# Appunti di Analisi Funzionale

Github Repository: `0xke/appunti/AnalFun`

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Antonio Edoardo Segatti

## 0.1 Intro

### 0.1.1 Spazi Normati

Sia $X$ uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$).

**Definizione 0.1.1: norma**

Si definisce **norma** una funzione

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che

i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

**Definizione 0.1.2: Spazio Normato**

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ tale che $X$ sia uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su $X$.

Per una notazione più leggera, quando non è ambiguo sottintenderemo la norma, scrivendo "sia $X$ uno spazio normato".

**Proposizione 0.1.1** (Metrica indotta da $\|\cdot\|$)**.** *La norma $\|\cdot\|$ induce su $X$ una metrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$$

*Nota* (zioni)*.* Alcune notazioni utili:

- $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} = x_0 + r\, B_1(0)$
- $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$

**Definizione 0.1.3: Convergenza in norma - Convergenza forte**

Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $X$ e sia $x \in X$. Dico che $x_n$ converge a $x$ in norma o fortemente se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}\ :\ \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \overline{n}$$

**Definizione 0.1.4: Successione di Cauchy**

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} \ : \ \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \overline{n}$$

*Osservazione.* La norma $\|\cdot\|$ è una funzione continua.

*Dimostrazione.* Preso $x, y \in X$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e similmente si può con variabili scambiate. Ne consegue che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque la norma è Lipschitziana con costante 1 □

**Definizione 0.1.5: Norma equivalente**

Sia $X$ uno spazio normato e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su $X$. Dico che $\|\cdot\|_1$ è **topologicamente equivalente** a $\|\cdot\|_2$ se

$$\forall x \in X \ \forall r > 0 \ \exists r_1, r_2 > 0 :$$
$$B_{r_1}(x, \|\cdot\|_1) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_2) \text{ e } B_{r_2}(x, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_1)$$

**Proposizione 0.1.2.** *Sia $X$ normato. Allora due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

*Dimostrazione.*

$\Longrightarrow$ Fissato $x_0 = 0$, preso $r$ tale che

$$B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(0, \|\cdot\|_1)$$

preso ora $0 \neq x \in X$, sia $y := \frac{r_2}{2\|x\|_2}x$, così che $\|y\|_2 = \frac{r_2}{2}$, dunque $y \in B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2)$ e quindi per l'inclusione sopra

$$\|y\|_1 = \frac{r_2}{2}\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq r$$

che è la prima delle disuguaglianze richieste. Similmente si può trovare l'altra scambiando $x$ e $y$, le due norme, e $r_2$ con $r_1$

$\Longleftarrow$ Preso $x_0 \in X$ e $r > 0$, sia $r_1 := r/\beta$. Allora, per ogni $x \in X$

$$\|x - x_0\|_1 \leq \frac{r}{\beta} \implies \|x - x_0\|_2 \leq \beta\|x - x_0\|_1 \leq r$$

che è la prima delle inclusioni richieste. Similmente si può trovare l'altra prendendo $r_2 := r/\alpha$ e scambiando le norme.

□

*Osservazione.* Se $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ è una norma equivalente alla prima, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$

**Definizione 0.1.6: Dimensione**

Sia $X$ uno spazio vettoriale. Allora

$$\dim X = \begin{cases} 0 & X = \{0\} \\ n & n \in \mathbb{N} \text{ e } X \text{ ha una base di } n \text{ elementi} \\ +\infty & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ esistono } n \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{cases}$$

**Teorema 0.1.3: Equivalenza delle norme**

Sia $X$ uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme sono topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.* Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di $X$. Sia $x \in X$. Allora sia

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \qquad \text{con } x^i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Definiamo la norma (facile controllo lasciato come esercizio)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a^i|$$

Sia ora $\|\cdot\|$ un'altra norma su $X$, dimostriamo che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x^i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left( \max_{1 \leq i \leq N} \|e_i\| \right)}_{\beta} \|x\|_1$$

Rimane da dimostrare che $\exists \alpha > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$. Assumiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}$ esista $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n \|x_n\|$. Prendiamo ora (ovviamente $x_n \neq 0$ per la diseguaglianza stretta)

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \implies \|y_n\| < \frac{1}{n} \quad ; \quad \|y_n\|_1 = 1$$

Dalla seconda otteniamo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n^i| \leq 1$. Per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $n_k$ tale che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $y_{n_k}^i \to y^i$.

Allora

$$\|y_{n_k} - y\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} (y_{n_k}^i - y^i) e_i \right\|_1 \leq \beta \sum_{i=1}^{n} |y_{n_k}^i - y^i| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

e poiché

$$1 = \|y_{n_k}\|_1 \leq \|y_{n_k} - y\| + \|y\|_1 \overset{k \to \infty}{\Longrightarrow} \|y\|_1 = 1$$

che è in contraddizione con $\|y_n\| \to 0$ $\square$