

# Appunti di Geometria 2

Github Repository: [Oxke/appunti/Geo2](#)

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Lidia Stoppino e Leone Slavich

Il corso è diviso in due parti: geometria differenziale (tenuto da Slavich) e gruppo fondamentale (tenuto dalla Stoppino). Ci sono esercitazioni di geometria differenziale. Ci sono vari libri consigliati:

- Abate - Tovena, *Curve e superfici*, Springer
- M. D. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall
- E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri
- Dispense del prof. Ghigi (sulle quali è stato disegnato il corso, almeno per la parte di geometria differenziale)

# Capitolo 1

## Geometria Differenziale

Il corso di geometria differenziale studierà curve e superfici in  $\mathbb{R}^3$  definiti **analiticamente** tramite funzione  $C^\infty$  (*lisce*). Studiamo la **geometria locale** e infine (verso la fine del corso) la **geometria globale**, in particolare il teorema di Gauss-Bonnet.

### 1.1 Definizioni e proprietà iniziali

#### 1.1.1 Funzioni lisce

Sia  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto (anche possibilmente  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ ). Sia

$$C^0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua}^1 \text{ su } I\}$$

##### Definizione 1.1.1: Derivabile

Diciamo che  $f \in C^0(I)$  è derivabile se  $\forall x_0 \in I$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c =: f'(x_0) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ora procediamo definendo ricorsivamente le funzioni  $C^k(I)$ .

##### Definizione 1.1.2: Classe $C^k$

Per ogni  $k \geq 1$ , diciamo che  $f \in C^k(I)$  se  $f$  è derivabile e  $f' \in C^{k-1}(I)$

Dunque, ad esempio  $f \in C^1(I)$  se  $f$  è derivabile su  $I$  e la sua derivata  $f'$  è continua su  $I$ . Detto più colloquialmente, una funzione  $f \in C^k(I)$  è una funzione derivabile (almeno)  $k$  volte, e tale che la sua derivata  $i$ -esima  $f^{(i)}$  è continua per ogni  $i = 0, \dots, k$ .

*Osservazione.*

$$C_0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset C^i \supset C^{i+1} \supseteq \dots$$

##### Definizione 1.1.3: funzioni lisce

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I) = \text{insieme delle } \mathbf{funzioni lisce}$$

**Teorema 1.1.1: Proprietà delle classi  $C^k$** 

Sia  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Se  $f, g \in C^k(I)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora

1.  $f + g \in C^k(I)$
2.  $\lambda f \in C^k(I)$
3.  $f \cdot g \in C^k(I)$

*Dimostrazione.* 1. e 2. sono semplici. Per 3. si procede per induzione su  $k$ .

Nel caso base  $k = 0$  il prodotto di due funzioni continue è anch'esso una funzione continua, che è vero.

Supponiamo ora che 3. valga per  $k - 1$ . Siano  $f, g \in C^k(I)$ . Allora  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$  che è somma di funzioni  $C^{k-1}$  per ipotesi induttiva e perché  $C^k \subset C^{k-1}$ , e dunque  $(f \cdot g)' \in C^{k-1}$  da cui segue che  $f \cdot g \in C^k$ .

Infine possiamo concludere per  $k = +\infty$  perché vale per tutti i  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Dal teorema 1.1.1 segue che  $C^k(I)$  è uno spazio vettoriale (con operazione di somma e moltiplicazione per scalare) e inoltre  $C^k(I)$  contiene le funzioni costanti e allora  $C^k(I)$  con operazioni di somma e moltiplicazione puntuale è un anello. Da queste due segue che  $C^k(I)$  è una  $\mathbb{R}$ -algebra.

**Esempio 1.1.1.** Esistono funzioni lisce che **non** sono **analitiche**. In particolare esistono funzioni lisce che sono nulle su un aperto ma non nulle dappertutto (differentemente da quanto succede sulle funzioni olomorfe). Un esempio di tale funzione è

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

Questa è una funzione  $C^\infty(\mathbb{R})$  che non può essere analitica perché contraddirebbe il teorema del prolungamento. Similmente si possono costruire funzioni costanti in

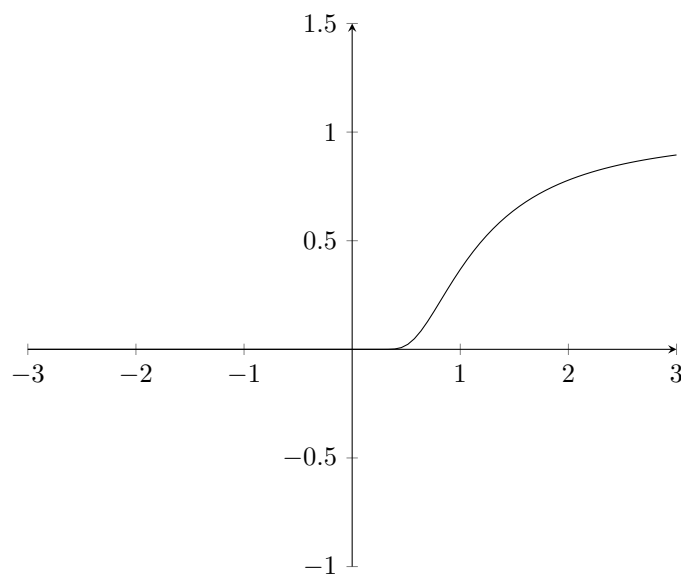


Figura 1.1: Grafico della funzione  $f(x)$  dell'esempio 1.1.1

aperti, raccordate in modo  $C^\infty$  e ovviamente non analitiche.

**Proposizione 1.1.2** (Composizione). *La composizione di funzioni  $C^\infty$  è  $C^\infty$ . Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora se  $f \in C^\infty(I)$  e  $g \in C^\infty(J)$  e  $f(I) \subseteq J$  (ossia si possono comporre), allora  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è ben definita e*

$$g \circ f \in C^\infty(I)$$

*Dimostrazione.* Lo dimostriamo per  $k \in \mathbb{N}$  invece che  $k = \infty$ , segue naturalmente il caso enunciato. Per  $k = 0$  è ovvio.

Supponiamo che valga per  $k - 1$ . Allora siano  $f, g \in C^k$  e tali che  $f(I) \subseteq J$ . Allora  $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$  che è prodotto di funzioni  $C^{k-1}$  per ipotesi induttiva e per il teorema 1.1.1 segue che  $g \circ f \in C^k(I)$ .  $\square$

## 1.1.2 Diffeomorfismi

### Definizione 1.1.4: Diffeomorfismo

Un diffeomorfismo è un isomorfismo nella categoria delle funzioni lisce (su  $\mathbb{R}$  nel nostro caso).

Informalmente, un diffeomorfismo è un omeomorfismo  $C^\infty$ .

### Definizione 1.1.5: Diffeomorfismo

Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli aperti in  $\mathbb{R}$ . Allora  $f : I \rightarrow J$  è un **diffeomorfismo** se

1.  $f \in C^\infty(I)$
2.  $f$  è biettiva
3.  $f^{-1} \in C^\infty(J)$

*Osservazione.* La terza condizione **non** è ridondante. Infatti sia  $I = J = \mathbb{R}$  e  $f(x) = x^3$  che è chiaramente  $C^\infty$  e biunivoca. Tuttavia  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  non è derivabile in 0, poiché  $f'(0) = 0$  e  $f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)}$  se  $f(x) = y$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $f^{-1'}(y)$  sia ben definita.

*Osservazione.* Se  $I$  e  $J$  sono intervalli aperti di  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow J$  è diffeomorfismo, allora  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ . Infatti sappiamo che

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad f(x) = y \quad \forall x \in J \quad (1.1.1)$$

dunque  $f'(x)$  non può essere nullo, poiché significherebbe che  $f^{-1}$  non è derivabile in  $y = f^{-1}(x)$ .

**Lemma 1.1.3.** *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia e tale che  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ . Allora  $f(I) = J$  è un intervallo aperto e  $f : I \rightarrow J$  è un diffeomorfismo.*

*Dimostrazione.* Sia  $f$  come nell'enunciato. Allora  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  è continua su  $I$  e non si annulla mai. Segue che  $f'$  ha segno costante su  $I$  ( $f' > 0$  oppure  $f' < 0$ ).

Assumiamo  $f' > 0$  su  $I$ . Allora  $f$  è strettamente crescente e dunque iniettiva. Allora  $f : I \rightarrow f(I) =: J$  è biettiva. Inoltre  $J$  è un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ . Infatti è chiaramente intervallo (è connesso) in quanto immagine continua di un connesso (intervallo). Sia ora  $y_0 \in J$  e sia  $x_0 \in I$  tale che  $f(x_0) = y_0$ . Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$ . Poiché  $f$  è strettamente crescente, segue che

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$$

sapendo già che  $J$  è un intervallo, segue che

$$I \supseteq [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)] \text{ è un intorno di } y_0$$

Rimane solo da vedere che la funzione  $f^{-1} : J \rightarrow I$  è  $C^\infty$ . Notiamo intanto che  $f^{-1}$  è continua, poiché  $f$  è aperta. Inoltre sappiamo che  $f^{-1}$  è derivabile poiché è l'inversa di una funzione derivabile con derivata e vale l'equazione (1.1.1) per ogni  $y \in J$ .

Sia  $u : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definita da  $u(x) = 1/x$  è un diffeomorfismo e da 1.1.1 abbiamo che

$$f^{-1'} = u \circ f' \circ f^{-1}$$

e quindi se assumiamo induttivamente che se  $f^{-1} \in C^k$  allora ne consegue dalla proposizione 1.1.2 che  $f^{-1'} \in C^k$  e dunque  $f^{-1} \in C^{k+1}$

□

### 1.1.3 Curve

#### Definizione 1.1.6: Curva parametrizzata

Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione  $t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  con  $I$  intervallo aperto. Allora se  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sono funzioni lisce la funzione  $\alpha$  è detta **curva** parametrizzata in  $\mathbb{R}^3$

In generale se una funzione  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  verrà chiamata *funzione vettoriale* e ha come componenti  $n$  *funzioni scalari*  $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Con questa terminologia allora una curva parametrizzata è una funzione vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  con componenti  $C^\infty(I)$ .

**Esempio 1.1.2** (Retta in  $\mathbb{R}^3$ ). Ovviamente in forma parametrica

$$\alpha(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \quad ; \quad \mathbf{p}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ fissati e } t \in \mathbb{R}$$

e dunque  $\alpha_1(t) = p_{01} + tv_1$  e simili per le altre due componenti, e sono tutte funzioni lisce.

**Esempio 1.1.3.** In  $\mathbb{R}^2$  prendiamo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$  è una circonferenza di raggio  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  e centro  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Una possibile parametrizzazione è

$$\alpha(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

In questo caso avremmo potuto prendere anche  $I = [0, 2\pi]$ , non è un problema che  $\alpha$  non sia iniettiva

La definizione 1.1.6 è molto generale e non richiede che la curva sia come ci piacerebbe immaginarcela. Infatti anche se la curva è  $C^\infty$ , possiamo costruirne una che abbia un punto angoloso, anche se ha parametrizzazione  $C^\infty$ . Un esempio è visto nell'esempio 1.1.5. Inoltre vorremmo avere una definizione più bella di curva, che dipenda meno dalla parametrizzazione scelta.

#### Definizione 1.1.7: Vettore tangente

Data  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata, fissato un punto  $t \in I$ , definiamo il **vettore tangente** ad  $\alpha$  al tempo  $t$  come

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \\ \alpha'_3(t) \end{pmatrix}$$

*Osservazione.* Intuitivamente (nella visione cinematica della curva parametrizzata), il vettore tangente rappresenta la velocità della particella che si muove lungo la curva

*Osservazione.* Una retta ha tante parametrizzazioni diverse

Fissiamo due diverse parametrizzazioni della stessa retta  $r$ :

$$\alpha(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \quad ; \quad \beta(t) = \mathbf{q}_0 + t\mathbf{w}$$

Allora  $\alpha$  e  $\beta$  definiscono la stessa retta se e solo se  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w} \parallel \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0$  sono paralleli. Equivalentemente

$$\mathbf{q}_0 = \alpha(t_0) \quad e \quad \mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$$

ma allora

$$\beta(s) = \mathbf{q}_0 + s\mathbf{w} = \alpha(t_0) + s(\lambda\mathbf{v}) = \mathbf{p}_0 + t_0\mathbf{v} + \lambda s\mathbf{v} = \mathbf{p}_0 + (t_0 + \lambda s)\mathbf{v} = \alpha(t_0 + \lambda s)$$

ossia  $\beta = \alpha \circ h$  con  $h(s) = t_0 + \lambda s$  è una funzione liscia con derivata mai nulla, dunque un diffeomorfismo. Questo motiva la seguente definizione

### Definizione 1.1.8: Riparametrizzazione

Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata e  $h : J \rightarrow I$  un diffeomorfismo. Allora  $\beta := \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una **riparametrizzazione** di  $\alpha$

*Osservazione.*  $h' = 0$  significa che  $\dot{\beta}(t) = 0 \iff \dot{\alpha}(t) = 0$ . Se  $h' > 0$  allora la curva viene percorsa nello stesso verso.

A noi interessano le curve parametrizzate *a meno di riparametrizzazione*. Questo suggerisce di introdurre una classe di equivalenza sulle curve parametrizzate

### Definizione 1.1.9: Equivalenza tra curve

Siano  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  curve parametrizzate. Allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo  $h : J \rightarrow I$  tale che  $\beta = \alpha \circ h$ . In altre parole  $\alpha$  e  $\beta$  sono **equivalenti** se e solo se  $\beta$  è una riparametrizzazione di  $\alpha$ .

La notazione che si usa è allora  $\alpha \sim \beta$

*Nota.* La relazione di equivalenza  $\sim$  è una relazione di equivalenza. Infatti è ovviamente simmetrica per il diffeomorfismo  $t \mapsto t$ , è simmetrica mediante il diffeomorfismo  $h^{-1}$  ed è transitiva perché la composizione di due diffeomorfismi è un diffeomorfismo.

### Definizione 1.1.10: Curve geometriche

L'insieme delle curve geometriche è l'insieme delle classi di equivalenza delle curve parametrizzate rispetto alla relazione di equivalenza  $\sim$  di riparametrizzazione.

Per ogni curva geometrica, vogliamo trovare una curva parametrizzata in parametrizzazione "canonica".

### Definizione 1.1.11: Parametrizzazione per lunghezza d'arco

Data  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata,  $\alpha$  è detta **parametrizzata per lunghezza d'arco** (o *parametrizzata per ascissa curvilinea*) se

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$$

Ora la questione è capire se è possibile riparametrizzare una curva in modo che abbia parametrizzazione per lunghezza d'arco. Per quanto osservato prima è necessario che  $\dot{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$ , infatti  $\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(t) \cdot h'(s)$ . Vogliamo ora mostrare che questa condizione è sufficiente.

### Definizione 1.1.12: Curva regolare

Una curva parametrizzata  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice **regolare** se  $\dot{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $t \in I$

### Teorema 1.1.4: regolare $\iff \exists$ riparam. per lunghezza d'arco

Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata regolare. Allora  $\exists h : J \rightarrow I$  diffeomorfismo tale che  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione per lunghezza d'arco.

Prima di procedere alla dimostrazione facciamo una piccola digressione sulle lunghezze di una curva. Data  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata. Fisso  $[c, d] \subseteq I$  intervallo chiuso. Allora l'arco di curva  $\alpha|_{[c,d]} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ha lunghezza che si calcola come

$$L(\alpha|_{[c,d]}) = \int_c^d \|\dot{\alpha}(\tau)\| d\tau$$

per continuità della norma l'integranda è continua e dunque integrabile. In particolare le somme di Riemann di questo integrale corrispondono alle lunghezze delle curve poligonali che approssimano la curva, il sup di esse è dunque il valore cercato.

*Dimostrazione del teorema 1.1.3.* Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Fisso  $t_0 \in I$  e definisco  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  tramite

$$h(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(\tau)\| d\tau$$

allora  $h(I) = J \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo aperto. Inoltre  $h : I \rightarrow J$  è un diffeomorfismo e  $\beta = \alpha \circ h^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una riparametrizzazione con ascissa curvilinea.

Infatti:

1.  $h$  è  $C^\infty$ . Infatti  $t \mapsto \|\dot{\alpha}(t)\|$  è  $C^\infty$  in quanto composizione di funzioni lisce. Infatti è radice di un valore che non è mai nullo, dunque la radice è definibile da  $(0, +\infty)$  e allora  $C^\infty$ .

Allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale,  $h$  è  $C^\infty$

2.  $h'(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0$ , dunque  $h$  è diffeomorfismo e  $J$  è aperto.

3.  $\beta = \alpha \circ h^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  è  $C^\infty$  e

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(h^{-1}(s)) \cdot (h^{-1})'(s) = \frac{\dot{\alpha}(h^{-1}(s))}{h'(h^{-1}(s))} = \frac{\dot{\alpha}(h^{-1}(s))}{\|\dot{\alpha}(h^{-1}(s))\|}$$

e dunque  $\|\dot{\beta}\| = 1$

□

Il teorema 1.1.3 è la motivazione per cui sceglieremo di lavorare con curve regolari.

**Esempio 1.1.4.**  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$  è l'unione dei semiassi positivi. Allora due fatti sono veri:

1. È possibile trovare una curva parametrizzata liscia con  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\alpha(I) = C$

2. Non esiste una curva regolare tale che  $\alpha(I) = C$

dunque le curve regolari sono l'oggetto giusto per studiare la geometria delle curve che appaiono geometricamente lisce.

**Esempio 1.1.5** (Curva liscia con punto angoloso). Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da