

# Appunti di Analisi Funzionale

Github Repository: [Oxke/appunti/AnalFun](#)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Antonio Giovanni Segatti

## 0.1 Intro

### 0.1.1 Spazi Normati

Sia  $X$  uno spazio vettoriale su campo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ ).

#### Definizione 0.1.1: norma

Si definisce **norma** una funzione

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che

- i.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- ii.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in X$
- iii.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

#### Definizione 0.1.2: Spazio Normato

Uno **spazio normato** è una coppia  $(X, \|\cdot\|)$  tale che  $X$  sia uno spazio vettoriale e  $\|\cdot\|$  una norma su  $X$ .

Per una notazione più leggera, quando non è ambiguo sottintenderemo la norma, scrivendo “sia  $X$  uno spazio normato”.

**Proposizione 0.1.1** (Metrica indotta da  $\|\cdot\|$ ). *La norma  $\|\cdot\|$  induce su  $X$  una metrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

*Nota* (zioni). Alcune notazioni utili:

- $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} = x_0 + r B_1(0)$
- $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$

#### Definizione 0.1.3: Convergenza in norma - Convergenza forte

Sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione in  $X$  e sia  $x \in X$ . Dico che  $x_n$  converge a  $x$  in norma o fortemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

#### Definizione 0.1.4: Successione di Cauchy

Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}$$

*Osservazione.* La norma  $\|\cdot\|$  è una funzione continua.

*Dimostrazione.* Preso  $x, y \in X$ ,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e similmente si può con variabili scambiate. Ne consegue che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque la norma è Lipschitziana con costante 1 □

#### Definizione 0.1.5: Norma equivalente

Sia  $X$  uno spazio normato e siano  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  due norme su  $X$ . Dico che  $\|\cdot\|_1$  è **topologicamente equivalente** a  $\|\cdot\|_2$  se

$$\forall x \in X \forall r > 0 \exists r_1, r_2 > 0 : \\ B_{r_1}(x, \|\cdot\|_1) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_2) \text{ e } B_{r_2}(x, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_1)$$

**Proposizione 0.1.2.** *Sia  $X$  normato. Allora due norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  sono equivalenti se e solo se  $\exists \alpha, \beta > 0$  tali che*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$  Fissato  $x_0 = 0$ , preso  $r$  tale che

$$B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(0, \|\cdot\|_1)$$

preso ora  $0 \neq x \in X$ , sia  $y := \frac{r_2}{2\|x\|_2}x$ , così che  $\|y\|_2 = \frac{r_2}{2}$ , dunque  $y \in B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2)$  e quindi per l'inclusione sopra

$$\|y\|_1 = \frac{r_2}{2} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq r$$

che è la prima delle disuguaglianze richieste. Similmente si può trovare l'altra scambiando  $x$  e  $y$ , le due norme, e  $r_2$  con  $r_1$

$\Leftarrow$  Preso  $x_0 \in X$  e  $r > 0$ , sia  $r_1 := r/\beta$ . Allora, per ogni  $x \in X$

$$\|x - x_0\|_1 \leq \frac{r}{\beta} \implies \|x - x_0\|_2 \leq \beta \|x - x_0\|_1 \leq r$$

che è la prima delle inclusioni richieste. Similmente si può trovare l'altra prendendo  $r_2 := r/\alpha$  e scambiando le norme. □

*Osservazione.* Se  $\{x_n\}$  è di Cauchy rispetto alla norma  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  è una norma equivalente alla prima, allora  $\{x_n\}$  è di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_2$

**Definizione 0.1.6: Dimensione**

Sia  $X$  uno spazio vettoriale. Allora

$$\dim X = \begin{cases} 0 & X = \{0\} \\ n & n \in \mathbb{N} \text{ e } X \text{ ha una base di } n \text{ elementi} \\ +\infty & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ esistono } n \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{cases}$$

**Teorema 0.1.3: Equivalenza delle norme**

Sia  $X$  uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su  $X$  sono topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.* Sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base di  $X$ . Sia  $x \in X$ . Allora sia

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \quad \text{con } x^i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Definiamo la norma (facile controllo lasciato come esercizio)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$$

Sia ora  $\|\cdot\|$  un'altra norma su  $X$ , dimostriamo che  $\|\cdot\|$  è equivalente a  $\|\cdot\|_1$ .

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x^i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left( \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right)}_{\beta} \|x\|_1$$

Rimane da dimostrare che  $\exists \alpha > 0$  tale che  $\|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$ . Assumiamo per assurdo che  $\forall n \in \mathbb{N}$  esista  $x_n \in X$  tale che  $\|x_n\|_1 > n \|x_n\|$ . Prendiamo ora (ovviamente  $x_n \neq 0$  per la disuguaglianza stretta)

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \implies \|y_n\| < \frac{1}{n} \quad ; \quad \|y_n\|_1 = 1$$

Dalla seconda otteniamo che  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|y_n^i| \leq 1$ . Per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione  $n_k$  tale che per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $y_{n_k}^i \rightarrow y^i$ .

Allora

$$\|y_{n_k} - y\| \leq \beta \|y_{n_k} - y\|_1 = \beta \left\| \sum_{i=1}^n (y_{n_k}^i - y^i) e_i \right\| \leq \beta^2 \sum_{i=1}^n |y_{n_k}^i - y^i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

e poiché

$$1 = \|y_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - y\| + \|y\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|y\| \geq 1$$

che è in contraddizione con  $\|y_n\| \rightarrow 0$

□

**Definizione 0.1.7: Spazio di Banach**

$X$  spazio normato è detto **spazio di Banach** se le successioni di Cauchy convergono in  $X$  (ossia  $X$  è completo)

**Teorema 0.1.4**

Sia  $X$  uno spazio normato di dimensione finita. Allora  $X$  è di Banach.

*Dimostrazione.* Sia  $N = \dim X$ . Dimostro che  $X$  è completo secondo la norma  $\|\cdot\|_1$ .

Sia  $\{x_n\}$  una successione di Cauchy. Vogliamo mostrare l'esistenza di  $x \in X$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0$ . Da definizione di successione di Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \bar{n}, \|x_n - x_m\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_n^i - x_m^i| \leq \varepsilon$$

per cui ogni successione delle componenti  $\{x_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy in  $\mathbb{K}$ . Poiché  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}$  sono completi, allora  $x_n^i \rightarrow x^i \in \mathbb{K}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Concludiamo osservando che

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_n^i - x^i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

**Esempio 0.1.1.** Sia  $X = \mathbb{K}^N$  con  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ . Su tale spazio possiamo avere le norme

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^N |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

$X$  è chiaramente di Banach.

**Esempio 0.1.2.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ , allora  $X = C^0(\Omega, \mathbb{K}^N)$  spazio delle funzioni continue  $\Omega \rightarrow \mathbb{K}^N$ . Facile verificare che  $X$  formi uno spazio vettoriale.

Preso ora  $\Omega$  aperto e limitato.

$$C^0(\bar{\Omega}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ unif. continue}\}$$

poiché  $f$  è uniformemente continua se e solo se si può estendere con continuità al bordo. Si può prendere la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| \quad \forall f \in C^0(\bar{\Omega})$$

che si può verificare essere effettivamente una norma. Inoltre con tale norma  $C^0(\bar{\Omega})$  è uno spazio di Banach.

Le funzioni in  $C^0(\bar{\Omega})$  sono limitate e definite su un compatto, dunque sono anche integrabili, e possiamo dunque definire le norme

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in C^0(\bar{\Omega}) \quad \forall p \in [1, \infty)$$

ma per nessun  $p$  la norma rende  $C^0(\bar{\Omega})$  completo. Un esempio è

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \text{lineare} & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definita in  $[0, 1]$ . Tale funzione converge in  $L_p$  con la stessa norma a una funzione non continua.

**Esempio 0.1.3.** Legato all'esempio precedente, con la stessa norma gli spazi  $L^p(\Omega, \mu)$  sono spazi di Banach.

Presi ora gli spazi  $l^p := L^p(\mathbb{N}, \#)$  gli spazi di successioni  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ , abbiamo che anch'essi sono spazi di Banach con norma

$$\|x\|_p := \|x\|_{L^p(\mathbb{N}, \#)} = \left( \int_{\mathbb{N}} |x(n)|^p d\# \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$$

*Nota (zione).* Per le successioni in  $l^p$ , indicheremo  $x \in l^p$  intendendola come funzione  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ , per cui per indicare la componente  $n$ -esima di  $x$  indicheremo  $x(n)$ . In tal modo possiamo indicare le successioni di elementi in  $l^p$  come successioni  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , dove ogni  $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  è una funzione in  $l^p$

## 0.1.2 Spazi di Hilbert

### Definizione 0.1.8: Prodotto scalare

Sia  $X$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Allora un prodotto scalare è un'applicazione  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

- i.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$
- ii.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  e  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- iii.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y, z \in X$

*Osservazione.* Gli stessi assiomi valgono anche sul prodotto scalare su spazio reale. Semplicemente si ha che se  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $\bar{x} = x$  quindi si possono droppare tutti i coniugati e viene tutto più leggero.

*Nota* (antilinearità nella seconda componente).

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \stackrel{i.}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} \stackrel{iii.}{=} \overline{\alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle} \stackrel{i.}{=} \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\beta} \overline{\langle z, x \rangle} \stackrel{i.}{=} \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

### Lemma 0.1.5: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia  $X$  uno spazio vettoriale munito del prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Allora

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

e inoltre la disuguaglianza è un'uguaglianza se e solo se  $x$  e  $y$  sono linearmente dipendenti.

*Dimostrazione.* Sia  $z := \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y$ . Allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z, z \rangle &= \langle \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle \langle x, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle (\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2) \end{aligned}$$

quindi ora o  $y = 0$  che farebbe valere la tesi, oppure si può semplificare  $\langle y, y \rangle$  e rimane esattamente la tesi.

Infine si verifica l'uguaglianza quando  $z = 0$ , ossia quando  $x$  e  $y$  sono collineari.  $\square$

### Definizione 0.1.9: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale  $X$  con prodotto scalare viene detto spazio **prehilbertiano** (o spazio *con prodotto interno*)

**Esempio 0.1.4.**  $\mathbb{K}^N$  con  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i}$  è prehilbertiano.

**Esempio 0.1.5.**  $C^0([0, 1], \mathbb{C})$  con  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$

### Definizione 0.1.10: Norma indotta dal prodotto scalare

Su uno spazio prehilbertiano  $X, \langle \cdot, \cdot \rangle$  definisco

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X$$

Allora  $\|\cdot\|$  è una norma su  $X$

*buona definizione.* La radice è ben definita perché  $\langle x, x \rangle$  è un reale non negativo. Inoltre si può mostrare che  $\|\cdot\|$  è una norma con gli assiomi di prodotto scalare e la disuguaglianza di Schwarz per la disuguaglianza triangolare.  $\square$

**Proposizione 0.1.6.** Sia  $X$  uno spazio prehilbertiano, allora il prodotto scalare è una funzione continua  $X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ .

*Dimostrazione.* prese  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ ,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle + \langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\square$

### Definizione 0.1.11: ortogonalità

$x, y \in X$  si dicono ortogonali se  $\langle x, y \rangle = 0$

**Proposizione 0.1.7** (Identità di polarizzazione). Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Se invece  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

*Dimostrazione.* Non sono difficili, basta scrivere per esteso  $\|x + y\|^2$  e  $\|x - y\|^2$  (e  $\|x + iy\|^2$  e  $\|x - iy\|^2$  nel caso complesso) e poi fare i contazzi.  $\square$

**Proposizione 0.1.8.** *teorema di Pitagora* Se  $\langle x, y \rangle = 0$  allora  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

*Dimostrazione.* ovvio  $\square$

**Proposizione 0.1.9.** *Identità del parallelogramma* Per ogni  $x, y \in X$ , allora

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**Teorema 0.1.10**

Jordan - Von Neumann Sia  $X$  uno spazio normato, allora la norma è indotta da un prodotto scalare se vale l'identità del parallelogramma

*Dimostrazione per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .* Definiamo il prodotto scalare con l'identità di polarizzazione, dunque

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

infatti se effettivamente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un prodotto scalare allora quest'uguaglianza varrebbe, dunque ha senso iniziare prendendola come definizione. Verifichiamo ora che è un prodotto scalare.

i. Evidente per definizione

ii. Evidente dalla definizione, perché viene letteralmente  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

iii. Proseguiamo con la dimostrazione, dividendo in  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  e  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle &\stackrel{(def)}{=} \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) = \\ &= \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 + \|y + z\|^2) - \frac{1}{4} (\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2) = \\ &\stackrel{prtl.}{=} \frac{1}{8} (\|x + y + 2z\|^2 - \|x + y - 2z\|^2) = \\ &= \frac{2}{4} \left( \left\| \frac{x + y}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x + y}{2} - z \right\|^2 \right) = \\ &\stackrel{(def)}{=} 2 \left\langle \frac{x + y}{2}, z \right\rangle \end{aligned}$$

Da quest'ultima, scelto  $y = 0$  e notando dalla definizione che  $\langle 0, z \rangle = 0$ , abbiamo che

$$\langle x, z \rangle = 2 \left\langle \frac{x}{2}, z \right\rangle \implies \langle x + y, z \rangle = 2 \left\langle \frac{x + y}{2}, z \right\rangle$$

che conclude la prima parte della dimostrazione della linearità.

Procediamo definendo

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X \}$$

allora chiaramente  $\{0, 1, -1\} \subseteq \Lambda$ . Notiamo che se  $\alpha, \beta \in \Lambda$  allora  $\alpha + \beta \in \Lambda$ :

$$\langle (\alpha + \beta)x, y \rangle = \langle \alpha x + \beta x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + \langle \beta x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y \rangle = (\alpha + \beta) \langle x, y \rangle$$

Dunque necessariamente  $\mathbb{Z} \subseteq \Lambda$ . Prendiamo ora  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  con  $\beta \neq 0$ , allora

$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \left\langle \alpha \frac{\beta}{\beta} x, y \right\rangle = \beta \left\langle \frac{\alpha}{\beta} x, y \right\rangle$$

da cui dividendo ambo i termini per  $\beta$  otteniamo che anche  $\mathbb{Q} \subseteq \Lambda$ . Concludiamo che, poiché  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è continuo (per come è definito, chiaramente non possiamo usare la prop, essendo che non abbiamo ancora dimostrato che  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è un prodotto scalare), allora  $\mathbb{R} \subseteq \Lambda \subseteq$ .  $\square$

*Dimostrazione per  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .* Similmente a prima, definiamo

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + i\frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

Dunque  $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) =: (x, y)$ . Allora

$$\langle x, y \rangle = (x, y) + i(x, iy)$$

allora per la parte reale del teorema  $(x, y)$  verifica  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$  e  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dunque

$$\langle x + y, z \rangle = (x, z) + (y, z) + i(x, iz)i(y, iz) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Rimane da verificare l'omogeneità per  $\lambda \in \mathbb{C}$  e che  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ . Iniziamo dalla seconda:

$$\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{(y, x) + i(y, ix)} = (y, x) - i(y, ix)$$

inoltre

$$\begin{aligned} (y, ix) &= \frac{1}{4}(\|y + ix\|^2 - \|y - ix\|^2) = \frac{1}{4}(\|i(-iy + x)\|^2 + \|i(-iy - x)\|^2) = \\ &= \frac{1}{4}(\|x - iy\|^2 + \|x + iy\|^2) = -(x, iy) \end{aligned}$$

e quindi la precedente è

$$\overline{\langle y, x \rangle} = (x, y) + i(x, iy) = \langle x, y \rangle$$

Sia ora  $\alpha + i\beta = \lambda \in \mathbb{C}$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\langle (\alpha + i\beta)x, y \rangle = \langle \alpha x + i\beta x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + i\langle \beta x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + \beta\langle ix, y \rangle$$

ma abbiamo che, riprendendo la definizione

$$\begin{aligned} \langle ix, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2) + i\frac{1}{4}(\|ix + iy\|^2 - \|ix - iy\|^2) \\ &= -\frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) + i(x, y) = i(x, y) - (x, iy) = \\ &= i\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

e quindi concludiamo

$$\langle (\alpha + i\beta)x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + \beta\langle ix, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + i\beta\langle x, y \rangle = \lambda\langle x, y \rangle$$

□

*Osservazione.* presa su  $C^0([0, 1])$  la norma  $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f|^2 dt$ , allora

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$  questo è uno spazio prehilbertiano.

Però con la norma  $\|f\|_\infty$  non è uno spazio prehilbertiano. Infatti non vale l'identità del parallelogramma: prese  $f(t) = 1 - t$  e  $g(t) = t$  abbiamo

$$\|f - g\|_\infty^2 + \|f + g\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 2(1 + 1) = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$$

**Corollario 0.1.10.1.** Sia  $X$  uno spazio normato e sia  $M \subseteq X$  un sottospazio di dimensione finita. Allora  $M$  è chiuso.

*Dimostrazione.*  $(M, \|\cdot\|)$  è esso stesso uno spazio normato di dimensione finita.  $M$  è dunque completo quindi chiuso. □

**Esempio 0.1.6.** La precedente non vale se  $\dim X = +\infty$ . Presi infatti  $M = C^0(\Omega)$  e  $X = L^2(\Omega)$ , abbiamo che  $\overline{M}^{L^2} = L^2$



### 0.1.3 Operatori lineari e continui

Siano  $X$  e  $Y$  spazi normati. Sia  $T : X \rightarrow Y$ . Allora  $T$  è lineare se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e  $x, y \in X$ . Per ricordare la linearità, invece di scrivere  $T(x)$  scriveremo  $Tx$ .

*Nota.* Nelle bolle, indicando a pedice lo spazio invece che il raggio, si sottintende il raggio 1 e si esplicita la norma da utilizzare:

$$B_X(0) := \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$$

#### Teorema 0.1.11

Siano  $X, Y$  spazi normati. Sia  $T : X \rightarrow Y$ . Allora le seguenti proposizioni sono tutte equivalenti:

- (i)  $T$  è continuo
- (ii)  $T$  è continuo in 0
- (iii) Ogni limitato di  $X$  ha immagine limitata in  $Y$
- (iv)  $\exists \alpha > 0 : \overline{T(B_X)} \subseteq \alpha B_Y(0)$
- (v)  $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$
- (vi)  $\sup_{x \in B_X(0)} \|Tx\|_Y < +\infty$
- (vii)  $\sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y < +\infty$

*Osservazione.* Se  $X$  e  $Y$  hanno dimensione finita,  $T$  è sempre continuo.

**Esempio 0.1.7.** Preso

$$\begin{aligned} T : C^0([0, 1])_{\|\cdot\|_1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T(f) = f(0) \end{aligned}$$

è chiaramente lineare. Tuttavia la controimmagine di  $\{0\}$  tramite  $T$  contiene ad esempio la successione  $f_n(x) = \max(nx, 1)$  che ha come limite in  $C^0_{\|\cdot\|_1}$  la funzione costante 1, per cui  $T^{-1}\{0\}$  non è chiuso.

#### Definizione 0.1.12: Operatore limitato

Un operatore che soddisfa la condizione (iii) viene detto **limitato**

*Dimostrazione.*

- (i)  $\implies$  (ii) ovvio
- (ii)  $\implies$  (i) ovvio, poiché  $T(x - x_0) = T(x) - T(x_0)$
- (ii)  $\implies$  (iv) Abbiamo che per ogni intorno  $U_Y$  di  $0_Y$  esiste un intorno  $U_X$  di  $0_X$  tale che  $T(U_X) \subseteq U_Y$ . Allora scelto  $U_Y = B_Y(0)$  abbiamo

$$\exists \delta > 0 : T(\delta \overline{B_X(0)}) = \delta \overline{T(B_X(0))} \subseteq B_Y(0)$$

per cui basta prendere  $\alpha = \frac{1}{\delta}$

(iv)  $\implies$  (ii) Preso  $\varepsilon > 0$  bisogna trovare  $\delta > 0$  tale che

$$T(\delta \overline{B_x(0)}) \subseteq \varepsilon B_Y(0)$$

e similmente a prima per linearità basta prendere  $\delta = \varepsilon/\alpha$

(iv)  $\implies$  (iii) Sia  $C \subseteq \overline{RB_X(0)}$  un limitato. Allora

$$T(C) \subseteq T(\overline{RB_X(0)}) = R\overline{T(B_X(0))} \subseteq R\alpha \overline{B_Y(0)}$$

(iii)  $\implies$  (iv)  $\overline{B_X(0)}$  è limitato in  $X$ , dunque  $T(\overline{B_X(0)})$  è limitato in  $Y$ , e dunque è contenuto in una palla  $\alpha B_Y(0)$  per un  $\alpha > 0$

(iv)  $\iff$  (vi)  $\|x\|_X \leq 1$  se e solo se  $x \in \overline{B_X(0)}$ , il resto vien da sè

(v)  $\iff$  (vi)  $\iff$  (vii) tutte ovvie, come anche è ovvio che il valore finito nel caso sia lo stesso, e viene denotato  $\|T\|$  e in pratica tutte e tre dicono che

$$\exists \|T\| > 0 : \|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$$

per ogni  $x \in X$

□

## 0.2 Hahn - Banach

### Teorema 0.2.1: Hahn - Banach (spazi normati)

Sia  $X$  uno spazio normato,  $X_0$  un sottospazio. Sia  $g : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e continua, cioè  $g \in X'_0$ . Allora  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e continua, ossia  $f \in X'$  tale che

- 1)  $f$  prolunga  $g$
- 2)  $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X'_0}$

*Dimostrazione.* sia  $p(x) = \|g\|_{X'_0} \|x\|$ . Allora  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  ed è sublineare e omogenea, dunque è una seminorma. □

**Esempio 0.2.1.** Sia  $X = \mathbb{R}^2$ , allora un generico operatore lineare  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è del tipo  $x \mapsto a \cdot x$ , con  $a \in \mathbb{R}^2$ .

Allora  $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|fx|}{\|x\|_p}$  e abbiamo che  $|fx| \leq \|a\|_q \|x\|_p$  con  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ . Dunque concludiamo che  $\|f\| \leq \|a\|_q$ . In realtà questa è un'uguaglianza. Basta infatti prendere

$$\bar{x} = (|a_1|^{q-2} a_1, |a_2|^{q-2} a_2) \implies \|x\|_p^p = |a_1|^{(q-1)p} + |a_2|^{(q-1)p} = |a_1|^q + |a_2|^q = \|a\|_q^q$$

dove si è usato che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies (q-1)p = q$ . Ma inoltre abbiamo che

$$|f\bar{x}| = |a \cdot \bar{x}| = \|a\|_q^q$$

concludiamo che

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} \geq \frac{|fx|}{\|\bar{x}\|_p} = \|a\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|a\|_q$$

**Esercizio 0.2.1**

Sia  $Y \subseteq X$  un sottospazio di  $X$  spazio normato. Mostrare che  $\overline{Y}$  è un sottospazio di  $X$ .

**Lemma 0.2.2**

Sia  $X$  uno spazio normato e  $Y \subseteq X$  un sottospazio tale che  $\overline{Y} \subset X$ . Allora  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{K}$  con  $f$  lineare continua, ossia  $f \in X'$  tale che:

1.  $f \neq 0$
2.  $\langle f, x \rangle = 0$  per ogni  $x \in Y$

*Osservazione.* Sia  $X$  uno spazio normato,  $Y \subseteq X$  un sottospazio si supponga che se un funzionale  $f \in X'$  tale che  $\langle f, x \rangle = 0$  per ogni  $x \in Y$  allora necessariamente  $f = 0$ . Segue che  $\overline{Y} = X$

*Dimostrazione.*  $\exists x_0 \in X - \overline{Y}$ , allora  $X_0 = Y \oplus \mathbb{K}x_0$ . A questo punto prendiamo il funzionale  $g : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$  definito da  $g(y + \alpha x_0) = \alpha$ . Mostriamo ora che  $g \in X'_0$  e che è vero che  $g|_Y = 0$ . La seconda è banalmente vera perché se  $y \in Y$  allora  $g(y) = g(y + 0 \cdot x_0) = 0$ . Mostriamo che  $g$  è lineare e continuo. Supponiamo  $x_1 = y_1 + \alpha_1 x_0$  e  $x_2 = y_2 + \alpha_2 x_0$ . Allora

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + \mu x_2) &= g(\lambda y_1 + \lambda \alpha_1 x_0 + \mu y_2 + \mu \alpha_2 x_0) = \\ &= g((\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2) x_0) = \lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 = \\ &= \lambda g(x_1) + \mu g(x_2) \end{aligned}$$

Per la continuità, prendiamo  $\alpha \neq 0$  e abbiamo che

$$\|x\| = \|y + \alpha x_0\| = \left\| (-\alpha) \left( \frac{y}{-\alpha} - x_0 \right) \right\| = |\alpha| \left\| \frac{y}{-\alpha} - x_0 \right\|$$

necessariamente  $\frac{y}{-\alpha} \in Y$  e dunque possiamo proseguire la precedente equazione con

$$\|x\| = |\alpha| \left\| \frac{y}{-\alpha} - x_0 \right\| \geq |\alpha| d(x_0, Y) = |g(x)| d(x_0, Y)$$

per cui concludiamo che  $g$  è continua con norma  $\|g\| \leq 1/d(x_0, Y)$ . Questa disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza, infatti poiché  $d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$  abbiamo che

$$\exists y_n \in Y : \|y_n - x_0\| < \frac{n+1}{n} d(x_0, Y)$$

e ora abbiamo che

$$\frac{n}{n+1} \frac{\|y_n - x_0\|}{d(x_0, Y)} < 1 = |g(x_0 - y_n)| \leq \|g\| \|x_0 - y_n\|$$

da cui per  $n \rightarrow \infty$  otteniamo  $\|g\|_{X'_0} \geq 1/d(x_0, Y)$ .

Ora estendo  $g$  a tutto  $X$  con Hahn-Banach ottenendo  $f \in X'$  tale che  $f|_{X_0} = g$  e dunque  $f|_Y = 0$ . Inoltre l'estensione poiché Hahn-Banach conserva la norma, abbiamo che

$$\|f\|_{X'} = \frac{1}{d(x_0, Y)}$$

□

**Corollario 0.2.2.1.** Sia  $X$  uno spazio normato reale. Allora per ogni  $x_0 \in X$  esiste una  $f \in X'$  tale che  $\langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$  e  $\|f\|_{X'} = \|x_0\|$

*Dimostrazione.* Sia  $X_0 = \mathbb{R}x_0$ . Sia  $x = tx_0 \in X_0$ , allora definiamo  $g(x) = g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ . Verifichiamo che la norma sia corretta:  $|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2$  dunque  $\|g\|_{X'_0} = \|x_0\|$ .

Per Hahn-Banach possiamo estendere  $g$  a tutto  $X'$  ottenendo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\langle f, x \rangle = \langle g, x \rangle$  per ogni  $x \in X_0$  e  $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X'_0} = \|x_0\|$ . In particolare anche  $\langle f, x_0 \rangle = \langle g, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$   $\square$

Il corollario precedente motiva la seguente definizione:

### Definizione 0.2.1: Mappa di dualità

Chiamiamo la **mappa di dualità** la seguente funzione

$$\mathcal{F} : X \longrightarrow 2^{X'} \\ x \longmapsto \mathcal{F}(x) = \{f \in X' : \langle f, x \rangle = \|x\|^2 ; \|f\|_{X'} = \|x\|\}$$

che associa a ogni elemento di  $X$  l'insieme degli elementi “a lui duali”.

### Esercizio 0.2.2

Consideriamo

$$\mathcal{F}'(x) = \{f \in X' : \langle f, x \rangle = \|x\|^2 ; \|f\|_{X'} \leq \|x\|\}'$$

Mostrare che  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$

Fissato  $x \in X$ , è evidente che  $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}'(x)$ . Supponiamo ora che  $f \in \mathcal{F}'(x)$ , ossia  $\|f\|_{X'} \leq \|x\|$ . Da  $|\langle f, x \rangle| = \|x\|\|x\|$  concludiamo che  $\|f\|_{X'} = \|x\|$  e dunque  $f \in \mathcal{F}(x)$

### Esercizio 0.2.3

Consideriamo

$$\mathcal{I}(x) = \left\{ f \in X' : \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, y - x \rangle \forall y \in X \right\}$$

Mostrare che  $\mathcal{I} = \mathcal{F}$

Fissiamo  $x \in X$

$\subseteq$  Sia  $f \in \mathcal{I}(x)$ . Iniziamo mostrando che  $\langle f, x \rangle = \|x\|^2$ . Scegliamo  $y = \alpha x$  per  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Segue che

$$\frac{1}{2}\alpha^2\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, x \rangle(\alpha - 1)$$

con questa uguaglianza, dividendo i casi per  $\alpha > 0$  e  $\alpha < 1$ , prendiamo il limite di  $\alpha \rightarrow 1^+$  e  $\alpha \rightarrow 1^-$ , ottenendo le due disuguaglianze  $\langle f, x \rangle \leq \|x\|^2$  e  $\langle f, x \rangle \geq \|x\|^2$ .

Rimane da controllare che  $\|f\|_{X'} \leq \|x\|$ . Scegliamo  $y \in X$  tale che  $\|y\| = \|x\|$ . Otteniamo che

$$\langle f, y \rangle \leq \langle f, x \rangle = \|x\|^2 \implies |\langle f, y \rangle| \leq \|y\|\|x\| \implies \|f\|_{X'} \leq \|x\|$$

⊇ Sia  $f \in \mathcal{F}(x)$  e  $y \in X$ . Allora

$$\begin{aligned}\langle f, y - x \rangle &= \langle f, y \rangle - \langle f, x \rangle \leq \|f\| \|y\| - \|x\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2 - \|x\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|x\|^2\end{aligned}$$

da cui  $f \in \mathcal{I}(x)$

*Osservazione.* Il precedente esercizio suggerisce che  $f \in \mathcal{F}(x)$  svolge in un certo senso il ruolo della derivata di  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$  valutata in  $x$ . Vedremo più avanti il significato di questa analogia.

#### Esercizio 0.2.4

Mostrare che

$$\begin{aligned}c_0 &= \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0\} \\ c &= \{x \in \ell^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \text{ esiste} \}\end{aligned}$$

sono sottospazi chiusi di  $\ell^\infty$ .

Le dimostrazioni contose esplicite sono lasciate davvero come esercizio, riporto dimostrazioni più sintetiche.

Utilizzando la  $f$  definita come il limite come poco più avanti (dopo il teorema), abbiamo che  $c_0$  è chiuso in quanto  $c_0 = f^{-1}(\{0\})$  controimmagine continua di chiuso.

#### Teorema 0.2.3

Sia  $p \in [1, +\infty)$ , sia  $f \in (\ell^p)'$ . Sia  $q \in \mathbb{R}$  tale che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Allora

$$\exists! y \in \ell^q : \langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$$

e inoltre  $\|f\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_{\ell^q}$

Notare che il precedente teorema non vale per  $p = \infty$ . Costruiamo infatti un funzionale lineare e continuo su  $\ell^\infty$  che non si rappresenta con  $y \in \ell^1$ . Consideriamo infatti  $g : c \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $\langle g, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$ . Allora  $g$  è lineare ed è continuo perché  $|\langle g, x \rangle| = |\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)| \leq \|x\|_\infty$  per cui  $g \in c'$  e in particolare  $\|g\|_{c'} = 1$  ad esempio prendendo la successione  $x \in c$  definita da  $x(n) = 1$ .

Estendo ora  $g$  a tutto  $\ell^\infty$  con Hahn-Banach, ottenendo  $f : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  lineare continuo con  $\|f\|_{(\ell^\infty)'} = 1$ .

Supponiamo ora per assurdo che esista  $y \in \ell^1$  tale che

$$\langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n) \quad \forall x \in \ell^\infty$$

e consideriamo ora gli  $x_k$  definiti come<sup>1</sup>  $x_k = (n == k)$ . Allora abbiamo  $\langle f, x_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k(n) = 0$  ma per ogni  $k$  allora avremmo che  $0 = \langle f, x_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x_k(n) = y(k)$  per cui  $y = 0$  che è impossibile perché sappiamo che  $f$  ha norma 1.

<sup>1</sup>concedetemi questa notazione da informatico

### Esercizio 0.2.5

Mostrare che

$$c_{00} = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definitivamente nulle}\}$$

è denso in  $\ell^p$ , per ogni  $p \in [1, \infty)$

### Esercizio 0.2.6

Mostrare che  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  dato da

$$(Tx)(n) = \frac{x(n)}{n}$$

è ben definito, lineare, continuo e  $T(\ell^2)$  non è chiuso in  $\ell^2$  ed è denso in  $\ell^2$

### Definizione 0.2.2: Immersione Compatta

Siano  $X, Y$  spazi di Banach. Dico che  $Y$  è immerso con compattezza in  $X$  (indicato  $Y \subset\subset X$ ) se

1.  $\exists C > 0 : \|x\|_X \leq C\|x\|_Y$  per ogni  $x \in Y$  (dunque l'immersione  $Y \hookrightarrow X$  è continua.
2. Ogni successione limitata in  $Y$  ha un'estratta convergente in  $X$

### Esercizio 0.2.7

Sia  $X = \ell^2$  e consideriamo

$$Y = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

Mostrare che

1.  $Y$  è sottospazio vettoriale di  $\ell^2$
  2. Posto  $\|x\|_Y^2 := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2$ , questa è una norma indotta da un prodotto scalare
  3. L'inclusione  $Y \hookrightarrow X$  è continua
  4.  $Y$  è completo
  5.  $Y \subset\subset X$
- 
1. preso  $x \in Y$ ,  $|x(n)|^2 \leq n^2 |x(n)|^2$  e poiché  $\{nx(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  allora anche  $x \in \ell^2$ . Facile verificare che  $Y$  è sottospazio
  2. Tutte facili verifiche, con prodotto scalare  $\langle x, y \rangle_Y = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x(n)y(n)$
  3. Come visto nel punto 1.,  $\|x\|_{\ell^2} \leq \|\{nx(n)\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2} = \|x\|_Y$
  4. Sia  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  di Cauchy in  $\|\cdot\|_Y$ . Vogliamo mostrare che  $x_k \rightarrow \bar{x}$  in  $Y$ . Poiché  $\|x_n - x_m\|_{\ell^2} \leq \|x_n - x_m\|_Y$  allora esiste  $\bar{x} \in \ell^2$  tale che  $x_k \rightarrow \bar{x}$  in  $\ell^2$  per completezza di  $\ell^2$ . Poste  $y_k(n) = nx_k(n)$ , evidentemente  $y_k$  è di Cauchy in  $\ell^2$ , dunque esiste  $\bar{y} \in \ell^2$  tale che  $y_k \rightarrow \bar{y}$ . Vogliamo ora mostrare che

$\bar{y}(n) = n\bar{x}(n)$ . Questo si può dire perché la convergenza in  $\ell^2$  implica la convergenza puntuale, e per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha che  $y_k(n) = nx_k(n)$

5. Sia  $\{x_k\}$  limitata in  $Y$ . Allora  $\exists M > 0 : \|x_k\|_Y^2 \leq M$ . Vogliamo trovare una sottosuccessione  $\{x_{k_j}\} \subseteq \{x_k\}$  tale che  $x_{k_j} \xrightarrow{\ell^2} \bar{x} \in \ell^2$ . Ora usando un risultato che ancora non abbiamo dimostrato, la **compattezza debole**, diciamo che  $\exists \bar{x} \in \ell^2$  e una sottosuccessione tale che

$$\langle y, x_{k_j} \rangle \rightarrow \langle y, \bar{x} \rangle \quad \forall y \in \ell^2$$

(reindicizziamo per comodità i  $k$  a indicare  $k_j$ , per alleggerire la notazione) Fisso  $n \in \mathbb{N}$  e prendo  $y(i) = (i == n)$ . Allora otteniamo dalla precedente che  $\langle y, x_k \rangle = x_k(n) \rightarrow \bar{x}(n) = \langle y, \bar{x} \rangle$ . Vogliamo ora mostrare che la convergenza è in  $\ell^2$

$$\begin{aligned} \|x_k - \bar{x}\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 = \sum_{n=1}^m |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 + \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^2 |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 \end{aligned}$$

osservo ora che  $n^2 |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 \leq n^2 (|x_k(n)| + |\bar{x}(n)|)^2 \leq 2n^2 |x_k(n)|^2 + 2n^2 |\bar{x}(n)|^2$

Prima di proseguire vogliamo dire che  $\bar{x} \in Y$ . Abbiamo che

$$nx_k(n) \rightarrow n\bar{x}(n) \implies n^2 |x_k(n)|^2 \rightarrow n^2 |\bar{x}(n)|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per il lemma di Fatou, abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\bar{x}(n)|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_k(n)|^2 \leq M$$

possiamo ora proseguire la disuguaglianza precedente

$$\begin{aligned} \|x_k - \bar{x}\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=1}^m |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^2 |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^m |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 + \frac{4}{(m+1)^2} M \end{aligned}$$

Infine fisso  $\varepsilon > 0$  e prendo  $m \in \mathbb{N} : \frac{4M}{(m+1)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $\bar{k} = \bar{k}(\varepsilon, m)$  tale che anche la somma troncata del primo addendo sia minore di  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Concludiamo che

$$\|x_k - \bar{x}\|_{\ell^2}^2 < \varepsilon$$

e dunque  $x_k \rightarrow \bar{x}$  in  $\ell^2$

Nell'esercizio precedente abbiamo che similmente si comporterebbe anche

$$Y_\alpha = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} |x(n)|^2 < +\infty \right\} \quad \text{con } \alpha \in (0, 1)$$

Riprendendo l'operatore  $T$  definito nell'esercizio 0.2, abbiamo che  $T(\ell^2) \neq \ell^2$ .

Poiché  $T$  è iniettivo, definiamo  $A = T^{-1}$  come  $(Ax)(n) = nx(n)$ . Ovviamente il dominio di  $A$  non è tutto  $\ell^2$ , ma

$$A : D(A) \longrightarrow \ell^2$$

$$D(A) = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

ossia  $Y$  dell'esercizio 0.2. Ma allora  $A$  è lineare ma non limitato, infatti

$$\|Ax\|_{\ell^2}^2 = \|x\|_Y^2 \not\leq C\|x\|_{\ell^2}^2$$

**Corollario 0.2.3.1.** *Sia  $X$  uno spazio normato. Allora*

$$\|x\| = \sup_{f \in X'; \|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

che è in realtà un massimo

*Dimostrazione.* Prendo  $x \neq 0$ ,  $|\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$ ,  $\forall f \in X'$  e quindi anche

$$\sup_{f: \|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

preso ora  $f \in \mathcal{F}(x)$ , abbiamo che  $\langle f, x \rangle = \|x\|^2$  e  $\|f\|_{X'} = \|x\|$ . Prendiamo ora  $f_1 = \frac{f}{\|x\|}$  e dunque  $\|f_1\|_{X'} = 1$  e  $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$  ne consegue che il sup è un max ed è raggiunto da  $f_1$   $\square$

### Definizione 0.2.3: Stretta convessità

Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato. Allora  $(X, \|\cdot\|)$  è **strettamente convesso** se, dati  $x, y \in X$

$$x \neq y \text{ e } \|x\| = \|y\| = 1 \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

**Esempio 0.2.2.**  $\mathbb{R}^2$  è strettamente convesso in norma  $p$  per  $p \in (1, \infty)$

**Esempio 0.2.3** (Spoiler). Gli spazi di Hilbert sono strettamente convessi

**Proposizione 0.2.4.** *Unicità in Hahn-Banach Sia  $X$  uno spazio normato tale che  $X'$  sia strettamente convesso. Allora dato  $X_0 \subseteq X$  sottospazio e  $g \in X'_0$ ,*

$$\exists! f \in X' : f \text{ estende } g ; \|f\|_{X'} = \|g\|_{X'_0}$$

*Dimostrazione.* Siano  $f_1$  e  $f_2$  due estensioni di  $g$ . Se  $g \equiv 0$  allora necessariamente  $f_1 = f_2 \equiv 0$ .

Assumo che  $\|g\|_{X'_0} = \|f_1\|_{X'} = \|f_2\|_{X'} = 1$ . Allora

$$\frac{f_1 + f_2}{2}|_{X'_0} = g \implies \left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| \geq \|g\|_{X'_0} = 1$$

allora dalla contropositiva della stretta convessità, concludiamo che  $f_1 = f_2$   $\square$

### Definizione 0.2.4: Spazio Separabile

$X$  spazio metrico è detto **separabile** se esiste  $DCX$  tale che

1.  $D$  è numerabile
2.  $D$  è denso in  $X$

**Proposizione 0.2.5.** *Se  $X$  è separabile e  $M_0 \subseteq X$  allora  $M_0$  è separabile.*

*Dimostrazione.*  $M_0 \cap D$  è numerabile e denso in  $M_0$   $\square$



**Teorema 0.2.6**

Sia  $X$  uno spazio normato tale che  $X'$  è separabile. Allora  $X$  è separabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  numerabile e chiuso in  $X'$ . Allora

$$\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X : |\langle f_n, x_n \rangle| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|_{X'}$$

per la definizione di norma duale.

Assumo momentaneamente che  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , allora

$$D = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

che è numerabile in quanto unione numerabile di numerabili (insiemi  $\{\sum_{i=1}^n \alpha_k x_k, \alpha_k \in \mathbb{Q}\} \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$  per  $n$  fissato).

Mostriamo ora la densità. Consideriamo l'insieme

$$D = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

e chiaramente  $\overline{D} = \overline{Y}$  dunque dobbiamo solo dimostrare  $\overline{Y} = X$ . Mostriamo la condizione equivalente che se  $f \in X'$  e  $f \equiv 0$  su  $Y$ , allora  $f \equiv 0$  su tutto  $X$ . A tal scopo fissiamo  $\varepsilon > 0$  e troviamo  $f_n \in X'$  tale che (con  $\|x_n\| = 1$ )

$$\|f_n - f\|_{X'} \leq \varepsilon \implies \frac{1}{2} \|f_n\|_{X'} \leq |\langle f_n, x \rangle| = |\langle f_n - f, x_n \rangle + \langle f, x_n \rangle| \leq \|f_n - f\|_{X'} \leq \varepsilon$$

ma allora

$$\|f\|_{X'} \leq \|f_n - f\|_{X'} + \|f_n\|_{X'} \leq 3\varepsilon$$

e per arbitrarietà di  $\varepsilon$  concludiamo che  $f \equiv 0$  su  $X$

Il caso complesso è analogo, ma prendendo  $\alpha_k \in \mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ . □

**Esempio 0.2.4.**  $c_{00}$  è denso in  $\ell^p$  per  $p \in [1, +\infty)$ . Allora preso

$$D = \{x \in c_{00} : x(n) \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

si ha che  $\overline{D} = \overline{c_{00}} = \ell^p$

**Esercizio 0.2.8**

Mostrare che  $c_0$  e  $c$  sono separabili con la  $\|\cdot\|_\infty$

**Proposizione 0.2.7.**  $\ell^\infty$  *non* è separabile

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che se  $D$  è un sottoinsieme numerabile di  $\ell^\infty$  allora non può essere denso. Sia  $D = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ora consideriamo  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dato da

$$x(n) = \begin{cases} 1 + y_n(n) & |y_n(n)| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dunque chiaramente  $\|x\|_\infty \leq 2$  e in particolare  $x \in \ell^\infty$  ma allora

$$\|x - y_k\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y_k(n)| \geq |x(k) - y_k(k)| \geq 1$$

dove l'ultima disuguaglianza è perché se  $|y_k(k)| \leq 1 \implies |x(k) - y_k(k)| = 1$  e se  $|y_k(k)| > 1$  allora  $|x(k) - y_k(k)| = |y_k(k)|$ .

Concludiamo che  $D$  non può essere denso in  $\ell^\infty$  e dunque  $\ell^\infty$  non è separabile. □

### 0.3 Forme geometriche di Hahn-Banach

Ora supponiamo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Sia  $X$  uno spazio normato e  $f \in X'$ . Allora un iperpiano è definito come  $\ker f$ . Se vogliamo generalizzare a iperpiani non sottospazi vettoriali, possiamo prendere, preso un  $\alpha \in \mathbb{R}$ , lo spazio

$$H = \{x \in X : \langle f, x \rangle = \alpha\} =: [f = \alpha]$$

Allora due insiemi  $A, B \subseteq X$  sono separati in senso largo da  $[f = \alpha]$  se

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha \forall x \in A \\ f(x) &\geq \alpha \forall x \in B \end{aligned}$$

e dico che l'iperpiano  $[f = \alpha]$  separa in senso stretto  $A$  e  $B$  se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha - \varepsilon \forall x \in A \\ f(x) &\geq \alpha + \varepsilon \forall x \in B \end{aligned}$$

#### Teorema 0.3.1: Hahn-Banach, prima forma geometrica

Sia  $X$  spazio normato,  $A, B \subseteq X$  convessi, non vuoti e disgiunti. Allora se  $A$  è aperto esiste  $f \in X'$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $[f = \alpha]$  separa  $A$  e  $B$  in senso largo

*Osservazione.* Non è migliorabile (avere senso stretto) neanche nel caso a dimensione finita. Ad esempio su  $\mathbb{R}$  posso avere  $A = \{x > 0\}$  e  $B = \{x \leq 0\}$  che sono separati da  $\{0\}$  ma solo in senso largo.

#### Definizione 0.3.1: Funzionale di Minkowski

Sia  $X$  uno spazio normato.  $C$  convesso che contiene lo 0. Sia

$$p(x) = \inf \left\{ r > 0 : \frac{x}{r} \in C \right\} \quad \text{il funzionale di Minkowski}$$

viene anche detto *gauge* di  $C$ .

*Osservazione.* Il funzionale di Minkowski  $p$  ha diverse proprietà

1.  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$  per ogni  $x \in X$  e per ogni  $\lambda > 0$
2.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  per ogni  $x, y \in X$
3.  $\exists m > 0 : 0 \leq p(x) \leq m\|x\|$  per ogni  $x \in X$
4.  $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$

**Lemma 0.3.2** (Separazione di un convesso non vuoto da un punto esterno). *Sia  $C \subseteq X$  convesso aperto non vuoto e sia  $x_0 \notin C$ . Allora  $\exists f \in X'$  tale che*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in C$$