

Appunti di Meccanica Razionale

Osea

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Ada Pulvirenti

Testo di riferimento: *Meccanica Analitica* di Fasano Marmi, più lungo e preciso.
Mentre il testo *Meccanica Classica* di Goldstein è il testo classico dei fisici.

1 Spazio-Tempo-Moto

1.1 Moto

Studiare il moto in meccanica significa studiare la funzione $I = [0, T) \rightarrow \mathcal{E}$, con $t \mapsto P(t)$, dove \mathcal{E} e I sono rispettivamente lo spazio della meccanica classica e un intervallo incluso nell'asse dei tempi, e entrambi sono spazi affini euclidei.

Nella meccanica classica il **tempo** è **assoluto**, ovvero è indipendente dallo stato di moto dell'osservatore.

Definizione 1.1: Spazio affine

Uno spazio affine reale di dimensione n è un insieme \mathbb{A}^n i cui elementi sono detti punti, dotato delle seguenti strutture:

1. Uno spazio vettoriale reale di dimensione n , V , detto spazio delle traslazioni (o dei vettori liberi)
2. Un'applicazione $\varphi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow V$; $P, Q \mapsto P - Q$ con le seguenti proprietà
 - a. $\forall (P, v) \in \mathbb{A}^n \times V$ esiste un unico punto Q tale che $Q - P = \mathbf{v}$
 - b. $(P - Q) + (Q - R) = P - R$ per ogni $P, Q, R \in \mathbb{A}^n$

Definizione 1.2: Retta

Una **retta** in \mathbb{A}^n passante per un dato punto P e con direzione \mathbf{v} è il sottospazio affine $P + \langle \mathbf{v} \rangle$ ed è parametrizzata da $t \mapsto P + t\mathbf{v}$

Definizione 1.3: Vettore applicato

Una coppia ordinata $(P, \mathbf{u}) \in \mathbb{A}^n \times V$ si dice vettore applicato a P .

Definizione 1.4: Sistema di riferimento

Indicheremo con sistema di riferimento affine in \mathbb{A}^n un insieme

$$\Sigma = \{O \in \mathbb{A}^n; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad ; \quad \{\mathbf{v}_i\}_{i=1, \dots, n} \text{ base di } V$$

Osservazione. Allora ogni punto P rispetto a Σ è individuato da $P - O = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$

Definizione 1.5: Spazio euclideo

Uno spazio affine reale di dimensione n , **dotato di prodotto scalare** su V si dice spazio **affine euclideo**

Dal prodotto scalare possiamo definire la distanza tra due punti di \mathbb{A}^n come

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{\langle P - Q, P - Q \rangle} = \sqrt{(P - Q) \cdot (P - Q)}$$

e la nozione di angolo tra due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ come il valore $\alpha \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

(notare che per Schwarz risulta che effettivamente tale valore esiste)

Comunemente ci ricondurremo a utilizzare un sistema di riferimento **ortonormale**, ossia che ha come base una base ortonormale dello spazio. In particolare \mathcal{E} è uno spazio affine reale euclideo di dimensione 3, e dunque useremo il sistema di riferimento

$$\Sigma = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad ; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

Studiare il moto significherà studiare la relazione $t \mapsto P(t)$ funzione $[0, T) \rightarrow \mathcal{E}$. Introdotta Σ , possiamo scrivere allora che il problema è ricondotto a studiare la funzione $[0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $t \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ e tale che $P(t) = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$.

Definizione 1.6: Coordinate Curvilinee

Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo un'applicazione $\mathbf{x} : Q \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_1(q_1, \dots, q_n) \\ \vdots \\ x_n(q_1, \dots, q_n) \end{pmatrix}$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x} \in C^1(Q)$
2. La matrice Jacobiana $J\mathbf{x}$ abbia rango massimo

Allora \mathbf{x} rappresenta un sistema di coordinate su D che sono dette *coordinate curvilinee*

I vettori colonna della matrice $J\mathbf{x}$, ossia

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

sono una base per V che viene chiamata **base locale**.

La base locale è ortogonale se $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ per ogni $i \neq j$. Vogliamo ora operare Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}$ a partire da una base generica $\{\mathbf{u}_i\}$.

Osservazione. I vettori \mathbf{u}_i della base locale sono in ogni punto P tangenti alla rispettiva linea coordinata $\mathbf{x}(q_i) = \mathbf{x}(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)$, dove tutte le coordinate sono fissate tranne q_i . Allora $\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ è tangente alla linea coordinata $\mathbf{x}(q_i)$.

Esempio 1.1 (Coordinate polari nel piano). Prendiamo $Q = (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (r, \theta)$. Allora

$$\mathbf{x}(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_1(r, \theta) = r \cos \theta \\ x_2(r, \theta) = r \sin \theta \end{pmatrix} \in C^1$$

E la base locale è

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

ed evidentemente $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ dunque la base locale è ortogonale. Per ottenere una base ortonormale dunque prendiamo

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \mathbf{u}_1 \quad ; \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{r} \mathbf{u}_2$$

Osserviamo che effettivamente \mathbf{e}_r è tangente alla linea coordinata corrispondente (fisso θ) e \mathbf{e}_θ è tangente alla linea coordinata corrispondente (fisso r).

Esempio 1.2 (Coordinate sferiche).

$$Q = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_1(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \end{pmatrix} : Q \rightarrow \mathcal{E} \setminus \{ \text{asse } z \}$$

che è chiaramente di classe C^1 e ha Jacobiano di rango massimo. La base locale è

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dunque la base locale è ortogonale. Per ottenere una base ortonormale prendiamo, per ogni \mathbf{u}_i , il vettore $\mathbf{u}_i / \|\mathbf{u}_i\|$, ossia

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{u}_1 \quad ; \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{u}_2}{r \sin \theta} \quad ; \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{u}_3}{r}$$

Orientazione dello spazio Lo spazio vettoriale V soggiacente lo spazio affine \mathcal{E} è orientabile.

Sia \mathcal{B} l'insieme di tutte le basi di V . Date $A, B \in \mathcal{B}$, sia \mathcal{M}_A^B la matrice di cambio base da A a B . Allora $\det \mathcal{M}_A^B \neq 0$. Allora la relazione

$$A \sim B \iff \det \mathcal{M}_A^B > 0$$

è una relazione di equivalenza su \mathcal{B} . Tale relazione partiziona \mathcal{E} in due classi, dette **classi di orientazione**: la base destrorsa e la base sinistrorsa.

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale è un'operazione binaria

$$\begin{aligned}\times : V \times V &\longrightarrow V \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}\end{aligned}$$

tale che, se l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{u} è α , allora

- \mathbf{w} ha modulo pari a $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha$
- \mathbf{w} ha direzione perpendicolare al piano di \mathbf{v} e \mathbf{u}
- \mathbf{w} ha verso tale che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ formano una base destrorsa

e ha le seguenti proprietà:

1. *antisimmetria*: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. *linearità*: $(\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ e $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
3. **non** è associativo

Prodotto misto Il prodotto misto tra \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} è definito da $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

Doppio prodotto vettoriale Dati $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, si chiama doppio prodotto vettoriale il vettore $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ e vale la proprietà

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$$

Equazione vettoriale Dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, determinare i vettori \mathbf{x} tali che

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{1.1}$$

Nel caso degenere in cui $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, l'equazione è un'identità. Se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ allora non esiste una soluzione. Infine se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

Proposizione 1.1. *Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Allora l'equazione vettoriale (1.1) ha soluzione se e solo se $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$*

Dimostrazione.

\implies Sia \mathbf{x} soluzione di $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Moltiplicando scalarmente per \mathbf{a} ambo i membri otteniamo

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

\Longleftarrow Sia $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$. Allora

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = a^2\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$$

da cui otteniamo

$$\mathbf{b} = \frac{1}{a^2}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a})$$

ma allora

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \frac{1}{a^2}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \iff \left(\mathbf{x} - \frac{1}{a^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \right) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

che ha soluzione

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \lambda\mathbf{a} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

□

2 Cinematica del punto

Sia \mathcal{E} uno spazio euclideo, P un punto in modo nello spazio \mathcal{E} . Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e studiare il moto significa studiare la relazione $I \ni t \mapsto P(t)$ e in particolare fissando un sistema di riferimento $\Sigma = \{\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ studiamo la relazione $t \mapsto P(t) - \mathbf{O} =: \mathbf{x}(t) =: \mathbf{r}(t)$.

L'immagine in \mathcal{E} dell'applicazione $t \mapsto P(t)$ si dice **traiettoria** del punto P .

Definizione 2.1: Velocità

Scelto $\mathbf{x}(t)$ il raggio descrivente il moto di un punto P nel sistema di riferimento Σ , la **velocità** del punto P è

$$\mathbf{v}(t)|_{\Sigma} := \dot{\mathbf{x}}(t)|_{\Sigma} = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)|_{\Sigma} = \dot{x}_1\mathbf{e}_1 + \dot{x}_2\mathbf{e}_2 + \dot{x}_3\mathbf{e}_3$$

Similmente si definisce l'accelerazione

$$\mathbf{a}|_{\Sigma} = \ddot{\mathbf{x}}|_{\Sigma} = \frac{d}{dt}\mathbf{v}|_{\Sigma}$$

Se si effettua il cambio di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}(t))$ allora il moto è descritto da

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Esempio 2.1 (Coordinate polari nel piano \mathcal{E}_2). $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ e dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + \dot{\theta}\mathbf{u}_{\theta} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} \\ \mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r\right) + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_{\theta} = \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_{\theta} \end{aligned}$$

che è la scomposizione in accelerazione radiale e trasversa

Osservazione. Se \mathbf{b} è un versore allora $\frac{d\mathbf{b}}{dt} \cdot \mathbf{b} = 0$ (perché \mathbf{b} ha modulo costante, quindi come fa a cambiare in modulo? Deve cambiare solo in verso)

Esercizio 2.1

Calcolare la velocità e l'accelerazione in coordinate sferiche (esprimendola in base locale) e in coordinate cilindriche

2.1 Curve parametrizzate

Vogliamo studiare il moto del punto P su una curva assegnata. Sappiamo dunque la traiettoria del punto assegnato. Supponiamo di essere nello spazio affine euclideo \mathcal{E}_3 . Supponiamo dunque di avere una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e dunque $\gamma(t) = \mathbf{x}(t)$

Definizione 2.2: Parametrizzazione in lunghezza d'arco

È possibile parametrizzare la curva γ nel modo

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau$$

che descrive la posizione in una dimensione, descrivendo la lunghezza percorsa sulla curva. e dunque $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$

Osservazione. $|s'(t)| = |\mathbf{x}'(t)|$

Definizione 2.3: Versore tangente

Il versore tangente alla curva γ è

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}$$

dove ovviamente la prima uguaglianza vale se $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$

Definizione 2.4: Versore normale

Il versore normale alla curva γ è definito, nei punti in cui $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \neq 0$ come

$$\mathbf{n}(t) := \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}{\left\|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right\|} = \frac{\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}}{\left\|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right\|}$$

Definizione 2.5: Curvatura

La quantità $k(s) = \left\|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right\|$ si dice *curvatura* e il suo inverso moltiplicativo R si dice *raggio di curvatura*.

Definizione 2.6: Piano Osculatore

Il piano individuato dai versori \mathbf{t} e \mathbf{n} si dice *piano osculatore*

Definizione 2.7: Versore binormale

Il versore $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ viene detto *versore della binormale*

Definizione 2.8: Terna intrinseca

La terna $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ è detta *terna intrinseca* alla curva γ se

- \mathbf{t} è il versore tangente
- \mathbf{n} è il versore normale
- \mathbf{b} è il versore binormale

e viene anche chiamato *riferimento di Frenet*

Possiamo osservare che $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è normale a $\mathbf{b}(s)$ e inoltre

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \\ &= \frac{d\mathbf{n}}{ds} \end{aligned}$$

E dunque dato che è normale sia a \mathbf{b} che a \mathbf{t} allora deve essere proporzionale a \mathbf{n} e in particolare la seguente è una buona definizione

Definizione 2.9: Torsione

La funzione $\tau = \tau(s)$ tale che

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \tau(s)\mathbf{n}(s)$$

è detta *torsione* della curva γ

Riassumendo, le seguenti vengono dette *formule di Frenet*:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \tau\mathbf{n}\end{aligned}$$

dove la seconda è trovata dalle altre due e da $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$

Dal precedente marchingegno possiamo riscrivere la velocità e l'accelerazione nella terna intrinseca come, se $P = P(s(t))$

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\mathbf{t} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\mathbf{t}) = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}^2 k\mathbf{n}\end{aligned}$$