

# Appunti di Analisi 3 - Analisi Complessa

Github Repository: [Oxke/appunti/Analisi\\_Complexa](https://github.com/Oxke/appunti/Analisi_Complexa)

Primo semestre A.A. 2024 - 2025, prof. Enrico Vitali

## Indice

<b>1</b>	<b>Convergenza puntuale e uniforme</b>	<b>2</b>
1.1	Scambi di limite, derivate, integrali . . . . .	4
1.2	Serie di funzioni . . . . .	5
1.3	Richiami su limiti e serie . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Analisi complessa</b>	<b>12</b>
2.1	Funzioni analitiche su $\mathbb{R}$ . . . . .	12
2.2	$\mathbb{C}$ -differenziabilità . . . . .	14
2.3	$\mathbb{C}$ -differenziabilità delle funzioni analitiche . . . . .	16
2.4	Integrazione su Curve . . . . .	17
2.5	Sviluppo di <b>Laurent</b> . . . . .	29
2.6	Residui . . . . .	39
2.7	Indice di avvolgimento . . . . .	40
2.8	Teorema dei residui . . . . .	43
2.9	Altri risultati . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Richiamo delle forme differenziali</b>	<b>52</b>

# 1 Convergenza puntuale e uniforme

Sia  $E$  un'insieme (non vuoto) e  $\{f_n\}$  una successione di funzioni  $E \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $E \rightarrow \mathbb{R}^n$  o  $E \rightarrow \mathbb{C}$ ). Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Definizione 1.1

Diciamo che  $\{f_n\}$  converge **puntualmente** ad  $f$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

**Esempio 1.1.**  $E = \mathbb{R}$  e  $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ ,  $f_n \rightarrow 0$  su  $\mathbb{R}$

**Esempio 1.2.**  $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2 \rightarrow x^2$

**Esempio 1.3.**  $f_n(x) = x^2 - \frac{1}{n}$

**Esempio 1.4.**  $f_n(x) = e^{x-n} f_n \rightarrow 0$

**Esempio 1.5.**  $E = [0, 1]$ ,  $f_n(x)$  funzione che è a triangolo con vertici  $(\frac{1}{4n}, 0)$ ,  $(\frac{1}{2n}, 1)$ ,  $(\frac{1}{n}, 0)$ . Allora  $f_n \rightarrow 0$

In questi esempi l'idea è che per ogni  $\varepsilon$  esiste un  $n_\varepsilon$  tale che per  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $f_n(x) < \varepsilon$ . La domanda è se si riesce a esprimere  $n_\varepsilon$  senza che dipenda da  $x$ . Nell'esempio di  $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$  si può perché  $f_n$  ha un massimo in  $x = 0$ , in tal caso infatti se prendo  $n_\varepsilon$  tale che  $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$  allora  $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ .

Nell'esempio 1.2 invece vogliamo un  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  ossia  $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x^2}| \leq \varepsilon$ . Da questo troviamo che

$$\frac{1}{n^2} - \varepsilon \leq \frac{2x}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \varepsilon$$

Ma è sempre possibile, per qualsiasi  $\frac{1}{n^2} + \varepsilon$  è possibile trovare un  $x$  tale che sia maggiore, quindi non è possibile non esprimere  $n_\varepsilon$  anche in funzione di  $x$ .

## Definizione 1.2

Sia  $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $E$  se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

*Osservazione.* La condizione della definizione di convergenza uniforme è equivalente a richiedere che  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Da questo concludiamo che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Allora con questa nuova osservazione è facile notare la non convergenza uniforme dell'esempio 1.2. Infatti se  $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$  e  $f(x) = x^2$  allora  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)| = |2 - \frac{1}{n}| \rightarrow 2 > 0$ .

Abbiamo però che converge uniformemente sugli insiemi limitati (esercizio). Similmente nell'esempio 1.4  $f_n$  converge uniformemente sugli insiemi  $(-\infty, a]$  infatti  $0 \leq f_n(x) \leq e^{a-n} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$

Geometricamente la convergenza uniforme dice che il grafico di  $f_n$  è contenuta in un intorno tubolare arbitrario di  $f$  per  $n$  sufficientemente grande.

**Proposizione 1.1** (Criterio di Cauchy / completezza di  $\mathbb{R}$ ). Se  $\{a_n\}$  è una successione di numeri reali si ha:  $a_n$  converge se e solo se  $a_n$  è una successione di Cauchy, ossia se  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  tale che  $\forall n_1, n_2 \geq n_\varepsilon$ ,  $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$

**Teorema 1.2: Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme**

Siano  $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f_n \rightarrow f$  in  $E$ . Allora la convergenza è uniforme in  $E$  se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$  Sia  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $E$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $n_\varepsilon$  tale che (convergenza uniforme)  $\forall k \geq n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in E, |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  allora presi  $n, m \geq n_\varepsilon$  ho che  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$  Valga la condizione di Cauchy. Allora  $\forall x \in E$  la successione  $\{f_n(x)\}$  è una successione di Cauchy, quindi è convergente, quindi  $\exists f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n \rightarrow f$ . Allora dalla condizione di Cauchy, tenendo  $n$  fisso e facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene esattamente la convergenza uniforme.

□

Fun fact: esistono dei cosiddetti “Spazi uniformi”, che sono spazi topologici ma non metrici.

**Esempio 1.6.** Sia  $f_n = \frac{n^2 - x}{n^3 + e^{nx}}$ . È evidente per  $x \in \mathbb{R}$  che  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

C'è convergenza uniforme sui limitati, infatti se  $|x| \leq M$  allora  $|f_n(x)| \leq \frac{n^2 + M}{n^3} \rightarrow 0$ . Consideriamo ora  $x \geq 0$  (esercizio). Invece per  $x \leq 0$ , posso prendere per ogni  $n$   $x_n = -n^4$  e allora ottengo che  $f_n(x_n) \rightarrow +\infty$

*Osservazione.* Sia  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, suppongo che  $\{f_n\}$  converga uniformemente a  $f$  in  $(a, b)$ . Allora converge uniformemente in  $[a, b]$

*Dimostrazione.* Per Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in (a, b), \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Per  $x \rightarrow a$  abbiamo per continuità che  $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$  per  $n, m \geq \bar{n} \in \mathbb{N}$ , quindi preso  $\tilde{n} = \max n_\varepsilon, \bar{n}$  si ha che  $f_n$  soddisfa il criterio di Cauchy in  $[a, b]$  e quindi converge uniformemente. □

Da questa osservazione noto anche che vale il contrappositivo: se  $f_n$  non converge uniformemente in  $[a, b]$  non può neanche convergere uniformemente in  $(a, b)$

**Esempio 1.7.**  $f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 \left(x - \frac{q}{\sqrt{n}}\right)^2}$ , allora ho che  $f_n(0) = \frac{1}{1 + n} \rightarrow 0$ , e per  $x \neq 0$  pure, infatti

$$0 \leq \frac{1}{1 + n^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \stackrel{\text{definitivamente}}{\leq} \frac{1}{1 + n^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2} \rightarrow 0$$

è convergente uniformemente su tutto  $\mathbb{R}$

Sia  $E$  un insieme non vuoto e sia  $\mathcal{B}(E)$  l'insieme delle funzioni reali e limitate su  $E$ .

### Definizione 1.3: Norma dell'estremo superiore

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione. Allora

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$$

è la norma dell'estremo superiore (anche denotata semplicemente  $\|f\|$ ).

*Buona definizione.* Perché sia una buona definizione, serve che sia una norma.

- a.  $\|f\| \geq 0$  e  $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- b.  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- c.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

□

**Proposizione 1.3.**  $\mathcal{B}(E)$  è uno spazio metrico normato con la norma dell'estremo superiore, e quindi distanza  $d(f, g) = \|f - g\|$

*Dimostrazione.* ovvio

□

## 1.1 Scambi di limite, derivate, integrali

**Esempio 1.8.** Dimostrare che se  $f \in C^0([a, b] \times [c, d])$  a valori reali e

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad y \in [c, d]$$

Allora  $g$  è continua in  $[c, d]$

Infatti  $\forall \bar{y} \in [c, d]$  abbiamo che comunque presa  $y_n \rightarrow \bar{y}$  chiaramente  $g(y_n) \rightarrow g(\bar{y})$ . Ponendo ora  $f_n = f(\cdot, y_n)$ . Allora vogliamo mostrare che  $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot, \bar{y})$  uniformemente in  $[a, b]$ . Poiché  $f$  è uniformemente continua in  $[a, b] \times [c, d]$  perché continua su un compatto, allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x, x' \in [a, b]$  e  $\forall y, y' \in [c, d]$  se  $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta$  allora  $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$ . Allora fissato  $\varepsilon > 0$  sia  $\delta$  come sopra; sia quindi  $n_\varepsilon$  tale che  $n \geq n_\varepsilon \implies |y_n - \bar{y}| \leq \delta$  e quindi, per ogni  $x \in [a, b]$  abbiamo  $|(x, y_n) - (x, \bar{y})| = |y_n - \bar{y}| \leq \delta$ , da cui  $|f_n(x, y_n) - f(x, \bar{y})| \leq \varepsilon$ . Abbiamo quindi mostrato l'uniforme convergenza.

**Proposizione 1.4** (Derivation under the integral sign). Sia  $f \in C^1([a, b] \times [c, d])$  e  $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  per  $y \in [c, d]$ , allora

$$g \in C^1([c, d]) \text{ e } g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $\bar{y} \in [c, d]$  e consideriamo

$$\frac{g(y) - g(\bar{y})}{y - \bar{y}} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} dx = \int_a^b \varphi(x, y) dx$$

con  $\varphi(x, y)$  l'integrando. Si appiama che  $\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \varphi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$  e vogliamo mostrare che questa convergenza è uniforme al variare di  $x$ . Per il teorema di Lagrange si ha che

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_{x,y}) \quad \xi_{x,y} \in (\bar{y}, y) \text{ oppure } (\bar{y}, y)$$

Poiché  $\frac{\partial f}{\partial y}$  è uniformemente continua in  $[a, b] \times [c, d]$  allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [a, b] \text{ e } \forall y, y' \in [c, d]$$

$$|(x, y) - (x', y')| < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') \right| < \varepsilon$$

e ora prendiamo come coppie  $(x, \bar{y})$  e  $(x, \xi_{x,y})$  e abbiamo

$$|(x, \xi_{x,y}) - (x, \bar{y})| = |\xi_{x,y} - \bar{y}| \leq |y - \bar{y}|$$

Ora come prima ciò dimostra che  $\varphi(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$  uniformemente in  $[a, b]$  e quindi

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

□

## 1.2 Serie di funzioni

I risultati visti per le successioni di funzioni danno luogo ad analoghi risultati per le serie di funzioni. Sia quindi  $E$  un insieme  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  (oppure  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}$ ) e si considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in E$$

che è una serie di funzioni.

### Definizione 1.4

Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge puntualmente in  $E$  se la successione delle somme parziali converge puntualmente in  $E$ , ossia se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente in  $E$  se la successione delle somme parziali converge uniformemente in  $E$ ,

Ne consegue che alcuni risultati hanno rispettivi analoghi, ad esempio

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente in  $E$  se e solo se

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

converge uniformemente in  $E$  (definizione), ossia questo vale se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall N, M \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |s_N(x) - s_M(x)| < \varepsilon$$

Ora assumiamo senza perdita di generalità che  $N \leq M$ , allora chiamiamo  $M = N + p$  e otteniamo che l'ultima eguaglianza si scrive come

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Otteniamo

**Proposizione 1.5** (Criterio di Cauchy). *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente in  $E$  se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, p \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (1.1)$$

**Corollario 1.5.1.** *Condizione necessaria affinché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converga uniformemente in  $E$  è che  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente in  $E$*

*Dimostrazione.* prendiamo  $p = 1$  in (1) e otteniamo  $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon$  ossia  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente in  $E$   $\square$

**Esempio 1.9.** Supponiamo ora che esista una successione numerica  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$  per ogni  $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

vogliamo mostrare che allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente in  $E$ , usando (1), infatti abbiamo

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è utilizzato il criterio di Cauchy per le serie numeriche.

### Definizione 1.5: Convergenza totale

Si dice che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge **totalmente** in  $E$  se esiste  $\{a_n\}$  in  $\mathbb{R}$  tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$  per ogni  $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Per quanto visto prima quindi

**Proposizione 1.6.** *Convergenza totale implica convergenza uniforme, e notando dalla dimostrazione prima abbiamo anche che implica la convergenza assoluta uniforme.*

**Esempio 1.10.** Non vale il contrario, un esempio di serie uniformemente convergente ma non totalmente convergente è

$$\sum_{n=1}^{\infty} -1 \cdot \frac{(-1)^n}{n}$$

dove  $f_n(x)$  è costante per ogni  $n$ . Allora la serie converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  ovviamente perché è costante e converge in quanto a segno alternato, ma non converge totalmente perché la serie armonica diverge.

**Esempio 1.11.** Sia  $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ , per  $x \in \mathbb{R}$ . Allora usiamo il criterio della radice ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

quindi per  $|x| < 1$  la serie converge assolutamente, per  $|x| > 1$  la serie diverge, per  $x = -1$  la serie è la serie armonica che diverge, per  $x = 1$  la serie è una serie a segni alterni che converge.

Concludiamo quindi che la serie converge puntualmente in  $(-1, 1]$  e per ogni  $0 < \delta < 1$  la serie converge uniformemente in  $[-\delta, \delta]$ , infatti

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \leq \delta^n n$$

la cui serie converge, quindi la serie converge totalmente.

Naturalmente però la serie non converge totalmente in  $[0, 1]$  poiché

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

ma comunque la serie converge uniformemente in  $[0, 1]$ , infatti usiamo il criterio di Cauchy.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq |s_{n+p} - S(x)| + |S(x) - s_n(x)| < \frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{x^n}{n}$$

che converge a 0 per  $n \rightarrow +\infty$  e si è usato il fatto che se  $S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$  è una serie convergente a segni alterni, con  $a_n > 0, a_n \rightarrow 0$  allora  $|S - s_n| \leq a_{n+1}$

Procediamo a chiederci se la serie converge uniformemente in  $(-1, 0]$ . Utilizziamo allora la seguente osservazione dedotta direttamente dalle successioni

*Osservazione.* Sia  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x), f_i \in C^0([a, b])$ . Se la serie converge uniformemente in  $(a, b]$  allora converge uniformemente in  $[a, b]$  (in particolare converge in  $x = a$ )

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $s_n(x)$  converge uniformemente in  $(a, b]$  e  $s_n$  sono funzioni continue in  $x = a$ , quindi per il risultato che avevamo già per le successioni (in breve basta enunciare il criterio di Cauchy e usare la continuità in  $x = a$ ) otteniamo che la serie converge uniformemente in  $[a, b]$   $\square$

Ne concludiamo che la serie non può convergere uniformemente in  $(-1, 0]$  altrimenti convergerebbe uniformemente in  $[-1, 0]$  ma sappiamo che in  $-1$  non abbiamo neanche convergenza puntuale.

**Esempio 1.12.** Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

### 1.3 Richiami su limiti e serie

**Proposizione 1.7.** Sia  $a_n$  una successione di numeri reali positivi. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*Dimostrazione.* Sia  $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Se  $L = +\infty$  non c'è nulla da dimostrare. Sia allora  $L < +\infty$ . Fissato un  $\varepsilon > 0$  quindi esiste  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$  si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon$$

Allora iterando otteniamo

$$a_n \leq (L + \varepsilon)^{n - n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon} \implies \sqrt[n]{a_n} \leq (L + \varepsilon)^{1 - \frac{n_\varepsilon}{n}} \sqrt[n]{a_{n_\varepsilon}} \rightarrow L + \varepsilon$$

Per  $n \rightarrow \infty$ , ora per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$  otteniamo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Similmente si dimostra anche l'altra uguaglianza, quella centrale è ovvia.  $\square$

**Esempio 1.13.** Sia  $a_n = n$ . Allora poiché  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$  abbiamo che anche  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

Sia  $a_n = n!$ . Allora  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1 \rightarrow +\infty$  e quindi anche  $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$

Sia  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

e quindi  $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$ .

*Osservazione.* In realtà (e potremmo vederlo più tardi), l'approssimazione di Stirling ci dice

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ora procediamo vedendo un criterio di convergenza (non assoluta) che sarà il criterio di convergenza di Abel. Procediamo a passi più piccoli.

#### Lemma 1.8: Disuguaglianza di (Brunacci) Abel

Siano  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \mathbb{C}$  e siano  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell \in \mathbb{C}$ . Poniamo ora

$$w_m = \sum_{i=0}^m \zeta_i \quad m = 0, 1, \dots, \ell$$

Sia  $M > 0$  tale che

$$|w_m| \leq M \quad \forall m = 0, 1, \dots, \ell$$

Allora

$$\left| \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i \right| \leq (|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \dots + |\gamma_{\ell-1} - \gamma_\ell| + |\gamma_\ell|)M$$

*Dimostrazione.*

$$\sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i = \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i (w_i - w_{i-1}) = \sum_{i=0}^{\ell} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) w_i$$

Dove si intende che  $\gamma_{\ell+1} = 0$  e  $w_{-1} = 0$ . Ora semplicemente per disuguaglianza triangolare e applicando l'ipotesi definente  $M$  otteniamo la tesi.  $\square$

#### Teorema 1.9: primo criterio di convergenza di Abel

Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$  una serie numerica. Se

- $z_n \in \mathbb{C}$  (oppure in  $\mathbb{R}^N$ )
- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  è una serie le cui somme parziali sono limitate
- $\{c_n\}$  è una successione di numeri reali non crescente e infinitesima

allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$  converge.



*Dimostrazione.* Utilizziamo il criterio di convergenza di Cauchy. Fissiamo  $N, p \in \mathbb{N}$  e consideriamo

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M \sum_{n=N}^{N+p} |c_n - c_{n+1}| \quad (\text{diciamo } c_{N+p+1} = 0 \text{ per comodità notazionale})$$

Dove  $M$  è maggiorante per le somme parziali di  $z_n$ . Infatti abbiamo che

$$w_m = z_N + z_{N+1} + \dots + z_{N+m} = \sum_{i=0}^{N+m} z_n - \sum_{i=0}^{N-1} z_n$$

per cui effettivamente  $|w_m| \leq 2M$  e possiamo applicare la disuguaglianza di Abel.

Ora possiamo, sapendo che  $c_k \rightarrow 0$  da sopra, ottenere che la serie precedentemente trovata è telescopica per  $N$  sufficientemente grande e quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M |c_N| \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

e quindi per il criterio di Cauchy la serie converge.  $\square$

**Esempio 1.14.** Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad z \in \mathbb{C}$$

Allora se  $|z| > 1$  manca la condizione necessaria di convergenza.

Sia allora  $|z| \leq 1$ . Consideriamo prima il caso  $|z| < 1$ . Sia ha allora convergenza assoluta, perché

$$\frac{|z|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|z|^n} = |z| \frac{n}{n+1} \rightarrow 0$$

Consideriamo invece il caso  $|z| = 1$ . Se  $z = -1$  la serie non converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow -\infty$$

Ora consideriamo  $|z| = 1$  con  $z \neq -1$  e vogliamo applicare il criterio di Abel, con  $c_n = \frac{1}{n}$  e  $z_n = (-1)^{n+1} z^n$ . Chiaramente  $c_n$  è infinitesima non crescente reale. Inoltre

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_N| = \left| \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} z^i \right| = \left| \sum_{n=1}^N (-z)^N \right| = |z| \left| \frac{1 - (-z)^N}{1 - (-z)} \right| \leq \frac{z}{|1+z|}$$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Abel e la serie converge.

**Corollario 1.9.1** (Criterio di Leibniz). *Se una serie è a segni alterni del tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

*con  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n > 0$  non crescente. Allora abbiamo che  $z_n = (-1)^n$  e  $c_n = a_n$  soddisfano le ipotesi del criterio di Abel e quindi la serie converge.*

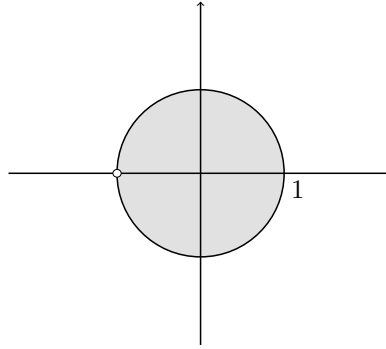


Figura 1: Punti del piano  $\mathbb{C}$  tali che la serie dell'esempio 2.2 converge

**Teorema 1.10: Secondo criterio di convergenza di Abel**

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$$

con

- $z_n \in \mathbb{C}$  (oppure in  $\mathbb{R}^N$ )
- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  è una serie convergente
- $\{c_n\}$  è una successione monotona e convergente

Allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$  converge.

*Dimostrazione.* Supponiamo  $c_n \rightarrow c$  non crescente. Allora

$$\sum_{n=0}^N c_n z_n = \sum_{n=0}^N (c_n - c) z_n + c \sum_{n=0}^N z_n$$

Ora per  $N \rightarrow \infty$  abbiamo che  $c_n - c \rightarrow 0$  decrescente e le somme parziali di  $z_n$  sono limitate, perché la serie converge. Quindi abbiamo che la prima serie converge per il primo criterio di Abel. Anche la seconda serie converge per ipotesi, quindi la tesi è dimostrata.  $\square$

Sappiamo che

$$\left( \sum_{n=0}^N a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^M b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{N+M} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} z^n$$

è il prodtto di polinomi. Quindi formalmente, se  $z = 1$  e  $N, M \rightarrow \infty$  otteniamo

**Definizione 1.6: Serie prodotto alla Cauchy**

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

che è detta serie prodotto alla Cauchy delle serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

### Teorema 1.11: Mertens + Cauchy

Se le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sono convergenti e almeno una è assolutamente convergente, allora la serie prodotto è convergente ed ha per somma il prodotto delle serie.

Se entrambe le serie sono assolutamente convergenti, allora tale è anche la serie prodotto.

Consideriamo serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \text{ con } c_n \in \mathbb{C} \text{ e } z, a \in \mathbb{C}$$

Abbiamo visto alcuni esempi:

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  converge se e solo se  $|z| < 1$
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ , converge se e solo se  $|z| \leq 1$  e  $z \neq -1$

In entrambi i casi (e vedremo in generale) la convergenza è nei punti di un disco (detto cerchio di convergenza) di centro  $z = a$ . Il comportamento sul bordo del cerchio varia da caso a caso.

### Teorema 1.12: Abel

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Se la serie converge in un punto  $z \in \mathbb{C}$  allora converge uniformemente su tutto il segmento di estremi  $a$  e  $z$ .

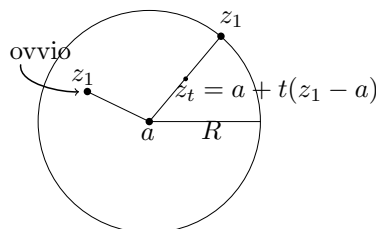


Figura 2: abel

*Dimostrazione.* Il teorema è significativo quando  $z_1 \in \partial D_R(a)$  Non è restrittivo supporre  $a = 0$ . Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (tz_1)^n$$

utilizziamo il criterio di Cauchy per le convergenze uniformi: fissiamo  $\varepsilon > 0$ , vogliamo avere che per un  $n_\varepsilon$  allora per ogni  $N \geq n_\varepsilon$ ,  $p \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, 1]$  si abbia che

$$\left| \sum_{m=N}^{N+p} \underbrace{t^m}_{\gamma_{m-N}} \underbrace{c_m z_1^m}_{\zeta_{m-N}} \right| < \varepsilon$$

$$\leq M(|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \dots + |\gamma_{p-1} - \gamma_p|)$$

con  $M$  un maggiorante per le somme parziali di  $c_n z_1^n$ . Ora poiché per ipotesi tale serie converge, esiste  $n_\varepsilon$  tale per cui per ogni  $N \geq n_\varepsilon$  e per ogni  $p \in \mathbb{N}$  si ha che

$$\left| \sum_{m=N}^{N+p} c_m z_1^m \right| \leq \varepsilon$$

ora poiché  $1 \geq t^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  abbiamo che la precedente disuguaglianza è soddisfatta per  $M = 1$ , quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} t^n c_n z_1^n \right| \leq t^N \varepsilon \leq \varepsilon$$

□

## 2 Analisi complessa

### 2.1 Funzioni analitiche su $\mathbb{R}$

#### Definizione 2.1: Funzione analitica

Sia  $I$  un intervallo aperto. Diciamo che una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è analitica se per ogni  $x_0 \in I$  esiste  $\delta > 0$  tale che su  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  la funzione sia esprimibile come somma di una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2.1)$$

Sia  $f$  come in (2); Sia  $R$  il raggio di convergenza della serie. Su ogni intervallo  $J$  tale che  $\overline{J} \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$  sappiamo che la serie converge totalmente. Consideriamo la serie delle derivate (cioè la *serie derivata*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza  $R$ , poiché

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}$$

Quindi la serie delle derivate è uniformemente convergente su ogni compatto di  $x_0 - R, x_0 + R$ .

**Lemma 2.1** (Teorema di derivazione per Serie). *Sia  $f = \sum f_n$  convergente e  $g = \sum f'_n$  uniformemente convergente. Allora  $f$  è derivabile e  $f' = g$ .*

Per il teorema di derivazione per serie,  $f$  è derivabile e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

A  $f'$  applichiamo lo stesso ragionamento visto su  $f$ :  $f'$  è derivabile e si ha che

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Procedendo induttivamente otteniamo che  $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$  e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

In particolare abbiamo che  $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$  e quindi la serie di potenze è la serie di Taylor di  $f$  centrata in  $x_0$ . Più precisamente

**Teorema 2.2**

Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  per  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , con  $a_n \in \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Allora  $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$  e la serie è la serie di Taylor di  $f$  centrata in  $x_0$ .

*Dimostrazione.* Vedasi sopra. □

Non è vero che ogni funzione  $C^\infty$  sia sviluppabile in serie di Taylor.

**Esempio 2.1.** Sia  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  per  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $f(0) = 0$ . Allora

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 & x = 0 \\ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

eccetera anche per le altre derivate si ha che  $f^{(k)}(0) = 0$ . Quindi la serie di Taylor centrata in 0 è la serie nulla, ma  $f \neq 0$  in alcun intorno di 0.

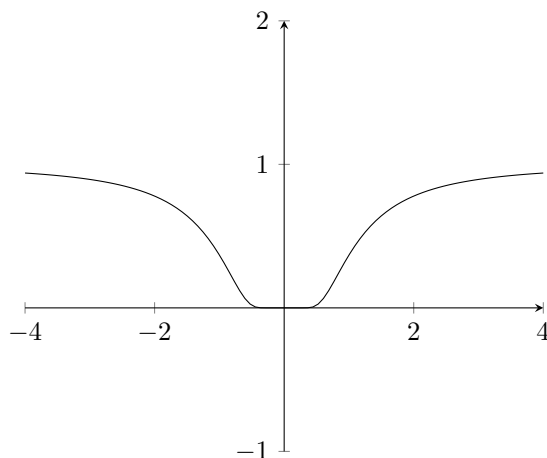


Figura 3:  $e^{-\frac{1}{x^2}}$

**Teorema 2.3**

Sia  $f \in C^\infty(I)$  con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto per la quale esistano  $M, L > 0$  tali che per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in I \quad |f^{(k)}(x)| \leq ML^k$$

Allora  $f$  è analitica.

*Dimostrazione.* Sia  $x_0 \in I$  e consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad x \in I$$

Scriviamo lo sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) (x - x_0)^{n+1}$$

dove  $\xi_x \in (x_0, x)$  è un opportuno punto. Mostriamo ora che

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

□

**Esempio 2.2.** Le funzioni  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  sono analitiche.

## 2.2 $\mathbb{C}$ -differenziabilità

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

### Definizione 2.2: $\mathbb{C}$ -differenziabilità

Sia  $a \in \Omega$ . Diciamo che  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  se esiste

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) \quad (2.2)$$

o equivalentemente

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \varepsilon(z - a)(z - a) \quad (2.3)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \varepsilon(w) = 0 \quad (2.4)$$

Se poniamo  $\varepsilon(0) = 0$  allora la (1)' vale per ogni  $z \in \Omega$ , non solo  $z \neq a$   
Alcune proprietà:

- Se  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  allora è continua (da (1)')
- $f, g$   $\mathbb{C}$ -differenziabili in  $z = a$ ; allora  $f \pm g$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile,  $\lambda f$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $fg$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile.

Se  $g(a) \neq 0$  allora  $\frac{f}{g}$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  e  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

**Esempio 2.3.**  $z \mapsto \bar{z}$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Ne consegue dalle proprietà che i polinomi sono  $\mathbb{C}$ -differenziabili, e anche le funzioni razionali.

**Esempio 2.4.**  $z \mapsto \bar{z}$  non è  $\mathbb{C}$ -differenziabile. Infatti

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} = \frac{\overline{z - a}}{z - a}$$

che non ha limite perché assume valori diversi ad esempio sulla retta  $a + \delta$  e  $a + \delta i$  al variare di  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  può essere vista come  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tralasciando la struttura di campo di  $\mathbb{C}$ . Allora possiamo scrivere  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ , con  $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si utilizza spesso la scrittura

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

che è una sorta di “ibrido”. Possiamo ora scrivere  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  ecc.

Supponiamo ora che  $f$  sia  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a = x_0 + iy_0$ . Esiste quindi

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Guardiamo ora la retta  $z = a + \delta$ , con  $\delta \in \mathbb{R}$ , quindi

$$f'(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

In maniera analoga, per  $z = a + \delta i$  abbiamo

$$f'(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \delta i) - f(x_0, y_0)}{\delta i} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y} f(a)$$

In breve abbiamo che deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Che in termini di  $u$  e  $v$  equivale a dire che

$$u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

**Proposizione 2.4** (Condizioni necessarie). *Se  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  allora valgono le condizioni di **Cauchy-Riemann**, cioè*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \text{ o equivalentemente } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Vedasi sopra. □

**Proposizione 2.5.** *Sia  $f$  differenziabile in  $a = (x_0, y_0)$  come funzione  $\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, allora  $f : C \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = x_0 + iy_0$*

*Dimostrazione.* Per ipotesi (con  $h = (h_1, h_2)$ )

$$f(a + h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + o(h)$$

Poiché  $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$  si ha

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + i \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_2 + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(h_1 + ih_2) + o(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(z - a) + o(z - a) \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.6: Looman-Menchoff**

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua e dotata di  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  in  $z = a$ . Se valgono le condizioni di Cauchy Riemann, allora  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$

Abbiamo già visto sui reali che analitica implica  $C^\infty$ . Ora spiace lo spoiler ma dimostreremo che  $\mathbb{C}$ -differenziabile implica analitica, quindi  $\mathbb{C}$ -differenziabilità,  $C^\infty$ , analitica saranno nozioni equivalenti e gli assegneremo la dicitura di **olomorfe**.

**Definizione 2.3: Derivata complessa**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Ciò è motivato dal seguente passaggio formale: Sia  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , allora  $f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right)$  e quindi si ottiene formalmente il risultato come sopra definito.

*Osservazione.* Le condizioni di Cauchy-Riemann diventano  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

**2.3  $\mathbb{C}$ -differenziabilità delle funzioni analitiche****Teorema 2.7**

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad c_n \in \mathbb{C}$$

con  $R$  il raggio di convergenza. Allora la serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza  $R$ . Inoltre se  $f(z)$  è la somma della serie data e  $g(z)$  la somma della serie derivata, allora avremo che  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $f'(z) = g(z)$  per ogni  $z \in D_R(a)$

*Dimostrazione.* Come nel caso reale,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

quindi i due raggi di convergenza coincidono. Supponiamo  $a = 0$ . Fissiamo  $w \in D_R(0)$  e consideriamo

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

con  $h$  tale che  $w+h \in D_R(0)$ . Scriviamo, per  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$f(z) = S_N(z) + R_N(z) \quad \text{con} \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n (z - a)^n$$

e  $R_N(z)$  il resto della serie. Sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} = S'_N(w) \rightarrow g(z) \text{ per } N \rightarrow \infty$$



Consideriamo il resto

$$\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n((w+h)^n - w^n))$$

essendo

$$(w+h)^n - w^n = (w+h-w) \left( (w+h)^{n-1} + (w+h)^{n-2}w + \dots + w^{n-1} \right)$$

ottengo

$$\left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| (|w+h|^{n-1} + |w+h|^{n-2}|w| + \dots + |w|^{n-1})$$

Ora, per  $h$  tale che  $w+h \in D_\rho(0)$ , con  $|w| \leq \rho < R$  si ha che  $|w+h|^{n-k}|w|^{k-1} \leq \rho^{n-1}$  quindi

$$\left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| n \rho^{n-1} \rightarrow 0$$

Poiché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1}$  la serie derivata converge assolutamente in  $D_R(0)$  in particolare per  $\zeta = \rho$ . Concludiamo ora

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(w) \right| &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} - S'_N(w) \right| + \\ &+ \limsup_{h \rightarrow 0} |S'_N(w) - g(w)| + \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| = |S'_N(w) - g(w)| + \varepsilon \end{aligned}$$

per  $N$  sufficientemente grande. Si conclude per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$   $\square$

## 2.4 Integrazione su Curve

### Definizione 2.4: Curva in $\mathbb{C}$

Diremo **curva** in  $\mathbb{C}$  ogni funzione continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice **chiusa** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Il **sostegno** di  $\gamma$  è l'immagine di  $\gamma$ , cioè  $\gamma([a, b])$ . Inoltre  $\gamma$  si dice  $C^1$  a tratti se esistono  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tali che

$$\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k]) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Diciamo **curva opposta** di  $\gamma$  la curva percorsa in "senso opposto" ossia:

$$-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad -\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$$

Chiamiamo **saldatura** di due curve  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ , la curva

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 + t - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases} \quad \forall t \in [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$$

(Notare che esiste anche la notazione moltiplicativa per saldatura e curva opposta). Siano ora  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  due curve. Allora diciamo che le due curve sono **equivalenti** se esiste  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$   $C^1$  a tratti, biettiva, con  $\varphi' > 0$ , tale che  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Per convenzione, se non espressamente specificato diversamente considereremo curve  $C^1$  a tratti.

**Definizione 2.5: Integrale su curva**

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva  $C^1$  a tratti e sia  $f$  continua a valori in  $\mathbb{C}$  definita (almeno) sul sostegno di  $\gamma$ . Allora si definisce

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Abbiamo le seguenti proprietà:

- (linearità)  $\int_{\gamma} (\lambda f + \mu g) dz = \lambda \int_{\gamma} f dz + \mu \int_{\gamma} g dz$
- (additività)  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
- $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \text{lungh}(\gamma) \cdot \max_{\text{spt } \gamma} |f|$
- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$

Sia  $\mathcal{C}$  una curva in  $\mathbb{C}$  assegnata come “oggetto geometrico”: circonferenza, rettangolo, segmento eccetera. Allora scriveremo  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$  purché il contesto chiarisca il tipo di parametrizzazione. Ad esempio  $\int_{\partial D_R}$  o  $\int_{\partial R}$  (rispettivamente integrale su circonferenza e su bordo di un rettangolo) si intenderà a meno di specificare in orientamento antiorario.

**Proposizione 2.8.** Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  due curve equivalenti. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  la funzione di equivalenza. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

□

**Esempio 2.5.** Se consideriamo  $\int_{\partial D_R(a)}$  allora la parametrizzazione che prendiamo sarà  $\gamma(t) = a + Re^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Quindi abbiamo  $\gamma'(t) = iRe^{it}$  e

$$\int_{\partial D_R(a)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) iRe^{it} dt$$

ad esempio se  $f(z) = \frac{1}{z-a}$

$$\int_{\partial D_R(a)} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

**Esempio 2.6.** Se consideriamo  $R$  rettangolo,  $a \in R \setminus \partial R$ . Calcoliamo quindi

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz$$

dove  $z = a + \rho(\theta)e^{i\theta}$  dove  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $\rho$  è  $C^1$  a tratti. Allora otteniamo che

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(\theta)e^{i\theta}} i\rho(\theta)e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

*Osservazione.* Se ho  $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$   $C^1$  a tratti, allora  $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Infatti, fissato  $t_0 \in [a, b]$  Consideriamo

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

Ricordiamo che  $F(z) = F(a) + F'(a)(z - a) + (\varepsilon(z - a))(z - a)$  con  $\varepsilon(w)$  infinitesimo per  $w \rightarrow 0$  e  $\varepsilon(0) = 0$ . Allora

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0} = F'(\gamma(t_0)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varepsilon(\gamma(t) - \gamma(t_0)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

e passando al limite otteniamo la tesi.

*Osservazione.*  $\int_{\gamma} f(z)dz$  è l'integrale su un intervallo di una funzione vettoriale  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Come tale possiamo applicare i risultati visti di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Ad esempio supponiamo di avere  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  e una successione e una funzione  $f_n, f : \text{spt}\gamma \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $\text{spt}\gamma$ . Allora

$$\int_{\gamma} f_n(z)dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz$$

Infatti per ipotesi sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall n \geq n_{\varepsilon} \forall z \in \text{spt}\gamma \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

ma quindi anche  $\forall t \in [a, b]$  abbiamo che  $|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon$  e quindi

$$|f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \max_{a \leq s \leq b} |\gamma'(s)| < M\varepsilon$$

cioè  $f_n(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot) \rightarrow f(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)$  uniformemente.

In particolare (come successione si consideri la successione delle somme parziali di una serie) si ha che se  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  converge uniformemente sul supporto di  $\gamma$  allora

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz$$

### Definizione 2.6: Primitiva

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **primitiva** di  $f$  se  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z \in \Omega$ .

**Proposizione 2.9.** Sia  $F$  primitiva di  $f$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva  $C^1$  a tratti. Allora

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

*Dimostrazione.*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

□

**Corollario 2.9.1.** Se  $F$  ammette primitiva in  $\Omega$  allora  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma$  in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* ovvia □

**Corollario 2.9.2.** Sia  $\Omega$  un aperto **connesso**, allora se  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $f' = 0$  allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $z_0, z_1 \in \Omega$ , allora esiste (connessione per archi) una  $\gamma \in C^1$  a tratti (poligonale) con  $\gamma(a) = z_0$  e  $\gamma(b) = z_1$  e allora poiché  $f$  è primitiva di  $f'$  abbiamo che

$$0 = \int_{\gamma} f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(z_1) - f(z_0)$$

□

Ricordiamo la notazione “mista” per le funzioni  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Sia ora  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  a tratti e la denotiamo  $\gamma(\cdot) = x(\cdot) + iy(\cdot)$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t))dt = \\ &= \int_a^b u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)dt + \\ &+ i \int_a^b u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)dt \end{aligned}$$

Se ora poniamo  $\omega_r(x, y) = u(x, y)dx - v(x, y)dy$  e  $\omega_i(x, y) = v(x, y)dx + u(x, y)dy$  allora otteniamo

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \omega_r + i \int_{\gamma} \omega_i$$

e anche

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))x'(t)dt + \\ &+ i \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))y'(t)dt = \\ &= \int_{\gamma} f(x, y)dx + i \int_{\gamma} f(x, y)dy \end{aligned}$$

**Proposizione 2.10.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

- a) Sia  $f$  continua. Allora  $f$  ammette primitiva se e solo se  $\omega_r$  e  $\omega_i$  sono esatte
- b) Sia  $f \in C^1$ . Allora  $f$  soddisfa le condizioni di Cauchy – Riemann (cioè è  $\mathbb{C}$ -differenziabile) se e solo se  $\omega_r$  e  $\omega_i$  sono chiuse

*Dimostrazione.*

- a)  $f$  ammette primitiva  $F = \varphi + i\psi$ ; si ha quindi che

$$u + iv = F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x \quad \text{e} \quad \begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x \end{cases}$$

Allora otteniamo che

$$\begin{cases} u = \varphi_x = \psi_y \\ v = \psi_x = -\varphi_y \end{cases}$$

ne consegue che

$$\begin{cases} \omega_r = udx - vdy = \varphi_x dx - \varphi_y dy = d\varphi \\ \omega_i = vdx + udy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi \end{cases}$$

sono esatte.

Viceversa, siano  $\omega_r$  e  $\omega_i$  esatte, quindi  $\omega_r = d\varphi$  e  $\omega_i = d\psi$ , per opportune  $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$ . Allora

$$\begin{cases} u = \varphi_x \\ -v = \varphi_y \end{cases} \quad \begin{cases} v = \psi_x \\ u = \psi_y \end{cases}$$

Ponendo ora  $F = \varphi + i\psi \in C^1$  si ha che

$$\begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -v = -\psi_x \end{cases}$$

che sono esattamente le condizioni di Cauchy-Riemann per  $F$ . Allora  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x = u + iv = f$ , quindi  $F$  è primitiva di  $f$ .

b)  $f = u + iv$ . Le condizioni di Cauchy-Riemann sono

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \begin{cases} w_i = vdx + udy \text{ è chiusa} \\ w_r = udx - vdy \text{ è chiusa} \end{cases}$$

semplicemente per definizione

□

Ricordiamo che vogliamo cercare di invertire il risultato precedente, ossia il corollario 2.9.1. Per il viceversa quindi abbiamo che  $\int_\gamma f = 0$  per ogni  $\gamma$  chiusa in  $\Omega$ , ma ora poiché  $\int_\gamma f = \int_\gamma \omega_r + i \int_\gamma \omega_i$  ne consegue che

$$\int_\gamma \omega_r = \int_\gamma \omega_i = 0 \quad \forall \gamma \xrightarrow{\text{Teorema 3}} \omega_r, \omega_i \text{ esatte} \xrightarrow{\text{Proposizione}} f \text{ ammette primitiva}$$

Con questo abbiamo dimostrato

**Proposizione 2.11.** *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua, allora  $f$  ammette primitiva se e solo se*

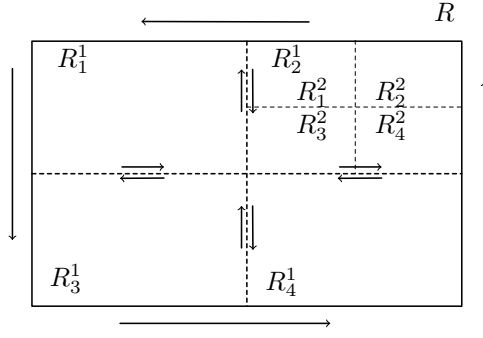
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiusa in } \Omega$$

Nella dimostrazione  $f$ - $\mathbb{C}$ -differenziabile  $\implies f$  analitica servirà avere che  $\int_\gamma f = 0$  per ogni  $\gamma$  chiusa in  $\Omega$  semplicemente connesso. Ma non possiamo usare (b) della proposizione 2.10 perché non possiamo assumere che  $f$  sia  $C^1$ . Allora mostriamo direttamente che  $\int_\gamma f = 0$  in un caso particolare, usando il seguente lemma

**Lemma 2.12: Cauchy-Goursat**

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{C}$ -differenziabile. Sia  $R$  un rettangolo chiuso, con  $R \subseteq \Omega$ . Allora

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$



*Dimostrazione.* Sia  $A = \left| \int_{\partial R} f dz \right|$ . Per assurdo supponiamo sia  $A > 0$ . Ora suddividiamo  $R$  in quattro rettangoli  $R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1$  e abbiamo

$$A = \left| \int_{\partial R} f \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \int_{\partial R_i^1} f \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\partial R_i^1} f \right|$$

Allora abbiamo che per un qualche  $R_j^1$  si ha che

$$\left| \int_{\partial R_{j_1}^1} f \right| \geq \frac{A}{4}$$

Procediamo in questo modo suddividendo  $R_{j_1}^1$  in quattro rettangoli  $R_i^2$  per  $i = 1, 2, 3, 4$  e così procedendo si forma una successione di rettangoli

$$R_{j_1}^1 \supseteq R_{j_2}^2 \supseteq \dots \supseteq R_{j_n}^n$$

che hanno diametro  $\text{diam} R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{diam } R$  di lunghezza  $\text{lung} R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{lung} R$  e tali che

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

Ora essendo ogni rettangolo compatto, la loro intersezione non è vuota e anzi è un solo punto  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_{j_k}^k = \{a\}$ , avendo diametro 0. Poiché  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$ :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \varepsilon(z - a)(z - a) \quad \varepsilon(0) = 0 \quad \varepsilon(w) \rightarrow 0 \text{ per } w \rightarrow 0$$

Infine notiamo che

$$\int_{\partial R_{j_k}^k} f(z) dz = \int_{\partial R_{j_k}^k} (f(a) + f'(a)(z - a)) dz + \int_{\partial R_{j_k}^k} \varepsilon(z - a)(z - a) dz$$

dove il primo termine è uguale a 0 poiché la funzione integranda ammette primitiva  $f(a)z + \frac{1}{2} f'(a)(z - a)^2$ . Ora fissiamo  $\sigma > 0$ . Sia  $\delta > 0$  tale che  $|w| < \delta \implies |\varepsilon(w)| < \sigma$ . Per  $k$  sufficientemente grande abbiamo che  $\text{diam} R_{j_k}^k < \delta$  e allora  $|z - a| < \delta$  se  $z \in \partial R_{j_k}^k$ . Allora, per tali  $k$ :

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} \varepsilon(z - a)(z - a) dz \right| \leq \sigma \text{diam } R_{j_k}^k \text{lung} R_{j_k}^k = \sigma \cdot \frac{1}{2^k} \text{diam } R \cdot \frac{1}{2^k} \text{lung} \partial R$$

Ricordando che

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

e mettendo assieme i pezzi otteniamo che  $A = 0$  (per l'arbitrarietà di  $\sigma$ ), che è assurdo  $\square$

Estendiamo ora il risultato

**Proposizione 2.13.** Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Sia  $a \in \Omega$  e supponiamo che  $f$  sia  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $\Omega \setminus \{a\}$ . Allora

$$\int_{\partial R} f = 0$$

per ogni rettangolo chiuso  $R$  in  $\Omega$

*Dimostrazione.* – Se  $a \notin R$  allora si usa il lemma di Cauchy-Goursat

- Se  $a \in \partial R$  si approssima  $R$  con una successione  $R_n$  di rettangoli internamente (come in figura 4) Risulta poi

$$0 = \int_{\partial R_n} f \rightarrow \int_{\partial R} f$$

(possiamo pensare ogni  $\partial R_n$  parametrizzato su un intervallo fisso  $[a, b]$  e c'è convergenza uniforme)

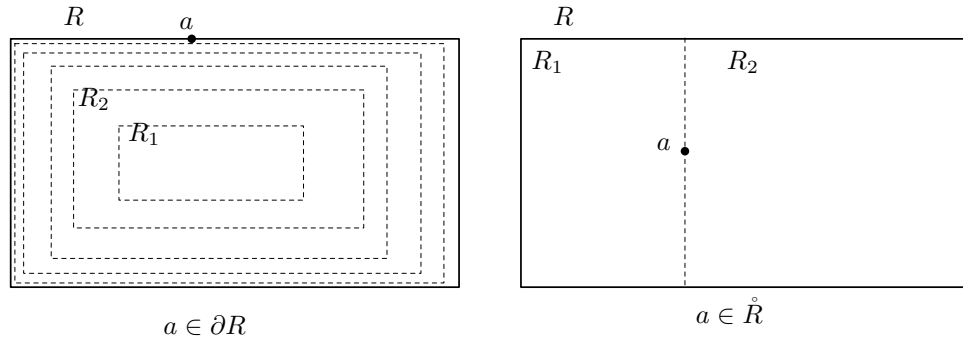


Figura 4: Approssimazione di  $R$  con  $R_n$  per  $a \in \partial R$  e decomposizione per  $a \in \mathring{R}$

- $a \in \mathring{R}$  Scomponendo  $R$  in due rettangoli  $R_1$  e  $R_2$  come in figura, con  $a \in \partial R_1 \cap \partial R_2$  si ha che

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R_1} f + \int_{\partial R_2} f = 0$$

per il caso precedente

□

#### Teorema 2.14: Formula di Cauchy per il rettangolo

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{C}$ -differenziabile. Sia  $R \subseteq \Omega$  un rettangolo chiuso. Allora per ogni  $w \in \mathring{R}$  risulta

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

*Dimostrazione.* Sia

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & z \neq w \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

allora poiché  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile,  $g$  è continua su  $\Omega$ . Inoltre  $g$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $\Omega \setminus \{w\}$ . Allora per la proposizione 2.13 si ha che

$$0 = \int_{\partial R} g(z) dz = \int_{\partial R} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz - f(w) \int_{\partial R} \frac{1}{z - w} dz$$

Infine poiché  $\int_{\partial R} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$  per  $w \in \overset{\circ}{R}$  si ottiene la tesi.  $\square$

**Teorema 2.15**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione  $\mathbb{C}$ -differenziabile. Allora  $f$  è analitica in  $\Omega$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $a \in \Omega$  e mostriamo che  $f$  è sviluppabile in serie di potenze in un intorno di  $a$ . Sia  $R$  un rettangolo chiuso con  $a \in \overset{\circ}{R}$  e  $R \subseteq \Omega$ . Sia  $D_r(a)$  con

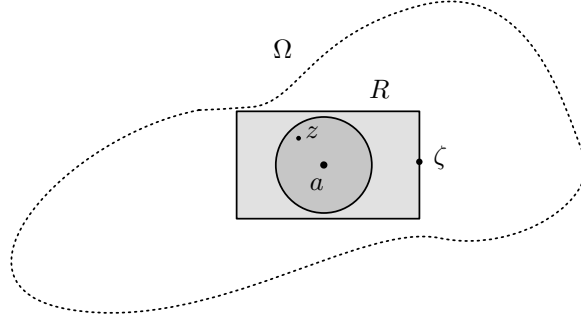


Figura 5: diffanalitica

$\overline{D_r(a)} \subseteq \overset{\circ}{R}$ . Consideriamo  $z \in D_r(a)$ . Sappiamo per la formula di Cauchy per il rettangolo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ora comunque presi  $z \in D_r(a)$  e  $\zeta \in \partial R$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

e poiché

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \leq \alpha < 1$$

per un opportuno  $\alpha$ . Allora abbiamo

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

e quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n d\zeta$$

Risulta che

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n \right| \leq \left( \max_{\partial R} |f| \right) \frac{1}{|\zeta-a|} \cdot \alpha^n$$

e quindi poiché  $\alpha < 1$  si ha convergenza globale e si può scambiare il segno di serie e integrale ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dove  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$   $\square$



Abbiamo allora dimostrato che  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile se e solo se è analitica. Si parla anche di funzioni **olomorfe** e si indica con  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

*Osservazione.* Se  $f$  è olomorfa allora  $f$  è infinitamente differenziabile in senso complesso. Inoltre se guardiamo  $f$  come funzione reale  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  allora  $f$  è  $C^\infty$

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Abbiamo già visto che se per ogni  $\gamma$  chiusa in  $\Omega$  si ha  $\int_\gamma f = 0$  allora  $f$  ammette primitiva in  $\Omega$ , ossia esiste  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $F' = f$ . In particolare  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e quindi olomorfa, ma quindi anche  $f$  è olomorfa.

Ricordando la dimostrazione del teorema 3 che dice che se l'integrale su ogni curva chiusa di una forma differenziale è nullo allora la forma è esatta. Similmente se per ogni curva chiusa  $\gamma$  si ha che l'integrale su  $\gamma$  di  $f$  è nullo allora  $f$  ammette primitiva, costruita nello stesso modo, ossia

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

dove  $\gamma_z$  è una curva che unisce  $z_0$  a  $z$ , con  $z_0$  fissato. Richiedere che l'integrale su ogni curva chiusa sia nullo serve perché questa funzione sia ben definita.

Supponiamo ora di avere solamente l'ipotesi

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Otteniamo un simile risultato

**Teorema 2.16: Morera**

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua e tale che

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Allora  $f$  è olomorfa in  $\Omega$

*Dimostrazione.* Fissato  $\overline{D_r}(a) \subseteq \Omega$ , per ogni  $z \in D_r(a)$  costruiamo

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

dove  $\gamma_z$  consiste in due dei lati di un rettangolo con vertici  $a$  e  $z$ . Tecnicamente allora ci sono due curve  $\gamma_z$  e  $\tilde{\gamma}_z$  con questa proprietà, ma per l'ipotesi posta hanno uguale integrale, quindi  $F$  è ben posta. Ora come nel caso precedente si dimostra che  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $F'(z) = f(z)$  in ogni  $z \in D_r(a)$ . Allora  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $D_r(a)$ . Per l'arbitrarietà di  $a$  si ha che  $f$  è olomorfa in  $\Omega$ .  $\square$

*Osservazione.* Non abbiamo dimostrato in questo caso che  $f$  ammette primitiva su tutto  $\Omega$ , ma soltanto in un intorno di ogni punto. Questo comunque ci permette di mostrare che  $f$  è olomorfa.

Con quanto appena visto possiamo aggiornare la Proposizione 2.10. Infatti se  $f$  è olomorfa, in particolare è  $C^1$  e allora  $\omega_i$  e  $\omega_r$  sono chiuse. Ora usando il Teorema 3 vale l'invarianza per omotopia. Allora

**Teorema 2.17: Cauchy, forma omotopica**

Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  e  $\gamma_0, \gamma_1$  curve chiuse fra loro omotope in  $\Omega$ . Allora

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

*Dimostrazione.* vedasi sopra □

Risultato analogo vale per curve omotope rispetto a un'omotopia che fissa gli estremi.

**Corollario 2.17.1.** Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , con  $\Omega$  semplicemente connesso. Allora  $f$  ammette primitiva in  $\Omega$

*Osservazione.* Segue che  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  ammette sempre una primitiva locale.

**Teorema 2.18: Formula di Cauchy per il cerchio**

Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  e  $D$  disco aperto con  $\overline{D} \subseteq \Omega$ . Allora per ogni  $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

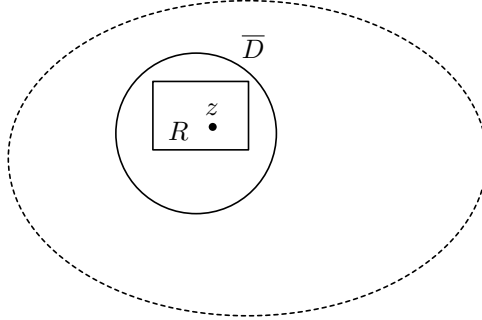


Figura 6: cauchy-disco

*Dimostrazione.* Sappiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

se  $R$  è un rettangolo chiuso in  $\Omega$ , con  $z \in \overset{\circ}{R}$ . Sia  $R \subseteq D$

Poiché

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

è olomorfa in  $\Omega \setminus \{z\}$  e  $\partial D$  e  $\partial R$  sono omotope in  $\Omega \setminus \{z\}$  risulta

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

□

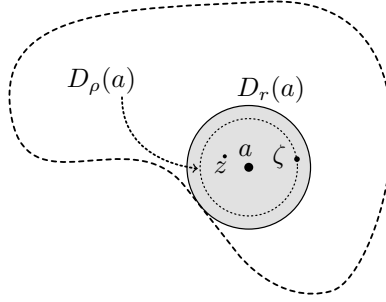
*Osservazione.* La formula si estende al caso in cui anziché  $D$  vi è una “qualunque forma” con bordo omotopo a  $\partial R$

**Funzioni olomorfe** Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Allora se  $a \in \Omega$  sappiamo che in un intorno di  $z = a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

per opportuni  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  per il teorema della serie derivata. Domanda naturale è chiedersi quant'è il raggio di convergenza di tale serie di potenze.

**Proposizione 2.19.** *La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$  converge nel più grande disco contenuto in  $\Omega$*



*Dimostrazione.* Sia  $r = d(a, \partial\Omega)$ . Fissiamo  $z \in D_r(a)$  e sia  $0 < \rho < r$  tale che  $z \in D_\rho(a)$ . Appliciamo la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e procediamo come nella dimostrazione dell'analiticità delle funzioni  $\mathbb{C}$ -differenziabili. Allora per  $z$  fissato

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})}$$

e poiché  $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| = \frac{1}{\rho} |z-a| < 1$  e indipendente da  $\zeta$ . Quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n \end{aligned}$$

e quindi questa deve essere la serie di Taylor □

Dalla dimostrazione scende anche che

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

e poiché la funzione integranda è olomorfa in  $\Omega \setminus \{a\}$  e le curve  $\partial D$  e  $\partial D_{rho}(a)$  sono omotope, per  $D$  qualsiasi  $a \in D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$  si ottiene il seguente corollario

**Corollario 2.19.1.** *Sia  $\overline{D} \subseteq \Omega$  disco chiuso. Allora per ogni  $z \in D$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (2.5)$$

*Osservazione.* Per  $n = 0$  si trova proprio la formula di Cauchy per il cerchio.

*Osservazione.* Il corollario può essere ottenuto dalla formula di Cauchy per il cerchio per derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

**Proposizione 2.20.** Per ogni  $a \in \Omega$  e  $\overline{D_\rho(a)} \subseteq \Omega$

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \rho^{-n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f|$$

*Dimostrazione.* Da (2.5) si ottiene che

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left( \max_{\partial D_\rho} |f| \right) \cdot \underbrace{\text{lunghezza } \partial D_\rho(a)}_{2\pi\rho}$$

□

#### Teorema 2.21: Liouville

Se  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  è limitata, allora  $f$  è costante

*Dimostrazione.* Fissiamo  $a \in \mathbb{C}$  e  $\rho > 0$  arbitrario. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di centro  $z = a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

è valido per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Sappiamo per la proposizione precedente che

$$|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \leq \rho^{-n} \max_{\mathbb{C}} |f| \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow \infty$$

da cui  $c_n = 0$  per  $n \geq 1$  da cui  $f(z) = c_0$  è costante.

□

**Corollario 2.21.1** (Teorema Fondamentale dell'Algebra). Sia

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

con  $a_n \neq 0$ . Allora  $p_n$  ha almeno uno zero

*Dimostrazione.* Per assurdo sia  $p_n(z) \neq 0$  per ogni  $z$ . Allora sia

$$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$$

Si ha che

$$p_n(z) = a_n z^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right)$$

il cui valore assoluto va a  $+\infty$  per  $|z| \rightarrow \infty$ . Allora  $f$  è limitata perché  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$ . Ma allora per il teorema di Liouville  $f$  è costante, assurdo.

□

## 2.5 Sviluppo di Laurent

Con

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad (2.6)$$

intendiamo

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad (2.7)$$

cioè diremo che la serie (2.6) converge (uniformemente, assolutamente, ecc) se tali sono le serie (2.7).

Siano  $0 \leq r_1 < r_2 < +\infty$  e  $a \in \mathbb{C}$ . Consideriamo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$$

Nel caso di  $r_1 = 0, r_2 = r$  allora si indica anche  $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$

### Teorema 2.22

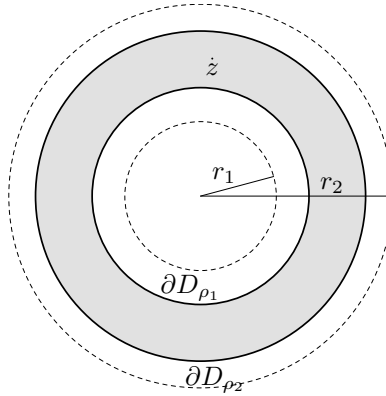
Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Allora esiste unica una successione  $c_n$  tale che

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad z \in \Omega$$

Tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di  $\Omega$ . Inoltre si ha che

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta \quad (2.8)$$

per un qualunque  $\rho \in (r_1, r_2)$



*Dimostrazione.* Siano  $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$  come in figura. Rappresentiamo  $f$  in forma integrale in  $\{z : \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$ . Sia

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Allora  $g$  è olomorfa in  $\Omega$ , infatti se  $\zeta \neq z$ , poiché  $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta-a)^n$ , con  $a_0 = f(z)$ ,

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\zeta-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\zeta-a)^{n-1}$$

che è una funzione olomorfa anche in un intorno di  $z$  e vale  $a_1 = f'(z)$  in  $\zeta = z$ .

Ne consegue che per il teorema di Cauchy

$$\partial D_{\rho_1} \sim \partial D_{\rho_2} \implies \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} g = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} g$$

ma allora

$$\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

ma  $\int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$  poiché la funzione  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$  è olomorfa in un disco contenente  $\partial D_{\rho_1}$  e non contenente  $z$  e in tale disco  $D_{\rho_1} \sim 0$ . Allora

$$-f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -f(z) 2\pi i = \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e quindi ora per il secondo passo usiamo la rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Sia ora  $\zeta \in \partial D_{\rho_1}(a)$  e allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = -\frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} = -\frac{1}{(z - a) \left( 1 - \frac{\zeta - a}{z - a} \right)}$$

e poiché  $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{\rho_1}{z - a} < 1$  abbiamo che la precedente

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n$$

converge uniformemente per  $\zeta \in \partial D_{\rho_1}$  e quindi

$$-\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\partial D_{\rho_1}} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta \right) \frac{1}{(z - a)^{n+1}}$$

da cui

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^{-(n+1)} = \dots$$

se ora  $m := -(n+1)$  si ha che

$$\dots = \sum_{m=-1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta \right)}_{c_m} (z - a)^m$$

che è esattamente la forma promessa dal teorema per le potenze negative.

Consideriamo ora invece  $\zeta \in \partial D_{\rho_2}(a)$  e allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a) \left( 1 - \frac{z - a}{\zeta - a} \right)}$$

e come prima poiché  $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \leq \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1$  la precedente

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

converge uniformemente per  $\zeta \in \partial D_{\rho_2}$  e quindi

$$\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right)}_{c_n} (z - a)^n$$

Infine poiché  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}$  è olomorfa in  $\Omega$  l'espressione dei coefficienti coincide con

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta$$

per  $\rho$  arbitrario con  $r_1 < \rho < r_2$  e allora

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z - a)^m$$

□

*Convergenza assoluta uniforme.* La validità della convergenza dimostrata assicura automaticamente la convergenza assoluta uniforme sui compatti di  $\Omega$ . Infatti: Per ipotesi

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - a)^m$$

converge per  $|z - a| \in (r_1, r_2)$ . Ne segue che il raggio di convergenza è almeno  $r_2$ ; pertanto la serie converge assolutamente in modo uniforme nei compatti di  $D_{r_2}(a)$  e quindi in particolare sui compatti di  $\Omega$ .

Si ha inoltre che

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z - a)^m = \sum_{n=-1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$$

con  $\zeta = \frac{1}{z-a}$ . L'ultima serie è una serie di potenze e converge per  $|\zeta| \in (\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_1})$  con la convenzione  $\frac{1}{0} = \infty$  e  $\frac{1}{\infty} = 0$  e quindi il raggio di convergenza è  $R \geq \frac{1}{r_1}$  per cui converge in modo assoluto uniforme sui dischi  $\overline{D}_{\rho}(0)$  con  $\rho < \frac{1}{r_1}$  cioè sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \rho\}$$

e quindi la serie  $\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z - a)^m$  converge in modo assoluto uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|z - a|} \leq \rho\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \geq \frac{1}{\rho}\}$$

con  $\frac{1}{\rho}$  un qualunque valore maggiore di  $r_1$ . Quindi la convergenza è assoluta uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \geq \gamma\} \quad \gamma > r_1$$

in particolare si ha convergenza assoluta uniforme sui compatti di  $\Omega$ . □

Unicità dei  $c_m$ . Mostriamo che se  $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  sono tali che

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m, \quad z \in \Omega$$

allora, necessariamente sono dati dalla formula dell'enunciato. Fissiamo  $\bar{m} \in \mathbb{Z}$  e calcoliamo

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz \stackrel{\text{conv. unif.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{(z-a)^m}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz$$

l'argomento dell'integrale è una potenza. Ha primitiva se  $m - \bar{m} - 1 \neq -1$  e quindi tutti gli integrali della serie sono nulli tranne per  $m - \bar{m} - 1 = -1$  ossia  $m = \bar{m}$ . Allora

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz = c_{\bar{m}} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i c_{\bar{m}}$$

e quindi

$$c_{\bar{m}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\bar{m}+1}} dz$$

□

**Esempio 2.7.** Sia  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ . Allora  $z \neq 0$  e  $z \neq 1$ . Consideriamo i seguenti  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Consideriamo prima  $\Omega_1$ . Allora

$$-\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

che è lo sviluppo di Laurent di  $f$  in  $\Omega_1$

In  $\Omega_2$  si ha che

$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

Che è lo sviluppo di Laurent di  $f$  in  $\Omega_2$

### Definizione 2.7: Sviluppo di Laurent relativo a un punto

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  con  $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$ . Lo sviluppo di cui al teorema precedente è detto **sviluppo in serie di Laurent** relativo al punto  $z = a$  (non dipende da  $r$ )

### Esercizio 2.1

Sia  $f(z) = \frac{3}{iz^2 - z + 2i}$ . Si calcoli:

- La serie di Laurent centrata in entrambi i punti in cui  $f$  non è definita.
- La serie di Taylor centrata in  $z = 0$



### Esercizio 2.2

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r(a))$  e  $N \in \mathbb{N}$ . Allora esiste unico  $P_N(z-a)$  polinomio di grado al più  $N$  tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - P_N(z-a)}{(z-a)^N} = 0$$

Infatti il polinomio di Taylor di grado  $N$  soddisfa questa condizione

*Dimostrazione.*  $f$  è olomorfa, quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

e quindi

$$f(z) = P_N(z-a) + R_N(z-a) = P_N(z-a) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

$$R_N(z-a) = (z-a)^{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z-a)^{n-N-1}$$

per cui la serie dà luogo ad una funzione olomorfa  $g$ ; quindi

$$\frac{f(z) - P_N(z-a)}{(z-a)^N} = (z-a)g(z) \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow a$$

e  $P_N$  è l'unico con tale proprietà. Infatti se  $Q_N$  avesse la stessa proprietà, allora

$$\frac{P_N(z-a) - Q_N(z-a)}{(z-a)^N} = \frac{P_N - f + f - Q_N}{(z-a)^N}$$

Sia ad esempio  $N = 2$ , allora questo significa

$$\begin{aligned} P_N(z-a) &= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 \\ Q_N(z-a) &= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 \end{aligned}$$

Se ora  $\frac{P_N - Q_N}{(z-a)^N} \rightarrow 0$  allora  $P_N(0) = Q_N(0)$  da cui  $a_0 = b_0$ . Si può proseguire mostrando che allora  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  e così via.  $\square$

### Esercizio 2.3

Calcolare il Polinomio di Taylor di grado 4 di

$$f(z) = e^z \sin(z)$$

relativamente a  $z = 0$

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  e  $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m$ . Sia inoltre  $\zeta = \frac{1}{z-a}$  e quindi

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$$

Sappiamo che (vedasi dimostrazione teorema sopra) tale serie ha raggio di conver-

genza  $R \geq \frac{1}{r_1}$  e definisce pertanto una funzione  $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ . Dunque

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \text{ è olomorfa in } \mathbb{C} - \{a\}$$

Che motiva la seguente definizione

### Definizione 2.8: Parte principale

La funzione olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m$$

è detta parte principale dello sviluppo di Laurent di  $f$  relativo a  $z = a$

Sappiamo che tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ .

**Proposizione 2.23.** *La parte principale è l'unica funzione  $g$  tale che*

- $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$
- $g(z) \rightarrow 0$  per  $|z| \rightarrow \infty$
- $f - g$  è estendibile in modo olomorfo in un intorno di  $a$

pezzettino di dim. Sappiamo che  $g(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right)$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Inoltre  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \varphi(0) = 0$ . Infine  $(f - g)(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$  e il secondo membro definisce una funzione olomorfa in un intorno di  $a$ .  $\square$

Unicità.  $\square$

### Definizione 2.9: Residuo

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  e sia  $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m$  lo sviluppo di Laurent. Il valore  $c_{-1}$  è detto **residuo** di  $f$  in  $z = a$

### Definizione 2.10: Funzioni meromorfe

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto ed  $E \subseteq \Omega$  un insieme chiuso e discreto (tutti i punti di  $E$  sono isolati).

Una funzione  $f$  si dice **meromorfa** in  $E$  se  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$  e per ogni  $a \in E$  esiste  $r > 0$  e due funzioni  $h, g \in \mathcal{H}(D_r(a))$  con  $h \neq 0$  tali che

$$h \cdot f = g \quad \text{in } D_r(a)$$

*Osservazione.* Vorrei dire che  $f$  è rapporto di due funzioni olomorfe, ma non volendomi preoccupare della definizione dò invece tale definizione.

Sia  $f$  meromorfa in  $\Omega$  come da definizione. Sia  $a \in E$ ; poiché  $h \neq 0$

$$h(z) = c_N(z-a)^N + c_{N+1}(z-a)^{N+1} + \dots$$

con  $c_N \neq 0$  e allora da  $hf = g$  si ha

$$(z-a)^N \underbrace{(c_N + c_{N+1}(z-a) + \dots)}_{:=\psi(z)} f(z) = g(z)$$

con  $\psi(a) = c_N$ . In un intorno  $U$  di  $a$  si ha  $\psi \neq 0$  e quindi

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N \psi(z)} \quad z \in U, z \neq a \quad (2.9)$$

Possiamo quindi dire che la condizione che  $f$  sia meromorfa in  $\Omega$  è che nell'intorno di ogni  $a \in E$  la funzione  $f$  è quoziente di due funzioni olomorfe, con denominatore nullo al più in  $a$ .

*Osservazione.* Ovviamente  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  allora  $f$  è meromorfa con  $h \equiv 1$

**Proposizione 2.24.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto ed  $E \subseteq \Omega$  chiuso e discreto. Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega - E)$ . Allora  $f$  è meromorfa in  $\Omega$  se e solo se per ogni  $a \in E$  lo sviluppo di Laurent di  $f$  in  $a$  è “troncato a sinistra”.*

*Dimostrazione.* In (2.9) la funzione  $g/\psi$  è olomorfa in  $U$  e quindi la possiamo sviluppare in serie di Taylor di centro  $z = a$  ottenendo

$$\frac{g(z)}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \implies f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^N} + \frac{a_1}{(z-a)^{N-1}} + \frac{a_2}{(z-a)^{N-2}} + \dots$$

in un opportuno intorno bucato di  $a$ . Per l'unicità dello sviluppo di Laurent di  $f$  in  $a$ , il precedente è lo sviluppo di Laurent di  $f$  in  $a$ . Evidentemente è “troncato a sinistra”.

Viceversa se  $f$  ha uno sviluppo come sopra allora

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-a)^N}}_{:= \frac{1}{h(z)}} \underbrace{\left( a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \right)}_{:= \tilde{g}(z)}$$

con  $\tilde{h}, \tilde{g}$  olomorfe. Allora  $f$  è meromorfa. □

#### Teorema 2.25: Estensione di Riemann

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$$

Allora  $f$  è estendibile in modo olomorfo a tutto  $D_r(a)$

**Corollario 2.25.1.** *Dal teorema si ricava che se  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  allora  $f$  è estendibile in modo olomorfo a  $D_r(a)$  se e solo se  $f$  è limitata in un intorno di  $a$*

*Dimostrazione.*

$\implies$  ovvio perché l'estensione è continua in  $z = a$

$\impliedby$  Se  $f$  è limitata in un intorno di  $a$  allora  $(z-a)f(z) \rightarrow 0$  per  $z \rightarrow a$  e quindi per il teorema  $f$  è estendibile □

*Dimostrazione del Teorema 2.5.* Sia

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m$$

Dimostriamo che  $c_m = 0$  per  $m < 0$ . Ricordando che  $c_m$  è dato da (2.8) si ha, prendendo  $\rho$  arbitrario, con  $\rho \in (0, z)$

$$|c_m| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \partial D_\rho(a)} \frac{|f(z)|}{|(z-a)^{m+1}|} \cdot 2\pi\rho = \frac{1}{\rho^m} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \quad (2.10)$$

Per ipotesi fissato  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\rho_\varepsilon > 0$  tale che

$$\forall \eta < \rho_\varepsilon, \quad \forall z \in D_\eta^*(a) \quad |(z-a)f(z)| < \varepsilon$$

in particolare per ogni  $\rho < \rho_\varepsilon$  e per ogni  $z \in \partial D_\rho^*(a)$

$$|(z-a)f(z)| < \varepsilon \implies \rho|f(z)| < \varepsilon \implies |f(z)| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

Allora, fissato  $\varepsilon > 0$  e posto  $\rho_\varepsilon$  come sopra, si ha  $\forall \rho < \rho_\varepsilon$ , da (2.10) otteniamo

$$|c_m| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^m} \frac{1}{\rho}$$

e quindi per  $m < 0$  si ha

$$m = -1 \implies |c_{-1}| \leq \varepsilon \text{ quindi per arbitrarietà di } \varepsilon \quad c_{-1} = 0$$

$$m < -1 \implies |c_m| \leq \varepsilon \rho^{-(m+1)} \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow 0 \implies c_m = 0$$

□

### Definizione 2.11: Singolarità eliminabile

Se  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  è estendibile in modo olomorfo a tutto  $D_r(a)$ , si dice che  $z = a$  è una singolarità **eliminabile**

**Proposizione 2.26.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $E \subseteq \Omega$  chiuso e discreto. Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega - E)$ . Allora la funzione  $f$  è meromorfa se e solo se per ogni  $a \in E$  vale una delle seguenti proprietà:

- a)  $f$  è limitata in un intorno di  $a$  (singolarità eliminabile)
- b)  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$  (polo)

*Dimostrazione.* Sia  $a \in E$ . Se  $f$  è meromorfa, per la proposizione 2.24 in un intorno di  $a$  si ha

$$f(z) = c_{m_0}(z-a)^{m_0} + c_{m_0+1}(z-a)^{m_0+1} + \dots \quad m_0 \in \mathbb{Z}, \quad c_{m_0} \neq 0$$

ossia lo sviluppo è troncato a sinistra.

Se  $m_0 \geq 0$  allora lo sviluppo dà una funzione olomorfa in un intorno di  $a$ , e quindi è verificato il caso (a), altrimenti  $m_0 =: -N < 0$  e quindi

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \dots = \frac{1}{(z-a)^N} \underbrace{(c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots)}_{:=g(z)} \quad (2.11)$$

dove  $g \in \mathcal{H}(U)$ , con  $U$  intorno di  $a$ , e quindi necessariamente  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$  che è la (b).

Viceversa, se (a)  $f$  è limitata in un intorno di  $a$  allora per il teorema 2.5 è estendibile in modo olomorfo anche in  $a$  ed è quindi olomorfa (dunque anche meromorfa) in un intorno di  $a$ . Se invece (b)  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$  allora  $\frac{1}{f}$  è definito in un intorno  $U$  di  $a$  ed è limitato in tale intorno. Allora per il teorema 2.5 esiste  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}(U)$  con  $\tilde{\varphi} = \frac{1}{f}$  in  $U \setminus \{a\}$  e dunque  $\tilde{\varphi}f = 1$  in  $U \setminus \{a\}$  ossia  $f$  è meromorfa.

□

**Definizione 2.12: Polo**

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ . Si dice che  $z = a$  è un **polo** se

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$$

In tal caso  $f(z)$  è del tipo (2.11). Se  $c_{-N} \neq 0$  si dice che  $z = a$  è un polo di **ordine**  $N$

**Definizione 2.13: Singolarità essenziale**

Se  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  ha sviluppo di Laurent con infiniti termini  $c_m$  con  $m < 0$  si dice che  $z = a$  è una singolarità **essenziale**

**Esercizio 2.4**

Mostrare che  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  ha una singolarità essenziale in  $z = 0$

**Teorema 2.27: Casorati-Weierstrass**

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  con  $z = a$  singolarità essenziale. Allora l'immagine di  $f$  è densa in  $\mathbb{C}$

*Dimostrazione.* Per assurdo supponiamo che esista un  $w \in \mathbb{C}$  e  $\rho > 0$  tali che

$$D_\rho(w) \cap f(D_r^*(a)) = \emptyset$$

Allora  $\frac{1}{f-w}$  è ben definita in tutto  $D_r^*(a)$  ed è limitata, dunque per il teorema 2.5 di estensione di Riemann, esiste  $\varphi \in \mathcal{H}(D_r(a))$  con  $\varphi = \frac{1}{f-w}$  se  $z \neq a$ . Ne segue che  $f-w$  è meromorfa che è assurdo, perché  $f$  ha una singolarità essenziale  $\square$

In realtà in particolare esiste un risultato ancora più sorprendente

**Teorema 2.28: Grande Teorema di Picard**

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  con  $a$  singolarità essenziale. Allora  $f$  assume ogni valore di  $\mathbb{C}$ , con al più un'eccezione, un numero infinito di volte.

Da questo teorema ne possiamo dedurre la versione “piccola”, ossia

**Teorema 2.29: Piccolo Teorema di Picard**

Una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$  che non sia un polinomio assume tutti i valori complessi con al più un'eccezione un numero infinito di volte.

*Dimostrazione.* Se  $f$  è olomorfa su tutto  $\mathbb{C}$  allora  $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ . Sia ora

$$\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots$$

allora  $\zeta = 0$  è una singolarità essenziale perché  $f$  non è un polinomio. Si applica dunque il teorema precedente.  $\square$

Sia dunque  $f$  una funzione olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{1/r}(0)$ . Allora la funzione  $\tilde{f}(\zeta) = f(1/\zeta)$  è olomorfa in  $D_r^*(0)$  e quindi possiamo studiare il tipo di singolarità che presenta in  $\zeta = 0$

Diciamo che  $f$  ha una singolarità eliminabile, un polo o una singolarità essenziale in  $z = \infty$  se tale è la singolarità in  $\zeta = 0$  di  $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(\zeta) = \cdots + \tilde{c}_{-2}\zeta^{-2} + \tilde{c}_{-1}\zeta^{-1} + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1\zeta + \tilde{c}_2\zeta^2 + \cdots \quad \forall \zeta \in D_r^*(0) \quad (2.12)$$
$$f(z) = \cdots + \tilde{c}_2 z^{-2} + \tilde{c}_1 z^{-1} + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_{-1} z + \tilde{c}_{-2} z^2 + \cdots \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{1/r}(0)$$
$$\int_{-\partial D_\rho(0)} f(z) dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_{-m} \int_{-\partial D_\rho(0)} z^{-m} dz = -2\pi i \tilde{c}_1 \quad \text{per } \rho > \frac{1}{r}$$

Sia  $f$  olomorfa all'esterno di un disco  $\overline{D}_{1/r}(0)$  e sia [2.12](#) lo sviluppo di Laurent di

$\tilde{f} : \zeta \mapsto f(\frac{1}{\zeta})$  relativo al punto  $\zeta = 0$ . Chiamiamo **residuo** di  $f$  in  $\infty$  il valore

$$\text{Res}(f, \infty) = -\tilde{c}_1$$

## 2.6 Residui

Nel calcolo dei residui di una funzione possono essere utili le seguenti osservazioni

**Proposizione 2.30.** Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  della forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (z \neq a)$$

con  $g, h \in \mathcal{H}(D_r(a))$ ,  $g(a) \neq 0$ ,  $h(a) = 0$  e  $h'(a) \neq 0$ . Allora  $z = a$  è un polo del primo ordine per  $f$  e

$$\text{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

*Dimostrazione.* Lo sviluppo di  $h$  in  $a$  è

$$\begin{aligned} h(z) &= h'(a)(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots = \\ &= (z-a) \underbrace{(h'(a) + a_2(z-a) + \dots)}_{=: \varphi(z)} \end{aligned}$$

allora  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)\varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{z-a}$  con  $\psi$  olomorfa in un intorno di  $z = a$  e  $\psi(a) = g(a)/h'(a)$ . Se ora

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(a) + \varphi'(a)(z-a) + \dots \implies \\ \implies f(z) &= \frac{\varphi(a)}{z-a} + \varphi'(a) + \dots \end{aligned}$$

e quindi  $z = a$  è un polo del primo ordine per  $f$  con residuo  $\psi(a)$  □

### Esercizio 2.5

Sia  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$  per  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ . Calcolare il residuo in  $z = i$

Operando come nella proposizione 2.30 si ha  $g(z) = z$ ,  $h(z) = z^2 + 1$  e effettivamente abbiamo  $g(i) = i \neq 0$ ,  $h(i) = i^2 + 1 = 0$  e  $h'(i) = 2i \neq 0$  e quindi il residuo è

$$\text{Res}(f, i) = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$$

Il risultato della proposizione 2.30 si può generalizzare a poli di ordine superiore

**Proposizione 2.31.** Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ . Allora  $z = a$  è polo di ordine  $k$  se e solo se

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = l \neq 0$$

e in tal caso il residuo è

$$\text{Res}(f, a) = \frac{\phi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \quad \varphi(z) := (z-a)^k f(z)$$

*Dimostrazione.* Ripercorriamo la dimostrazione del caso  $k = 1$ : se  $z = a$  è un polo di ordine  $k$  allora

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

con  $c_{-k} \neq 0$  e quindi  $(z-a)^k f(z) \rightarrow c_{-k} \neq 0$ . In tal caso allora

$$\phi(z) := (z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \dots$$

e quindi il residuo  $\text{Res}(f, a)$  è il coefficiente di  $(z-a)^{k-1}$  nello sviluppo di Taylor di  $\phi$  in  $a$ , ossia

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{\phi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

Viceversa se  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = l \neq 0$  allora  $(z-a)\phi(z) \rightarrow 0$  per  $z \rightarrow a$  allora è estensibile, con  $\phi(a) \neq 0$  e quindi

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^k} \quad \text{e quindi } z = a \text{ è un polo di ordine } k$$

□

### Esercizio 2.6

Sia  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$  per  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ . Calcolare il residuo in  $z = 0$

### Esercizio 2.7

Calcolare i residui di  $f$  nei poli, nel caso delle funzioni

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} - e^z}{z^2 - 1}, \quad \frac{1}{\sin^3 z}$$

## 2.7 Indice di avvolgimento

**Logaritmo** non è una funzione di per se su  $\mathbb{C}$ , infatti la funzione esponenziale  $z \mapsto e^z$  è suriettiva ma non iniettiva. Infatti dato  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  cerchiamo un  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $e^z = w$ . Se  $w = re^{i\theta}$  e  $z = x + iy$  allora

$$e^{x+iy} = re^{i\theta} \implies \begin{cases} e^x = r \\ e^{iy} = e^{i\theta} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \log r \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

quindi abbiamo  $\exp^{-1}(re^{i\theta}) = \{\log r + i(\theta + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ . Evidentemente quindi risulta difficile definire una funzione logaritmo. Possiamo dunque limitarne il dominio

### Definizione 2.16: Logaritmo principale

Diciamo **logaritmo principale** la funzione  $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$z = re^{i\theta} \mapsto \log r + i\theta \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

Il motivo per cui non si definisce sul semiasse negativo è per evitare la discontinuità. Vorremmo infatti che tale funzione fosse olomorfa. Lo è. Mostriamo infatti che  $\log z$  è una primitiva di  $\frac{1}{z}$  in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .  $\frac{1}{z}$  è olomorfa su  $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  che è semplicemente connesso, dunque ha primitiva, data da:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$



dove  $\gamma_z$  è una curva da  $z_0$  a  $z$ . In particolare, la definiamo come in figura 8 e allora

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_1^r \frac{1}{\rho} d\rho + r \int_0^\theta e^{i\theta} d\theta = \log z + c$$

Quindi la funzione  $f(z) = \log(1+z)$  è definita in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$  e quindi in partico-

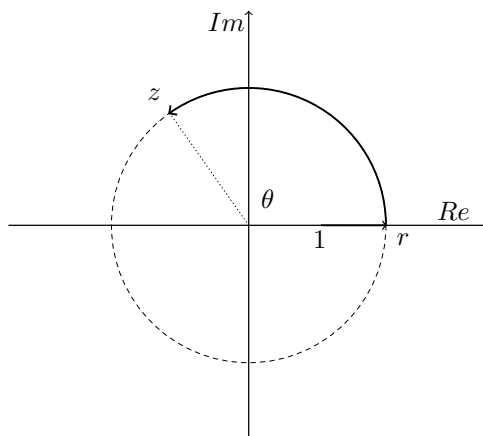


Figura 8: Curva  $\gamma$  usata per mostrare che  $\log z$  è primitiva di  $\frac{1}{z}$ , in questa figura  $z = re^{i\theta}$

lare è definita in 0. Consideriamo dunque lo sviluppo di  $f$  in  $z = 0$ . Per determinare i coefficienti abbiamo due modi: facendo come al solito e calcolando tutte le derivate  $f^{(n)}(0)$  oppure oppure sfruttando la primitiva trovata sopra. Infatti

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \stackrel{|z| \leq 1}{=} 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

e sappiamo però che, se  $f(z) = c_0 + c_1(z) + c_2z^2 + \dots$  allora la serie derivata  $f'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \dots$  e per confronto abbiamo quindi (poiché  $c_0 = f(0) = \log(1) = 0$ )

$$f(z) = \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

*Osservazione.* Notare che abbiamo usato l'accortezza di confrontare con la serie derivata, invece che “integrare”. Infatti in  $\mathbb{C}$  dovremmo specificare una curva ecc è un po' strano dire “integrando la serie”. Tuttavia così ha senso.

Risulta, in particolare

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

Quanto abbiamo detto sul logaritmo principale diventa problematico se abbiamo un  $\Omega \not\subseteq \mathbb{C}^2 \setminus (-\infty, 0]$ . Si consideri l'esempio della figura 9 e anche nel caso di  $\Omega$  brutto siamo riusciti a trovare una funzione  $\log$  che è inversa di  $e^z$  in  $\Omega$ . Questo è più generale:

#### Teorema 2.32

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  semplicemente connesso. Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  mai nulla. Allora esiste  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  tale che

$$e^g = f$$

Tale  $g$  è univocamente individuata a meno di una costante additiva della forma  $2k\pi i$

Idea (illuminazione) (intuito):  $g = \log f$  allora  $g' = f'/f$

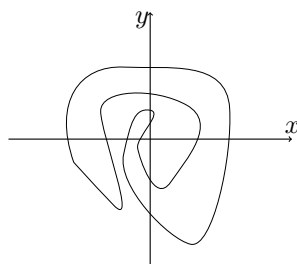


Figura 9: Omega brutto

*Dimostrazione.*  $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $\Omega$  semplicemente connesso, e allora ammette primitiva  $\phi$ , con  $\phi' = f'/f$ . Consideriamo

$$\frac{d}{dz}(fe^{-\phi}) = f'e^{-\phi} - fe^{-\phi}\phi' = 0$$

quindi  $fe^{-\phi} =: e^c$  è costante su  $\Omega$  e mai nulla. Ma allora  $f = e^{\phi+c}$  e dunque  $\phi + c$  è la funzione  $g$  di cui nell'enunciato.

Per l'unicità, se  $g_1$  e  $g_2$  sono tali che

$$e^{g_1} = f = e^{g_2}$$

allora  $e^{g_1 - g_2} = 1$  e dunque  $g_1(z) - g_2(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$  ma poiché  $g_1 - g_2$  è continua e  $\Omega$  è connesso, deve essere costante, esiste dunque un  $k \in \mathbb{Z}$  tale che

$$\forall z \in \Omega, \quad g_1(z) - g_2(z) = 2k\pi i$$

□

### Definizione 2.17: Ramo del logaritmo

Ogni  $g$  di cui al teorema precedente è detta **determinazione** o **ramo** di  $\log f$  in  $\Omega$

Siano  $\Omega$  e  $f$  come sopra; sia  $\gamma$  una curva in  $\Omega$  con punto iniziale  $z_0$  e terminale  $z_1$ . Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \stackrel{*}{=} g(z_1) - g(z_0)$$

dove in  $\star$  abbiamo preso  $g$  una determinazione di  $\log f$  in  $\Omega$ . Allora ne segue

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz\right) = e^{g(z_1) - g(z_0)} = \frac{e^{g(z_1)}}{e^{g(z_0)}} = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}$$

Tale risultato continua a sussistere anche se  $\Omega$  **non** è semplicemente connesso, ossia vale il teorema

### Teorema 2.33

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  mai nulla. Sia  $\gamma$  una curva in  $\mathbb{C}$  con punto iniziale  $z_0$  e punto terminale  $z_1$ . Allora

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz\right) = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}$$

**Corollario 2.33.1.** Siano  $\Omega, f$  come sopra, sia  $\gamma$  una curva chiusa in  $\Omega$ . Allora

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Se  $\gamma$  è chiusa nel teorema si ha

$$\exp \left( \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = 1$$

□

**Caso particolare:** Sia  $a \in \mathbb{C}$  e sia  $\gamma$  una curva chiusa che non passa per  $a$ . Sia  $f(z) = z - a$ , con  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} =: \Omega$  (notare  $\Omega$  non semplicemente connesso). Allora per il corollario 2.33.1

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = k \in \mathbb{Z}$$

### Definizione 2.18: Indice di avvolgimento

Siano  $\gamma$  e  $a$  come sopra. Il valore (intero)

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz$$

è detto **indice di avvolgimento** di  $\gamma$  rispetto al punto  $a$

Valgono alcune proprietà:

- $n(\gamma; \cdot)$  è costante sulle componenti connesse di  $\mathbb{C} - \gamma$ , infatti la funzione  $a \mapsto n(\gamma; a)$  è continua ed ha valori in  $\mathbb{Z}$ .
- $n(\gamma; \cdot)$  è nullo su  $\Omega_{\infty}$ , infatti sia  $D$  un disco contenente  $\gamma$  e sia  $a \notin \overline{D}$ . Allora

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = 0 \text{ perché } z \mapsto \frac{1}{z - a} \in \mathcal{H}(D)$$

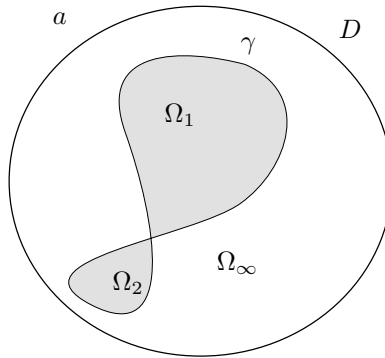


Figura 10: Indice di avvolgimento

## 2.8 Teorema dei residui

**Teorema 2.34**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto. Sia  $E$  un sottoinsieme chiuso e discreto di  $\Omega$ . Sia  $\gamma$  una curva chiusa in  $\Omega \setminus E$  che sia omotopa a una costante come curva in  $\Omega$ . Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$ . Allora l'insieme  $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\}$  è finito e

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{a \in E} n(\gamma, a) \text{Res}(f, a)$$

*Dimostrazione.* □

**Esercizio 2.8**

Sia  $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  la funzione  $\Gamma$  di Eulero. Ricordiamo che  $\Gamma$  è olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$  e che  $\Gamma(1) = 1$  e  $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ .

Per  $n \in \mathbb{N}$  fissato, sia  $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$\gamma_n = \begin{cases} x_1(t) + i \cos(\pi x_1(t)) & t \in [0, 1/2] \\ x_2(t) - i \cos(\pi x_2(t)) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

con  $x_1(t) = \frac{1}{2} - 2nt$  e  $x_2(t) = x_1(1-t)$ .

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \Gamma$$

Notare che

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Infatti per  $n=0$  è banale e il passo induttivo è ovvio moltiplicando numeratore e denominatore per  $z+n+1$ . Allora abbiamo, per  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Res}(\Gamma, -n) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \Big|_{z=-n} = \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\dots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ora basti notare che la funzione  $\gamma_n$  non è altro che una curva che avvolge una volta i poli pari in senso antiorario e i poli dispari in senso orario, per  $k=0, -1, \dots, -n$ . Allora, per il teorema dei residui (2.8)

$$\int_{\gamma_n} \Gamma = 2\pi i \sum_{k=0}^{-n} (-1)^k \cdot \frac{(-1)^k}{(-k)!} = 2\pi i \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi e$$

**Teorema 2.35**

Sia  $g$  olomorfa ad eccezione di un numero finito di punti, su un aperto contenente

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$$

Nessuna delle singolarità sia sull'asse reale. Sia

$$f(z) = e^{i\omega z} g(z)$$

con  $\omega \in \mathbb{R}$ . Supponiamo inoltre che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0; \quad \omega > 0$$

Allora  $f$  è integrabile su  $\mathbb{R}$  e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im(a) > 0} \text{Res}(f, a)$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R, S \rightarrow +\infty} \int_{-S}^R$$

Fissiamo  $R, S > 0$ . Fissato poi  $M > 0$  consideriamo la curva  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$  in figura 11

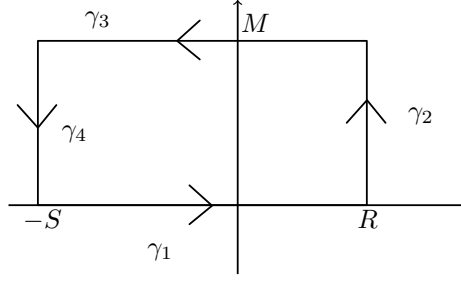


Figura 11: Costruzione della curva  $\gamma$

Fissato  $\varepsilon > 0$  sia  $R_\varepsilon$  tale che

$$\forall R, S, M \geq R_\varepsilon, \quad |g(z)| \leq \varepsilon$$

e le singolarità di  $g$  siano all'interno del rettangolo. Allora

$$\int_{\gamma} e^{i\omega z} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\Im(a) > 0} \text{Res}(f, a)$$

Il primo membro è uguale a

$$\int_{-S}^R e^{i\omega x} g(x) dx + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

Consideriamo

$$\int_{\gamma_2} e^{i\omega z} g(z) dz \stackrel{z=R+it}{=} \int_0^M e^{i\omega(R+it)} g(R+it) i dt =: I_2$$

$$|I_2| \leq \varepsilon \int_0^M |e^{i\omega R}| e^{-\omega t} dt = \varepsilon \left[ -\frac{1}{\omega} e^{-\omega t} \right]_0^M = \frac{\varepsilon}{\omega} (1 - e^{-\omega M}) \leq \frac{\varepsilon}{\omega}$$

qualunque sia  $M > 0$ . Analogamente abbiamo anche che  $\left| \int_{\gamma_4} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\omega}$

Per  $\gamma_3$  abbiamo invece

$$\int_{\gamma_3} e^{i\omega z} g(z) dz \stackrel{z=t+Mi}{=} \int_R^{-S} e^{i\omega(t+Mi)} g(t+Mi) dt =: I_3$$

$$|I_3| \leq \varepsilon \int_{-S}^R e^{-\omega M} dt = \varepsilon e^{-\omega M} (R+S)$$

Fissati  $R$  e  $S$  si prenda quindi  $M$  tale che

$$\left| \int_{\gamma_3} \right| \leq \varepsilon$$

Allora possiamo concludere perché

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists R_\varepsilon : \forall R, S \geq R_\varepsilon \quad \left| \int_{-S}^R e^{i\omega x} g(x) dx - 2\pi i \sum_{\Im(a)>0} \text{Res}(f, a) \right| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{w} + \varepsilon$$

□

### Esercizio 2.9

Si calcoli l'integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx \quad \gamma, \omega > 0$$

e poi per  $\omega < 0$

### Esercizio 2.10

Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Si osserva che

$$I = \Im(J), \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$g(z) = \frac{z^3}{(z^2 + 1)^2} \quad z_0 = i, \quad z_1 = -i$$

Allora  $z_0$  e  $z_1$  sono poli del secondo ordine poiché

$$\varphi(z) = (z - i)^2 f(z) = e^{iz} \frac{z^3}{(z + i)^2} \rightarrow e^{-1} \frac{-i}{-4} \neq 0$$

e quindi il residuo è

$$\text{Res}(f, i) = \varphi'(i) = \frac{1}{4e} \implies J = 2\pi i \cdot \frac{1}{4e} \implies I = \Im(J) = \frac{\pi}{2e}$$

**Singularità sull'asse reale** Per gli integrali impropri richiamiamo che se  $\xi \in (a, b)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f : [a, b] \setminus \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua allora si dice che l'integrale  $\int_a^b f dx$  è convergente se esiste finito

$$\lim_{\varepsilon, \sigma \rightarrow 0} \int_{[a, b] \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \sigma)} f(x) dx$$

(Analogamente per per gli integrali impropri verso  $\pm\infty$  con gli intorno di  $\pm\infty$  e con  $f : \mathbb{R} \setminus (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ )

### Definizione 2.19: Valor principale

Si dice che  $f$  è **integrabile in valor principale** su  $[a, b]$  se esiste finito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[a, b] \setminus (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)} f(x) dx =: p.v. \int_a^b f(x) dx$$

**Esempio 2.8.** Per  $f(x) = \frac{1}{x}$ , con  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$  allora

$$p.v. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = 0$$

Scriveremo anche

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

se  $f$  è integrabile in un intorno di  $\pm\infty$  e presenta singolarità al finito considerate in valor principale.

### Teorema 2.36

Sia  $f$  olomorfa, ad eccezione di un numero finito di singolarità, in un intorno di  $H$ . Le singolarità sull'asse reale siano poli semplici. Supponiamo che valga una o l'altra delle seguenti condizioni (vedi teoremi precedenti)

- Esista  $p > 1$  tale che

$$\limsup_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in M}} |z|^p |f(z)| < +\infty$$

- Esistano  $\omega > 0$  e  $g$  (con le stesse singolarità di  $f$ ) tali che

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in H}} g(z) = 0, \quad f(z) = e^{i\omega z} g(z)$$

Allora  $f$  è integrabile (in valor principale) su  $R$  e

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im(a) > 0} \text{Res}(f, a) + \pi i \sum_{\Im(a) = 0} \text{Res}(f, a)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione ripercorre ciascuna delle due precedenti, “isolando” le singolarità sull'asse reale. Siano ad esempio valide le prime ipotesi. Allora Sia  $R > \max_{z \in \text{sing.}} |z|$  e consideriamo la curva  $\gamma = \eta_1 + \gamma_\varepsilon + \eta_2 + \gamma_R$ . Allora come nella dimostrazione precedente abbiamo

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^p} \pi R \rightarrow 0, \text{ per } R \rightarrow \infty$$

Per quanto riguarda  $\gamma_\varepsilon$  abbiamo

$$-\gamma_\varepsilon(\theta) = a + \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Consideriamo lo sviluppo di Laurent di  $f$  relativo a  $a$ :

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + h(z) \quad (\text{polo semplice})$$

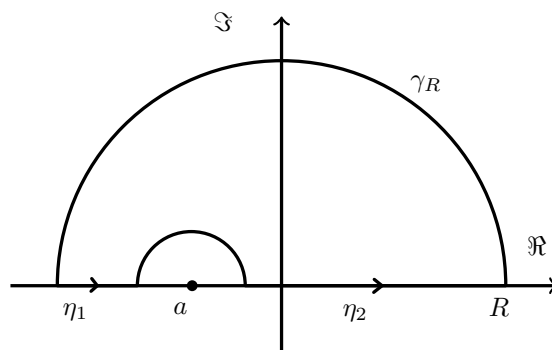


Figura 12: curva dim teo3

dove  $h$  è olomorfa in un intorno di  $a$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz &= \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{c-1}{z-a} dz + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} h(z) dz}_{\rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ (} h \text{ limitato in un intorno di } a)} \\ &= - \int_0^\pi \frac{c-1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -i\pi \text{Res}(f, a) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z) dz}_{\rightarrow 0}$$

Infine possiamo concludere

$$\begin{aligned} \left| \int_{[-R, R] \setminus (a-\varepsilon, a+\varepsilon)} f(x) dx - 2\pi i \sum_{\Im(\xi) > 0} \text{Res}(f, \xi) - \pi i \text{Res}(f, a) \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_{\gamma_R} f \right| + \left| \int_{\gamma_\varepsilon} f + \pi i \text{Res}(f, a) \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

### Esercizio 2.11

Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{iz}}{z^2} dz \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad [\pi \text{ entrambi}]$$

## 2.9 Altri risultati

### Teorema 2.37: Prolungamento analitico

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un aperto connesso e  $f$  olomorfa su  $\Omega$ . Se esiste  $U \subseteq \Omega$  aperto tale che  $f \equiv 0$  su  $U$  allora  $f \equiv 0$  su  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $E_n = \{f^{(n)} = 0\}$  con  $n = 0, 1, \dots$ . Allora  $E = \bigcap_n E_n$ .  $E$  è chiuso in quanto intersezione di chiusi. Vogliamo mostrare che è anche aperto. Sia  $a \in E \subseteq \Omega$ , sviluppiamo  $f$  intorno a  $a$  e abbiamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in D_r(a), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$



per  $r$  opportuno, con  $D_r(a) \subseteq \Omega$ . Quindi poiché  $a \in E$  risulta  $c_n = 0$  per ogni  $n$  quindi  $f \equiv 0$  in  $D_r(a)$ . Allora  $D_r(a) \subseteq E$  e quindi  $E$  è aperto.

Infine poiché  $\Omega$  è connesso e  $E \neq \emptyset$  ne consegue necessariamente che  $E = \Omega$   $\square$

**Corollario 2.37.1.** *Sia  $0 \neq f \in \mathcal{H}(\Omega)$  con  $\Omega$  connesso. Allora l'insieme degli zeri di  $f$  è un insieme chiuso in  $\Omega$  e discreto.*

*Dimostrazione.* Sia  $f(a) = 0$ : mostriamo che  $z = a$  è uno zero isolato. Sia  $D_r(a)$  tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in D_r(a)$$

Se  $c_n = 0$  per ogni  $n$  allora  $f \equiv 0$  su  $D_r(a)$ : per il teorema 2.9 quindi  $f \equiv 0$  su  $\Omega$ , che è escluso.

Sia quindi  $N = \min\{n : c_n \neq 0\}$  e si ha che

$$f(z) = c_N (z-a)^N + c_{N+1} (z-a)^{N+1} + \dots = (z-a)^N g(z)$$

con  $g(a) = c_N \neq 0$ . Quindi in un opportuno intorno di  $a$ ,  $f$  si annulla solamente in  $a$ .  $\square$

**Corollario 2.37.2.** *Siano  $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$  con  $\Omega$  aperto connesso. Se  $\{f = g\}$  ha un punto di accumulazione in  $\Omega$  allora  $f \equiv g$  in  $\Omega$*

*Dimostrazione.* Si applichi il corollario 2.37.1 a  $f - g$   $\square$

**Esempio 2.9.** Consideriamo  $f = z \mapsto e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Allora  $f$  è l'unica estensione olomorfa di  $x \mapsto e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Analogamente per le funzioni trigonometriche.

Così pure si possono estendere a tutto  $\mathbb{C}$  alcune formule. Infatti se, ad esempio  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  su tutto  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ , che ha punti di accumulazione, allora l'uguaglianza vale su tutto  $\mathbb{C}$

### Teorema 2.38

Ogni funzione olomorfa non costante su un aperto connesso è un'applicazione aperta

Da cui segue il seguente teorema

### Teorema 2.39: del massimo modulo

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso e  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Se  $f$  non è costante allora  $|f|$  non può avere punti di massimo in  $\Omega$

*Dimostrazione.* Sia  $z \in \Omega$ , vogliamo mostrare che non può essere un punto di massimo. Sia  $w = f(z)$ . Sia  $D_r(z) \subseteq \Omega$ . Allora  $f(D_r(z))$  è un aperto contenente  $f(z) = w$ . Esiste  $w' \in f(D_r(z))$  (quindi  $w' = f(z')$ ) tale che  $|w'| > |w|$  cioè  $|f(z')| > |f(z)|$ . Allora  $z$  non può essere punto di massimo per  $|f|$   $\square$

**Corollario 2.39.1.** *Sia  $\Omega$  aperto connesso e **limitato**. Sia  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continue con  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ .*

Allora

$$\sup_{\Omega} |f| = \max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f| \quad (2.13)$$

*Osservazione.* Come ricordare il tutto: è chiaro, vogliamo dire che il massimo “non c'è perché è sul bordo”. Per farlo dobbiamo definire la funzione su  $\overline{\Omega}$ , aggiungendo come ipotesi la continuità e per avere il massimo dobbiamo richiedere la limitatezza di  $\Omega$ . Infine poiché il massimo non può essere in  $\Omega$  deve essere sul bordo.

*Dimostrazione.* Se  $f$  è costante valgono le uguaglianze.

Altrimenti: i punti di massimo di  $|f|$  su  $\overline{\Omega}$  (che esistono per Weierstrass) devono essere su  $\partial\Omega$ , altrimenti sarebbero massimo per  $|f|$  in  $\Omega$ . Quindi

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

Del resto se  $z_M \in \partial\Omega$  è di massimo per  $|f|$  su  $\overline{\Omega}$  e  $z_k \rightarrow z_M$  con  $z_k \in \Omega$ , allora

$$\sup_{\Omega} |f| \geq |f(z_k)| \rightarrow |f(z_M)| = \max_{\partial\Omega} |f|$$

□

#### Teorema 2.40

Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Allora

- i) Se  $f$  è iniettiva allora  $f'$  non si annulla mai. Quindi posto  $G = f(\Omega)$  si ha che  $G$  è aperto,  $f : \Omega \rightarrow G$  è biettiva. Allora  $f^{-1} : G \rightarrow \Omega$  è olomorfa e

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{con } w = f(z)$$

- ii) Se  $a \in \Omega$  è tale che  $f'(a) \neq 0$  allora  $f$  è localmente iniettiva, quindi localmente invertibile.

Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  e prendiamo un punto  $a \in \Omega$ . Consideriamo la curva  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \Omega$  con  $\gamma(0) = a$  e consideriamo la curva  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ . Sia  $v = \gamma'(0)$  allora

$$\gamma'(0) = f'(\gamma(0))\gamma'(0) = f'(a)v$$

dove l'ultimo dipende solo da  $f, a$  (e  $v$ ) ma non dalla curva.

Sia  $0 \neq f'(a) = re^{i\theta}$ . Allora  $\gamma'(0)$  si ottiene da  $v$  per rotazione dell'angolo  $\theta$  (e dilatazione di fattore  $r$ ). Quindi se  $f'(a) \neq 0$  e  $\gamma, \eta$  sono curve che si tagliano in  $a$  secondo l'angolo  $\alpha$ , anche le immagini si tagliano in  $f(a)$  con secondo  $\alpha$ . Tale proprietà geometrica è chiamata **conformità**.

#### Definizione 2.20: Applicazione conforme

Un'applicazione  $f : \Omega \rightarrow G$  con  $\Omega, G \subseteq \mathbb{C}$  aperti che sia olomorfa e biettiva (quindi con anche  $f^{-1}$  olomorfa) è detta applicazione conforme (biolomorfismo)

**Esempio 2.10.** La funzione  $f = z \mapsto e^z : \{x + iy : |y| < \pi\} \rightarrow G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  è conforme. In particolare ha inversa il logaritmo principale

$$\log z = \log \rho + i\theta \quad \text{con } z = \rho e^{i\theta}$$

**Esempio 2.11.**  $f(z) = \frac{i-z}{i+z}$  con  $z \neq -i$ . Allora  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ . Mostriamo che è biettiva. Sia  $\zeta \neq -1$  e cerchiamo  $z$  tale che  $f(z) = \zeta$

$$\frac{i-z}{i+z} = \zeta \iff i-z = i\zeta + z\zeta \iff z = i \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = f^{-1}(\zeta)$$

Sia  $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  e  $D = D_1(0)$ . Allora mostriamo che  $f : H^+ \rightarrow D$  è biettiva. Questo segue da

$$|f(z)| = \frac{|i-z|}{|i+z|} = \frac{d(z, i)}{d(z, -i)}$$

e dunque  $|f(z)| < 1 \iff z \in H^+$

**Lemma 2.41: Schwartz**

Sia  $f : D \rightarrow D$  con  $f(0) = 0$ . Allora

- a.  $|f(z)| \leq |z|$  per ogni  $z \in D$ ; inoltre se esiste  $z_0 \neq 0$  con  $|f(z_0)| = |z_0|$ . Allora  $f$  è una rotazione
- b.  $|f'(0)| \leq 1$  e se  $|f'(0)| = 1$  allora  $f$  è una rotazione

*Dimostrazione.* a. Sia  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  con  $z \neq 0$ . Allora per il teorema di estensione di Riemann 2.5  $g$  è olomorfa anche in  $z = 0$  con  $g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$ . Dunque  $g \in \mathcal{H}(D)$ .

Sia  $r \in (0, 1)$  e  $z \in \partial D_r(0)$  allora

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

e per il principio del massimo modulo 2.9 si ha che  $|g| \leq \frac{1}{r}$  su  $D_r(0)$ . Per  $r \rightarrow 1$  si ha  $|g(z)| \leq 1$  su  $D$  cioè  $|f(z)| \leq |z|$  su  $D$ .

Se esiste  $z_0 \neq 0$  con  $|f(z_0)| = |z_0|$  cioè  $|g(z_0)| = 1$  allora per il principio del massimo modulo si ha che  $|g| = c$  e dunque  $g(z) = e^{i\theta}$  per cui  $f(z) = e^{i\theta}z$  cioè  $f$  è una rotazione

- b.  $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ . Se  $|f'(0)| = 1$  allora  $|g(0)| = 1$ , come prima.

□

**Teorema 2.42**

Gli automorfismi di  $D$  sono tutte e sole le applicazioni della forma

$$f(z) = e^{i\theta} \psi_w(z) \quad \text{con } \psi_w(z) = \frac{z - w}{\bar{w}z - 1}$$

*Dimostrazione.* Sia  $f : D \rightarrow D$  biettiva e olomorfa. Definiamo  $\psi_w : D \rightarrow D$  biettiva e olomorfa come una funzione tale che  $\varphi_w(0) = w = f^{-1}(0)$  una possibile funzione è  $\psi_w(z) = \frac{z-w}{\bar{w}z-1}$  (si verifichi). Allora abbiamo che  $h = f \circ \psi_w$  fissa l'origina. Appliciamo 2.9 a  $h$  e otteniamo che  $h$  è una rotazione. Ne consegue la tesi □

Le precedenti sono casi particolari delle **trasformazioni di Möbius** che sono della forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

che hanno proprietà interessanti

**Teorema 2.43: Mappa conforme di Riemann**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un aperto semplicemente connesso e diverso da  $\mathbb{C}$ . Fissato  $z_0 \in \Omega$  esiste  $f : \Omega \rightarrow D$  **conforme** tali che  $f(z_0) = 0$  e  $f'(z_0) \in \mathbb{R}$

### 3 Richiamo delle forme differenziali

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto. Una forma differenziale su  $\Omega$  è un'espressione formale della forma

$$\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

con  $A, B \in C^0(\Omega)$ . Più precisamente  $\omega$  è una funzione continua  $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)'$ . Se  $\gamma$  è una curva  $C^1$  a tratti in  $\Omega$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , allora

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)dt \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

#### Definizione 3.1: Forma esatta

La forma differenziale  $\omega$  si dice **esatta** se esiste  $F \in C^1(\Omega)$  tale che  $\omega = dF$ , e  $F$  è detta *primitiva* di  $\omega$

Se  $\omega$  è  $C^1$  (cioè  $A, B \in C^1$ ) allora, se è esatta, ossia  $\frac{\partial F}{\partial x} = A$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = B$  risulta

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (3.1)$$

#### Definizione 3.2: Forma chiusa

Se  $\omega$  è una forma differenziale  $C^1$  e soddisfa (3.1) allora si dice **chiusa**

#### Teorema 3.1

Sia  $\Omega$  connesso. Allora

$$\omega \text{ esatta} \iff \int_{\gamma} \omega = 0 \text{ per ogni } \gamma \text{ in } \Omega \text{ chiusa}$$

*idea di dimostrazione.*

$\implies$  semplice

$\impliedby$  Fissiamo  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Definiamo ora

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega$$

dove  $\gamma_{x,y}$  è una qualunque curva in  $\Omega$  che unisce  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ . La definizione è ben posta perché se  $\gamma_{(x,y)}$  e  $\tilde{\gamma}_{(x,y)}$  sono due tali curve allora

$$0 = \int_{\gamma_{(x,y)} - \tilde{\gamma}_{(x,y)}} \omega = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega - \int_{\tilde{\gamma}_{(x,y)}} \omega$$

La dimostrazione procede dimostrando che  $dF = \omega$

□

#### Teorema 3.2

Sia  $\Omega$  connesso e  $\omega$  **chiusa**. Allora se  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  sono curve chiuse  $C^1$  a tratti

omotope in  $\Omega$  allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

*Osservazione.* Il teorema vale anche per curve non necessariamente chiuse purché siano omotope mediante un'omotopia che fissa gli estremi.

**Corollario 3.2.1.** *Sia  $\Omega$  semplicemente connesso e  $\omega$  chiusa. Allora  $\omega$  è esatta.*

*Dimostrazione.* Se  $\Omega$  è semplicemente connesso ogni curva chiusa è omotopa a costante 0 e quindi  $\int_{\gamma} \omega = 0$ , ossia  $\omega$  è esatta  $\square$