

Appunti di Analisi Funzionale

Github Repository: [Oxke/appunti/AnalFun](#)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Antonio Giovanni Segatti

0.1 Intro

0.1.1 Spazi Normati

Sia X uno spazio vettoriale su campo \mathbb{K} (\mathbb{C} o \mathbb{R}).

Definizione 0.1.1: norma

Si definisce **norma** una funzione

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che

- i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in X$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

Definizione 0.1.2: Spazio Normato

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ tale che X sia uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su X .

Per una notazione più leggera, quando non è ambiguo sottintenderemo la norma, scrivendo “sia X uno spazio normato”.

Proposizione 0.1.1 (Metrica indotta da $\|\cdot\|$). *La norma $\|\cdot\|$ induce su X una metrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

Nota (zioni). Alcune notazioni utili:

- $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} = x_0 + r B_1(0)$
- $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$

Definizione 0.1.3: Convergenza in norma - Convergenza forte

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X e sia $x \in X$. Dico che x_n converge a x in norma o fortemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Definizione 0.1.4: Successione di Cauchy

Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}$$

Osservazione. La norma $\|\cdot\|$ è una funzione continua.

Dimostrazione. Preso $x, y \in X$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e similmente si può con variabili scambiate. Ne consegue che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque la norma è Lipschitziana con costante 1 □

Definizione 0.1.5: Norma equivalente

Sia X uno spazio normato e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X . Dico che $\|\cdot\|_1$ è **topologicamente equivalente** a $\|\cdot\|_2$ se

$$\forall x \in X \forall r > 0 \exists r_1, r_2 > 0 : \\ B_{r_1}(x, \|\cdot\|_1) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_2) \text{ e } B_{r_2}(x, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_1)$$

Proposizione 0.1.2. *Sia X normato. Allora due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Fissato $x_0 = 0$, preso r tale che

$$B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(0, \|\cdot\|_1)$$

preso ora $0 \neq x \in X$, sia $y := \frac{r_2}{2\|x\|_2}x$, così che $\|y\|_2 = \frac{r_2}{2}$, dunque $y \in B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2)$ e quindi per l'inclusione sopra

$$\|y\|_1 = \frac{r_2}{2} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq r$$

che è la prima delle disuguaglianze richieste. Similmente si può trovare l'altra scambiando x e y , le due norme, e r_2 con r_1

\Leftarrow Preso $x_0 \in X$ e $r > 0$, sia $r_1 := r/\beta$. Allora, per ogni $x \in X$

$$\|x - x_0\|_1 \leq \frac{r}{\beta} \implies \|x - x_0\|_2 \leq \beta \|x - x_0\|_1 \leq r$$

che è la prima delle inclusioni richieste. Similmente si può trovare l'altra prendendo $r_2 := r/\alpha$ e scambiando le norme. □

Osservazione. Se $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ è una norma equivalente alla prima, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$

Definizione 0.1.6: Dimensione

Sia X uno spazio vettoriale. Allora

$$\dim X = \begin{cases} 0 & X = \{0\} \\ n & n \in \mathbb{N} \text{ e } X \text{ ha una base di } n \text{ elementi} \\ +\infty & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ esistono } n \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{cases}$$

Teorema 0.1.3: Equivalenza delle norme

Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su X sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di X . Sia $x \in X$. Allora sia

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \quad \text{con } x^i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Definiamo la norma (facile controllo lasciato come esercizio)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$$

Sia ora $\|\cdot\|$ un'altra norma su X , dimostriamo che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x^i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right)}_{\beta} \|x\|_1$$

Rimane da dimostrare che $\exists \alpha > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$. Assumiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}$ esista $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n \|x_n\|$. Prendiamo ora (ovviamente $x_n \neq 0$ per la disuguaglianza stretta)

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \implies \|y_n\| < \frac{1}{n} \quad ; \quad \|y_n\|_1 = 1$$

Dalla seconda otteniamo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n^i| \leq 1$. Per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione n_k tale che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $y_{n_k}^i \rightarrow y^i$.

Allora

$$\|y_{n_k} - y\| \leq \beta \|y_{n_k} - y\|_1 = \beta \left\| \sum_{i=1}^n (y_{n_k}^i - y^i) e_i \right\| \leq \beta^2 \sum_{i=1}^n |y_{n_k}^i - y^i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

e poiché

$$1 = \|y_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - y\| + \|y\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|y\| \geq 1$$

che è in contraddizione con $\|y_n\| \rightarrow 0$

□

Definizione 0.1.7: Spazio di Banach

X spazio normato è detto **spazio di Banach** se le successioni di Cauchy convergono in X (ossia X è completo)

Teorema 0.1.4

Sia X uno spazio normato di dimensione finita. Allora X è di Banach.

Dimostrazione. Sia $N = \dim X$. Dimostro che X è completo secondo la norma $\|\cdot\|_1$.

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Vogliamo mostrare l'esistenza di $x \in X$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0$. Da definizione di successione di Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \bar{n}, \|x_n - x_m\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_n^i - x_m^i| \leq \varepsilon$$

per cui ogni successione delle componenti $\{x_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in \mathbb{K} . Poiché \mathbb{C} e \mathbb{R} sono completi, allora $x_n^i \rightarrow x^i \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$. Concludiamo osservando che

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_n^i - x^i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Esempio 0.1.1. Sia $X = \mathbb{K}^N$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o \mathbb{R} . Su tale spazio possiamo avere le norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

X è chiaramente di Banach.

Esempio 0.1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $X = C^0(\Omega, \mathbb{K}^N)$ spazio delle funzioni continue $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Facile verificare che X formi uno spazio vettoriale.

Preso ora Ω aperto e limitato.

$$C^0(\bar{\Omega}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ unif. continue}\}$$

poiché f è uniformemente continua se e solo se si può estendere con continuità al bordo. Si può prendere la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| \quad \forall f \in C^0(\bar{\Omega})$$

che si può verificare essere effettivamente una norma. Inoltre con tale norma $C^0(\bar{\Omega})$ è uno spazio di Banach.

Le funzioni in $C^0(\bar{\Omega})$ sono limitate e definite su un compatto, dunque sono anche integrabili, e possiamo dunque definire le norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in C^0(\bar{\Omega}) \quad \forall p \in [1, \infty)$$

ma per nessun p la norma rende $C^0(\bar{\Omega})$ completo. Un esempio è

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \text{lineare} & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definita in $[0, 1]$. Tale funzione converge in L_p con la stessa norma a una funzione non continua.

Esempio 0.1.3. Legato all'esempio precedente, con la stessa norma gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$ sono spazi di Banach.

Presi ora gli spazi $l^p := L^p(\mathbb{N}, \#)$ gli spazi di successioni $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, abbiamo che anch'essi sono spazi di Banach con norma

$$\|x\|_p := \|x\|_{L^p(\mathbb{N}, \#)} = \left(\int_{\mathbb{N}} |x(n)|^p d\# \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$$

Nota (zione). Per le successioni in l^p , indicheremo $x \in l^p$ intendendola come funzione $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, per cui per indicare la componente n -esima di x indicheremo $x(n)$. In tal modo possiamo indicare le successioni di elementi in l^p come successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove ogni $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione in l^p

0.1.2 Spazi di Hilbert

Definizione 0.1.8: Prodotto scalare

Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Allora un prodotto scalare è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

- i. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$
- ii. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- iii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y, z \in X$

Osservazione. Gli stessi assiomi valgono anche sul prodotto scalare su spazio reale. Semplicemente si ha che se $x \in \mathbb{R}$, allora $\bar{x} = x$ quindi si possono droppare tutti i coniugati e viene tutto più leggero.

Nota (antilinearità nella seconda componente).

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \stackrel{i.}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} \stackrel{iii.}{=} \overline{\alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle} \stackrel{i.}{=} \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\beta} \overline{\langle z, x \rangle} \stackrel{i.}{=} \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

Lemma 0.1.5: Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia X uno spazio vettoriale munito del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

e inoltre la diseguaglianza è un'uguaglianza se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Sia $z := \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y$. Allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z, z \rangle &= \langle \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle \langle x, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle (\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2) \end{aligned}$$

quindi ora o $y = 0$ che farebbe valere la tesi, oppure si può semplificare $\langle y, y \rangle$ e rimane esattamente la tesi.

Infine si verifica l'uguaglianza quando $z = 0$, ossia quando x e y sono collineari. \square

Definizione 0.1.9: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale X con prodotto scalare viene detto spazio **prehilbertiano** (o spazio *con prodotto interno*)

Esempio 0.1.4. \mathbb{K}^N con $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i}$ è prehilbertiano.

Esempio 0.1.5. $C^0([0, 1], \mathbb{C})$ con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$

Definizione 0.1.10: Norma indotta dal prodotto scalare

Su uno spazio prehilbertiano $X, \langle \cdot, \cdot \rangle$ definisco

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X$$

Allora $\|\cdot\|$ è una norma su X

buona definizione. La radice è ben definita perché $\langle x, x \rangle$ è un reale non negativo. Inoltre si può mostrare che $\|\cdot\|$ è una norma con gli assiomi di prodotto scalare e la disuguaglianza di Schwarz per la disuguaglianza triangolare. \square

Proposizione 0.1.6. Sia X uno spazio prehilbertiano, allora il prodotto scalare è una funzione continua $X \times X \rightarrow \mathbb{K}$.

Dimostrazione. prese $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle + \langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

\square

Definizione 0.1.11: ortogonalità

$x, y \in X$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

Proposizione 0.1.7 (Identità di polarizzazione). Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Dimostrazione. Non sono difficili, basta scrivere per esteso $\|x + y\|^2$ e $\|x - y\|^2$ (e $\|x + iy\|^2$ e $\|x - iy\|^2$ nel caso complesso) e poi fare i contazzi. \square

Proposizione 0.1.8. teorema di Pitagora Se $\langle x, y \rangle = 0$ allora $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dimostrazione. ovvio \square

Proposizione 0.1.9. Identità del parallelogramma Per ogni $x, y \in X$, allora

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Teorema 0.1.10

Jordan - Von Neumann Sia X uno spazio normato, allora la norma è indotta da un prodotto scalare se vale l'identità del parallelogramma

Dimostrazione per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Definiamo il prodotto scalare con l'identità di polarizzazione, dunque

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

infatti se effettivamente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare allora quest'uguaglianza varrebbe, dunque ha senso iniziare prendendola come definizione. Verifichiamo ora che è un prodotto scalare.

i. Evidente per definizione

ii. Evidente dalla definizione, perché viene letteralmente $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

iii. Proseguiamo con la dimostrazione, dividendo in $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ e $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle &\stackrel{(def)}{=} \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) = \\ &= \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 + \|y + z\|^2) - \frac{1}{4} (\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2) = \\ &\stackrel{prtl.}{=} \frac{1}{8} (\|x + y + 2z\|^2 - \|x + y - 2z\|^2) = \\ &= \frac{2}{4} \left(\left\| \frac{x + y}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x + y}{2} - z \right\|^2 \right) = \\ &\stackrel{(def)}{=} 2 \left\langle \frac{x + y}{2}, z \right\rangle \end{aligned}$$

Da quest'ultima, scelto $y = 0$ e notando dalla definizione che $\langle 0, z \rangle = 0$, abbiamo che

$$\langle x, z \rangle = 2 \left\langle \frac{x}{2}, z \right\rangle \implies \langle x + y, z \rangle = 2 \left\langle \frac{x + y}{2}, z \right\rangle$$

che conclude la prima parte della dimostrazione della linearità.

Procediamo definendo

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X \}$$

allora chiaramente $\{0, 1, -1\} \subseteq \Lambda$. Notiamo che se $\alpha, \beta \in \Lambda$ allora $\alpha + \beta \in \Lambda$:

$$\langle (\alpha + \beta)x, y \rangle = \langle \alpha x + \beta x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + \langle \beta x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y \rangle = (\alpha + \beta) \langle x, y \rangle$$

Dunque necessariamente $\mathbb{Z} \subseteq \Lambda$. Prendiamo ora $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ con $\beta \neq 0$, allora

$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \left\langle \alpha \frac{\beta}{\beta} x, y \right\rangle = \beta \left\langle \frac{\alpha}{\beta} x, y \right\rangle$$

da cui dividendo ambo i termini per β otteniamo che anche $\mathbb{Q} \subseteq \Lambda$. Concludiamo che, poiché \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è continuo (per come è definito, chiaramente non possiamo usare la prop, essendo che non abbiamo ancora dimostrato che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare), allora $\mathbb{R} \subseteq \Lambda \subseteq$. \square

Dimostrazione per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Similmente a prima, definiamo

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + i\frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

Dunque $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) =: (x, y)$. Allora

$$\langle x, y \rangle = (x, y) + i(x, iy)$$

allora per la parte reale del teorema (x, y) verifica $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ e $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque

$$\langle x + y, z \rangle = (x, z) + (y, z) + i(x, iz)i(y, iz) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Rimane da verificare l'omogeneità per $\lambda \in \mathbb{C}$ e che $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$. Iniziamo dalla seconda:

$$\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{(y, x) + i(y, ix)} = (y, x) - i(y, ix)$$

inoltre

$$\begin{aligned} (y, ix) &= \frac{1}{4}(\|y + ix\|^2 - \|y - ix\|^2) = \frac{1}{4}(\|i(-iy + x)\|^2 + \|i(-iy - x)\|^2) = \\ &= \frac{1}{4}(\|x - iy\|^2 + \|x + iy\|^2) = -(x, iy) \end{aligned}$$

e quindi la precedente è

$$\overline{\langle y, x \rangle} = (x, y) + i(x, iy) = \langle x, y \rangle$$

Sia ora $\alpha + i\beta = \lambda \in \mathbb{C}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\langle (\alpha + i\beta)x, y \rangle = \langle \alpha x + i\beta x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + i\langle \beta x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + \beta\langle ix, y \rangle$$

ma abbiamo che, riprendendo la definizione

$$\begin{aligned} \langle ix, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2) + i\frac{1}{4}(\|ix + iy\|^2 - \|ix - iy\|^2) \\ &= -\frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) + i(x, y) = i(x, y) - (x, iy) = \\ &= i\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

e quindi concludiamo

$$\langle (\alpha + i\beta)x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + \beta\langle ix, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + i\beta\langle x, y \rangle = \lambda\langle x, y \rangle$$

□

Osservazione. presa su $C^0([0, 1])$ la norma $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f|^2 dt$, allora

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ questo è uno spazio prehilbertiano.

Però con la norma $\|f\|_\infty$ non è uno spazio prehilbertiano. Infatti non vale l'identità del parallelogramma: prese $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = t$ abbiamo

$$\|f - g\|_\infty^2 + \|f + g\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 2(1 + 1) = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$$

Corollario 0.1.10.1. Sia X uno spazio normato e sia $M \subseteq X$ un sottospazio di dimensione finita. Allora M è chiuso.

Dimostrazione. $(M, \|\cdot\|)$ è esso stesso uno spazio normato di dimensione finita. M è dunque completo quindi chiuso. □

Esempio 0.1.6. La precedente non vale se $\dim X = +\infty$. Presi infatti $M = C^0(\Omega)$ e $X = L^2(\Omega)$, abbiamo che $\overline{M}^{L^2} = L^2$

0.1.3 Operatori lineari e continui

Siano X e Y spazi normati. Sia $T : X \rightarrow Y$. Allora T è lineare se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in X$. Per ricordare la linearità, invece di scrivere $T(x)$ scriveremo Tx .

Nota. Nelle bolle, indicando a pedice lo spazio invece che il raggio, si sottintende il raggio 1 e si esplicita la norma da utilizzare:

$$B_X(0) := \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$$

Teorema 0.1.11

Siano X, Y spazi normati. Sia $T : X \rightarrow Y$. Allora le seguenti proposizioni sono tutte equivalenti:

- (i) T è continuo
- (ii) T è continuo in 0
- (iii) Ogni limitato di X ha immagine limitata in Y
- (iv) $\exists \alpha > 0 : \overline{T(B_X)} \subseteq \alpha B_Y(0)$
- (v) $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$
- (vi) $\sup_{x \in B_X(0)} \|Tx\|_Y < +\infty$
- (vii) $\sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y < +\infty$

Osservazione. Se X e Y hanno dimensione finita, T è sempre continuo.

Esempio 0.1.7. Preso

$$\begin{aligned} T : C^0([0, 1])_{\|\cdot\|_1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T(f) = f(0) \end{aligned}$$

è chiaramente lineare. Tuttavia la controimmagine di $\{0\}$ tramite T contiene ad esempio la successione $f_n(x) = \max(nx, 1)$ che ha come limite in $C^0_{\|\cdot\|_1}$ la funzione costante 1, per cui $T^{-1}\{0\}$ non è chiuso.

Definizione 0.1.12: Operatore limitato

Un operatore che soddisfa la condizione (iii) viene detto **limitato**

Dimostrazione.

- (i) \implies (ii) ovvio
- (ii) \implies (i) ovvio, poiché $T(x - x_0) = T(x) - T(x_0)$
- (ii) \implies (iv) Abbiamo che per ogni intorno U_Y di 0_Y esiste un intorno U_X di 0_X tale che $T(U_X) \subseteq U_Y$. Allora scelto $U_Y = B_Y(0)$ abbiamo

$$\exists \delta > 0 : T(\delta \overline{B_X(0)}) = \delta \overline{T(B_X(0))} \subseteq B_Y(0)$$

per cui basta prendere $\alpha = \frac{1}{\delta}$

(iv) \implies (ii) Preso $\varepsilon > 0$ bisogna trovare $\delta > 0$ tale che

$$T(\delta \overline{B_x(0)}) \subseteq \varepsilon B_Y(0)$$

e similmente a prima per linearità basta prendere $\delta = \varepsilon/\alpha$

(iv) \implies (iii) Sia $C \subseteq \overline{RB_X(0)}$ un limitato. Allora

$$T(C) \subseteq T(\overline{RB_X(0)}) = R\overline{T(B_X(0))} \subseteq R\alpha \overline{B_Y(0)}$$

(iii) \implies (iv) $\overline{B_X(0)}$ è limitato in X , dunque $\overline{T(B_X(0))}$ è limitato in Y , e dunque è contenuto in una palla $\alpha B_Y(0)$ per un $\alpha > 0$

(iv) \iff (vi) $\|x\|_X \leq 1$ se e solo se $x \in \overline{B_X(0)}$, il resto vien da sè

(v) \iff (vi) \iff (vii) tutte ovvie, come anche è ovvio che il valore finito nel caso sia lo stesso, e viene denotato $\|T\|$ e in pratica tutte e tre dicono che

$$\exists \|T\| > 0 : \|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$$

per ogni $x \in X$

□