# Appunti di Geometria 2

Github Repository: `0xke/appunti/Geo2`

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Lidia Stoppino e Leone Slavich

Il corso è diviso in due parti: geometria differenziale (tenuto da Slavich) e gruppo fondamentale (tenuto dalla Stoppino). Ci sono esercitazioni di geometria differenziale. Ci sono vari libri consigliati:

- Abate - Tovena, *Curve e superfici*, Springer
- M. D. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall
- E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri
- Dispense del prof. Ghigi (sulle quali è stato disegnato il corso, almeno per la parte di geometria differenziale)

# Capitolo 1

# Geometria Differenziale

Il corso di geometria differenziale studierà curve e superfici in $\mathbb{R}^3$ definiti **analiticamente** tramite funzione $C^\infty$ *(lisce)*. Studiamo la **geometria locale** e infine (verso la fine del corso) la **geometria globale**, in particolare il teorema di Gauss-Bonnet.

## 1.1 Definizioni e proprietà iniziali

### 1.1.1 Funzioni lisce

Sia $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto (anche possibilmente $a = -\infty$ o $b = +\infty$). Sia

$$C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ è continua}^{1} \text{ su } I\}$$

**Definizione 1.1.1: Derivabile**

Diciamo che $f \in C^0(I)$ è derivabile se $\forall x_0 \in I$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c =: f'(x_0) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ora procediamo definendo ricorsivamente le funzioni $C^k(I)$.

**Definizione 1.1.2: Classe $C^k$**

Per ogni $k \geq 1$, diciamo che $f \in C^k(I)$ se $f$ è derivabile e $f' \in C^{k-1}(I)$

Dunque, ad esempio $f \in C^1(I)$ se $f$ è derivabile su $I$ e la sua derivata $f'$ è continua su $I$. Detto più colloquialmente, una funzione $f \in C^k(I)$ è una funzione derivabile (almeno) $k$ volte, e tale che la sua derivata $i$-esima $f^{(i)}$ è continua per ogni $i = 0, \ldots, k$.

*Osservazione.*

$$C_0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \cdots \supset C^i \supset C^{i+1} \supseteq \ldots$$

**Definizione 1.1.3: funzioni lisce**

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I) = \text{insieme delle } \textbf{funzioni lisce}$$

**Teorema 1.1.1: Proprietà delle classi $C^k$**

Sia $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Se $f, g \in C^k(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

1. $f + g \in C^k(I)$
2. $\lambda f \in C^k(I)$
3. $f \cdot g \in C^k(I)$

*Dimostrazione.* 1. e 2. sono semplici. Per 3. si procede per induzione su $k$.

Nel caso base $k = 0$ il prodotto di due funzioni continue è anch'esso una funzione continua, che è vero.

Supponiamo ora che 3. valga per $k - 1$. Siano $f, g \in C^k(I)$. Allora $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ che è somma di funzioni $C^{k-1}$ per ipotesi induttiva e perché $C^k \subset C^{k-1}$, e dunque $(f \cdot g)' \in C^{k-1}$ da cui segue che $f \cdot g \in C^k$.

Infine possiamo concludere per $k = +\infty$ perché vale per tutti i $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Dal teorema 1.1.1 segue che $C^k(I)$ è uno spazio vettoriale (con operazione di somma e moltiplicazione per scalare) e inoltre $C^k(I)$ contiene le funzioni costanti e allora $C^k(i)$ con operazioni di somma e moltiplicazione puntuale è un anello. Da queste due segue che $C^k(I)$ è una $\mathbb{R}$-algebra.

**Esempio 1.1.1.** Esistono funzioni **lisce** che **non** sono **analitiche**. In particolare esistono funzioni lisce che sono nulle su un aperto ma non nulle dappertutto (differentemente da quanto succede sulle funzioni olomorfe). Un esempio di tale funzione è

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Questa è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ che non può essere analitica perché contraddirebbe il teorema del prolungamento. Similmente si possono costruire funzioni costanti in

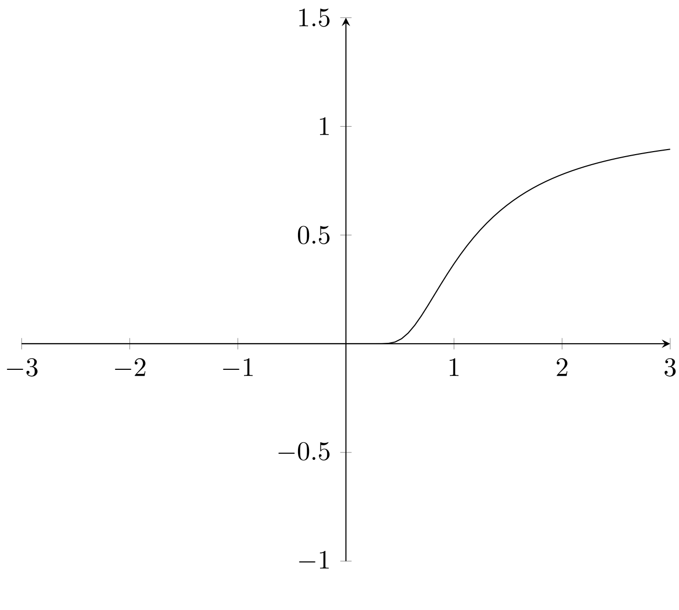


Figura 1.1: Grafico della funzione $f(x)$ dell'esempio 1.1.1

aperti, raccordate in modo $C^\infty$ e ovviamente non analitiche.

**Proposizione 1.1.2** (Composizione)**.** *La composizione di funzioni $C^\infty$ è $C^\infty$. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$. Allora se $f \in C^\infty(I)$ e $g \in C^\infty(J)$ e $f(I) \subseteq J$ (ossia si possono comporre), allora $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è ben definita e*

$$g \circ f \in C^\infty(I)$$

*Dimostrazione.* Lo dimostriamo per $k \in \mathbb{N}$ invece che $k = \infty$, segue naturalmente il caso enunciato. Per $k = 0$ è ovvio.

Supponiamo che valga per $k - 1$. Allora siano $f, g \in C^k$ e tali che $f(I) \subseteq J$. Allora $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ che è prodotto di funzioni $C^{k-1}$ per ipotesi induttiva e per il teorema 1.1.1 segue che $g \circ f \in C^k(I)$. □

### 1.1.2 Diffeomorfismi

**Definizione 1.1.4: Diffeomorfismo**

Un diffeomorfismo è un isomorfismo nella categoria delle funzioni lisce (su $\mathbb{R}$ nel nostro caso).

Informalmente, un diffeomorfismo è un omeomorfismo $C^\infty$.

**Definizione 1.1.5: Diffeomorfismo**

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti in $\mathbb{R}$. Allora $f : I \to J$ è un **diffeomorfismo** se

1. $f \in C^\infty(I)$
2. $f$ è biettiva
3. $f^{-1} \in C^\infty(J)$

*Osservazione.* La terza condizione **non** è ridondante. Infatti sia $I = J = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^3$ che è chiaramente $C^\infty$ e biunivoca. Tuttavia $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0, poiché $f'(0) = 0$ e ${f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ se $f(x) = y$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che ${f^{-1}}'(y)$ sia ben definita.

*Osservazione.* Se $I$ e $J$ sono intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e $f : I \to J$ è diffeomorfismo, allora $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Infatti sappiamo che

$${f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad f(x) = y \quad \forall x \in J \tag{1.1.1}$$

dunque $f'(x)$ non può essere nullo, poiché significherebbe che $f^{-1}$ non è derivabile in $y = f^{-1}(x)$.

**Lemma 1.1.3.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Allora $f(I) = J$ è un intervallo aperto e $f : I \to J$ è un diffeomorfismo.*

*Dimostrazione.* Sia $f$ come nell'enunciato. Allora $f' : I \to \mathbb{R}$ è continua su $I$ e non si annulla mai. Segue che $f'$ ha segno costante su $I$ ($f' > 0$ oppure $f' < 0$).

Assumiamo $f' > 0$ su $I$. Allora $f$ è strettamente crescente e dunque iniettiva. Allora $f : I \to f(I) =: J$ è biettiva. Inoltre $J$ è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$. Infatti è chiaramente intervallo (è connesso) in quanto immagine continua di un connesso (intervallo). Sia ora $y_0 \in J$ e sia $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = y_0$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$. Poiché $f$ è strettamente crescente, segue che

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$$

sapendo già che $J$ è un intervallo, segue che

$$I \supseteq [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)] \text{ è un intorno di } y_0$$

Rimane solo da vedere che la funzione $f^{-1} : J \to I$ è $C^\infty$. Notiamo intento che $f^{-1}$ è continua, poiché $f$ è aperta. Inoltre sappiamo che $f^{-1}$ è derivabile poiché è l'inversa di una funzione derivabile con derivata e vale l'equazione (1.1.1) per ogni $y \in J$.

Sia $u : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definita da $u(x) = 1/x$ è un diffeomorfismo e da 1.1.1 abbiamo che

$$f^{-1\prime} = u \circ f' \circ f^{-1}$$

e quindi se assumiamo induttivamente che se $f^{-1} \in C^k$ allora ne consegue dalla proposizione 1.1.2 che $f^{-1\prime} \in C^k$ e dunque $f^{-1} \in C^{k+1}$

□

### 1.1.3 Curve

**Definizione 1.1.6: Curva parametrica**

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una funzione $t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ con $I$ intervallo aperto. Allora se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono funzioni lisce la funzione $\alpha$ è detta **curva** parametrizzata in $\mathbb{R}^3$