Appunti di Algebra Superiore

Github Repository: Oxke/appunti/AlgebraSuperiore

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)

0.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 0.1.1: Anello

Un **anello** $A, +, \cdot$ è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide $A, \cdot$ (cn 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + ac \quad ; \quad (b+c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione $\cdot$ è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 0.1.1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 0.1.2. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 0.1.3 (Anello Banale)**.** L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 0.1.4 (Non comm.)**.** A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dai l'anello banale non esiste davvero)

Esempio 0.1.5. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\mathrm{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ e $\cdot$ dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\mathrm{Hom(G', G)}$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G.

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 0.1.2: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ($aa' = 1$).
a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile $\iff$ invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$(a'a)a'' = a'(aa'')$$
$$1a'' = a'' = a' = a'1$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \smallsetminus \{0\}$

Definizione 0.1.3: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \smallsetminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 0.1.4: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \smallsetminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ ($a'a = 0$)

Osservazione. Divisore di zero a sinistra: $aa' = 0$. Invertibile a sinistra: $a'a = 1$

Definizione 0.1.5: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 0.1.6. I campi, $\mathbb{Z}$, se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall\, 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

Definizione 0.1.6: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 0.1.7. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 0.1.8. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 0.1.7: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I,+) < (A,+)$ e $ab \in I$ $(ba \in I)$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.
Un **ideale** bilatero è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 0.1.9. Gli ideali in $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \varnothing$$

quindi A con divisione $\implies$ gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 0.1.8: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op}, con $(A^{op},+) := (A,+)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 0.1.1 (Anello Quoziente)**.** *Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I,+$ è un anello con prodotto $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$, dove $\overline{a} := a + I \in A/I$*

Definizione 0.1.9: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \to B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

i) $f(a + a') = f(a) + f(a')$

ii) $f(aa') = f(a)f(a')$

iii) $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \to A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f' = \mathrm{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 0.1.2. *Se $f : A \to B$ è un omomorfismo allora*

1. *$A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.*
2. *$B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello*
3. *$J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\mathrm{Ker} f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale*
4. *f **suriettivo** e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale*

Osservazione. $f : A \to B$ è iniettivo $\iff \mathrm{Ker} f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \mathrm{Im} f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 0.1.3: Omomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \mathrm{Ker} f$. Allora

$$\exists! \overline{f} : A/I \to B \text{ omomorfismo tale che } \overline{f}(\overline{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/I \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre $\text{im}\overline{f} = \text{im}f$ e $\text{Ker}\overline{f} = \text{Ker}f/I$

Proposizione 0.1.4. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 0.1.5: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, allora $\text{im}f \cong A/\text{Ker}f$

Definizione 0.1.10: Ideale massimale (sinistro / destro)

Un ideale J (sinistro/destro) di A è massimale se $\forall I$ ideale (sinistro/destro) tale che $J \subseteq I \subseteq A$, allora $I = J$ o $I = A$

Osservazione. Esiste sempre un ideale (sinistro/destro) massimale (*lemma di Zorn*)

Definizione 0.1.11

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i b_i : n \in N, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 0.1.12: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è principale.

Esempio 0.1.10. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 0.1.11. $\mathbb{Z}$ (con ideali $nZ = (n)$)

Esempio 0.1.12. $K[X]$ con K campo

0.2 Richiami sui Moduli

Definizione 0.2.1: A-modulo

Un A-modulo (di default sinistro) M è un gruppo abeliano $(M, +)$ con una moltiplicazione per scalare definita da

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \in M \end{aligned}$$

e tale che, $\forall a, b \in A$ e $\forall x, y \in M$:

1) $a(x+y) = ax + ay$

2) $(a+b)x = ax + bx$

3) $(ab)x = a(bx)$

4) $1x = x$

Osservazione. Se $\mathbb{K}$ è un campo, allora un $\mathbb{K}$-modulo è uno spazio vettoriale.

Osservazione. Se $(M, +)$ è un gruppo abeliano, data $f : A \times M \to M$ posso definire $\alpha : A \to M^M$ come $\alpha(a) = (x \mapsto ax)$, e quindi le proprietà precedenti si traducono in

1. $\alpha(a)(x+y) = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$ e dunque $\alpha(a)$ è omomorfismo di gruppi, dunque $\alpha(A) \subseteq \mathrm{End}(M)$
2. $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ dunque $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di gruppi
3. $\alpha(a) \circ \alpha(b) = \alpha(ab)$
4. $\alpha(1) = \mathrm{id}_M$

Dalla 2,3,4 $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di anelli.

Teorema 0.2.1: Secondo teorema di isomorfismo

Sia M un modulo, con $M', M'' \subseteq M$ sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

Dimostrazione. Si prenda $f : M' \to (M' + M'')/M''$ composizione dell'inclusione di M' in $M' + M''$ e della proiezione a quoziente, dunque è un omomorfismo.

Allora $\mathrm{Ker} f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$.

Preso $y \in (M' + M'')/M''$, $y = x' + x'' + M'' = x' + M'' = f(x')$ dunque f è suriettiva. Dal primo teorema di isomorfismo segue la tesi. □

Teorema 0.2.2: Terzo teorema di isomorfismo

Dati $M'' \subseteq M' \subseteq M$ sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M'$$

Dimostrazione. Sia f la composizione delle due proiezioni a quoziente, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \mathrm{Ker} f \iff \pi(x) \in \mathrm{Ker} \pi' = M'/M''$$

dunque $\mathrm{Ker} f = M'$ da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo. □

Proposizione 0.2.3.

1. *Sia A un anello, allora un A-modulo M è ciclico se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro tale che $M \cong A/I$*
2. *M è semplice se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro massimale tale che $M \cong A/I$*

Dimostrazione. 1. $(\Longleftarrow)$ A/I è ciclico (generato da $\bar{1}$). Viceversa per $(\Longrightarrow)$ so che $M = Ax$ per un qualche $x \in M$. Considerata $f :_A A \to M$ data da $a \mapsto ax$, $\mathrm{Ker} f$ è sottomodulo di A, ovvero ideale sinistro. Concludo per il primo teorema di isomorfismo.

2. Se M è semplice allora $\forall 0 \neq x \in M$, $M = Ax$, dunque M è ciclico e per il punto 1. esiste I ideale sinistro tale che $M \cong A/I$. La proposizione si riduce a dire che A/I è semplice se e solo se I è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $I \subseteq J \subseteq A$ ideale sinistro. Allora $A/I \neq 0 \iff I \neq A$ e gli unici sottomoduli di A/I sono I/I e A/I, ossia gli unici ideali sinistri J tali che $I \subseteq J \subseteq A$ sono I e A.

$\square$

Osservazione. Con il lemma di Zorn si dimostra che $A \neq 0 \implies$ esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

0.2.1 Prodotti

Definizione 0.2.2: Prodotto

Supponiamo di avere M_λ A-moduli, per $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è un } A\text{-modulo detto } \textbf{prodotto} \text{ degli } M_\lambda$$

con $(x+y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$ e $(ax)_\lambda = ax_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $x, y \in M$.
$\forall \mu \in \Lambda$ esiste $p_\mu : M \to M_\mu$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ che è A-lineare e suriettivo.

Proposizione 0.2.4 (Proprietà universale del prodotto)**.**
Dati $f_\mu : N \to M_\mu$ A-lineari $\forall \mu \in \Lambda$, allora esiste unico $f : N \to M$ A-lineare tale che $f_\mu = p_\mu \circ f$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "f_\mu"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
M_\mu & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \arrow[l, "p_\mu"]
\end{tikzcd}$$

Esercizio 0.2.1

Dimostrare la proprietà universale del prodotto

Definizione 0.2.3: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli M_λ è

$$M' := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda > 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste

$$i_\mu : M_\mu \longrightarrow M'$$
$$x \longmapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

che è A-lineare e iniettivo.

Proposizione 0.2.5 (Proprietà universale somma diretta)**.**

$$\begin{tikzcd} N & \\ M_\mu \arrow[u, "f_\mu"] \arrow[r, "i_\mu"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ul, dashed, "\exists! f"'] \end{tikzcd}$$

Osservazione. Se $\#\Lambda < +\infty$ allora

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

Nota (zione)*.* Se $M_\lambda = M$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si denota

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M =: M^\Lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M =: M^{(\Lambda)}$$

Dati $M_\lambda \subseteq M$ sottomoduli, con $\lambda \in \Lambda$, sia

$$f : \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$$

l'omomorfismo indotto dalle inclusioni $M_\lambda \xhookrightarrow{i_\lambda} M$, allora

$$\mathrm{im} f =: \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \subseteq M \text{ è sottomodulo}$$

Inoltre f è iniettiva se e solo se $M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\mu\}} = 0$ per ogni $\mu \in \Lambda$ e in tal caso f induce un isomorfismo tra $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e si può scrivere $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ per indicare il sottomodulo di M

Definizione 0.2.4: Linearmente indipendente, base, modulo libero

Sia $U \subseteq M$ un insieme, con M A-modulo. Si dice che U è A-linearmente indipendente se dati $x_1, \dots, x_n \subseteq U$ distinti

$$a_1, \dots, a_n \in A \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

U è detta **base** di M se è linearmente indipendente e genera M, ossia $M = AU$. Si dice che M è **libero** se ammette una base

Esempio 0.2.1. Per ogni Λ, $A^{(\Lambda)}$ è libero con base $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dove, per ogni $\lambda \in \Lambda$,

$$(e_\lambda)_i = \begin{cases} 1 & \lambda = i \\ 0 & \lambda \neq i \end{cases}$$

Proposizione 0.2.6. *Siano L, M A-moduli, con L libero con base $\{l_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tale che $l_\lambda \neq l_\mu$ se $\lambda \neq \mu$, allora*

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \exists! f : L \to M \ A\text{-lineare t.c. } f(l_\lambda) = x_\lambda$$

Corollario 0.2.6.1. *Un A-modulo è libero se e solo se è isomorfo a $A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ M libero con base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ con $x_\lambda \neq x_\mu$ se $\lambda \neq \mu$. Allora per la proposizione

$$\exists! f : A^\Lambda \to M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(e_\lambda) = x_\lambda$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora im$f = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle_A = M$ e f è iniettivo perché gli x_λ sono linearmente indipendenti.

$\Longleftarrow$ ovvio

□

Corollario 0.2.6.2. *Ogni A-modulo è insomorfo a un quoziente di un modulo libero ($A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ).*

Inoltre un A-modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n, $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Sia $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un insieme di generatori di un modulo M. Per la proposizione $\exists! f : A^{(\Lambda)} \to M$ A-lineare tale che $fl_\lambda = x_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora Im$f = M$ e dunque per il primo teorema di isomorfismo $M \neq A^{(\Lambda)}/\ker f$.

Per la seconda parte se M è finitamente generato posso scegliere Λ finito e viceversa $M \neq A^n/N$ è finitamente generato perché A^n lo è e $\pi : A^n \to A^n/N$ è un omomorfismo suriettivo.

□

Proposizione 0.2.7. *A è con divisione se e solo se ogni suo A-modulo è libero*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ (complementi di algebra)

$\Longleftarrow$ Sia M un A-modulo semplice. Per ipotesi è libero, allora $M \cong A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ. Ma se $\#\Lambda > 1$ allora $A^{(\Lambda)}$ non è semplice ($A \subseteq A^{(\Lambda)}$ è un sottomodulo non banale). Inoltre $\Lambda \neq \varnothing$ ($A^{(\varnothing)} = \{0\}$ non è semplice).

Ne consegue che $M \cong A$ e dunque A è con divisione

□

Esempio 0.2.2. Con $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non è libero

Si può dimostrare che se A è con divisione, allora tutte le basi di un A-modulo (libero) M hanno la stessa cardinalità, che viene detta rango e indicata con $\mathrm{rk}_A M$.

In generale non tutte le basi di un A-modulo libero hanno la stessa cardinalità, esistono infatti anelli A non banali tali che ${}_A^A{\cong}_A A^n$ per *ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 0.2.3. Sia $A = \mathrm{End}_\mathbb{K}(V)$ con $\mathbb{K}$ campo e $\dim_\mathbb{K}(V) = +\infty$

Si dimostra che se $A \to B$ è omomorfismo di anelli e il rango dei B-modulli liberi è ben definito allora anche il rango degli A-moduli liberi è ben definito. Di conseguenza se $A \neq 0$ è commutativo allora il rango degli A-moduli liberi è ben definito ($\exists I \subseteq A$ ideale massimale e $\pi : A \to A/I$ omomorfismo con A/I campo)

0.2.2 restrizione degli scalari

Siano A, B anelli, con $f : A \to B$ omomorfismo di anelli. Allora se M è un B-modulo allora M è anche un A-modulo con $ax := f(a)x$. Si dice allora che ${}_AM$ è ottenuto da ${}_BM$ per **restrizione degli scalari** attraverso f.

Inoltre se $M' \subseteq M$ è B-sottomodulo allora è anche un A-sottomodulo e se $g : M \to N$ è B-lineare allora g è anche A-lineare.

Prima della prossima definizione ricordiamo che il **centro** di un anello è sottoanello, con il centro l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri elementi e indicato con $Z(A)$,

$$Z(A) := \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$$

Definizione 0.2.5

Sia A commutativo. Allora una A-algebra è un omomorfismo di anelli $f : A \to B$ tale che $\mathrm{im} f \subseteq Z(B)$

Se f è evidente si dice che B è una A-algebra

Esempio 0.2.4. $M_n(A)$ è una A-algebra con $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Esempio 0.2.5. Se $A = \mathbb{Z}$ per ogni B anello l'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \to B$ è una $\mathbb{Z}$-algebra. Infatti l'omomorfismo unico $\mathbb{Z} \to Z(B)$ deve essere lo stesso di $\mathbb{Z} \to B$

Definizione 0.2.6: Morfismo di A-algebre

Siano $f : A \to B$, $g : A \to C$ A-algebre. Un (omo/iso/...)morfismo di A-algebre da f a g è $h : B \to C$ (omo/iso/...)morfismo di anelli tale che $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Esempio 0.2.6. Ogni omomorfismo di anelli è omomorfismo di $\mathbb{Z}$-algebre.

Esempio 0.2.7. Sia $f : A \to B$ una A-algebra. Allora $\forall I \subseteq B$ ideale B/I è A-algebra con $\pi \circ f$

Osservazione (**motivazione della definizione**). Se $f : A \to B$ A-algebra, allora B è un anello e A-modulo (per restrizione degli scalari) tale che

$$a(bb') = (ab)b' = b(ab')$$