

Appunti di Analisi 3 - Analisi Complessa

Github Repository: [Oxke/appunti/Analisi_Complexa](https://github.com/Oxke/appunti/Analisi_Complexa)

Primo semestre A.A. 2024 - 2025, prof. Enrico Vitali

Indice

1	Convergenza puntuale e uniforme	2
1.1	Scambi di limite, derivate, integrali	4
1.2	Serie di funzioni	5
1.3	Richiami su limiti e serie	7
2	Analisi complessa	12
2.1	Funzioni analitiche su \mathbb{R}	12
2.2	\mathbb{C} -differenziabilità	14
2.3	\mathbb{C} -differenziabilità delle funzioni analitiche	16
2.4	Integrazione su Curve	17
2.5	Sviluppo di Laurent	29
2.6	Residui	39
2.7	Indice di avvolgimento	40
2.8	Teorema dei residui	43
2.9	Altri risultati	48
3	Richiamo delle forme differenziali	53

1 Convergenza puntuale e uniforme

Sia E un'insieme (non vuoto) e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $E \rightarrow \mathbb{R}$ (o $E \rightarrow \mathbb{R}^n$ o $E \rightarrow \mathbb{C}$). Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1.1

Diciamo che $\{f_n\}$ converge **puntualmente** ad f se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Esempio 1.1. $E = \mathbb{R}$ e $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$, $f_n \rightarrow 0$ su \mathbb{R}

Esempio 1.2. $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2 \rightarrow x^2$

Esempio 1.3. $f_n(x) = x^2 - \frac{1}{n}$

Esempio 1.4. $f_n(x) = e^{x-n} f_n \rightarrow 0$

Esempio 1.5. $E = [0, 1]$, $f_n(x)$ funzione che è a triangolo con vertici $(\frac{1}{4n}, 0)$, $(\frac{1}{2n}, 1)$, $(\frac{1}{n}, 0)$. Allora $f_n \rightarrow 0$

In questi esempi l'idea è che per ogni ε esiste un n_ε tale che per $n \geq n_\varepsilon$, $f_n(x) < \varepsilon$. La domanda è se si riesce a esprimere n_ε senza che dipenda da x . Nell'esempio di $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ si può perché f_n ha un massimo in $x = 0$, in tal caso infatti se prendo n_ε tale che $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ allora $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Nell'esempio 1.2 invece vogliamo un n_ε tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ossia $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x^2}| \leq \varepsilon$. Da questo troviamo che

$$\frac{1}{n^2} - \varepsilon \leq \frac{2x}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \varepsilon$$

Ma è sempre possibile, per qualsiasi $\frac{1}{n^2} + \varepsilon$ è possibile trovare un x tale che sia maggiore, quindi non è possibile non esprimere n_ε anche in funzione di x .

Definizione 1.2

Sia $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in E se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Osservazione. La condizione della definizione di convergenza uniforme è equivalente a richiedere che $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Da questo concludiamo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Allora con questa nuova osservazione è facile notare la non convergenza uniforme dell'esempio 1.2. Infatti se $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ e $f(x) = x^2$ allora $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)| = |2 - \frac{1}{n}| \rightarrow 2 > 0$.

Abbiamo però che converge uniformemente sugli insiemi limitati (esercizio). Similmente nell'esempio 1.4 f_n converge uniformemente sugli insiemi $(-\infty, a]$ infatti $0 \leq f_n(x) \leq e^{a-n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

Geometricamente la convergenza uniforme dice che il grafico di f_n è contenuta in un intorno tubolare arbitrario di f per n sufficientemente grande.

Proposizione 1.1 (Criterio di Cauchy / completezza di \mathbb{R}). Se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali si ha: a_n converge se e solo se a_n è una successione di Cauchy, ossia se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ tale che $\forall n_1, n_2 \geq n_\varepsilon$, $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$

Teorema 1.2: Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

Siano $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_n \rightarrow f$ in E . Allora la convergenza è uniforme in E se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Sia $f_n \rightarrow f$ uniformemente in E . Fissato $\varepsilon > 0$, sia n_ε tale che (convergenza uniforme) $\forall k \geq n_\varepsilon$ e $\forall x \in E$, $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ allora presi $n, m \geq n_\varepsilon$ ho che $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

\Leftarrow Valga la condizione di Cauchy. Allora $\forall x \in E$ la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy, quindi è convergente, quindi $\exists f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightarrow f$. Allora dalla condizione di Cauchy, tenendo n fisso e facendo tendere $m \rightarrow +\infty$ si ottiene esattamente la convergenza uniforme.

□

Fun fact: esistono dei cosiddetti “Spazi uniformi”, che sono spazi topologici ma non metrici.

Esempio 1.6. Sia $f_n = \frac{n^2 - x}{n^3 + e^{nx}}$. È evidente per $x \in \mathbb{R}$ che $f_n(x) \rightarrow 0$.

C'è convergenza uniforme sui limitati, infatti se $|x| \leq M$ allora $|f_n(x)| \leq \frac{n^2 + M}{n^3} \rightarrow 0$. Consideriamo ora $x \geq 0$ (esercizio). Invece per $x \leq 0$, posso prendere per ogni n $x_n = -n^4$ e allora ottengo che $f_n(x_n) \rightarrow +\infty$

Osservazione. Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, suppongo che $\{f_n\}$ converga uniformemente a f in (a, b) . Allora converge uniformemente in $[a, b]$

Dimostrazione. Per Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in (a, b), \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Per $x \rightarrow a$ abbiamo per continuità che $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$ per $n, m \geq \bar{n} \in \mathbb{N}$, quindi preso $\tilde{n} = \max n_\varepsilon, \bar{n}$ si ha che f_n soddisfa il criterio di Cauchy in $[a, b]$ e quindi converge uniformemente. □

Da questa osservazione noto anche che vale il contrappositivo: se f_n non converge uniformemente in $[a, b]$ non può neanche convergere uniformemente in (a, b)

Esempio 1.7. $f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 \left(x - \frac{q}{\sqrt{n}}\right)^2}$, allora ho che $f_n(0) = \frac{1}{1 + n} \rightarrow 0$, e per $x \neq 0$ pure, infatti

$$0 \leq \frac{1}{1 + n^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \stackrel{\text{definitivamente}}{\leq} \frac{1}{1 + n^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2} \rightarrow 0$$

è convergente uniformemente su tutto \mathbb{R}

Sia E un insieme non vuoto e sia $\mathcal{B}(E)$ l'insieme delle funzioni reali e limitate su E .

Definizione 1.3: Norma dell'estremo superiore

Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione. Allora

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$$

è la norma dell'estremo superiore (anche denotata semplicemente $\|f\|$).

Buona definizione. Perché sia una buona definizione, serve che sia una norma.

- a. $\|f\| \geq 0$ e $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- b. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- c. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

□

Proposizione 1.3. $\mathcal{B}(E)$ è uno spazio metrico normato con la norma dell'estremo superiore, e quindi distanza $d(f, g) = \|f - g\|$

Dimostrazione. ovvio

□

1.1 Scambi di limite, derivate, integrali

Esempio 1.8. Dimostrare che se $f \in C^0([a, b] \times [c, d])$ a valori reali e

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad y \in [c, d]$$

Allora g è continua in $[c, d]$

Infatti $\forall \bar{y} \in [c, d]$ abbiamo che comunque presa $y_n \rightarrow \bar{y}$ chiaramente $g(y_n) \rightarrow g(\bar{y})$. Ponendo ora $f_n = f(\cdot, y_n)$. Allora vogliamo mostrare che $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot, \bar{y})$ uniformemente in $[a, b]$. Poiché f è uniformemente continua in $[a, b] \times [c, d]$ perché continua su un compatto, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall x, x' \in [a, b]$ e $\forall y, y' \in [c, d]$ se $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta$ allora $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ sia δ come sopra; sia quindi n_ε tale che $n \geq n_\varepsilon \implies |y_n - \bar{y}| \leq \delta$ e quindi, per ogni $x \in [a, b]$ abbiamo $|(x, y_n) - (x, \bar{y})| = |y_n - \bar{y}| \leq \delta$, da cui $|f_n(x, y_n) - f(x, \bar{y})| \leq \varepsilon$. Abbiamo quindi mostrato l'uniforme convergenza.

Proposizione 1.4 (Derivation under the integral sign). Sia $f \in C^1([a, b] \times [c, d])$ e $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ per $y \in [c, d]$, allora

$$g \in C^1([c, d]) \text{ e } g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

Dimostrazione. Fissiamo $\bar{y} \in [c, d]$ e consideriamo

$$\frac{g(y) - g(\bar{y})}{y - \bar{y}} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} dx = \int_a^b \varphi(x, y) dx$$

con $\varphi(x, y)$ l'integrando. Si appiama che $\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \varphi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$ e vogliamo mostrare che questa convergenza è uniforme al variare di x . Per il teorema di Lagrange si ha che

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_{x,y}) \quad \xi_{x,y} \in (\bar{y}, y) \text{ oppure } (\bar{y}, y)$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}$ è uniformemente continua in $[a, b] \times [c, d]$ allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [a, b] \text{ e } \forall y, y' \in [c, d]$$

$$|(x, y) - (x', y')| < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') \right| < \varepsilon$$

e ora prendiamo come coppie (x, \bar{y}) e $(x, \xi_{x,y})$ e abbiamo

$$|(x, \xi_{x,y}) - (x, \bar{y})| = |\xi_{x,y} - \bar{y}| \leq |y - \bar{y}|$$

Ora come prima ciò dimostra che $\varphi(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$ uniformemente in $[a, b]$ e quindi

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

□

1.2 Serie di funzioni

I risultati visti per le successioni di funzioni danno luogo ad analoghi risultati per le serie di funzioni. Sia quindi E un insieme $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ (oppure \mathbb{R}^m, \mathbb{C}) e si considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in E$$

che è una serie di funzioni.

Definizione 1.4

Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in E se la successione delle somme parziali converge puntualmente in E , ossia se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E se la successione delle somme parziali converge uniformemente in E ,

Ne consegue che alcuni risultati hanno rispettivi analoghi, ad esempio

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente in E se e solo se

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

converge uniformemente in E (definizione), ossia questo vale se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall N, M \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |s_N(x) - s_M(x)| < \varepsilon$$

Ora assumiamo senza perdita di generalità che $N \leq M$, allora chiamiamo $M = N + p$ e otteniamo che l'ultima eguaglianza si scrive come

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Otteniamo

Proposizione 1.5 (Criterio di Cauchy). *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, p \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (1.1)$$

Corollario 1.5.1. *Condizione necessaria affinché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente in E è che $f_n \rightarrow 0$ uniformemente in E*

Dimostrazione. prendiamo $p = 1$ in (1) e otteniamo $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon$ ossia $f_n \rightarrow 0$ uniformemente in E \square

Esempio 1.9. Supponiamo ora che esista una successione numerica $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

vogliamo mostrare che allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E , usando (1), infatti abbiamo

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è utilizzato il criterio di Cauchy per le serie numeriche.

Definizione 1.5: Convergenza totale

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge **totalmente** in E se esiste $\{a_n\}$ in \mathbb{R} tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Per quanto visto prima quindi

Proposizione 1.6. *Convergenza totale implica convergenza uniforme, e notando dalla dimostrazione prima abbiamo anche che implica la convergenza assoluta uniforme.*

Esempio 1.10. Non vale il contrario, un esempio di serie uniformemente convergente ma non totalmente convergente è

$$\sum_{n=1}^{\infty} -1 \cdot \frac{(-1)^n}{n}$$

dove $f_n(x)$ è costante per ogni n . Allora la serie converge uniformemente in \mathbb{R} ovviamente perché è costante e converge in quanto a segno alternato, ma non converge totalmente perché la serie armonica diverge.

Esempio 1.11. Sia $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, per $x \in \mathbb{R}$. Allora usiamo il criterio della radice ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

quindi per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente, per $|x| > 1$ la serie diverge, per $x = -1$ la serie è la serie armonica che diverge, per $x = 1$ la serie è una serie a segni alterni che converge.

Concludiamo quindi che la serie converge puntualmente in $(-1, 1]$ e per ogni $0 < \delta < 1$ la serie converge uniformemente in $[-\delta, \delta]$, infatti

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \leq \delta^n n$$

la cui serie converge, quindi la serie converge totalmente.

Naturalmente però la serie non converge totalmente in $[0, 1]$ poiché

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

ma comunque la serie converge uniformemente in $[0, 1]$, infatti usiamo il criterio di Cauchy.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq |s_{n+p} - S(x)| + |S(x) - s_n(x)| < \frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{x^n}{n}$$

che converge a 0 per $n \rightarrow +\infty$ e si è usato il fatto che se $S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$ è una serie convergente a segni alterni, con $a_n > 0, a_n \rightarrow 0$ allora $|S - s_n| \leq a_{n+1}$

Procediamo a chiederci se la serie converge uniformemente in $(-1, 0]$. Utilizziamo allora la seguente osservazione dedotta direttamente dalle successioni

Osservazione. Sia $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$, $f_i \in C^0([a, b])$. Se la serie converge uniformemente in $(a, b]$ allora converge uniformemente in $[a, b]$ (in particolare converge in $x = a$)

Dimostrazione. Per ipotesi $s_n(x)$ converge uniformemente in $(a, b]$ e s_n sono funzioni continue in $x = a$, quindi per il risultato che avevamo già per le successioni (in breve basta enunciare il criterio di Cauchy e usare la continuità in $x = a$) otteniamo che la serie converge uniformemente in $[a, b]$ \square

Ne concludiamo che la serie non può convergere uniformemente in $(-1, 0]$ altrimenti convergerebbe uniformemente in $[-1, 0]$ ma sappiamo che in -1 non abbiamo neanche convergenza puntuale.

Esempio 1.12. Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

1.3 Richiami su limiti e serie

Proposizione 1.7. Sia a_n una successione di numeri reali positivi. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Dimostrazione. Sia $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se $L = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Sia allora $L < +\infty$. Fissato un $\varepsilon > 0$ quindi esiste n_ε tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon$$

Allora iterando otteniamo

$$a_n \leq (L + \varepsilon)^{n - n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon} \implies \sqrt[n]{a_n} \leq (L + \varepsilon)^{1 - \frac{n_\varepsilon}{n}} \sqrt[n_\varepsilon]{a_{n_\varepsilon}} \rightarrow L + \varepsilon$$

Per $n \rightarrow \infty$, ora per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Similmente si dimostra anche l'altra uguaglianza, quella centrale è ovvia. \square

Esempio 1.13. Sia $a_n = n$. Allora poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ abbiamo che anche $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Sia $a_n = n!$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1 \rightarrow +\infty$ e quindi anche $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$

Sia $a_n = \frac{n^n}{n!}$ allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

e quindi $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$.

Osservazione. In realtà (e potremmo vederlo più tardi), l'approssimazione di Stirling ci dice

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ora procediamo vedendo un criterio di convergenza (non assoluta) che sarà il criterio di convergenza di Abel. Procediamo a passi più piccoli.

Lemma 1.8: Disuguaglianza di (Brunacci) Abel

Siano $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \mathbb{C}$ e siano $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell \in \mathbb{C}$. Poniamo ora

$$w_m = \sum_{i=0}^m \zeta_i \quad m = 0, 1, \dots, \ell$$

Sia $M > 0$ tale che

$$|w_m| \leq M \quad \forall m = 0, 1, \dots, \ell$$

Allora

$$\left| \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i \right| \leq (|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \dots + |\gamma_{\ell-1} - \gamma_\ell| + |\gamma_\ell|)M$$

Dimostrazione.

$$\sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i = \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i (w_i - w_{i-1}) = \sum_{i=0}^{\ell} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) w_i$$

Dove si intende che $\gamma_{\ell+1} = 0$ e $w_{-1} = 0$. Ora semplicemente per disuguaglianza triangolare e applicando l'ipotesi definente M otteniamo la tesi. \square

Teorema 1.9: primo criterio di convergenza di Abel

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ una serie numerica. Se

- $z_n \in \mathbb{C}$ (oppure in \mathbb{R}^N)
- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ è una serie le cui somme parziali sono limitate
- $\{c_n\}$ è una successione di numeri reali non crescente e infinitesima

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ converge.

Dimostrazione. Utilizziamo il criterio di convergenza di Cauchy. Fissiamo $N, p \in \mathbb{N}$ e consideriamo

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M \sum_{n=N}^{N+p} |c_n - c_{n+1}| \quad (\text{diciamo } c_{N+p+1} = 0 \text{ per comodità notazionale})$$

Dove M è maggiorante per le somme parziali di z_n . Infatti abbiamo che

$$w_m = z_N + z_{N+1} + \cdots + z_{N+m} = \sum_{i=0}^{N+m} z_n - \sum_{i=0}^{N-1} z_n$$

per cui effettivamente $|w_m| \leq 2M$ e possiamo applicare la disuguaglianza di Abel.

Ora possiamo, sapendo che $c_k \rightarrow 0$ da sopra, ottenere che la serie precedentemente trovata è telescopica per N sufficientemente grande e quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M |c_N| \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

e quindi per il criterio di Cauchy la serie converge. \square

Esempio 1.14. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad z \in \mathbb{C}$$

Allora se $|z| > 1$ manca la condizione necessaria di convergenza.

Sia allora $|z| \leq 1$. Consideriamo prima il caso $|z| < 1$. Sia ha allora convergenza assoluta, perché

$$\frac{|z|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|z|^n} = |z| \frac{n}{n+1} \rightarrow 0$$

Consideriamo invece il caso $|z| = 1$. Se $z = -1$ la serie non converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow -\infty$$

Ora consideriamo $|z| = 1$ con $z \neq -1$ e vogliamo applicare il criterio di Abel, con $c_n = \frac{1}{n}$ e $z_n = (-1)^{n+1} z^n$. Chiaramente c_n è infinitesima non crescente reale. Inoltre

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_N| = \left| \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} z^i \right| = \left| \sum_{n=1}^N (-z)^N \right| = |z| \left| \frac{1 - (-z)^N}{1 - (-z)} \right| \leq \frac{z}{|1+z|}$$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Abel e la serie converge.

Corollario 1.9.1 (Criterio di Leibniz). *Se una serie è a segni alterni del tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con $a_n \rightarrow 0$ e $a_n > 0$ non crescente. Allora abbiamo che $z_n = (-1)^n$ e $c_n = a_n$ soddisfano le ipotesi del criterio di Abel e quindi la serie converge.

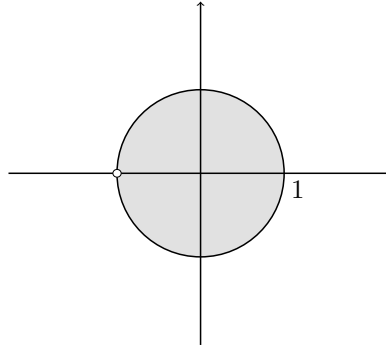


Figura 1: Punti del piano \mathbb{C} tali che la serie dell'esempio 2.2 converge

Teorema 1.10: Secondo criterio di convergenza di Abel

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$$

con

- $z_n \in \mathbb{C}$ (oppure in \mathbb{R}^N)
- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è una serie convergente
- $\{c_n\}$ è una successione monotona e convergente

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$ converge.

Dimostrazione. Supponiamo $c_n \rightarrow c$ non crescente. Allora

$$\sum_{n=0}^N c_n z_n = \sum_{n=0}^N (c_n - c) z_n + c \sum_{n=0}^N z_n$$

Ora per $N \rightarrow \infty$ abbiamo che $c_n - c \rightarrow 0$ decrescente e le somme parziali di z_n sono limitate, perché la serie converge. Quindi abbiamo che la prima serie converge per il primo criterio di Abel. Anche la seconda serie converge per ipotesi, quindi la tesi è dimostrata. \square

Sappiamo che

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^M b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{N+M} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} z^n$$

è il prodtto di polinomi. Quindi formalmente, se $z = 1$ e $N, M \rightarrow \infty$ otteniamo

Definizione 1.6: Serie prodotto alla Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

che è detta serie prodotto alla Cauchy delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Teorema 1.11: Mertens + Cauchy

Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono convergenti e almeno una è assolutamente convergente, allora la serie prodotto è convergente ed ha per somma il prodotto delle serie.

Se entrambe le serie sono assolutamente convergenti, allora tale è anche la serie prodotto.

Consideriamo serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \text{ con } c_n \in \mathbb{C} \text{ e } z, a \in \mathbb{C}$$

Abbiamo visto alcuni esempi:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge se e solo se $|z| < 1$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, converge se e solo se $|z| \leq 1$ e $z \neq -1$

In entrambi i casi (e vedremo in generale) la convergenza è nei punti di un disco (detto cerchio di convergenza) di centro $z = a$. Il comportamento sul bordo del cerchio varia da caso a caso.

Teorema 1.12: Abel

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Se la serie converge in un punto $z \in \mathbb{C}$ allora converge uniformemente su tutto il segmento di estremi a e z .

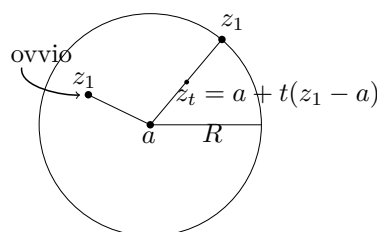


Figura 2: abel

Dimostrazione. Il teorema è significativo quando $z_1 \in \partial D_R(a)$. Non è restrittivo supporre $a = 0$. Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (tz_1)^n$$

utilizziamo il criterio di Cauchy per le convergenze uniformi: fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo avere che per un n_ε allora per ogni $N \geq n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$ si abbia che

$$\left| \sum_{m=N}^{N+p} \underbrace{t^m}_{\gamma_{m-N}} \underbrace{c_m z_1^m}_{\zeta_{m-N}} \right| < \varepsilon$$

$$\leq M(|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \dots + |\gamma_{p-1} - \gamma_p|)$$

con M un maggiorante per le somme parziali di $c_n z_1^n$. Ora poiché per ipotesi tale serie converge, esiste n_ε tale per cui per ogni $N \geq n_\varepsilon$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\left| \sum_{m=N}^{N+p} c_m z_1^m \right| \leq \varepsilon$$

ora poiché $1 \geq t^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che la precedente disuguaglianza è soddisfatta per $M = 1$, quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} t^n c_n z_1^n \right| \leq t^N \varepsilon \leq \varepsilon$$

□

2 Analisi complessa

2.1 Funzioni analitiche su \mathbb{R}

Definizione 2.1: Funzione analitica

Sia I un intervallo aperto. Diciamo che una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è analitica se per ogni $x_0 \in I$ esiste $\delta > 0$ tale che su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la funzione sia esprimibile come somma di una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2.1)$$

Sia f come in (2); Sia R il raggio di convergenza della serie. Su ogni intervallo J tale che $\overline{J} \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$ sappiamo che la serie converge totalmente. Consideriamo la serie delle derivate (cioè la *serie derivata*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza R , poiché

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}$$

Quindi la serie delle derivate è uniformemente convergente su ogni compatto di $x_0 - R, x_0 + R$.

Lemma 2.1 (Teorema di derivazione per Serie). *Sia $f = \sum f_n$ convergente e $g = \sum f'_n$ uniformemente convergente. Allora f è derivabile e $f' = g$.*

Per il teorema di derivazione per serie, f è derivabile e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

A f' applichiamo lo stesso ragionamento visto su f : f' è derivabile e si ha che

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Procedendo induttivamente otteniamo che $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

In particolare abbiamo che $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ e quindi la serie di potenze è la serie di Taylor di f centrata in x_0 . Più precisamente

Teorema 2.2

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ per $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, con $a_n \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ e la serie è la serie di Taylor di f centrata in x_0 .

Dimostrazione. Vedasi sopra. □

Non è vero che ogni funzione C^∞ sia sviluppabile in serie di Taylor.

Esempio 2.1. Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$. Allora

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 & x = 0 \\ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

eccetera anche per le altre derivate si ha che $f^{(k)}(0) = 0$. Quindi la serie di Taylor centrata in 0 è la serie nulla, ma $f \neq 0$ in alcun intorno di 0.

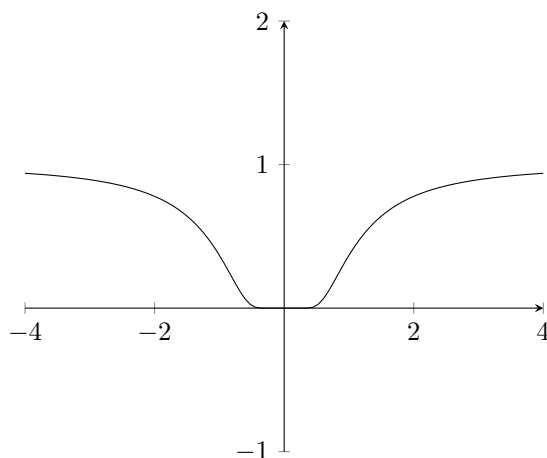


Figura 3: $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Teorema 2.3

Sia $f \in C^\infty(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto per la quale esistano $M, L > 0$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in I \quad |f^{(k)}(x)| \leq ML^k$$

Allora f è analitica.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I$ e consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad x \in I$$

Scriviamo lo sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) (x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi_x \in (x_0, x)$ è un opportuno punto. Mostriamo ora che

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

□

Esempio 2.2. Le funzioni e^x , $\sin x$, $\cos x$ sono analitiche.

2.2 \mathbb{C} -differenziabilità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Definizione 2.2: \mathbb{C} -differenziabilità

Sia $a \in \Omega$. Diciamo che f è \mathbb{C} -differenziabile in $z = a$ se esiste

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) \quad (2.2)$$

o equivalentemente

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \varepsilon(z - a)(z - a) \quad (2.3)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \varepsilon(w) = 0 \quad (2.4)$$

Se poniamo $\varepsilon(0) = 0$ allora la (1)' vale per ogni $z \in \Omega$, non solo $z \neq a$
Alcune proprietà:

- Se f è \mathbb{C} -differenziabile in $z = a$ allora è continua (da (1)')
- f, g \mathbb{C} -differenziabili in $z = a$; allora $f \pm g$ è \mathbb{C} -differenziabile, λf , con $\lambda \in \mathbb{C}$ è \mathbb{C} -differenziabile e fg è \mathbb{C} -differenziabile.

Se $g(a) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è \mathbb{C} -differenziabile in $z = a$ e $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Esempio 2.3. $z \mapsto \bar{z}$ è \mathbb{C} -differenziabile in ogni $z \in \mathbb{C}$. Ne consegue dalle proprietà che i polinomi sono \mathbb{C} -differenziabili, e anche le funzioni razionali.

Esempio 2.4. $z \mapsto \bar{z}$ non è \mathbb{C} -differenziabile. Infatti

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} = \frac{\overline{z - a}}{z - a}$$

che non ha limite perché assume valori diversi ad esempio sulla retta $a + \delta$ e $a + \delta i$ al variare di $\delta \in \mathbb{R}$.

Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ può essere vista come $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tralasciando la struttura di campo di \mathbb{C} . Allora possiamo scrivere $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, con $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si utilizza spesso la scrittura

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

che è una sorta di “ibrido”. Possiamo ora scrivere $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ecc.

Supponiamo ora che f sia \mathbb{C} -differenziabile in $z = a = x_0 + iy_0$. Esiste quindi

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Guardiamo ora la retta $z = a + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$, quindi

$$f'(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

In maniera analoga, per $z = a + \delta i$ abbiamo

$$f'(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \delta i) - f(x_0, y_0)}{\delta i} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y} f(a)$$

In breve abbiamo che deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Che in termini di u e v equivale a dire che

$$u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Proposizione 2.4 (Condizioni necessarie). *Se f è \mathbb{C} -differenziabile in $z = a$ allora valgono le condizioni di **Cauchy-Riemann**, cioè*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \text{ o equivalentemente } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Dimostrazione. Vedasi sopra. □

Proposizione 2.5. *Sia f differenziabile in $a = (x_0, y_0)$ come funzione $\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, allora $f : C \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è \mathbb{C} -differenziabile in $z = x_0 + iy_0$*

Dimostrazione. Per ipotesi (con $h = (h_1, h_2)$)

$$f(a + h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + o(h)$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ si ha

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + i \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_2 + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(h_1 + ih_2) + o(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(z - a) + o(z - a) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6: Looman-Menchoff

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua e dotata di $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ in $z = a$. Se valgono le condizioni di Cauchy Riemann, allora f è \mathbb{C} -differenziabile in $z = a$

Abbiamo già visto sui reali che analitica implica C^∞ . Ora spiace lo spoiler ma dimostreremo che \mathbb{C} -differenziabile implica analitica, quindi \mathbb{C} -differenziabilità, C^∞ , analitica saranno nozioni equivalenti e gli assegneremo la dicitura di **olomorfe**.

Definizione 2.3: Derivata complessa

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Ciò è motivato dal seguente passaggio formale: Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, allora $f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right)$ e quindi si ottiene formalmente il risultato come sopra definito.

Osservazione. Le condizioni di Cauchy-Riemann diventano $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

2.3 \mathbb{C} -differenziabilità delle funzioni analitiche**Teorema 2.7**

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad c_n \in \mathbb{C}$$

con R il raggio di convergenza. Allora la serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza R . Inoltre se $f(z)$ è la somma della serie data e $g(z)$ la somma della serie derivata, allora avremo che f è \mathbb{C} -differenziabile e $f'(z) = g(z)$ per ogni $z \in D_R(a)$

Dimostrazione. Come nel caso reale,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

quindi i due raggi di convergenza coincidono. Supponiamo $a = 0$. Fissiamo $w \in D_R(0)$ e consideriamo

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

con h tale che $w+h \in D_R(0)$. Scriviamo, per $N \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = S_N(z) + R_N(z) \quad \text{con} \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n (z - a)^n$$

e $R_N(z)$ il resto della serie. Sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} = S'_N(w) \rightarrow g(z) \text{ per } N \rightarrow \infty$$

Consideriamo il resto

$$\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n((w+h)^n - w^n))$$

essendo

$$(w+h)^n - w^n = (w+h-w) \left((w+h)^{n-1} + (w+h)^{n-2}w + \dots + w^{n-1} \right)$$

ottengo

$$\left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| (|w+h|^{n-1} + |w+h|^{n-2}|w| + \dots + |w|^{n-1})$$

Ora, per h tale che $w+h \in D_\rho(0)$, con $|w| \leq \rho < R$ si ha che $|w+h|^{n-k}|w|^{k-1} \leq \rho^{n-1}$ quindi

$$\left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| n \rho^{n-1} \rightarrow 0$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1}$ la serie derivata converge assolutamente in $D_R(0)$ in particolare per $\zeta = \rho$. Concludiamo ora

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(w) \right| &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} - S'_N(w) \right| + \\ &+ \limsup_{h \rightarrow 0} |S'_N(w) - g(w)| + \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| = |S'_N(w) - g(w)| + \varepsilon \end{aligned}$$

per N sufficientemente grande. Si conclude per l'arbitrarietà di ε \square

2.4 Integrazione su Curve

Definizione 2.4: Curva in \mathbb{C}

Diremo **curva** in \mathbb{C} ogni funzione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Si dice **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Il **sostegno** di γ è l'immagine di γ , cioè $\gamma([a, b])$. Inoltre γ si dice C^1 a tratti se esistono $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tali che

$$\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k]) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Diciamo **curva opposta** di γ la curva percorsa in "senso opposto" ossia:

$$-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad -\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$$

Chiamiamo **saldatura** di due curve $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$, con $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, la curva

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 + t - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases} \quad \forall t \in [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$$

(Notare che esiste anche la notazione moltiplicativa per saldatura e curva opposta). Siano ora $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ due curve. Allora diciamo che le due curve sono **equivalenti** se esiste $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ C^1 a tratti, biettiva, con $\varphi' > 0$, tale che $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Per convenzione, se non espressamente specificato diversamente considereremo curve C^1 a tratti.

Definizione 2.5: Integrale su curva

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti e sia f continua a valori in \mathbb{C} definita (almeno) sul sostegno di γ . Allora si definisce

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Abbiamo le seguenti proprietà:

- (linearità) $\int_{\gamma} (\lambda f + \mu g) dz = \lambda \int_{\gamma} f dz + \mu \int_{\gamma} g dz$
- (additività) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
- $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \text{lungh}(\gamma) \cdot \max_{\text{spt } \gamma} |f|$
- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$

Sia \mathcal{C} una curva in \mathbb{C} assegnata come “oggetto geometrico”: circonferenza, rettangolo, segmento eccetera. Allora scriveremo $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ purché il contesto chiarisca il tipo di parametrizzazione. Ad esempio $\int_{\partial D_R}$ o $\int_{\partial R}$ (rispettivamente integrale su circonferenza e su bordo di un rettangolo) si intenderà a meno di specificare in orientamento antiorario.

Proposizione 2.8. Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ due curve equivalenti. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ la funzione di equivalenza. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

□

Esempio 2.5. Se consideriamo $\int_{\partial D_R(a)}$ allora la parametrizzazione che prendiamo sarà $\gamma(t) = a + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Quindi abbiamo $\gamma'(t) = iRe^{it}$ e

$$\int_{\partial D_R(a)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) iRe^{it} dt$$

ad esempio se $f(z) = \frac{1}{z - a}$

$$\int_{\partial D_R(a)} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Esempio 2.6. Se consideriamo R rettangolo, $a \in R \setminus \partial R$. Calcoliamo quindi

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z - a} dz$$

dove $z = a + \rho(\theta)e^{i\theta}$ dove $\theta \in [0, 2\pi]$ e ρ è C^1 a tratti. Allora otteniamo che

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(\theta)e^{i\theta}} i\rho(\theta)e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

Osservazione. Se ho $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C} -differenziabile e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ C^1 a tratti, allora $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Infatti, fissato $t_0 \in [a, b]$ Consideriamo

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

Ricordiamo che $F(z) = F(a) + F'(a)(z-a) + (\varepsilon(z-a))(z-a)$ con $\varepsilon(w)$ infinitesimo per $w \rightarrow 0$ e $\varepsilon(0) = 0$. Allora

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0} = F'(\gamma(t_0)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varepsilon(\gamma(t) - \gamma(t_0)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

e passando al limite otteniamo la tesi.

Osservazione. $\int_{\gamma} f(z)dz$ è l'integrale su un intervallo di una funzione vettoriale $f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Come tale possiamo applicare i risultati visti di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Ad esempio supponiamo di avere $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ e una successione e una funzione $f_n, f : \text{spt}\gamma \rightarrow \mathbb{C}$ continua e $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $\text{spt}\gamma$. Allora

$$\int_{\gamma} f_n(z)dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz$$

Infatti per ipotesi sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall n \geq n_{\varepsilon} \forall z \in \text{spt}\gamma \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

ma quindi anche $\forall t \in [a, b]$ abbiamo che $|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon$ e quindi

$$|f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \max_{a \leq s \leq b} |\gamma'(s)| < M\varepsilon$$

cioè $f_n(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot) \rightarrow f(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)$ uniformemente.

In particolare (come successione si consideri la successione delle somme parziali di una serie) si ha che se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sul supporto di γ allora

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz$$

Definizione 2.6: Primitiva

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Una funzione $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **primitiva** di f se F è \mathbb{C} -differenziabile e $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$.

Proposizione 2.9. Sia F primitiva di f e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a tratti. Allora

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dimostrazione.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

□

Corollario 2.9.1. Se F ammette primitiva in Ω allora $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ per ogni curva chiusa γ in Ω .

Dimostrazione. ovvia □

Corollario 2.9.2. Sia Ω un aperto **connesso**, allora se f è \mathbb{C} -differenziabile e $f' = 0$ allora f è costante.

Dimostrazione. Fissiamo $z_0, z_1 \in \Omega$, allora esiste (connessione per archi) una $\gamma \in C^1$ a tratti (poligonale) con $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z_1$ e allora poiché f è primitiva di f' abbiamo che

$$0 = \int_{\gamma} f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(z_1) - f(z_0)$$

□

Ricordiamo la notazione “mista” per le funzioni $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Sia ora $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ a tratti e la denotiamo $\gamma(\cdot) = x(\cdot) + iy(\cdot)$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t))dt = \\ &= \int_a^b u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)dt + \\ &+ i \int_a^b u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)dt \end{aligned}$$

Se ora poniamo $\omega_r(x, y) = u(x, y)dx - v(x, y)dy$ e $\omega_i(x, y) = v(x, y)dx + u(x, y)dy$ allora otteniamo

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \omega_r + i \int_{\gamma} \omega_i$$

e anche

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))x'(t)dt + \\ &+ i \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))y'(t)dt = \\ &= \int_{\gamma} f(x, y)dx + i \int_{\gamma} f(x, y)dy \end{aligned}$$

Proposizione 2.10. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

- a) Sia f continua. Allora f ammette primitiva se e solo se ω_r e ω_i sono esatte
- b) Sia $f \in C^1$. Allora f soddisfa le condizioni di Cauchy – Riemann (cioè è \mathbb{C} -differenziabile) se e solo se ω_r e ω_i sono chiuse

Dimostrazione.

- a) f ammette primitiva $F = \varphi + i\psi$; si ha quindi che

$$u + iv = F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x \quad \text{e} \quad \begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x \end{cases}$$

Allora otteniamo che

$$\begin{cases} u = \varphi_x = \psi_y \\ v = \psi_x = -\varphi_y \end{cases}$$

ne consegue che

$$\begin{cases} \omega_r = udx - vdy = \varphi_x dx - \varphi_y dy = d\varphi \\ \omega_i = vdx + udy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi \end{cases}$$

sono esatte.

Viceversa, siano ω_r e ω_i esatte, quindi $\omega_r = d\varphi$ e $\omega_i = d\psi$, per opportune $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$. Allora

$$\begin{cases} u = \varphi_x \\ -v = \varphi_y \end{cases} \quad \begin{cases} v = \psi_x \\ u = \psi_y \end{cases}$$

Ponendo ora $F = \varphi + i\psi \in C^1$ si ha che

$$\begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -v = -\psi_x \end{cases}$$

che sono esattamente le condizioni di Cauchy-Riemann per F . Allora F è \mathbb{C} -differenziabile e $F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x = u + iv = f$, quindi F è primitiva di f .

b) $f = u + iv$. Le condizioni di Cauchy-Riemann sono

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \begin{cases} w_i = vdx + udy \text{ è chiusa} \\ w_r = udx - vdy \text{ è chiusa} \end{cases}$$

semplicemente per definizione

□

Ricordiamo che vogliamo cercare di invertire il risultato precedente, ossia il corollario 2.9.1. Per il viceversa quindi abbiamo che $\int_\gamma f = 0$ per ogni γ chiusa in Ω , ma ora poiché $\int_\gamma f = \int_\gamma \omega_r + i \int_\gamma \omega_i$ ne consegue che

$$\int_\gamma \omega_r = \int_\gamma \omega_i = 0 \quad \forall \gamma \xrightarrow{\text{Teorema 3}} \omega_r, \omega_i \text{ esatte} \xrightarrow{\text{Proposizione}} f \text{ ammette primitiva}$$

Con questo abbiamo dimostrato

Proposizione 2.11. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua, allora f ammette primitiva se e solo se*

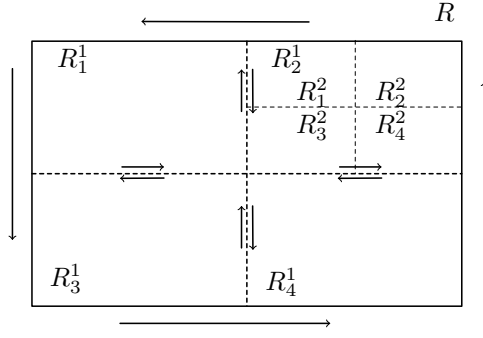
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiusa in } \Omega$$

Nella dimostrazione $f \mathbb{C}$ -differenziabile $\implies f$ analitica servirà avere che $\int_\gamma f = 0$ per ogni γ chiusa in Ω semplicemente connesso. Ma non possiamo usare (b) della proposizione 2.10 perché non possiamo assumere che f sia C^1 . Allora mostriamo direttamente che $\int_\gamma f = 0$ in un caso particolare, usando il seguente lemma

Lemma 2.12: Cauchy-Goursat

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{C} -differenziabile. Sia R un rettangolo chiuso, con $R \subseteq \Omega$. Allora

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$



Dimostrazione. Sia $A = \left| \int_{\partial R} f dz \right|$. Per assurdo supponiamo sia $A > 0$. Ora suddividiamo R in quattro rettangoli $R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1$ e abbiamo

$$A = \left| \int_{\partial R} f \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \int_{\partial R_i^1} f \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\partial R_i^1} f \right|$$

Allora abbiamo che per un qualche R_j^1 si ha che

$$\left| \int_{\partial R_{j_1}^1} f \right| \geq \frac{A}{4}$$

Procediamo in questo modo suddividendo $R_{j_1}^1$ in quattro rettangoli R_i^2 per $i = 1, 2, 3, 4$ e così procedendo si forma una successione di rettangoli

$$R_{j_1}^1 \supseteq R_{j_2}^2 \supseteq \dots \supseteq R_{j_n}^n$$

che hanno diametro $\text{diam} R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{diam } R$ di lunghezza $\text{lung} R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{lung} R$ e tali che

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

Ora essendo ogni rettangolo compatto, la loro intersezione non è vuota e anzi è un solo punto $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_{j_k}^k = \{a\}$, avendo diametro 0. Poiché f è \mathbb{C} -differenziabile in $z = a$:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \varepsilon(z - a)(z - a) \quad \varepsilon(0) = 0 \quad \varepsilon(w) \rightarrow 0 \text{ per } w \rightarrow 0$$

Infine notiamo che

$$\int_{\partial R_{j_k}^k} f(z) dz = \int_{\partial R_{j_k}^k} (f(a) + f'(a)(z - a)) dz + \int_{\partial R_{j_k}^k} \varepsilon(z - a)(z - a) dz$$

dove il primo termine è uguale a 0 poiché la funzione integranda ammette primitiva $f(a)z + \frac{1}{2}f'(a)(z - a)^2$. Ora fissiamo $\sigma > 0$. Sia $\delta > 0$ tale che $|w| < \delta \implies |\varepsilon(w)| < \sigma$. Per k sufficientemente grande abbiamo che $\text{diam} R_{j_k}^k < \delta$ e allora $|z - a| < \delta$ se $z \in \partial R_{j_k}^k$. Allora, per tali k :

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} \varepsilon(z - a)(z - a) dz \right| \leq \sigma \text{diam } R_{j_k}^k \text{lung} R_{j_k}^k = \sigma \cdot \frac{1}{2^k} \text{diam } R \cdot \frac{1}{2^k} \text{lung} \partial R$$

Ricordando che

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

e mettendo assieme i pezzi otteniamo che $A = 0$ (per l'arbitrarietà di σ), che è assurdo \square

Estendiamo ora il risultato

Proposizione 2.13. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Sia $a \in \Omega$ e supponiamo che f sia \mathbb{C} -differenziabile in $\Omega \setminus \{a\}$. Allora

$$\int_{\partial R} f = 0$$

per ogni rettangolo chiuso R in Ω

Dimostrazione. – Se $a \notin R$ allora si usa il lemma di Cauchy-Goursat

- Se $a \in \partial R$ si approssima R con una successione R_n di rettangoli internamente (come in figura 4) Risulta poi

$$0 = \int_{\partial R_n} f \rightarrow \int_{\partial R} f$$

(possiamo pensare ogni ∂R_n parametrizzato su un intervallo fisso $[a, b]$ e c'è convergenza uniforme)

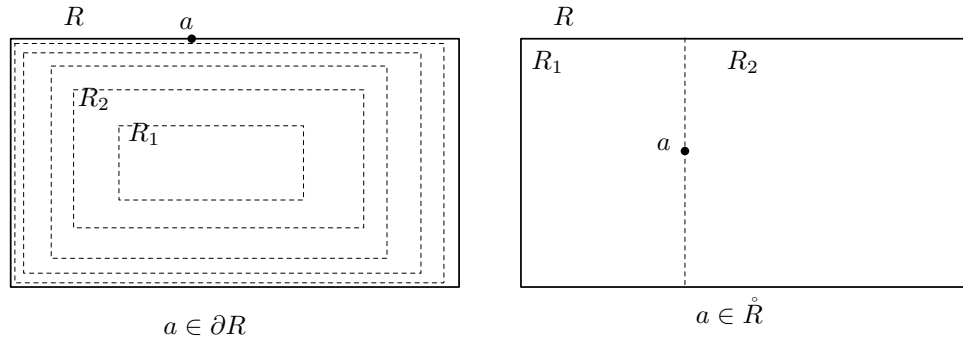


Figura 4: Approssimazione di R con R_n per $a \in \partial R$ e decomposizione per $a \in \mathring{R}$

- $a \in \mathring{R}$ Scomponendo R in due rettangoli R_1 e R_2 come in figura, con $a \in \partial R_1 \cap \partial R_2$ si ha che

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R_1} f + \int_{\partial R_2} f = 0$$

per il caso precedente

□

Teorema 2.14: Formula di Cauchy per il rettangolo

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ \mathbb{C} -differenziabile. Sia $R \subseteq \Omega$ un rettangolo chiuso. Allora per ogni $w \in \mathring{R}$ risulta

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

Dimostrazione. Sia

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & z \neq w \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

allora poiché f è \mathbb{C} -differenziabile, g è continua in Ω . Inoltre g è \mathbb{C} -differenziabile in $\Omega \setminus \{w\}$. Allora per la proposizione 2.13 si ha che

$$0 = \int_{\partial R} g(z) dz = \int_{\partial R} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz - f(w) \int_{\partial R} \frac{1}{z - w} dz$$

Infine poiché $\int_{\partial R} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$ per $w \in \overset{\circ}{R}$ si ottiene la tesi. \square

Teorema 2.15

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathbb{C} -differenziabile. Allora f è analitica in Ω

Dimostrazione. Fissiamo $a \in \Omega$ e mostriamo che f è sviluppabile in serie di potenze in un intorno di a . Sia R un rettangolo chiuso con $a \in \overset{\circ}{R}$ e $R \subseteq \Omega$. Sia $D_r(a)$ con

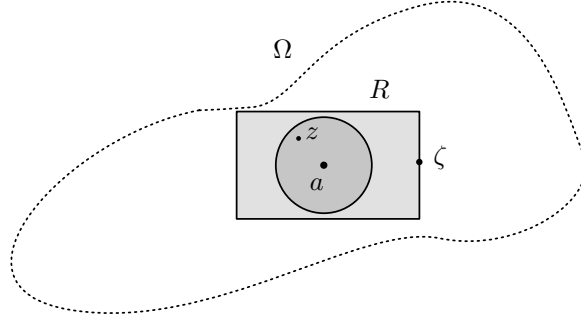


Figura 5: diffanalitica

$\overline{D_r(a)} \subseteq \overset{\circ}{R}$. Consideriamo $z \in D_r(a)$. Sappiamo per la formula di Cauchy per il rettangolo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ora comunque presi $z \in D_r(a)$ e $\zeta \in \partial R$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

e poiché

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \leq \alpha < 1$$

per un opportuno α . Allora abbiamo

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

e quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n d\zeta$$

Risulta che

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n \right| \leq \left(\max_{\partial R} |f| \right) \frac{1}{|\zeta-a|} \cdot \alpha^n$$

e quindi poiché $\alpha < 1$ si ha convergenza globale e si può scambiare il segno di serie e integrale ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dove $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$ \square

Abbiamo allora dimostrato che f è \mathbb{C} -differenziabile se e solo se è analitica. Si parla anche di funzioni **olomorfe** e si indica con $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Osservazione. Se f è olomorfa allora f è infinitamente differenziabile in senso complesso. Inoltre se guardiamo f come funzione reale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ allora f è C^∞

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Abbiamo già visto che se per ogni γ chiusa in Ω si ha $\int_\gamma f = 0$ allora f ammette primitiva in Ω , ossia esiste $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $F' = f$. In particolare F è \mathbb{C} -differenziabile e quindi olomorfa, ma quindi anche f è olomorfa.

Ricordando la dimostrazione del teorema 3 che dice che se l'integrale su ogni curva chiusa di una forma differenziale è nullo allora la forma è esatta. Similmente se per ogni curva chiusa γ si ha che l'integrale su γ di f è nullo allora f ammette primitiva, costruita nello stesso modo, ossia

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

dove γ_z è una curva che unisce z_0 a z , con z_0 fissato. Richiedere che l'integrale su ogni curva chiusa sia nullo serve perché questa funzione sia ben definita.

Supponiamo ora di avere solamente l'ipotesi

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Otteniamo un simile risultato

Teorema 2.16: Morera

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua e tale che

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Allora f è olomorfa in Ω

Dimostrazione. Fissato $\overline{D}_r(a) \subseteq \Omega$, per ogni $z \in D_r(a)$ costruiamo

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

dove γ_z consiste in due dei lati di un rettangolo con vertici a e z . Tecnicamente allora ci sono due curve γ_z e $\tilde{\gamma}_z$ con questa proprietà, ma per l'ipotesi posta hanno uguale integrale, quindi F è ben posta. Ora come nel caso precedente si dimostra che F è \mathbb{C} -differenziabile e $F'(z) = f(z)$ in ogni $z \in D_r(a)$. Allora F è \mathbb{C} -differenziabile in $D_r(a)$. Per l'arbitrarietà di a si ha che f è olomorfa in Ω . \square

Osservazione. Non abbiamo dimostrato in questo caso che f ammette primitiva su tutto Ω , ma soltanto in un intorno di ogni punto. Questo comunque ci permette di mostrare che f è olomorfa.

Con quanto appena visto possiamo aggiornare la Proposizione 2.10. Infatti se f è olomorfa, in particolare è C^1 e allora ω_i e ω_r sono chiuse. Ora usando il Teorema 3 vale l'invarianza per omotopia. Allora

Teorema 2.17: Cauchy, forma omotopica

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e γ_0, γ_1 curve chiuse fra loro omotope in Ω . Allora

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Dimostrazione. vedasi sopra □

Risultato analogo vale per curve omotope rispetto a un'omotopia che fissa gli estremi.

Corollario 2.17.1. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω semplicemente connesso. Allora f ammette primitiva in Ω

Osservazione. Segue che $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ammette sempre una primitiva locale.

Teorema 2.18: Formula di Cauchy per il cerchio

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e D disco aperto con $\overline{D} \subseteq \Omega$. Allora per ogni $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

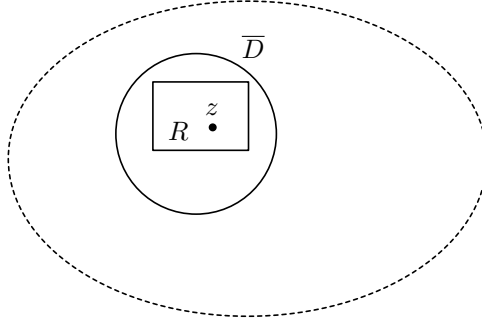


Figura 6: cauchy-disco

Dimostrazione. Sappiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

se R è un rettangolo chiuso in Ω , con $z \in \overset{\circ}{R}$. Sia $R \subseteq D$

Poiché

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

è olomorfa in $\Omega \setminus \{z\}$ e ∂D e ∂R sono omotope in $\Omega \setminus \{z\}$ risulta

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

□

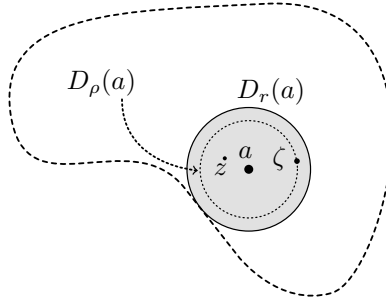
Osservazione. La formula si estende al caso in cui anziché D vi è una “qualunque forma” con bordo omotopo a ∂R

Funzioni olomorfe Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora se $a \in \Omega$ sappiamo che in un intorno di $z = a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

per opportuni $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ per il teorema della serie derivata. Domanda naturale è chiedersi quant'è il raggio di convergenza di tale serie di potenze.

Proposizione 2.19. *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ converge nel più grande disco contenuto in Ω*



Dimostrazione. Sia $r = d(a, \partial\Omega)$. Fissiamo $z \in D_r(a)$ e sia $0 < \rho < r$ tale che $z \in D_\rho(a)$. Appliciamo la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e procediamo come nella dimostrazione dell'analiticità delle funzioni \mathbb{C} -differenziabili. Allora per z fissato

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})}$$

e poiché $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| = \frac{1}{\rho} |z-a| < 1$ e indipendente da ζ . Quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n \end{aligned}$$

e quindi questa deve essere la serie di Taylor □

Dalla dimostrazione scende anche che

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

e poiché la funzione integranda è olomorfa in $\Omega \setminus \{a\}$ e le curve ∂D e $\partial D_\rho(a)$ sono omotope, per D qualsiasi $a \in D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$ si ottiene il seguente corollario

Corollario 2.19.1. *Sia $\overline{D} \subseteq \Omega$ disco chiuso. Allora per ogni $z \in D$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (2.5)$$

Osservazione. Per $n = 0$ si trova proprio la formula di Cauchy per il cerchio.

Osservazione. Il corollario può essere ottenuto dalla formula di Cauchy per il cerchio per derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

Proposizione 2.20. Per ogni $a \in \Omega$ e $\overline{D_\rho(a)} \subseteq \Omega$

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \rho^{-n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f|$$

Dimostrazione. Da (2.5) si ottiene che

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left(\max_{\partial D_\rho} |f| \right) \cdot \underbrace{\text{lunghezza } \partial D_\rho(a)}_{2\pi\rho}$$

□

Teorema 2.21: Liouville

Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ è limitata, allora f è costante

Dimostrazione. Fissiamo $a \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$ arbitrario. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di centro $z = a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

è valido per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Sappiamo per la proposizione precedente che

$$|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \leq \rho^{-n} \max_{\mathbb{C}} |f| \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow \infty$$

da cui $c_n = 0$ per $n \geq 1$ da cui $f(z) = c_0$ è costante.

□

Corollario 2.21.1 (Teorema Fondamentale dell'Algebra). Sia

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

con $a_n \neq 0$. Allora p_n ha almeno uno zero

Dimostrazione. Per assurdo sia $p_n(z) \neq 0$ per ogni z . Allora sia

$$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$$

Si ha che

$$p_n(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right)$$

il cui valore assoluto va a $+\infty$ per $|z| \rightarrow \infty$. Allora f è limitata perché $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$. Ma allora per il teorema di Liouville f è costante, assurdo.

□

2.5 Sviluppo di Laurent

Con

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad (2.6)$$

intendiamo

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad (2.7)$$

cioè diremo che la serie (2.6) converge (uniformemente, assolutamente, ecc) se tali sono le serie (2.7).

Teorema 2.22: Sviluppo di Laurent

Siano $0 \leq r_1 < r_2 < +\infty$ e $a \in \mathbb{C}$. Consideriamo^a

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$$

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora esiste unica una successione c_n tale che

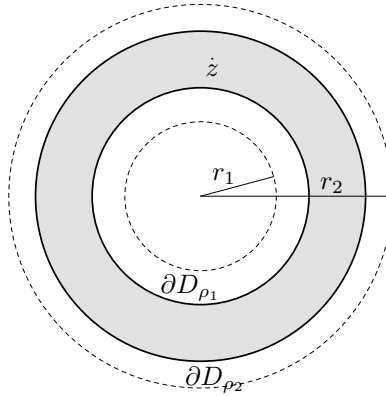
$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad z \in \Omega$$

Tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di Ω . Inoltre si ha che

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta \quad (2.8)$$

per un qualunque $\rho \in (r_1, r_2)$

^aNel caso di $r_1 = 0, r_2 = r$ allora si indica anche $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$



Dimostrazione. Siano $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ come in figura. Rappresentiamo f in forma integrale in $\{z : \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$. Sia

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Allora g è olomorfa in Ω , infatti se $\zeta \neq z$, poiché $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - z)^n$, con $a_0 = f(z)$,

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\zeta - z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\zeta - z)^{n-1}$$

che è una funzione olomorfa anche in un intorno di z e vale $a_1 = f'(z)$ in $\zeta = z$.

Ne consegue che per il teorema di Cauchy

$$\partial D_{\rho_1} \sim \partial D_{\rho_2} \implies \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} g = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} g$$

ma allora

$$\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

ma $\int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$ poiché la funzione $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ è olomorfa in un disco contenente ∂D_{ρ_1} e non contenente z e in tale disco $D_{\rho_1} \sim 0$. Allora

$$-f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -f(z) 2\pi i = \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e quindi ora per il secondo passo usiamo la rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Sia ora $\zeta \in \partial D_{\rho_1}(a)$ e allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = -\frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} = -\frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a} \right)}$$

e poiché $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{\rho_1}{z - a} < 1$ abbiamo che la precedente

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n$$

converge uniformemente per $\zeta \in \partial D_{\rho_1}$ e quindi

$$-\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D_{\rho_1}} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta \right) \frac{1}{(z - a)^{n+1}}$$

da cui

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^{-(n+1)} = \dots$$

se ora $m := -(n+1)$ si ha che

$$\dots = \sum_{m=-1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta \right)}_{c_m} (z - a)^m$$

che è esattamente la forma promessa dal teorema per le potenze negative.

Consideriamo ora invece $\zeta \in \partial D_{\rho_2}(a)$ e allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)}$$

e come prima poiché $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| \leq \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1$ la precedente

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

converge uniformemente per $\zeta \in \partial D_{\rho_2}$ e quindi

$$\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right)}_{c_n} (z - a)^n$$

Infine poiché $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$ è olomorfa in Ω l'espressione dei coefficienti coincide con

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta$$

per ρ arbitrario con $r_1 < \rho < r_2$ e allora

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z - a)^m$$

□

Convergenza assoluta uniforme. La validità della convergenza dimostrata assicura automaticamente la convergenza assoluta uniforme sui compatti di Ω . Infatti: Per ipotesi

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - a)^m$$

converge per $|z - a| \in (r_1, r_2)$. Ne segue che il raggio di convergenza è almeno r_2 ; pertanto la serie converge assolutamente in modo uniforme nei compatti di $D_{r_2}(a)$ e quindi in particolare sui compatti di Ω .

Si ha inoltre che

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z - a)^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$$

con $\zeta = \frac{1}{z-a}$. L'ultima serie è una serie di potenze e converge per $|\zeta| \in (\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_1})$ con la convenzione $\frac{1}{0} = \infty$ e $\frac{1}{\infty} = 0$ e quindi il raggio di convergenza è $R \geq \frac{1}{r_1}$ per cui converge in modo assoluto uniforme sui dischi $\overline{D}_{\rho}(0)$ con $\rho < \frac{1}{r_1}$ cioè sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \rho\}$$

e quindi la serie $\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m$ converge in modo assoluto uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|z-a|} \leq \rho\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \frac{1}{\rho}\}$$

con $\frac{1}{\rho}$ un qualunque valore maggiore di r_1 . Quindi la convergenza è assoluta uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \gamma\} \quad \gamma > r_1$$

in particolare si ha convergenza assoluta uniforme sui compatti di Ω . \square

Unicità dei c_m . Mostriamo che se $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ sono tali che

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m, \quad z \in \Omega$$

allora, necessariamente sono dati dalla formula dell'enunciato. Fissiamo $\bar{m} \in \mathbb{Z}$ e calcoliamo

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz \stackrel{\text{conv. unif.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{(z-a)^m}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz$$

l'argomento dell'integrale è una potenza. Ha primitiva se $m - \bar{m} - 1 \neq -1$ e quindi tutti gli integrali della serie sono nulli tranne per $m - \bar{m} - 1 = -1$ ossia $m = \bar{m}$. Allora

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz = c_{\bar{m}} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i c_{\bar{m}}$$

e quindi

$$c_{\bar{m}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz$$

\square

Esempio 2.7. Sia $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Allora $z \neq 0$ e $z \neq 1$. Consideriamo i seguenti Ω_1 e Ω_2

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Consideriamo prima Ω_1 . Allora

$$-\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

che è lo sviluppo di Laurent di f in Ω_1

In Ω_2 si ha che

$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

Che è lo sviluppo di Laurent di f in Ω_2

Definizione 2.7: Sviluppo di Laurent relativo a un punto

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ con $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$. Lo sviluppo di cui al teorema precedente è detto **sviluppo in serie di Laurent** relativo al punto $z = a$ (non dipende da r)

Esercizio 2.1

Sia $f(z) = \frac{3}{iz^2 - z + 2i}$. Si calcoli:

- La serie di Laurent centrata in entrambi i punti in cui f non è definita.
- La serie di Taylor centrata in $z = 0$

Esercizio 2.2

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r(a))$ e $N \in \mathbb{N}$. Allora esiste unico $P_N(z - a)$ polinomio di grado al più N tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - P_N(z - a)}{(z - a)^N} = 0$$

Infatti il polinomio di Taylor di grado N soddisfa questa condizione

Dimostrazione. f è olomorfa, quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

e quindi

$$f(z) = P_N(z - a) + R_N(z - a) = P_N(z - a) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

$$R_N(z - a) = (z - a)^{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z - a)^{n-N-1}$$

per cui la serie dà luogo ad una funzione olomorfa g ; quindi

$$\frac{f(z) - P_N(z - a)}{(z - a)^N} = (z - a)g(z) \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow a$$

e P_N è l'unico con tale proprietà. Infatti se Q_N avesse la stessa proprietà, allora

$$\frac{P_N(z - a) - Q_N(z - a)}{(z - a)^N} = \frac{P_N - f + f - Q_N}{(z - a)^N}$$

Sia ad esempio $N = 2$, allora questo significa

$$\begin{aligned} P_N(z - a) &= a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 \\ Q_N(z - a) &= b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 \end{aligned}$$

Se ora $\frac{P_N - Q_N}{(z - a)^N} \rightarrow 0$ allora $P_N(0) = Q_N(0)$ da cui $a_0 = b_0$. Si può proseguire mostrando che allora $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e così via. \square

Esercizio 2.3

Calcolare il Polinomio di Taylor di grado 4 di

$$f(z) = e^z \sin(z)$$

relativamente a $z = 0$

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ e $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m$. Sia inoltre $\zeta = \frac{1}{z-a}$ e quindi

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$$

Sappiamo che (vedasi dimostrazione teorema sopra) tale serie ha raggio di convergenza $R \geq \frac{1}{r_1}$ e definisce pertanto una funzione $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dunque

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \text{ è olomorfa in } \mathbb{C} - \{a\}$$

Che motiva la seguente definizione

Definizione 2.8: Parte principale

La funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m$$

è detta parte principale dello sviluppo di Laurent di f relativo a $z = a$

Sappiamo che tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Proposizione 2.23. *La parte principale è l'unica funzione g tale che*

- $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$
- $g(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$
- $f - g$ è estendibile in modo olomorfo in un intorno di a

pezzettino di dim. Sappiamo che $g(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right)$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Inoltre $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \varphi(0) = 0$. Infine $(f - g)(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$ e il secondo membro definisce una funzione olomorfa in un intorno di a . \square

Unicità. \square

Definizione 2.9: Residuo

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ e sia $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m$ lo sviluppo di Laurent. Il valore c_{-1} è detto **residuo** di f in $z = a$

Definizione 2.10: Funzioni meromorfe

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto ed $E \subseteq \Omega$ un insieme chiuso e discreto (tutti i punti di E sono isolati).

Una funzione f si dice **meromorfa** in E se $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$ e per ogni $a \in E$ esiste $r > 0$ e due funzioni $h, g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ con $h \neq 0$ tali che

$$h \cdot f = g \quad \text{in } D_r(a)$$

Osservazione. Vorrei dire che f è rapporto di due funzioni olomorfe, ma non volendomi preoccupare della definizione dò invece tale definizione.

Sia f meromorfa in Ω come da definizione. Sia $a \in E$; poiché $h \not\equiv 0$

$$h(z) = c_N(z-a)^N + c_{N+1}(z-a)^{N+1} + \dots$$

con $c_N \neq 0$ e allora da $hf = g$ si ha

$$(z-a)^N \underbrace{(c_N + c_{N+1}(z-a) + \dots)}_{:=\psi(z)} f(z) = g(z)$$

con $\psi(a) = c_N$. In un intorno U di a si ha $\psi \neq 0$ e quindi

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N \psi(z)} \quad z \in U, z \neq a \quad (2.9)$$

Possiamo quindi dire che la condizione che f sia meromorfa in Ω è che nell'intorno di ogni $a \in E$ la funzione f è quoziente di due funzioni olomorfe, con denominatore nullo al più in a .

Osservazione. Ovviamente $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora f è meromorfa con $h \equiv 1$

Proposizione 2.24. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto ed $E \subseteq \Omega$ chiuso e discreto. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega - E)$. Allora f è meromorfa in Ω se e solo se per ogni $a \in E$ lo sviluppo di Laurent di f in a è “troncato a sinistra”.*

Dimostrazione. In (2.9) la funzione g/ψ è olomorfa in U e quindi la possiamo sviluppare in serie di Taylor di centro $z = a$ ottenendo

$$\frac{g(z)}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \implies f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^N} + \frac{a_1}{(z-a)^{N-1}} + \frac{a_2}{(z-a)^{N-2}} + \dots$$

in un opportuno intorno bucato di a . Per l'unicità dello sviluppo di Laurent di f in a , il precedente è lo sviluppo di Laurent di f in a . Evidentemente è “troncato a sinistra”.

Viceversa se f ha uno sviluppo come sopra allora

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-a)^N}}_{:=\frac{1}{h(z)}} \underbrace{(a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots)}_{:=\tilde{g}(z)}$$

con \tilde{h}, \tilde{g} olomorfe. Allora f è meromorfa. □

Teorema 2.25: Estensione di Riemann

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$$

Allora f è estendibile in modo olomorfo a tutto $D_r(a)$

Corollario 2.25.1. *Dal teorema si ricava che se $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ allora f è estendibile in modo olomorfo a $D_r(a)$ se e solo se f è limitata in un intorno di a*

Dimostrazione.

\implies ovvio perché l'estensione è continua in $z = a$

\impliedby Se f è limitata in un intorno di a allora $(z-a)f(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow a$ e quindi per il teorema f è estendibile

□

Dimostrazione del Teorema 2.5. Sia

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m$$

Dimostriamo che $c_m = 0$ per $m < 0$. Ricordando che c_m è dato da (2.8) si ha, prendendo ρ arbitrario, con $\rho \in (0, z)$

$$|c_m| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \partial D_\rho(a)} \frac{|f(z)|}{|(z-a)^{m+1}|} \cdot 2\pi\rho = \frac{1}{\rho^m} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \quad (2.10)$$

Per ipotesi fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \eta < \rho_\varepsilon, \quad \forall z \in D_\eta^*(a) \quad |(z-a)f(z)| < \varepsilon$$

in particolare per ogni $\rho < \rho_\varepsilon$ e per ogni $z \in \partial D_\rho^*(a)$

$$|(z-a)f(z)| < \varepsilon \implies \rho|f(z)| < \varepsilon \implies |f(z)| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$ e posto ρ_ε come sopra, si ha $\forall \rho < \rho_\varepsilon$, da (2.10) otteniamo

$$|c_m| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^m} \frac{1}{\rho}$$

e quindi per $m < 0$ si ha

$$m = -1 \implies |c_{-1}| \leq \varepsilon \text{ quindi per arbitrarietà di } \varepsilon \text{ } c_{-1} = 0$$

$$m < -1 \implies |c_m| \leq \varepsilon \rho^{-(m+1)} \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow 0 \implies c_m = 0$$

□

Definizione 2.11: Singolarità eliminabile

Se $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ è estendibile in modo olomorfo a tutto $D_r(a)$, si dice che $z = a$ è una singolarità **eliminabile**

Proposizione 2.26. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $E \subseteq \Omega$ chiuso e discreto. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega - E)$. Allora la funzione f è meromorfa se e solo se per ogni $a \in E$ vale una delle seguenti proprietà:

a) f è limitata in un intorno di a (singolarità eliminabile)

b) $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ (polo)

Dimostrazione. Sia $a \in E$. Se f è meromorfa, per la proposizione 2.24 in un intorno di a si ha

$$f(z) = c_{m_0}(z-a)^{m_0} + c_{m_0+1}(z-a)^{m_0+1} + \dots \quad m_0 \in \mathbb{Z}, \quad c_{m_0} \neq 0$$

ossia lo sviluppo è troncato a sinistra.

Se $m_0 \geq 0$ allora lo sviluppo dà una funzione olomorfa in un intorno di a , e quindi è verificato il caso (a), altrimenti $m_0 =: -N < 0$ e quindi

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \dots = \frac{1}{(z-a)^N} \underbrace{(c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots)}_{:=g(z)} \quad (2.11)$$

dove $g \in \mathcal{H}(U)$, con U intorno di a , e quindi necessariamente $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ che è la (b).

Viceversa, se (a) f è limitata in un intorno di a allora per il teorema 2.5 è estendibile in modo olomorfo anche in a ed è quindi olomorfa (dunque anche meromorfa) in un intorno di a . Se invece (b) $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ allora $\frac{1}{f}$ è definito in un intorno U di a ed è limitato in tale intorno. Allora per il teorema 2.5 esiste $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}(U)$ con $\tilde{\varphi} = \frac{1}{f}$ in $U \setminus \{a\}$ e dunque $\tilde{\varphi}f = 1$ in $U \setminus \{a\}$ ossia f è meromorfa. \square

Definizione 2.12: Polo

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ Si dice che $z = a$ è un **polo** se

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$$

In tal caso $f(z)$ è del tipo (2.11). Se $c_{-N} \neq 0$ si dice che $z = a$ è un polo di **ordine** N

Definizione 2.13: Singolarità essenziale

Se $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ ha sviluppo di Laurent con infiniti termini c_m con $m < 0$ si dice che $z = a$ è una singolarità **essenziale**

Esercizio 2.4

Mostrare che $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in $z = 0$

Teorema 2.27: Casorati-Weierstrass

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ con $z = a$ singolarità essenziale. Allora l'immagine di f è densa in \mathbb{C}

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che esista un $w \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ tali che

$$D_\rho(w) \cap f(D_r^*(a)) = \emptyset$$

Allora $\frac{1}{f-w}$ è ben definita in tutto $D_r^*(a)$ ed è limitata, dunque per il teorema 2.5 di estensione di Riemann, esiste $\varphi \in \mathcal{H}(D_r(a))$ con $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ se $z \neq a$. Ne segue che $f-w$ è meromorfa che è assurdo, perché f ha una singolarità essenziale \square

In realtà in particolare esiste un risultato ancora più sorprendente

Teorema 2.28: Grande Teorema di Picard

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ con a singolarità essenziale. Allora f assume ogni valore di \mathbb{C} , con al più un'eccezione, un numero infinito di volte.

Da questo teorema ne possiamo dedurre la versione “piccola”, ossia

Teorema 2.29: Piccolo Teorema di Picard

Una funzione olomorfa su \mathbb{C} che non sia un polinomio assume tutti i valori complessi con al più un eccezione un numero infinito di volte.

Dimostrazione. Se f è olomorfa su tutto \mathbb{C} allora $f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots$. Sia ora

$$\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots$$

allora $\zeta = 0$ è una singolarità essenziale perché f non è un polinomio. Si applica dunque il teorema precedente. \square

\mathbb{C} esteso. Indichiamo con $\hat{\mathbb{C}}$ l'estensione $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in cui gli intorni aperti di ∞ sono i complementari dei compatti di \mathbb{C} (∞ è visto come una sorta di “punto ad infinito”). È la compattificazione 1-punto. Geometricamente $\hat{\mathbb{C}}$ può essere visto come una sfera (detta **sfera di Riemann**) mediante la *proiezione stereografica*.

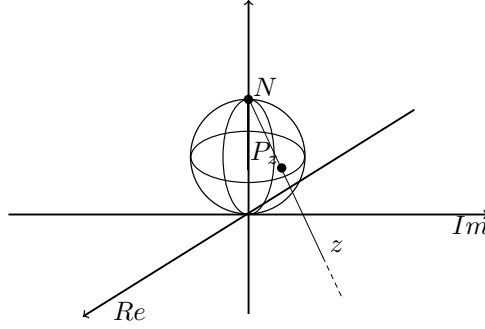


Figura 7: Sfera di Riemann

Ora possiamo estendere la nozione di singolarità a ∞ riconducendoci ai casi noti mediante la trasformazione $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}: z \mapsto \frac{1}{z}$ per $z \in \mathbb{C}$ e scambia ∞ e 0 .

Sia dunque f una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{1/r}(0)$. Allora la funzione $\tilde{f}(\zeta) = f(1/\zeta)$ è olomorfa in $D_r^*(0)$ e quindi possiamo studiare il tipo di singolarità che presenta in $\zeta = 0$

Definizione 2.14

Diciamo che f ha una singolarità eliminabile, un polo o una singolarità essenziale in $z = \infty$ se tale è la singolarità in $\zeta = 0$ di \tilde{f}

Consideriamo dunque lo sviluppo di Laurent di \tilde{f} relativo all'origine:

$$\tilde{f}(\zeta) = \dots + \tilde{c}_{-2}\zeta^{-2} + \tilde{c}_{-1}\zeta^{-1} + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1\zeta + \tilde{c}_2\zeta^2 + \dots \quad \forall \zeta \in D_r^*(0) \quad (2.12)$$

allora

$$f(z) = \dots + \tilde{c}_2z^{-2} + \tilde{c}_1z^{-1} + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_{-1}z + \tilde{c}_{-2}z^2 + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{1/r}(0)$$

Abbiamo visto che per una funzione olomorfa in un disco $D_R^*(a)$ nel calcolo dell'integrale lungo una circonferenza $\partial D_\rho(a)$ l'unico termine dello sviluppo di Laurent che non ha contribuito nullo è il termine c_{-1} . Ricordiamo che in tali casi la circonferenza è orientata in senso antiorario, lasciando la singolarità sempre alla sinistra. Ne consegue che necessariamente per lasciare la singolarità a sinistra, se la singolarità è ∞ è necessario percorrere la circonferenza in senso orario. Integrando per serie la serie di Laurent di f otteniamo

$$\int_{-\partial D_\rho(0)} f(z) dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{-m} \int_{-\partial D_\rho(0)} z^{-m} dz = -2\pi i \tilde{c}_1 \quad \text{per } \rho > \frac{1}{r}$$

Il che motiva dunque la seguente definizione:

Definizione 2.15: Residuo in ∞

Sia f olomorfa all'esterno di un disco $\overline{D}_{1/r}(0)$ e sia 2.12 lo sviluppo di Laurent di $\tilde{f} : \zeta \mapsto f(\frac{1}{\zeta})$ relativo al punto $\zeta = 0$. Chiamiamo **residuo** di f in ∞ il valore

$$\text{Res}(f, \infty) = -\tilde{c}_1$$

2.6 Residui

Nel calcolo dei residui di una funzione possono essere utili le seguenti osservazioni

Proposizione 2.30. Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ della forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (z \neq a)$$

con $g, h \in \mathcal{H}(D_r(a))$, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ e $h'(a) \neq 0$. Allora $z = a$ è un polo del primo ordine per f e

$$\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

Dimostrazione. Lo sviluppo di h in a è

$$\begin{aligned} h(z) &= h'(a)(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots = \\ &= (z-a) \underbrace{(h'(a) + a_2(z-a) + \dots)}_{=: \varphi(z)} \end{aligned}$$

allora $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)\varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{z-a}$ con ψ olomorfa in un intorno di $z = a$ e $\psi(a) = g(a)/h'(a)$. Se ora

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(a) + \varphi'(a)(z-a) + \dots \implies \\ \implies f(z) &= \frac{\varphi(a)}{z-a} + \varphi'(a) + \dots \end{aligned}$$

e quindi $z = a$ è un polo del primo ordine per f con residuo $\psi(a)$ □

Esercizio 2.5

Sia $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Calcolare il residuo in $z = i$

Operando come nella proposizione 2.30 si ha $g(z) = z$, $h(z) = z^2 + 1$ e effettivamente abbiamo $g(i) = i \neq 0$, $h(i) = i^2 + 1 = 0$ e $h'(i) = 2i \neq 0$ e quindi il residuo è

$$\text{Res}(f, i) = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$$

Il risultato della proposizione 2.30 si può generalizzare a poli di ordine superiore

Proposizione 2.31. Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$. Allora $z = a$ è polo di ordine k se e solo se

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = l \neq 0$$

e in tal caso il residuo è

$$\text{Res}(f, a) = \frac{\phi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \quad \varphi(z) := (z-a)^k f(z)$$

Dimostrazione. Ripercorriamo la dimostrazione del caso $k = 1$: se $z = a$ è un polo di ordine k allora

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

con $c_{-k} \neq 0$ e quindi $(z-a)^k f(z) \rightarrow c_{-k} \neq 0$. In tal caso allora

$$\phi(z) := (z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \dots$$

e quindi il residuo $\text{Res}(f, a)$ è il coefficiente di $(z-a)^{k-1}$ nello sviluppo di Taylor di ϕ in a , ossia

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{\phi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

Viceversa se $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = l \neq 0$ allora $(z-a)\phi(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow a$ allora è estensibile, con $\phi(a) \neq 0$ e quindi

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^k} \quad \text{e quindi } z = a \text{ è un polo di ordine } k$$

□

Esercizio 2.6

Sia $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$. Calcolare il residuo in $z = 0$

Esercizio 2.7

Calcolare i residui di f nei poli, nel caso delle funzioni

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} - e^z}{z^2 - 1}, \quad \frac{1}{\sin^3 z}$$

2.7 Indice di avvolgimento

Logaritmo non è una funzione di per se su \mathbb{C} , infatti la funzione esponenziale $z \mapsto e^z$ è suriettiva ma non iniettiva. Infatti dato $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cerchiamo un $z \in \mathbb{C}$ tale che $e^z = w$. Se $w = re^{i\theta}$ e $z = x + iy$ allora

$$e^{x+iy} = re^{i\theta} \implies \begin{cases} e^x = r \\ e^{iy} = e^{i\theta} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \log r \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

quindi abbiamo $\exp^{-1}(re^{i\theta}) = \{\log r + i(\theta + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$. Evidentemente quindi risulta difficile definire una funzione logaritmo. Possiamo dunque limitarne il dominio

Definizione 2.16: Logaritmo principale

Diciamo **logaritmo principale** la funzione $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$z = re^{i\theta} \mapsto \log r + i\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

Il motivo per cui non si definisce sul semiasse negativo è per evitare la discontinuità. Vorremmo infatti che tale funzione fosse olomorfa. Lo è. Mostriamo infatti

che $\log z$ è una primitiva di $\frac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. $\frac{1}{z}$ è olomorfa su $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ che è semplicemente connesso, dunque ha primitiva, data da:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

dove γ_z è una curva da z_0 a z . In particolare, la definiamo come in figura 8 e allora

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_1^r \frac{1}{\rho} d\rho + r \int_0^\theta e^{i\theta} d\theta = \log z + c$$

Quindi la funzione $f(z) = \log(1+z)$ è definita in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ e quindi in partico-

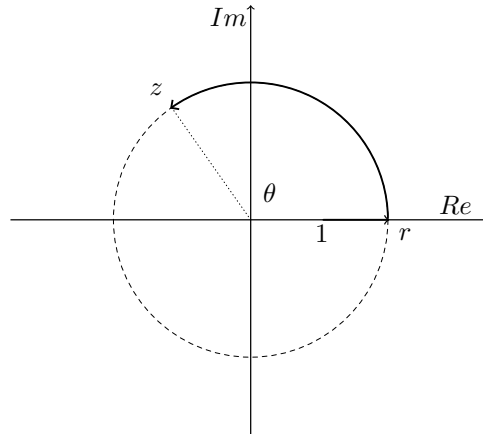


Figura 8: Curva γ usata per mostrare che $\log z$ è primitiva di $\frac{1}{z}$, in questa figura $z = re^{i\theta}$

lare è definita in 0. Consideriamo dunque lo sviluppo di f in $z = 0$. Per determinare i coefficienti abbiamo due modi: facendo come al solito e calcolando tutte le derivate $f^{(n)}(0)$ oppure oppure sfruttando la primitiva trovata sopra. Infatti

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \stackrel{|z|<1}{=} 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

e sappiamo però che, se $f(z) = c_0 + c_1(z) + c_2z^2 + \dots$ allora la serie derivata $f'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \dots$ e per confronto abbiamo quindi (poiché $c_0 = f(0) = \log(1) = 0$)

$$f(z) = \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Osservazione. Notare che abbiamo usato l'accortezza di confrontare con la serie derivata, invece che "integrare". Infatti in \mathbb{C} dovremmo specificare una curva ecc è un po' strano dire "integrando la serie". Tuttavia così ha senso.

Risulta, in particolare

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Quanto abbiamo detto sul logaritmo principale diventa problematico se abbiamo un $\Omega \not\subseteq \mathbb{C}^2 \setminus (-\infty, 0]$. Si consideri l'esempio della figura 9 e anche nel caso di Ω brutto siamo riusciti a trovare una funzione \log che è inversa di e^z in Ω . Questo è più generale:

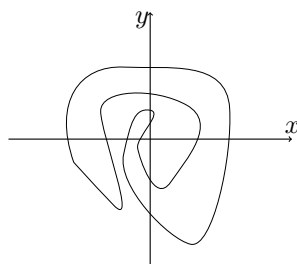


Figura 9: Omega brutto

Teorema 2.32

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mai nulla. Allora esiste $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che

$$e^g = f$$

Tale g è univocamente individuata a meno di una costante additiva della forma $2k\pi i$

Idea (illuminazione) (intuito): $g = \log f$ allora $g' = f'/f$

Dimostrazione. $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω semplicemente connesso, e allora ammette primitiva ϕ , con $\phi' = f'/f$. Consideriamo

$$\frac{d}{dz}(fe^{-\phi}) = f'e^{-\phi} - fe^{-\phi}\phi' = 0$$

quindi $fe^{-\phi} =: e^c$ è costante su Ω e mai nulla. Ma allora $f = e^{\phi+c}$ e dunque $\phi + c$ è la funzione g di cui nell'enunciato.

Per l'unicità, se g_1 e g_2 sono tali che

$$e^{g_1} = f = e^{g_2}$$

allora $e^{g_1 - g_2} = 1$ e dunque $g_1(z) - g_2(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ ma poiché $g_1 - g_2$ è continua e Ω è connesso, deve essere costante, esiste dunque un $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\forall z \in \Omega, \quad g_1(z) - g_2(z) = 2k\pi i$$

□

Definizione 2.17: Ramo del logaritmo

Ogni g di cui al teorema precedente è detta **determinazione** o **ramo** di $\log f$ in Ω

Siano Ω e f come sopra; sia γ una curva in Ω con punto iniziale z_0 e terminale z_1 . Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \stackrel{*}{=} g(z_1) - g(z_0)$$

dove in \star abbiamo preso g una determinazione di $\log f$ in Ω . Allora ne segue

$$\exp \left(\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = e^{g(z_1) - g(z_0)} = \frac{e^{g(z_1)}}{e^{g(z_0)}} = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}$$

Tale risultato continua a sussistere anche se Ω **non** è semplicemente connesso, ossia vale il teorema

Teorema 2.33

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mai nulla. Sia γ una curva in \mathbb{C} con punto iniziale z_0 e punto terminale z_1 . Allora

$$\exp \left(\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}$$

Corollario 2.33.1. Siano Ω, f come sopra, sia γ una curva chiusa in Ω . Allora

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. Se γ è chiusa nel teorema si ha

$$\exp \left(\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = 1$$

□

Caso particolare: Sia $a \in \mathbb{C}$ e sia γ una curva chiusa che non passa per a . Sia $f(z) = z - a$, con $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} =: \Omega$ (notare Ω non semplicemente connesso). Allora per il corollario 2.33.1

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = k \in \mathbb{Z}$$

Definizione 2.18: Indice di avvolgimento

Siano γ e a come sopra. Il valore (intero)

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

è detto **indice di avvolgimento** di γ rispetto al punto a

Valgono alcune proprietà:

- $n(\gamma; \cdot)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} - \gamma$, infatti la funzione $a \mapsto n(\gamma; a)$ è continua ed ha valori in \mathbb{Z} .
- $n(\gamma; \cdot)$ è nullo su Ω_{∞} , infatti sia D un disco contenente γ e sia $a \notin \overline{D}$. Allora

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = 0 \text{ perché } z \mapsto \frac{1}{z - a} \in \mathcal{H}(D)$$

2.8 Teorema dei residui**Teorema 2.34**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Sia E un sottoinsieme chiuso e discreto di Ω . Sia γ una curva chiusa in $\Omega \setminus E$ che sia omotopa a una costante come curva in Ω .

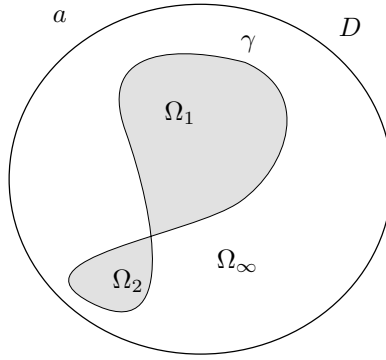


Figura 10: Indice di avvolgimento

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$. Allora l'insieme $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\}$ è finito e

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{a \in E} n(\gamma, a) \text{Res}(f, a)$$

Dimostrazione.

□

Esercizio 2.8

Sia $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione Γ di Eulero. Ricordiamo che Γ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ e che $\Gamma(1) = 1$ e $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, sia $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\gamma_n = \begin{cases} x_1(t) + i \cos(\pi x_1(t)) & t \in [0, 1/2] \\ x_2(t) - i \cos(\pi x_2(t)) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

con $x_1(t) = \frac{1}{2} - 2nt$ e $x_2(t) = x_1(1-t)$.

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \Gamma$$

Notare che

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Infatti per $n=0$ è banale e il passo induttivo è ovvio moltiplicando numeratore e denominatore per $z+n+1$. Allora abbiamo, per $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\Gamma, -n) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \Big|_{z=-n} = \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\dots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ora basti notare che la funzione γ_n non è altro che una curva che avvolge una volta i poli pari in senso antiorario e i poli dispari in senso orario, per $k=0, -1, \dots, -n$. Allora, per il teorema dei residui (2.8)

$$\int_{\gamma_n} \Gamma = 2\pi i \sum_{k=0}^{-n} (-1)^k \cdot \frac{(-1)^k}{(-k)!} = 2\pi i \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi e$$

Teorema 2.35

Sia g olomorfa ad eccezione di un numero finito di punti, su un aperto contenente

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$$

Nessuna delle singolarità sia sull'asse reale. Sia

$$f(z) = e^{i\omega z} g(z)$$

con $\omega \in \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0; \quad \omega > 0$$

Allora f è integrabile su \mathbb{R} e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im(a) > 0} \text{Res}(f, a)$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R, S \rightarrow +\infty} \int_{-S}^R$$

Fissiamo $R, S > 0$. Fissato poi $M > 0$ consideriamo la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ in figura 11

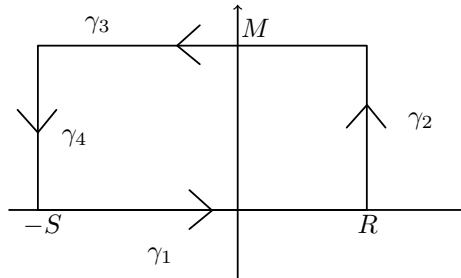


Figura 11: Costruzione della curva γ

Fissato $\varepsilon > 0$ sia R_ε tale che

$$\forall R, S, M \geq R_\varepsilon, \quad |g(z)| \leq \varepsilon$$

e le singolarità di g siano all'interno del rettangolo. Allora

$$\int_{\gamma} e^{i\omega z} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\Im(a) > 0} \text{Res}(f, a)$$

Il primo membro è uguale a

$$\int_{-S}^R e^{i\omega x} g(x) dx + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

Consideriamo

$$\int_{\gamma_2} e^{i\omega z} g(z) dz \stackrel{z=R+it}{=} \int_0^M e^{i\omega(R+it)} g(R+it) i dt =: I_2$$

$$|I_2| \leq \varepsilon \int_0^M |e^{i\omega R}| e^{-\omega t} dt = \varepsilon \left[-\frac{1}{\omega} e^{-\omega t} \right]_0^M = \frac{\varepsilon}{\omega} (1 - e^{-\omega M}) \leq \frac{\varepsilon}{\omega}$$

qualunque sia $M > 0$. Analogamente abbiamo anche che $\left| \int_{\gamma_4} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\omega}$

Per γ_3 abbiamo invece

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} e^{i\omega z} g(z) dz &\stackrel{z=t+Mi}{=} \int_R^{-S} e^{i\omega(t+Mi)} g(t+Mi) dt =: I_3 \\ |I_3| &\leq \varepsilon \int_{-S}^R e^{-\omega M} dt = \varepsilon e^{-\omega M} (R+S) \end{aligned}$$

Fissati R e S si prenda quindi M tale che

$$\left| \int_{\gamma_3} \right| \leq \varepsilon$$

Allora possiamo concludere perché

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists R_\varepsilon : \forall R, S \geq R_\varepsilon \quad \left| \int_{-S}^R e^{i\omega x} g(x) dx - 2\pi i \sum_{\Im(a)>0} \text{Res}(f, a) \right| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{\omega} + \varepsilon$$

□

Esercizio 2.9

Si calcoli l'integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx \quad \gamma, \omega > 0$$

e poi per $\omega < 0$

Esercizio 2.10

Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Si osserva che

$$I = \Im(J), \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$g(z) = \frac{z^3}{(z^2 + 1)^2} \quad z_0 = i, \quad z_1 = -i$$

Allora z_0 e z_1 sono poli del secondo ordine poiché

$$\varphi(z) = (z - i)^2 f(z) = e^{iz} \frac{z^3}{(z + i)^2} \rightarrow e^{-1} \frac{-i}{-4} \neq 0$$

e quindi il residuo è

$$\text{Res}(f, i) = \varphi'(i) = \frac{1}{4e} \implies J = 2\pi i \cdot \frac{1}{4e} \implies I = \Im(J) = \frac{\pi}{2e}$$

Singolarità sull'asse reale Per gli integrali impropri richiamiamo che se $\xi \in (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora si dice che l'integrale

$\int_a^b f dx$ è convergente se esiste finito

$$\lim_{\varepsilon, \sigma \rightarrow 0} \int_{[a, b] \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \sigma)} f(x) dx$$

(Analogamente per gli integrali impropri verso $\pm\infty$ con gli intorno di $\pm\infty$ e con $f : \mathbb{R} \setminus (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$)

Definizione 2.19: Valor principale

Si dice che f è **integrabile in valor principale** su $[a, b]$ se esiste finito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[a, b] \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)} f(x) dx =: p.v. \int_a^b f(x) dx$$

Esempio 2.8. Per $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ allora

$$p.v. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = 0$$

Scriveremo anche

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

se f è integrabile in un intorno di $\pm\infty$ e presenta singolarità al finito considerate in valor principale.

Teorema 2.36

Sia f olomorfa, ad eccezione di un numero finito di singolarità, in un intorno di H . Le singolarità sull'asse reale siano poli semplici. Supponiamo che valga una o l'altra delle seguenti condizioni (vedi teoremi precedenti)

- Esista $p > 1$ tale che

$$\limsup_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in M}} |z|^p |f(z)| < +\infty$$

- Esistano $\omega > 0$ e g (con le stesse singolarità di f) tali che

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in H}} g(z) = 0, \quad f(z) = e^{i\omega z} g(z)$$

Allora f è integrabile (in valor principale) su R e

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im(a) > 0} \text{Res}(f, a) + \pi i \sum_{\Im(a) = 0} \text{Res}(f, a)$$

Dimostrazione. La dimostrazione ripercorre ciascuna delle due precedenti, “isolando” le singolarità sull'asse reale. Siano ad esempio valide le prime ipotesi. Allora Sia $R > \max_{z \in \text{sing.}} |z|$ e consideriamo la curva $\gamma = \eta_1 + \gamma_\varepsilon + \eta_2 + \gamma_R$. Allora come nella dimostrazione precedente abbiamo

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^p} \pi R \rightarrow 0, \text{ per } R \rightarrow \infty$$

Per quanto riguarda γ_ε abbiamo

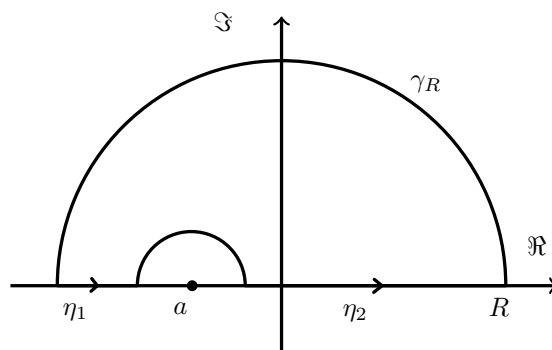


Figura 12: curva dim teo3

$$-\gamma_\varepsilon(\theta) = a + \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Consideriamo lo sviluppo di Laurent di f relativo a a :

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z) \quad (\text{polo semplice})$$

dove h è olomorfa in un intorno di a . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{z-a} dz + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} h(z) dz}_{\rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ (} h \text{ limitato in un intorno di } a)} \\ &= - \int_0^\pi \frac{c_{-1}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -i\pi \text{Res}(f, a) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \underbrace{\int_{\gamma_R} dz}_{\rightarrow 0}$$

Infine possiamo concludere

$$\begin{aligned} \left| \int_{[-R, R] \setminus (a-\varepsilon, a+\varepsilon)} f(x) dx - 2\pi i \sum_{\Im(\xi) > 0} \text{Res}(f, \xi) - \pi i \text{Res}(f, a) \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_{\gamma_R} \right| + \left| \int_{\gamma_\varepsilon} f + \pi i \text{Res}(f, a) \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Esercizio 2.11

Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad [\pi \text{ entrambi}]$$

2.9 Altri risultati

Teorema 2.37: Prolungamento analitico

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e f olomorfa su Ω . Se esiste $U \subseteq \Omega$ aperto tale che $f \equiv 0$ su U allora $f \equiv 0$ su Ω .

Dimostrazione. Consideriamo $E_n = \{f^{(n)} = 0\}$ con $n = 0, 1, \dots$. Allora $E = \bigcap_n E_n$. E è chiuso in quanto intersezione di chiusi. Vogliamo mostrare che è anche aperto. Sia $a \in E \subseteq \Omega$, sviluppiamo f intorno a a e abbiamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in D_r(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

per r opportuno, con $D_r(a) \subseteq \Omega$. Quindi poiché $a \in E$ risulta $c_n = 0$ per ogni n quindi $f \equiv 0$ in $D_r(a)$. Allora $D_r(a) \subseteq E$ e quindi E è aperto.

Infine poiché Ω è connesso e $E \neq \emptyset$ ne consegue necessariamente che $E = \Omega$ \square

Corollario 2.37.1. Sia $0 \neq f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con Ω connesso. Allora l'insieme degli zeri di f è un insieme chiuso in Ω e discreto.

Dimostrazione. Sia $f(a) = 0$: mostriamo che $z = a$ è uno zero isolato. Sia $D_r(a)$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in D_r(a)$$

Se $c_n = 0$ per ogni n allora $f \equiv 0$ su $D_r(a)$: per il teorema 2.9 quindi $f \equiv 0$ su Ω , che è escluso.

Sia quindi $N = \min\{n : c_n \neq 0\}$ e si ha che

$$f(z) = c_N (z-a)^N + c_{N+1} (z-a)^{N+1} + \dots = (z-a)^N g(z)$$

con $g(a) = c_N \neq 0$. Quindi in un opportuno intorno di a , f si annulla solamente in a . \square

Corollario 2.37.2. Siano $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con Ω aperto connesso. Se $\{f = g\}$ ha un punto di accumulazione in Ω allora $f \equiv g$ in Ω

Dimostrazione. Si applichi il corollario 2.37.1 a $f - g$ \square

Esempio 2.9. Consideriamo $f = z \mapsto e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora f è l'unica estensione olomorfa di $x \mapsto e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Analogamente per le funzioni trigonometriche.

Così pure si possono estendere a tutto \mathbb{C} alcune formule. Infatti se, ad esempio $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ su tutto $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, che ha punti di accumulazione, allora l'uguaglianza vale su tutto \mathbb{C}

Teorema 2.38

Ogni funzione olomorfa non costante su un aperto connesso è un'applicazione aperta

Da cui segue il seguente teorema

Teorema 2.39: del massimo modulo

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se f non è costante allora $|f|$ non può avere punti di massimo in Ω

Dimostrazione. Sia $z \in \Omega$, vogliamo mostrare che non può essere un punto di massimo. Sia $w = f(z)$. Sia $D_r(z) \subseteq \Omega$. Allora $f(D_r(z))$ è un aperto contenente $f(z) = w$. Esiste $w' \in f(D_r(z))$ (quindi $w' = f(z')$) tale che $|w'| > |w|$ cioè $|f(z')| > |f(z)|$. Allora z non può essere punto di massimo per $|f|$ \square

Corollario 2.39.1. Sia Ω aperto connesso e **limitato**. Sia $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continue con $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Allora

$$\sup_{\Omega} |f| = \max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f| \quad (2.13)$$

Osservazione. Come ricordare il tutto: è chiaro, vogliamo dire che il massimo “non c’è perché è sul bordo”. Per farlo dobbiamo definire la funzione su $\overline{\Omega}$, aggiungendo come ipotesi la continuità e per avere il massimo dobbiamo richiedere la limitatezza di Ω . Infine poiché il massimo non può essere in Ω deve essere sul bordo.

Dimostrazione. Se f è costante valgono le uguaglianze.

Altrimenti: i punti di massimo di $|f|$ su $\overline{\Omega}$ (che esistono per Weierstrass) devono essere su $\partial\Omega$, altrimenti sarebbero massimo per $|f|$ in Ω . Quindi

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

Del resto se $z_M \in \partial\Omega$ è di massimo per $|f|$ su $\overline{\Omega}$ e $z_k \rightarrow z_M$ con $z_k \in \Omega$, allora

$$\sup_{\Omega} |f| \geq |f(z_k)| \rightarrow |f(z_M)| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

\square

Teorema 2.40

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora

- i) Se f è iniettiva allora f' non si annulla mai. Quindi posto $G = f(\Omega)$ si ha che G è aperto, $f : \Omega \rightarrow G$ è biettiva. Allora $f^{-1} : G \rightarrow \Omega$ è olomorfa e

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{con } w = f(z)$$

- ii) Se $a \in \Omega$ è tale che $f'(a) \neq 0$ allora f è localmente iniettiva, quindi localmente invertibile.

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e prendiamo un punto $a \in \Omega$. Consideriamo la curva $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \Omega$ con $\gamma(0) = a$ e consideriamo la curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Sia $v = \gamma'(0)$ allora

$$\gamma'(0) = f'(\gamma(0))\gamma'(0) = f'(a)v$$

dove l’ultimo dipende solo da f, a (e v) ma non dalla curva.

Sia $0 \neq f'(a) = re^{i\theta}$. Allora $\gamma'(0)$ si ottiene da v per rotazione dell’angolo θ (e dilatazione di fattore r). Quindi se $f'(a) \neq 0$ e γ, η sono curve che si tagliano in a secondo l’angolo α , anche le immagini si tagliano in $f(a)$ con secondo α . Tale proprietà geometrica è chiamata **conformità**.

Definizione 2.20: Applicazione conforme

Un’applicazione $f : \Omega \rightarrow G$ con $\Omega, G \subseteq \mathbb{C}$ aperti che sia olomorfa e biettiva (quindi con anche f^{-1} olomorfa) è detta applicazione conforme (biolomorfismo)

Esempio 2.10. La funzione $f = z \mapsto e^z : \{x + iy : |y| < \pi\} \rightarrow G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ è conforme. In particolare ha inversa il logaritmo principale

$$\log z = \log \rho + i\theta \quad \text{con } z = \rho e^{i\theta}$$

Esempio 2.11. $f(z) = \frac{i-z}{i+z}$ con $z \neq -i$. Allora $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Mostriamo che è biettiva. Sia $\zeta \neq -1$ e cerchiamo z tale che $f(z) = \zeta$

$$\frac{i-z}{i+z} = \zeta \iff i-z = i\zeta + z\zeta \iff z = i \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = f^{-1}(\zeta)$$

Sia $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ e $D = D_1(0)$. Allora mostriamo che $f : H^+ \rightarrow D$ è biettiva. Questo segue da

$$|f(z)| = \frac{|i-z|}{|i+z|} = \frac{d(z, i)}{d(z, -i)}$$

e dunque $|f(z)| < 1 \iff z \in H^+$

Lemma 2.41: Schwartz

Sia $f : D \rightarrow D$ con $f(0) = 0$. Allora

- a. $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in D$; inoltre se esiste $z_0 \neq 0$ con $|f(z_0)| = |z_0|$. Allora f è una rotazione
- b. $|f'(0)| \leq 1$ e se $|f'(0)| = 1$ allora f è una rotazione

Dimostrazione. a. Sia $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ con $z \neq 0$. Allora per il teorema di estensione di Riemann 2.5 g è olomorfa anche in $z = 0$ con $g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$. Dunque $g \in \mathcal{H}(D)$.

Sia $r \in (0, 1)$ e $z \in \partial D_r(0)$ allora

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

e per il principio del massimo modulo 2.9 si ha che $|g| \leq \frac{1}{r}$ su $D_r(0)$. Per $r \rightarrow 1$ si ha $|g(z)| \leq 1$ su D cioè $|f(z)| \leq |z|$ su D .

Se esiste $z_0 \neq 0$ con $|f(z_0)| = |z_0|$ cioè $|g(z_0)| = 1$ allora per il principio del massimo modulo si ha che $|g| = c$ e dunque $g(z) = e^{i\theta}$ per cui $f(z) = e^{i\theta}z$ cioè f è una rotazione

- b. $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$. Se $|f'(0)| = 1$ allora $|g(0)| = 1$, come prima.

□

Teorema 2.42

Gli automorfismi di D sono tutte e sole le applicazioni della forma

$$f(z) = e^{i\theta} \psi_w(z) \quad \text{con } \psi_w(z) = \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$$

Dimostrazione. Sia $f : D \rightarrow D$ biettiva e olomorfa. Definiamo $\psi_w : D \rightarrow D$ biettiva e olomorfa come una funzione tale che $\varphi_w(0) = w = f^{-1}(0)$ una possibile funzione è $\psi_w(z) = \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$ (si verifichi). Allora abbiamo che $h = f \circ \psi_w$ fissa l'origine. Appliciamo 2.9 a h e otteniamo che h è una rotazione. Ne consegue la tesi □

Le precedenti sono casi particolari delle **trasformazioni di Möbius** che sono della forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

che hanno proprietà interessanti

Teorema 2.43: Mappa conforme di Riemann

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso e diverso da \mathbb{C} . Fissato $z_0 \in \Omega$ esiste $f : \Omega \rightarrow D$ **conforme** tali che $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) \in \mathbb{R}$

3 Richiamo delle forme differenziali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Una forma differenziale su Ω è un'espressione formale della forma

$$\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

con $A, B \in C^0(\Omega)$. Più precisamente ω è una funzione continua $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)'$. Se γ è una curva C^1 a tratti in Ω , $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, allora

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)dt \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Definizione 3.1: Forma esatta

La forma differenziale ω si dice **esatta** se esiste $F \in C^1(\Omega)$ tale che $\omega = dF$, e F è detta *primitiva* di ω

Se ω è C^1 (cioè $A, B \in C^1$) allora, se è esatta, ossia $\frac{\partial F}{\partial x} = A$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = B$ risulta

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (3.1)$$

Definizione 3.2: Forma chiusa

Se ω è una forma differenziale C^1 e soddisfa (3.1) allora si dice **chiusa**

Teorema 3.1

Sia Ω connesso. Allora

$$\omega \text{ esatta} \iff \int_{\gamma} \omega = 0 \text{ per ogni } \gamma \text{ in } \Omega \text{ chiusa}$$

idea di dimostrazione.

\implies semplice

\impliedby Fissiamo $(x_0, y_0) \in \Omega$. Definiamo ora

$$F(x, y) = \int_{\gamma(x, y)} \omega$$

dove $\gamma_{x, y}$ è una qualunque curva in Ω che unisce (x_0, y_0) a (x, y) . La definizione è ben posta perché se $\gamma_{(x, y)}$ e $\tilde{\gamma}_{(x, y)}$ sono due tali curve allora

$$0 = \int_{\gamma_{(x, y)} - \tilde{\gamma}_{(x, y)}} \omega = \int_{\gamma_{(x, y)}} \omega - \int_{\tilde{\gamma}_{(x, y)}} \omega$$

La dimostrazione procede dimostrando che $dF = \omega$

□

Teorema 3.2

Sia Ω connesso e ω **chiusa**. Allora se γ_0 e γ_1 sono curve chiuse C^1 a tratti

omotope in Ω allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Osservazione. Il teorema vale anche per curve non necessariamente chiuse purché siano omotope mediante un'omotopia che fissa gli estremi.

Corollario 3.2.1. *Sia Ω semplicemente connesso e ω chiusa. Allora ω è esatta.*

Dimostrazione. Se Ω è semplicemente connesso ogni curva chiusa è omotopa a costante 0 e quindi $\int_{\gamma} \omega = 0$, ossia ω è esatta \square