Oleksandr Bilan

Skúška z LA, Termín 1

Úloha 1.

a) Veta o jadre a obraze lineárneho zobrazenia:

Nech $f: V \to U$ je lineárne zobrazenie konečnorozmernej vektorových priestorov. Potom $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.

b) Nech $B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Im}(f)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+c \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{b+c}_{0} \end{array}\right)$$

$b = -c$

$Im(f) = \{(a, -c, c) : a, c \in R\}$, kedˇ $\dim(B) = 3$,

$\dim(Im(B)) = 2$.

$Ker(f)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vieme povedat', že $\dim(Ker(B)) = 1$.

Úloha 3.

Vieme, že $T^2 = 2T$

Nech vektor $\vec{v}$ -je vlastny vektor transformacie T

$$T^2\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$T^2\vec{v} = 2T\vec{v}$$

$$(T^2 - 2T)\vec{v} = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda)\vec{v} = 0$$

$\lambda(\lambda-2)\vec{v}=0$

$\lambda=0\ ,\ \lambda=2$

$\lambda\in\{0,2\}$

Úloha 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočítame vlastne hodnoty, a nech $a=6$

Potrebujeme zistiť čomu sa rovnaju λ_1 a λ_3 aby sme vedeli povedať, že kedy je tam matica diagonalizovateľna

Takže vychadza matica:

$$\begin{array}{ccc} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \\ \hline 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \end{array}$$

Vysledok:

$\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=6\ ,\ \lambda_3=2.$

Úloha 4.

1) Symetria:

$$\alpha_1 = \langle x, y \rangle_S$$
$$\alpha_2 = \langle Sx, Sy \rangle$$
$$\alpha_3 = \langle Sy, Sx \rangle$$
$$\alpha_4 = \langle y, x \rangle_S$$

2) Sčítanie:

$$\alpha_1 = \langle x + y, z \rangle_S$$
$$\alpha_2 = \langle Sx + Sy, Sz \rangle$$
$$\alpha_3 = \langle Sx, Sz \rangle + \langle Sx, Sy \rangle$$
$$\alpha_4 = \langle x, z \rangle_S + \langle x, y \rangle_S$$

3) Nasobenie skalarom:

$$\alpha_1 = \langle \vec{\lambda} x, y \rangle_S$$
$$\alpha_2 = \langle S(\vec{\lambda} x), Sy \rangle$$
$$\alpha_3 = \langle \vec{\lambda} Sx, Sy \rangle$$
$$\alpha_4 = \vec{\lambda} \langle Sx, Sy \rangle$$
$$\alpha_5 = \vec{\lambda} \langle x, y \rangle_S$$

4) Nezapornosť:

$\alpha_1 = \langle x, x \rangle S = 0$ → ak x je nulovy vekton

$\alpha_2 = \langle Sx, Sx \rangle = 0$ → ak $Sx = 0$, to znamena, že ak $x = 0$.

Úloha 5.

a) Nech $A: U \to U$ je lineánna transformacia, Ak $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$, $\vec{x} \neq \vec{o}$, potom hovonime, že λ je vlastna hodnota A a $\vec{x}$ je k nej pnisluchajuci vlastný vekton.