appunti di Fondamntenti della Matematica

Github Repository: Oxke/appunti/FondamentiMatematica

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Rosso

1 Geometria di Hilbert

I1. Per due punti A, B esiste sempre una retta che li contiene entrambi.

I2. Per due punti A, B esiste al più una retta che li contiene entrambi.

I3. Su una retta esistono almeno due punti. Esistono almeno tre punti che non appartengono alla stessa retta

I4. Per tre punti A, B, C che non appartengono ad una stessa retta c'è sempre un piano α che li contiene. Per ogni piano esiste un punto che gli appartiene.

I5. Per tre punti A, B, C che non appartengono ad una stessa retta c'è al più un piano che li contiene

I6. Se A, B, C appartengono alla retta r e A, B appartengono ad un piano α allora r è interamente contenuta in α

I7. Se due piani α e β hanno un punto A in comune allora essi hanno almeno un altro punto B in comune.

I8. Esistono almeno quattro punti che non appartengono ad uno stesso piano.

Ne consegue che due rette o hanno un punto in comune o non ne hanno affatto. Due piani o non hanno punti in comune oppure hanno una retta in comune e nessun punto al di fuori di essa.

Dati un piano ed una retta che non appartenga al piano, essi o non hanno punti in comune o ne hanno uno.

Possiamo costruire due sottoinsiemi minimali degli assiomi precedenti

1.1 Geometria astratta

Consideriamo un insieme $\mathcal{P}$ di punti e un insieme $\mathcal{R}$ di rette

1. $\forall$ coppia di punti $A, B \in \mathcal{P}$ esiste $r \in \mathcal{R}$ tale che $A \in r$ e $B \in r$

2. Ogni $r \in \mathcal{R}$ contiene almeno due punti

Vogliamo ora costruire un modello di tale geometria.

Esempio 1.1 (Geometria sferica). Sia $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = S^2$ e come rette prendiamo i cerchi massimi, quindi le intersezioni tra la sfera e i piani passanti per l'origine: $r \in \mathcal{R} \iff r = \{(x, y, z) \in S^2\} : ax + by : cz = 0$ per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$

Quindi non c'è l'unicità della retta passante per due punti, infatti se si prendono due punti antipodali infinite rette li contengono

1.2 Geometria di incidenza

Una geometria astratta è detta **geometria di incidenza** se

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}, \quad \exists! r \in \mathcal{R} : A, B \in r$
2. $\exists$ono almeno tre punti $A, B, C \in \mathcal{P}$ non appartenenti ad una stessa retta

Esempio 1.2 (Geometria euclidea)**.** Sia $\mathcal{P} = R^2$ e le rette di forma $ax + by + q = 0$ per $a, b, q \in \mathbb{R}$ non tutti nulli.

Esempio 1.3 (Geometria iperbolica - semipiano di Poincaré)**.** Consideriamo ora $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e $\mathcal{R} = \mathcal{R}_a \cup \mathcal{R}_{c,r}$ con $\mathcal{R}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \wedge y > 0\}$ e $\mathcal{R}_{c,r} = \{(x, y) \in R^2 : y > 0 \wedge (x - c)^2 + y^2 = r^2\}$

Quindi in pratica le rette sono o le rette verticali oppure le semicirconferenze con centro sull'asse delle ascisse.

Esempio 1.4. Proviamo a costruire ora un modello finito. Sia $\mathcal{P}_3 = \{A, B, C\}$, e $\mathcal{R}_3 = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. Ogni coppia di rette ha intersezione non vuota.

Similmente $\mathcal{P}_4 = \{A, B, C, D\}$ e
$\mathcal{R}_4 = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$. Esistono coppie di rette che non hanno intersezione, ad esempio $\{A, B\} \cap \{C, D\} = \emptyset$, ma ogni retta ha una e solo una retta parallela.

Infine $\mathcal{P}_5 = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R}_5 = \binom{\mathcal{P}_5}{2}$ ossia ogni possibile coppia di punti. In tal caso $\{A, B\}$ è parallela sia a $\{C, D\}$ che a $\{C, E\}$.

Una geometria di incidenza soddisfa la proprietà **euclidea** (o parabolica) delle parallele se presa $r \in \mathcal{R}$ e $p \notin r$ allora

$$\exists! s \in \mathcal{R} : P \in s \wedge r \cap s = \emptyset \quad (\text{ es } \mathcal{P}_3, \mathcal{R}_3)$$

Una geometria di incidenza soddisfa la proprietà **ellittica** delle parallele se $r \in s$ e $p \notin r$ allora

$$\nexists s \in \mathcal{R} : P \in s \wedge r \cap s = \emptyset \quad (\text{ es } \mathcal{P}_4, \mathcal{R}_4)$$

Una geometria di incidenza soddisfa la proprietà **iperbolica** delle parallele se $r \in s$ e $p \notin r$ allora

$$\exists \text{ almeno due } s_1, s_2 \in \mathcal{R} : P \in s_1, s_2 \wedge r \cap s = \emptyset = r \cap s_2 \quad (\text{ es } \mathcal{P}_5, \mathcal{R}_5)$$

Esercizio 1.1

Mostrare la validità degli assiomi negli esempi proposti

Per arrivare a **piano proiettivo** aggiungiamo due assiomi:

I. Unicità retta congiungente due punti
II. Ogni retta contiene almeno tre punti

Il più piccolo piano proiettivo è il piano di Fano, contenente 7 punti: $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e 7 rette:

$$\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}, \{A, D, E\}, \{A, F, G\}, \{B, D, F\}, \{B, E, G\}, \{C, D, G\}, \{C, E, F\}\}$$

2 Assiomi di ordinamento

Proposizione 2.1 (Pons Asinorum)**.** *Sia ABC un triangolo. Se $AB = AC$ allora $\hat{B} = \hat{C}$*

Dimostrazione. Traccio la bisettrice di $\hat{A}$ che ha piede in D e determino i due triangoli ABD e ACD. Hanno due angoli e un lato in comune, quindi sono congruenti. Di conseguenza $\hat{B} = \hat{C}$ in quanto elementi corrispondenti di triangoli congruenti. □

Il problema della precedente dimostrazione (eccetto il fatto che non abbiamo ancora presentato i criteri di congruenza) è che non sappiamo necessariamente che D è compreso tra B e C. Questo motiva gli assiomi di ordinamento. Useremo la notazione $A - B - C$ per indicare che B sta tra A e C (ed è sulla stessa retta di A e C.

O1. Se $A - B - C$ allora A, B, C sono allineati e $C - B - A$

O2. Dati due punti B e D esistono due punti A, C, E su $\overline{BD}$ tali che $A - B - D$, $B - C - D$ e $B - D - E$

In pratica se ho $B - D$ allora $A - B - C - D - E$ e posso quindi prolungare il segmento BD sia a sinistra che a destra, e posso trovare un punto C nel mezzo del segmento.

O3. Dati A, B, C appartenenti ad una stessa retta, allora esiste un unico punto che sta tra gli altri due. In altre parola esattamente una tra $A-B-C$, $A-C-B$, $B - C - A$ è vera.

Ma cos'è il segmento AB? È definito come

Definizione 2.1: Segmento e semirette

Dati due punti $A, B \in \mathcal{P}$, $AB = \{A, B\} \cup \{C : A - C - B\}$
$\vec{AB} = AB \cup \{C : A - B - C\}$
$\vec{BA} = AB \cup \{C : C - A - B\}$

Ne consegue che $\vec{AB} \cap \vec{BA} = AB$ e $\vec{AB} \cup \vec{BA} = \overline{AB}$

(Pasch) O4 Siano $A, B, C \in \mathcal{P}$ tre punti non allineati e sia $r \in \mathcal{R}$. Allora se $AB \cap r \neq \varnothing$ necessariamente $C \in r$ oppure esattamente una tra $AC \cap r \neq \varnothing$ e $BC \cap r \neq \varnothing$ è vera.

Definizione 2.2: Insieme convesso

Un insieme $S \subseteq \mathcal{P}$ è detto **convesso** se per ogni coppia di punti $A, B \in S$, si ha che se esiste $T \in \mathcal{P}$ tale che $A - T - B$, allora $T \in S$

Esempio 2.1. Sia $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \lor x \geq 1\}$. Le rette $\mathcal{R}$ sono le rette del piano cartesiano intersecate con $\mathcal{P}$.

Allora valgono tutti gli assiomi (verificare) ma non quello di Pasch.

Teorema 2.2

Sia $Q \neq \varnothing$ un insieme convesso in una geometria di Pasch. Sia $r \in \mathcal{R}$. Allora se $Q \cap r = \varnothing$ allora tutti i punti di Q stanno dalla stessa parte rispetto a r