ fallend für $x \geq 1$



$$\int_1^\infty x e^{-x} dx = -\int_1^\infty x (e^{-x})' dx \overset{?!}{=} \left[-x e^{-x}\right]_{x=1}^\infty + \int_1^\infty x' e^{-x} dx$$

$$= e^{-1} + \int_1^\infty e^{-x} dx = e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_{x=1}^\infty$$

$$= e^{-1} + e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{k}{e^k} \leq 3$$

7.4 Aufgabe. Geben Sie eine untere Abschätzung an $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s > 1$ durch eine Funktion in s.

7.5 Aufgabe. Nehmen wir an, Sie sind mit der Qualität der Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \leq \frac{s}{s-1}$$

für $s > 1$ nicht ganz zufrieden. Sie erhalten zum Beispiel, für $s = \frac{11}{10}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{11/10}} \leq 11$$

und würden gerne die 11 durch eine bessere Schranke ersetzen. Wie würden Sie vorgehen?

7.6. Formulieren wir die vorigen Abschätzungen als ein allgemeines Prinzip. Sei $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ monoton fallend und sei $\int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}\, x < +\infty$. Dann gilt

$$\int_1^\infty f(x) \, \mathrm{d}\, x \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) \leq \int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}\, x.$$

Man kann also die Summe $\sum_{k=1}^\infty f(k)$, die man evtl. nicht exakt berechnen kann, durch die Berechnung der beiden Integrale von $f(x)$ (wenn man etwa die Stammfunktion von $f(x)$ exakt bestimmen kann) abschätzen.

7.7 Aufgabe. Vergewissern Sie sich, dass die Abschätzungen aus der vorigen Bemerkung tatsächlich stimmen.

8 Integrale rationaler Funktionen

8.1 Def. Rationale Funktion ist Quotient von Polynomen.

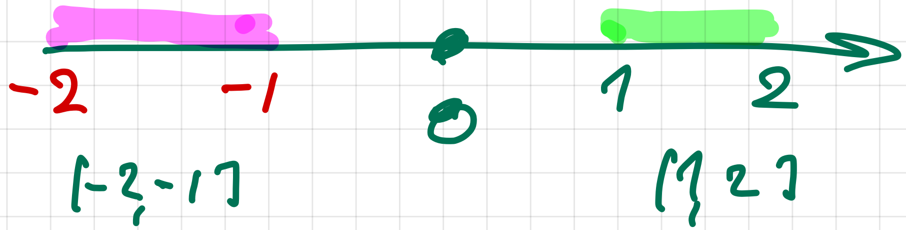
Bem. Stammfunktion von $\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

benutzbar für Intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_{>0}$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

benutzbar für Intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$



um das zu verifizieren, zeigen wir

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(Die Gleichheit ist eingeschränkt auf $x>0$).

Fall $x > 0$: $\quad (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ ✓.

Fall $x < 0$: $\quad (\ln|x|)' = (\ln(-x))'$

$\underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ ✓.

8.2 Bsp. Wir lesen die Formeltafeln für Ableitungen und bestimmen dadurch die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \ln|x| + C. \tag{V.1}$$

- Mann beachte, dass weder $\frac{1}{x}$ noch $\ln|x|$ in 0 definiert ist.

- Formel (V.1) bedeutet: fixiert man ein Intervall I, das 0 nicht enthält, so ist

  $$\{\ln|x| + C \;:\; C \in \mathbb{R}\}$$

  die Menge aller Funktionen auf I, deren Ableitung gleich $\frac{1}{x}$ ist.

- Formel (V.1) kann für die Berechnung bestimmter Integrale benutzt werden, man sollte aber die oben angeführten Kommentare beachten:

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \ln|e| - \ln|1| = 1 \qquad \text{| alles okay} \qquad [1, e] \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\int_{-4}^{-2} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \ln|-2| - \ln|-4| = -\ln 2 \qquad \text{| alles okay} \qquad [-4, -2] \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\int_{-3}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \cancel{\ln|1| - \ln|-3|} \qquad \text{| nicht okay wegen } 0 \in [-3, 1]$$

8.3 Bsp. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ kriegt man

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

durch die Substitution $y = ax + b$.

8.4 Bsp. Für $p \neq -1$ kriegt man

$$\int x^p \,\mathrm{d}\, x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,$$

indem man die Formeltafeln für Ableitungen rückwärts liest. Zum Beispiel: $(x^{-3})' = -3x^{-4}$ heißt, dass $-\frac{1}{3}x^{-3}$ Stammfunktion von x^{-4} ist. Das schreibt man als

$$\int x^{-4} \,\mathrm{d}\, x = -\frac{1}{3}x^{-3} + C.$$

Bsp.

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2-5x+4} = \int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)(x-4)}$$

Nullstellen von x^2-5x+4 ?

1 und 4 (pq-Formel, Abitur......)

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} \quad \Big| \cdot (x-1)(x-4)$$

es gibt A und B (reelle Zahlen), für die diese Gleichung gilt.

$$x+1 = A\cdot(x-4) + B\cdot(x-1).$$

Wie kommt man an A und B ?

$$4+1 = A\cdot(4-4) + B\cdot(4-1)$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{5}{3}$$

$$1+1 = A\cdot(1-4) + B\cdot(1-1)$$

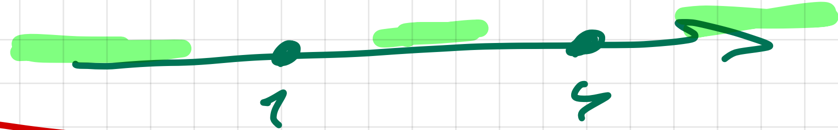
$$\Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad x+1 = -\frac{2}{3}(x-4) + \frac{5}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{(x-1)(x-4)} = -\frac{2}{3(x-1)} + \frac{5}{3(x-4)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)(x-4)} = -\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-4}$$

$$= -\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}\ln|x-4| + C$$



Bsp.:

$$\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)(x-4)} = \left[-\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{5}{3}|x-4|\right]_{x=2}^{3}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{5}{3}\ln 1\right) - \left(-\frac{2}{3}\ln 1 + \frac{5}{3}\ln 2\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right)\ln 2 = \ln 2$$

Bsp.

$$\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^2-5x+4} = \int\left(x^2+5x+21+\frac{85x-83}{x^2-5x+4}\right)dx$$

$$\begin{array}{l}
x^4+1 : x^2-5x+4 = x^2+5x+21 \\
-(x^4-5x^3+4x^2) \qquad\qquad R\ \ 85x-83 \\
\hline
\qquad 5x^3-4x^2+1 \\
\quad -(5x^3-25x^2+20x) \\
\hline
\qquad\qquad 21x^2-20x+1 \\
\qquad\quad -(21x^2-105x+84) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 85x-83
\end{array}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+21x+\int\frac{(85x-83)\,dx}{(x-1)(x-4)} =$$

$$\frac{85x-83}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$$

$$\Updownarrow$$

$$85x-83 = A(x-4) + B(x-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 85\cdot 4 - 83 = B\cdot 3 \\ 85 - 83 = -3\cdot A \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 340 \\ -\;\;83 \\ \hline 257 \end{array}$$

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{257}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 21x - \frac{2}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{x-1}}_{\ln|x-1|+C} + \frac{257}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{x-4}}_{\ln|x-4|+C}$$

8.5 Bsp. Wir berechnen

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}\,x.$$

Mit der pq-Formel kann x^2+x-6 als

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

faktorisiert werden. Das zeigt

$$\frac{x+1}{x^2+x-6}=\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}.$$

Nun kann man den Integranden als die Linearkombination

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

für gewisse $A, B \in \mathbb{R}$ darstellen. Wie bestimmt man A und B? Erstmal die Gleichung mit

$(x-2)(x+3)$ multiplizieren, sodass man auf die Gleichung

$$x + 1 = A \cdot (x-2) + B \cdot (x-3) \tag{V.2}$$

kommt. Nun kann man A und B aus der Gleichung (V.2) durch den Koeffizientenvergleich bestimmen. Dafür müssen wir dann lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den Unbekannten A und B lösen.

Noch einfacher geht es, wenn wir die Gleichung (V.2) an $x = 2$ und $x = 3$ auswerten. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= A \cdot (2-2) + B \cdot (2-3) = -B, && \mid \text{für } x = 2 \\ 3 + 1 &= A \cdot (3-2) + B \cdot (3-3) = A. && \mid \text{für } x = 3 \end{aligned}$$

Wir haben nun die Darstellung

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

ermittelt. Unser ursprüngliches Integral wird also eine linear Kombination von zwei einfacheren Integralen dargestellt, die wir bereits kennen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}\,x &= 4\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x-3} - 3\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x-2} \\ &= 4\ln|x-3| - 3|x-2| + C.\end{aligned} \tag{V.3}$$

Die Formel (V.3) kann auch zur Berechnung bestimmter Integrale benutzt werden, solange weder 3 noch 2 im Integrationsbereich enthalten sind:

$$\int_a^b \frac{x+1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}\,x = \Big[4\ln|x-3| - 3|x-2|\Big]_{x=a}^{b}$$

unter der Voraussetzung $[a,b] \cap \{2,3\} = \emptyset$.

8.6 Bsp. Wir berechnen

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x - 6}\,\mathrm{d}\,x.$$

Hier hat das Zähler-Polynom einen größeren Grad als das Nenner-Polynom. Wir dividieren Polynome mit Rest:

$$\begin{array}{rrrrl}
\Big(& x^3 + 2x^2 & & -1\Big) & \div \Big(x^2 + x - 6\Big) = x + 1 + \dfrac{5x+5}{x^2+x-6} \\
& -x^3 \;\; - x^2 & + 6x & & \\ \hline
& x^2 & + 6x & - 1 & \\
& -x^2 & - x & + 6 & \\ \hline
& & 5x & + 5 &
\end{array}$$

Das Originalintegral wird durch zwei einfachere Integrale ersetzt.

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x - 6}\,\mathrm{d}\,x = \int (x+1)\,\mathrm{d}\,x + 5\int \frac{x+1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}\,x.$$

Die Stammfunktion von $x+1$ ist $\frac{1}{2}(x+1)^2$. Die Stammfunktion von $(x+1)/(x^2+x-6)$ haben wir im vorigen Beispiel ausgerechnet.

8.7 Bsp.

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1} = \arctan x + C,$$

denn, wie wir wissen, ist $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Bsp. Woher kommt die pq-Formel?

Bsp
$$\boxed{\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}}$$

Bsp
$$\boxed{x^2 - 2x - 9 = 0}$$
$$\boxed{\begin{aligned} (x-1)^2 - 10 &= 0 \\ x - 1 &= \pm\sqrt{10} \\ x &= 1 \pm \sqrt{10} \end{aligned}}$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + q = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$x^2+4 = 4\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)$
$= 4\left(\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1\right)$

8.8 Bsp.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+4} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x/2)^2+1} && \mid \text{wir brauchen } (\cdots)^2+1 \text{ im Nenner}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x/2)}{(x/2)^2+1} && \mid y = x/2\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\arctan y + C\\ &= \frac{1}{2}\arctan(x/2) + C.\end{aligned}$$

$d(x/2) = \left(\frac{x}{2}\right)' dx$
$= \frac{1}{2} dx$

Natürlich kann man auf dieser Berechnung basierend auch eine allgemeine Formel erstellen:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + C \qquad \text{für } a > 0.$$

$$x^2 - 6x + 18 = x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 18$$
$$= \underbrace{x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2}_{} + 9$$
$$= (x-3)^2 + 9$$

8.9 Bsp. Wir berechnen

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x^2 - 6x + 18}$$

Die pq-Formel sagt uns, dass $x^2 - 6x + 18$ keine reellen Nullstellen hat. Über reellen Zahlen können wir also $x^2 - 6x + 18$ nicht in lineare Faktoren zerlegen. Wir machen die sogenannte quadratische Ergänzung. Dafür müssen wir die 18 so in eine Summe zerlegen, dass wir mit einem Summanden zusammen mi $x^2 - 6x$ die binomische Formel einsetzen können:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 18 &= x^2 - 6x + 9 + 9 \\ &= (x-3)^2 + 9 && \mid \text{binomische Formel} \end{aligned}$$

1.

Diese Darstellung des Nennerpolynoms, hilft uns das Integral zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2-6x+18} &= \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x-3)^2+9} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(x-3)}{(x-3)^2+9} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\,y}{y^2+9} && \mid \text{ mit } y = x-3 \\
&= \frac{1}{3}\arctan\frac{y}{3} + C && \mid \text{ nach dem vorigen Beispiel} \\
&= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-3}{3} + C.
\end{aligned}
$$

8.10 Bsp. Es gilt

$$\int \frac{(x+1)\,\mathrm{d}\,x}{x^2+1} = \int \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1}$$

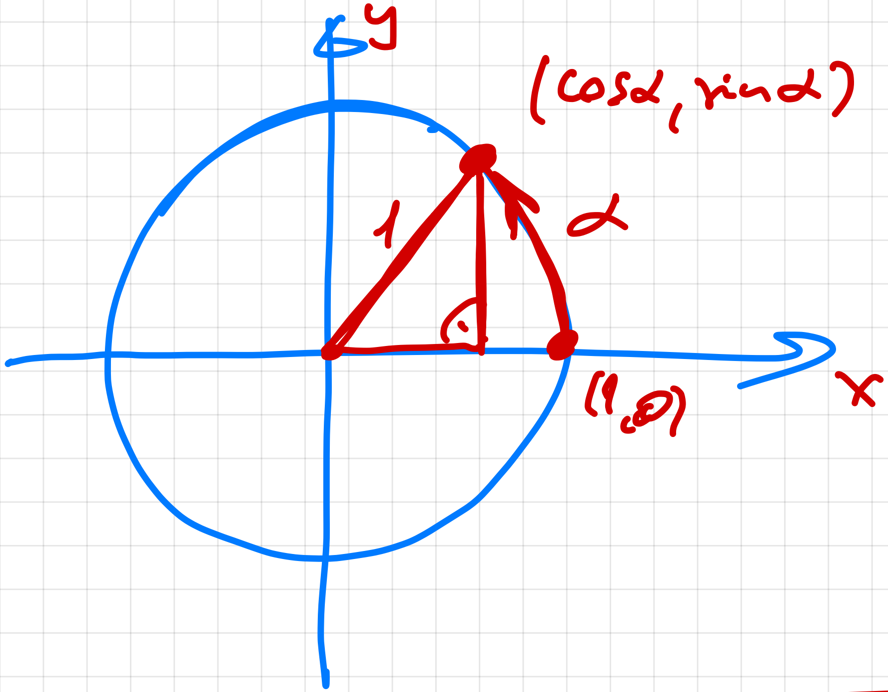
mit

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

und

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1} = \arctan x + C.$$

9 Integrale mit trigonometrischen Funktionen



$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

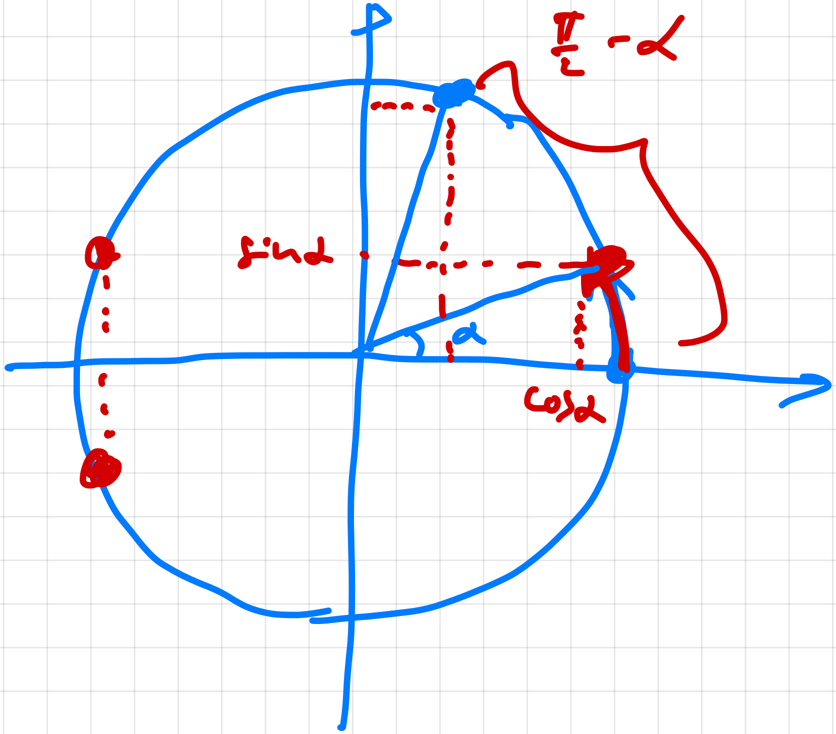
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

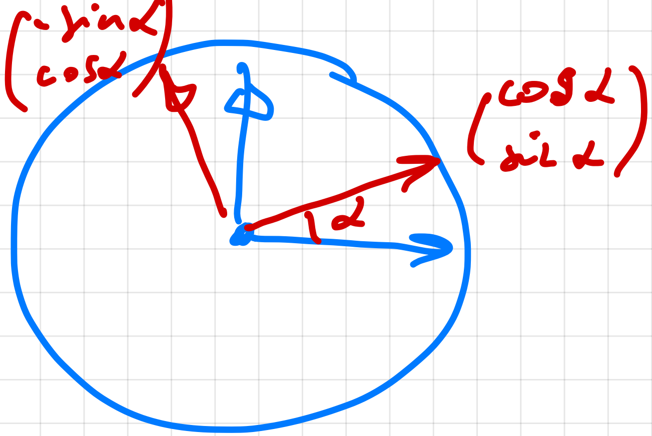
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Drehung um α ist:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

9.1 Bsp. Zur Berechnung von

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}\, x.$$

können wir $\cos^2 x$ umformen. Durch

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x && \mid \text{Kosinus des doppelten Winkels} \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 && \mid \text{Trigonometrischer Pythagoras} \end{aligned}$$

erhalten wir eine Darstellung von $\cos^2 x$ mit Hilfe von $\cos 2x$. Diese Darstellung benutzten wir nun:

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Hier noch eine Nebenbemerkung, die wir später bei Fourier-Reihen gebrauchen werden: es folgt

$$\int_a^b \cos^2 x \, \mathrm{d}\, x = \pi \qquad \text{im Fall } b - a = 2\pi.$$

9.2 Aufgabe. Berechnen Sie

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}\, x.$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 x = \quad \text{mit } \cos 2x \ldots$$

9.3 Bsp. Wir berechnen
$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}\, x.$$
Wegen $\cos x \,\mathrm{d}\, x = \mathrm{d}(\sin x)$ und $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ haben wir
$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \,\mathrm{d}\, x &= \int (1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d} \sin x \\ &= \int (1 - y^2) \,\mathrm{d}\, y && \mid \text{mit } y = \sin x \\ &= y - \frac{1}{3} y^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.\end{aligned}$$

$$\int \underbrace{\cos^2 x}_{\substack{\shortparallel \\ 1-\sin^2 x}} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{y = \sin x} = \int (1 - y^2)\, dy$$

$y = \sin x$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{ch} ix = \cos x \\ i = \sqrt{-1} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = -\operatorname{ch} x + C$$

Bsp. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} \qquad \int \frac{dx}{\cos x} \qquad \int \frac{dx}{\sin x + 5}$

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= F\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\
\cos x &= G\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\
\left(\tan \frac{x}{2}\right)' &= \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \\
\cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \tan \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$