

Appunti di Algebra 2

Github Repository: [Oxke/appunti/Algebra2](#)

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Paola Frediani

I testi preferiti sono

- *Algebra*, di Michael Artin
- *Algebra*, di Herstein

1 Azioni di gruppi su insiemi

Chiameremo G un gruppo e S un insieme

Definizione 1.1: U

n'azione (sinistra) di G su S e un'applicazione

$$F : G \times S \rightarrow S$$

tale che

- i) $F(e, s) = s$ per ogni $s \in S$
- ii) $\forall g, h \in G$ e $\forall s \in S$ vale $F(g, F(h, s)) = F(gh, s)$

Si usa anche la notazione $F(g, s) =: g(s)$ che permette la scrittura più concisa

$$e(s) = s \quad \text{e} \quad g(h(s)) = (gh)(s) \quad \forall s \in S, \quad \forall g, h \in G$$

Proposizione 1.1. Per ogni $g \in G$, l'applicazione $F_g : S \rightarrow S$ definita da $F_g(s) = F(g, s) = g(s)$ è una biiezione

Dimostrazione. $(Fg)^{-1} = F_{g^{-1}}$ infatti

$$F_g \circ F_{g^{-1}}(s) = g(g^{-1}(s)) \stackrel{(ii)}{=} e(s) \stackrel{(i)}{=} s$$

e analogamente per l'altra composizione □

Proposizione 1.2. L'applicazione $\psi : G \rightarrow S(S) = \{f : S \rightarrow S \text{ biunivoche}\}$ dove $S(S)$ il gruppo delle permutazioni di S è un omomorfismo di gruppi.

Dimostrazione.

$$\psi(gh) = F_{gh} \stackrel{(ii)}{=} F_g \circ F_h = \psi(g) \circ \psi(h)$$

□

Definizione 1.2: Azione fedele

Un'azione $F : G \times S \rightarrow S$ si dice **fedele** se ψ è iniettivo

Osservazione. Ovvero se e solo se $\text{Ker}\psi = \{e\} \iff (\psi(g) = \text{Id}_S \iff g = e)$

Esempio 1.1. Se $S = G$ il gruppo stesso e sia

$$m : G \times G \rightarrow G \quad \text{con} \quad m(g, h) = gh$$

la moltiplicazione a sinistra. Allora m è un'azione sinistra, infatti

- i) $m(e, h) = eh = h$ per ogni $h \in G$
- ii) $m(gg', h) = (gg')h = g(g'h) = m(g, g'h)$ per ogni $g, g', h \in G$

Inoltre m è un'azione fedele, infatti

$$\psi(g)(h) = h\forall h \in G \iff gh = h \implies g = e$$

Osservazione. Se G è un gruppo finito, con $\#G = n$ allora $S(G) \cong S_n$ e poiché ψ è iniettivo, $G \cong \psi(G) < S(G) \cong S_n$ il teorema di Cayley

Esempio 1.2. Sempre con $G = S$ possiamo considerare l'azione di coniugio

$$\varphi : G \times G \rightarrow G \quad \text{con} \quad \varphi(g, h) = ghg^{-1}$$

- i) $\varphi(e, h) = ehe^{-1} = h$ per ogni $h \in G$
- ii) $\varphi(gg', h) = (gg')h(gg')^{-1} = gg'hg'^{-1}g^{-1} = g(\varphi(g', h))g^{-1} = \varphi(g, \varphi(g', h))$

$\psi : G \rightarrow S(G)$ e $\text{Im}\psi = \text{Inn}(G) < \text{Aut}(G)$. Non è necessariamente un'azione fedele, infatti

$$\text{Ker}(\psi) = \{g \in G : \forall h \in G \quad ghg^{-1} = h\} = Z(G)$$

da cui per il primo teorema di isomorfismo

$$G/Z(G) = \text{Inn}(G)$$

Esempio 1.3. Con $G = S_n$ e $S = \{1, \dots, n\}$ allora la funzione

$$(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$$

è ovviamente un'azione

Esempio 1.4. Preso $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{1, \sigma\}$ con $\sigma^2 = 1$ e $S = \mathbb{C}$ allora la funzione

$$F : G \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{con} \quad F(1, z) = z \quad \text{e} \quad F(\sigma, z) = \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

è un'azione.

Definizione 1.3: Orbita e Stabilizzatore

Sia $F : G \times S \rightarrow S$ un'azione di un gruppo G su S . Allora per ogni $s \in S$ si definisce **orbita** di s l'insieme

$$O_s = \{g(s) : g \in G\}$$

e si definisce **stabilizzatore** di s l'insieme

$$\text{stab}(s) = \{g \in G : g(s) = s\}$$

Esempio 1.5. Nell'esempio dell'azione di coniugio lo stabilizzatore di h è

$$\text{stab}_h = \{g \in G : ghg^{-1} = h\} = \{g \in G : gh = hg\} = C_G(h)$$

Proposizione 1.3. Le orbite O_s per un'azione di G sono classi di equivalenza per la relazione di equivalenza su S seguente:

$$S \sim S' \iff \exists g \in G : s' = g(s) = F(g, s)$$

Dimostrazione. \sim è in effetti una relazione di equivalenza, infatti:

- *riflessiva*: $s = e(s)$
- *simmetrica*: se $s' = g(s)$ allora $s = g^{-1}(s')$ perché $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$
- *transitiva*: se $s' = g(s)$ e $s'' = h(s')$ allora $s'' = h(s') = h(g(s)) \stackrel{(ii)}{=} (hg)(s)$

Ne segue chiaramente che $O_s = [s]_{\sim}$ e allora $S = \coprod_{s \in S} O_s$ □

Proposizione 1.4. $\text{stab}_s < G$

Dimostrazione. Supponiamo $g, h \in \text{stab}_s$. Allora $g(s) = h(s) = s$, ne consegue che

$$F(gh, s) = F(g, F(h, s))$$

□

Definizione 1.4: Azione transitiva

Un'azione $F : G \times S \rightarrow S$ si dice **transitiva** se per ogni $s, s' \in S$ esiste $g \in G$ tale che $s' = g(s)$

Proposizione 1.5. Sia $F : G \times S \rightarrow S$ un'azione di gruppo. Allora fissato un $s \in S$, consideriamo $O_s \subseteq S$ e $H := \text{stab}_s < G$. Allora esiste un'applicazione naturale biettiva

$$\begin{aligned} \Phi : G/H &\longrightarrow O_s \\ gH &\longmapsto \Phi(gH) = g(s) = F(g, s) \end{aligned}$$

Inoltre per ogni $C \in G/H$, $g(\Phi(C)) = \Phi(g(C))$ dove la prima azione è quella di G su O_s e la seconda è quella di G su G/H

Dimostrazione.

- *Ben definita*: se $aH = bH$ allora $b^{-1}a \in H$ e quindi esiste un $h \in H$ tale che $b^{-1}a = h$ e quindi $a = bh$. Allora $F(a, s) = F(bh, s) = F(b, F(h, s)) = F(b, s)$
- *Iniettiva*: supponiamo che esistano $a, b \in G$ tali che $\Phi(aH) = \Phi(bH)$, allora $F(a, s) = F(b, s)$ ma allora

$$F(b^{-1}a, s) = F(b^{-1}, F(a, s)) = F(b^{-1}, F(b, s)) = F(b^{-1}b, s) = F(e, s) = s$$

$$\text{e quindi } b^{-1}a \in H \iff aH = bH$$

- *Suriettiva*: per ogni $s' \in O_s$ esiste $g \in G$ tale che $s' = g(s)$ e quindi $s' = g(s) = \Phi(gH)$

□

Corollario 1.5.1. Se G è un gruppo finito e ho un'azione $F : G \times S \rightarrow S$, allora per ogni $s \in S$ vale $\#O_s = [G : \text{stab}_s]$ o equivalentemente

$$\#G = \#O_s \cdot \#\text{stab}_s$$

e inoltre

$$\#G = \sum_{[s] \in S} \#O_s$$

Corollario 1.5.2. Sia $F : G \times G \rightarrow G$ l'azione di coniugio $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$. Ricordiamo che $\text{stab}_a = C(a)$ e la formula delle classi si traduce in

$$\#G = \#C(a) \cdot \#O_a = \sum_{[g] \in G} \#O_g = \sum_{[g] \in G} \frac{\#G}{\#C(g)}$$

inoltre se $g \in Z(G)$ allora $C(g) = G$ e dunque

$$\#G = \#Z + \sum_{[g] \in G \setminus Z} \#O_g$$

Teorema 1.6

Sia G un gruppo tale che $\#G = p^n$ con p primo. Allora $Z(G) \neq \{e\}$

Dimostrazione. Se $a \notin Z$ allora $C(a) = p^{n_a}$ con $n_a < n$ e quindi da

$$p^n = \#G = \#Z + \sum_{[g] \in G \setminus Z} \# \frac{p^n}{p^{n_a}}$$

ne deduciamo che $p \mid \#Z$ □

Corollario 1.6.1. Sia G un gruppo di cardinalità p^2 , con p primo. Allora G è abeliano.

Dimostrazione. Per il teorema sappiamo che $Z \neq \{e\}$ e quindi $\#Z = p$ oppure $\#Z = p^2$. Nel secondo caso $G = Z$ e quindi è abeliano. Nel primo caso invece esiste un $a \in G \setminus Z$ e dunque $C(a) \neq G$. Ma

$$\{e\} < Z < C(a) < G$$

e quindi $C(a) = Z$ per cardinalità che è assurdo perché $a \in C(a)$ e $a \notin Z$. □

Esempio 1.6. Riprendendo l'esempio della moltiplicazione a sinistra $m : G \times G \rightarrow G$. Allora m è un'azione transitiva. Infatti per ogni $g', g'' \in G$ se prendo $h = (g')^{-1}g''$ allora $m(g', h) = g'(g'^{-1}g'') = g''$

Esempio 1.7. Se prendo $GL(V)$ il gruppo lineare delle trasformazioni invertibili su uno spazio vettoriale V , allora l'azione $(T, v) \mapsto Tv$ è transitiva.