

# Appunti di Algebra Superiore

GitHub Repository: [Oxke/appunti/AlgebraSuperiore](#)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

## Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>edit: menzogne, è perché è più pesante.

# Indice

<b>1 Prerequisiti</b>	<b>3</b>
1.1 Richiami sugli Anelli . . . . .	3
1.2 Richiami sui Moduli . . . . .	6
1.2.1 Prodotti . . . . .	8
1.2.2 restrizione degli scalari . . . . .	10
<b>2 Categorie</b>	<b>15</b>
2.1 Categorie preadditive . . . . .	28
2.1.1 Prodotti, coprodotti, proprietà universali . . . . .	31
2.2 Limiti e colimiti . . . . .	37
2.2.1 Limiti in categorie preadditivive . . . . .	43
<b>3 Moduli (reprise)</b>	<b>56</b>
3.1 Funtori indotti da omomorfismi di anelli . . . . .	64
3.1.1 Moduli divisibili e senza torsione . . . . .	67
<b>4 Algebra Omologica</b>	<b>70</b>

# Capitolo 1

## Prerequisiti

### 1.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

#### Definizione 1: Anello

Un **anello**  $A, +, \cdot$  è un gruppo abeliano  $A, +$  (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide  $A, \cdot$  (con 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + ac \quad ; \quad (b+c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione  $\cdot$  è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

**Esempio 2.**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

**Esempio 3.** Se  $A$  è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in  $A$  e con variabili in  $\Lambda$  costituiscono l'anello  $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

**Esempio 4** (Anello Banale). L'anello composto da un solo elemento  $\{0 = 1\}$

**Esempio 5** (Non comm.).  $A$  anello, allora l'anello  $M_n(A)$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $A$  non è commutativo se  $n > 1$  (e se non è l'anello banale ma dai l'anello banale non esiste davvero)

**Esempio 6.** Endomorfismi Se  $(G, +)$  è un gruppo abeliano, allora  $\text{End}(G)$  è anello con  $+$  determinato da  $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$  e  $\cdot$  dato dalla composizione  $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se  $G, G'$  sono gruppi con  $(G, +)$  abeliano, allora l'insieme  $\text{Hom}(G', G)$  degli omomorfismi da  $G'$  a  $G$  è un sottogruppo di  $G^{G'}$  il gruppo delle funzioni da  $G'$  a  $G$ .

Infatti se  $X$  è un insieme allora  $G^X$  è un gruppo con  $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

#### Definizione 7: Invertibile

$a \in A$  è invertibile a sinistra (destra) se  $\exists a' \in A$  tale che  $a'a = 1$  ( $aa' = 1$ ).  
 $a$  viene detto **invertibile** se  $\exists a' \in A$  tale che  $a'a = aa' = 1$

*Osservazione* (invertibile  $\iff$  invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se  $a', a'' \in A$  sono tali che  $a'a = aa'' = 1$  allora

$$\begin{aligned} (a'a)a'' &= a'(aa'') \\ 1a'' &= a'' = a' = a'1 \end{aligned}$$

quindi  $a$  è invertibile e  $a^{-1} = a' = a''$

*Osservazione* (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con  $A^*$

In generale, se  $1 \neq 0$ , allora  $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

### Definizione 8: Anello con Divisione

$A$  si dice **anello con divisione** se  $A^* = A \setminus \{0\}$ . Un campo è un anello con divisione commutativo.

### Definizione 9: Divisore di zero

$a \in A$  è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se  $\exists a' \in A \setminus \{0\}$  tale che  $aa' = 0$  ( $a'a = 0$ )

*Osservazione.* Divisore di zero a sinistra:  $aa' = 0$ . Invertibile a sinistra:  $a'a = 1$

### Definizione 10: Dominio

$A$  viene detto **dominio** se  $A \neq 0$  e  $A$  non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

**Esempio 11.** I campi,  $\mathbb{Z}$ , se  $A$  dominio d'integrità, allora anche  $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$  è dominio d'integrità.

*Osservazione.*  $A \neq 0$  tale che  $\forall 0 \neq a \in A$  è invertibile a sinistra, allora  $A$  è un anello con divisione.

*Dimostrazione.*  $\exists a' \in A$  tale che  $a'a = 1$  ma anche  $\exists a'' \in A : a''a' = 1$ . Allora  $a'$  è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

### Definizione 12: Sottoanello

$A' \subseteq A$  è **sottoanello** di  $A$  se  $(A', +) < (A, +)$ ,  $ab \in A'$  per ogni  $a, b \in A'$  e  $1 \in A'$

**Esempio 13.**  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$  sono tutti sottoanelli

**Esempio 14.**  $A \subseteq A[X]$  sottoanello

### Definizione 15: Ideale

$I \subseteq A$  è un'ideale sinistro (destro) se  $(I, +) < (A, +)$  e  $ab \in I$  ( $ba \in I$ ),  $\forall a \in A$  e  $\forall b \in I$ .

Un **ideale bilatero** è un ideale sia sinistro che destro.

**Esempio 16.** Gli ideali in  $\mathbb{Z}$  sono tutti e soli della forma  $n\mathbb{Z}$ , con  $n \in \mathbb{N}$

*Osservazione.* Se  $I$  è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \emptyset$$

quindi  $A$  con divisione  $\implies$  gli unici ideali sinistri o destri sono  $\{0\}$  e  $A$

### Definizione 17: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello  $A$  è  $A^{op}$ , con  $(A^{op}, +) := (A, +)$  e con prodotto  $ab$  in  $A^{op}$  definito come  $ba$  in  $A$

*Osservazione.*  $(A^{op})^{op} = A$  e  $A^{op} = A \iff A$  commutativo

**Proposizione 18** (Anello Quoziente). *Se  $I \subseteq A$  ideale, allora il gruppo abeliano  $A/I, +$  è un anello con prodotto  $\bar{a}\bar{b} := \overline{ab}$ , dove  $\bar{a} := a + I \in A/I$*

### Definizione 19: omomorfismo di anelli

Siano  $A, B$  anelli.  $f : A \rightarrow B$  è **omomorfismo** di anelli se,  $\forall a, a' \in A$

- i)  $f(a + a') = f(a) + f(a')$
- ii)  $f(aa') = f(a)f(a')$
- iii)  $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

*Osservazione.*  $f$  omomorfismo è isomorfismo  $\iff \exists f' : B \rightarrow A$  omomorfismo tale che  $f' \circ f = \text{id}_A$  e  $f \circ f' = \text{id}_B$

Indicheremo  $A \cong B$  se esiste un isomorfismo tra  $A$  e  $B$

**Proposizione 20.** *Se  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo allora*

1.  $A' \subseteq A$  è sottoanello  $\implies f(A') \subseteq B$  è sottoanello.
2.  $B' \subseteq B$  sottoanello  $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$  è sottoanello
3.  $J \subseteq B$  è ideale (sinistro / destro)  $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$  è ideale (sinistro / destro). In particolare  $\text{Ker } f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$  è ideale
4.  $f$  suriettivo e  $I \subseteq A$  ideale  $\implies f(I) \subseteq B$  è ideale

*Osservazione.*  $f : A \rightarrow B$  è iniettivo  $\iff \text{Ker } f = \{0_A\}$  e in tal caso  $A \cong \text{Im } f := f(A)$  che dunque è sottoanello di  $B$

### Teorema 21: Omomorfismo

$f : A \rightarrow B$  è omomorfismo di anelli,  $I \subseteq A$  ideale tale che  $I \subseteq \text{Ker } f$ . Allora

$$\exists! \bar{f} : A/I \rightarrow B \text{ omomorfismo tale che } \bar{f}(\bar{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

Inoltre  $\text{im } \bar{f} = \text{im } f$  e  $\text{Ker } \bar{f} = \text{Ker } f/I$

**Proposizione 22.** *Gli ideali di  $A/I$  sono tutti e soli della forma  $J/I$  con  $J \subseteq A$  ideale tale che  $I \subseteq J$*

**Teorema 23: Primo teorema di isomorfismo**

$f : A \rightarrow B$  è omomorfismo di anelli, allora  $\text{im } f \cong A/\text{Ker } f$

**Definizione 24: Ideale massimale (sinistro / destro)**

Un ideale  $J$  (sinistro/destro) di  $A$  è massimale se  $\forall I$  ideale (sinistro/destro) tale che  $J \subseteq I \subseteq A$ , allora  $I = J$  o  $I = A$

*Osservazione.* Esiste sempre un ideale (sinistro/destro) massimale (*lemma di Zorn*)

**Definizione 25**

L'ideale generato da  $U \subseteq A$  è il più piccolo ideale di  $A$  che contiene  $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ ideale}} I$  ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i u_i b_i : n \in N, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

*Osservazione.* Se  $A$  è commutativo e  $U = \{u\}$  allora  $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$  (ideale principale)

**Definizione 26: PID**

$A$  è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di  $A$  è principale.

**Esempio 27.** Campi (non ci sono ideali propri)

**Esempio 28.**  $\mathbb{Z}$  (con ideali  $n\mathbb{Z} = (n)$ )

**Esempio 29.**  $K[X]$  con  $K$  campo

## 1.2 Richiami sui Moduli

**Definizione 30:  $A$ -modulo**

Un  $A$ -modulo (di default sinistro)  $M$  è un gruppo abeliano  $(M, +)$  con una moltiplicazione per scalare definita da

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \in M \end{aligned}$$

e tale che,  $\forall a, b \in A$  e  $\forall x, y \in M$ :

- 1)  $a(x + y) = ax + ay$
- 2)  $(a + b)x = ax + bx$
- 3)  $(ab)x = a(bx)$
- 4)  $1x = x$

*Osservazione.* Se  $\mathbb{K}$  è un campo, allora un  $\mathbb{K}$ -modulo è uno spazio vettoriale.

*Osservazione.* Se  $(M, +)$  è un gruppo abeliano, data  $f : A \times M \rightarrow M$  posso definire  $\alpha : A \rightarrow M^M$  come  $\alpha(a) = (x \mapsto ax)$ , e quindi le proprietà precedenti si traducono in

1.  $\alpha(a)(x+y) = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$  e dunque  $\alpha(a)$  è omomorfismo di gruppi, dunque  $\alpha(A) \subseteq \text{End}(M)$
2.  $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$  dunque  $\alpha : A \rightarrow \text{End}(M)$  è omomorfismo di gruppi
3.  $\alpha(a) \circ \alpha(b) = \alpha(ab)$
4.  $\alpha(1) = \text{id}_M$

Dalla 2,3,4  $\alpha : A \rightarrow \text{End}(M)$  è omomorfismo di anelli.

**Teorema 31: Secondo teorema di isomorfismo**

Sia  $M$  un modulo, con  $M', M'' \subseteq M$  sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

*Dimostrazione.* Si prenda  $f : M' \rightarrow (M' + M'')/M''$  composizione dell'inclusione di  $M'$  in  $M' + M''$  e della proiezione a quoziente, dunque è un omomorfismo.

Allora  $\text{Ker}f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$ .

Preso  $y \in (M' + M'')/M''$ ,  $y = x' + x'' + M'' = x' + M'' = f(x')$  dunque  $f$  è suriettiva. Dal primo teorema di isomorfismo segue la tesi.  $\square$

**Teorema 32: Terzo teorema di isomorfismo**

Dati  $M'' \subseteq M' \subseteq M$  sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M''$$

*Dimostrazione.* Sia  $f$  la composizione delle due proiezioni a quoziente, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \text{Ker}f \iff \pi(x) \in \text{Ker}\pi' = M'/M''$$

dunque  $\text{Ker}f = M'$  da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo.  $\square$

**Proposizione 33.**

1. Sia  $A$  un anello, allora un  $A$ -modulo  $M$  è ciclico se e solo se  $\exists I \subseteq A$  ideale sinistro tale che  $M \cong A/I$

2.  $M$  è semplice se e solo se  $\exists I \subseteq A$  ideale sinistro massimale tale che  $M \cong A/I$

*Dimostrazione.* 1. ( $\Leftarrow$ )  $A/I$  è ciclico (generato da  $\bar{1}$ ). Viceversa per ( $\Rightarrow$ ) so che  $M = Ax$  per un qualche  $x \in M$ . Considerata  $f :_A A \rightarrow M$  data da  $a \mapsto ax$ ,  $\text{Ker}f$  è sottomodulo di  $A$ , ovvero ideale sinistro. Concludo per il primo teorema di isomorfismo.

2. Se  $M$  è semplice allora  $\forall 0 \neq x \in M$ ,  $M = Ax$ , dunque  $M$  è ciclico e per il punto 1. esiste  $I$  ideale sinistro tale che  $M \cong A/I$ . La proposizione si riduce a dire che  $A/I$  è semplice se e solo se  $I$  è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di  $A/I$  sono tutti e soli della forma  $J/I$  con  $I \subseteq J \subseteq A$  ideale sinistro. Allora  $A/I \neq 0 \iff I \neq A$  e gli unici sottomoduli di  $A/I$  sono  $I/I$  e  $A/I$ , ossia gli unici ideali sinistri  $J$  tali che  $I \subseteq J \subseteq A$  sono  $I$  e  $A$ .

$\square$

*Osservazione.* Con il lemma di Zorn si dimostra che  $A \neq 0 \implies$  esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

### 1.2.1 Prodotti

#### Definizione 34: Prodotto

Supponiamo di avere  $M_\lambda$   $A$ -moduli, per  $\lambda \in \Lambda$ . Allora

$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  è un  $A$ -modulo detto **prodotto** degli  $M_\lambda$

con  $(x+y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$  e  $(ax)_\lambda = ax_\lambda$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$  e  $x, y \in M$ .  
 $\forall \mu \in \Lambda$  esiste  $p_\mu : M \rightarrow M_\mu$ ,  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$  che è  $A$ -lineare e suriettivo.

**Proposizione 35** (Proprietà universale del prodotto).

Dati  $f_\mu : N \rightarrow M_\mu$   $A$ -lineari  $\forall \mu \in \Lambda$ , allora esiste unico  $f : N \rightarrow M$   $A$ -lineare tale che  $f_\mu = p_\mu \circ f$

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ f_\mu \downarrow & \searrow \exists! f & \\ M_\mu & \xleftarrow[p_\mu]{} & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \end{array}$$

#### Esercizio 36

Dimostrare la proprietà universale del prodotto

#### Definizione 37: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli  $M_\lambda$  è

$$M' := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda > 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$  esiste

$$\begin{aligned} i_\mu : M_\mu &\longrightarrow M' \\ x &\longmapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

che è  $A$ -lineare e iniettivo.

**Proposizione 38** (Proprietà universale somma diretta).

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ \uparrow f_\mu & \nearrow \exists! f & \\ M_\mu & \xrightarrow[i_\mu]{} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \end{array}$$

Osservazione. Se  $\#\Lambda < +\infty$  allora

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

Nota (zione). Se  $M_\lambda = M$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ , si denota

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M =: M^\Lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M =: M^{(\Lambda)}$$

Dati  $M_\lambda \subseteq M$  sottomoduli, con  $\lambda \in \Lambda$ , sia

$$f : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow M$$

l'omomorfismo indotto dalle inclusioni  $M_\lambda \xrightarrow{i_\lambda} M$ , allora

$$\text{im } f =: \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \subseteq M \text{ è sottomodulo}$$

Inoltre  $f$  è iniettiva se e solo se  $M_\mu \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} = 0$  per ogni  $\mu \in \Lambda$  e in tal caso  $f$  induce un isomorfismo tra  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  e  $\sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  e si può scrivere  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$  per indicare il sottomodulo di  $M$

### Definizione 39: Linearmente indipendente, base, modulo libero

Sia  $U \subseteq M$  un insieme, con  $M$   $A$ -modulo. Si dice che  $U$  è  $A$ -linearmente indipendente se dati  $x_1, \dots, x_n \subseteq U$  distinti

$$a_1, \dots, a_n \in A \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

$U$  è detta **base** di  $M$  se è linearmente indipendente e genera  $M$ , ossia  $M = AU$ . Si dice che  $M$  è **libero** se ammette una base

**Esempio 40.** Per ogni  $\Lambda$ ,  $A^{(\Lambda)}$  è libero con base  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  dove, per ogni  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$(e_\lambda)_i = \begin{cases} 1 & \lambda = i \\ 0 & \lambda \neq i \end{cases}$$

**Proposizione 41.** Siano  $L, M$   $A$ -moduli, con  $L$  libero con base  $\{l_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  tale che  $l_\lambda \neq l_\mu$  se  $\lambda \neq \mu$ , allora

$$\forall \lambda \in \Lambda \exists! f : L \rightarrow M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(l_\lambda) = x_\lambda$$

**Corollario 42.** Un  $A$ -modulo è libero se e solo se è isomorfo a  $A^{(\Lambda)}$  per qualche  $\Lambda$   
Dimostrazione.

$\implies M$  libero con base  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  con  $x_\lambda \neq x_\mu$  se  $\lambda \neq \mu$ . Allora per la proposizione

$$\exists! f : A^\Lambda \rightarrow M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(e_\lambda) = x_\lambda$$

per ogni  $\lambda \in \Lambda$ . Allora  $\text{im } f = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle_A = M$  e  $f$  è iniettivo perché gli  $x_\lambda$  sono linearmente indipendenti.

$\Leftarrow$  ovvio

□

**Corollario 43.** Ogni  $A$ -modulo è insomorfo a un quoziente di un modulo libero ( $A^{(\Lambda)}$  per un qualche  $\Lambda$ ).

Inoltre un  $A$ -modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Sia  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  un insieme di generatori di un modulo  $M$ . Per la proposizione  $\exists! f : A^{(\Lambda)} \rightarrow M$   $A$ -lineare tale che  $f l_\lambda = x_\lambda$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ . Allora  $\text{Im } f = M$  e dunque per il primo teorema di isomorfismo  $M \neq A^{(\Lambda)}/\ker f$ .

Per la seconda parte se  $M$  è finitamente generato posso scegliere  $\Lambda$  finito e viceversa  $M \neq A^n/N$  è finitamente generato perché  $A^n$  lo è e  $\pi : A^n \rightarrow A^n/N$  è un omomorfismo suriettivo.

□

**Proposizione 44.** *A è con divisione se e solo se ogni suo A-modulo è libero*

*Dimostrazione.*

$\implies$  (complementi di algebra)

$\Leftarrow$  Sia  $M$  un  $A$ -modulo semplice. Per ipotesi è libero, allora  $M \cong A^{(\Lambda)}$  per un qualche  $\Lambda$ . Ma se  $\#\Lambda > 1$  allora  $A^{(\Lambda)}$  non è semplice ( $A \subseteq A^{(\Lambda)}$  è un sottomodulo non banale). Inoltre  $\Lambda \neq \emptyset$  ( $A^{(\emptyset)} = \{0\}$  non è semplice).

Ne consegue che  $M \cong A$  e dunque  $A$  è con divisione

□

**Esempio 45.** Con  $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  non è libero

Si può dimostrare che se  $A$  è con divisione, allora tutte le basi di un  $A$ -modulo (libero)  $M$  hanno la stessa cardinalità, che viene detta rango e indicata con  $\text{rk}_A M$ .

In generale non tutte le basi di un  $A$ -modulo libero hanno la stessa cardinalità, esistono infatti anelli  $A$  non banali tali che  $\overset{A}{\cong} A^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Esempio 46.** Sia  $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  con  $\mathbb{K}$  campo e  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = +\infty$

Si dimostra che se  $A \rightarrow B$  è omomorfismo di anelli e il rango dei  $B$ -moduli liberi è ben definito allora anche il rango degli  $A$ -moduli liberi è ben definito. Di conseguenza se  $A \neq 0$  è commutativo allora il rango degli  $A$ -moduli liberi è ben definito ( $\exists I \subseteq A$  ideale massimale e  $\pi : A \rightarrow A/I$  omomorfismo con  $A/I$  campo)

### 1.2.2 restrizione degli scalari

Siano  $A, B$  anelli, con  $f : A \rightarrow B$  omomorfismo di anelli. Allora se  $M$  è un  $B$ -modulo allora  $M$  è anche un  $A$ -modulo con  $ax := f(a)x$ . Si dice allora che  $_A M$  è ottenuto da  $_B M$  per **restrizione degli scalari** attraverso  $f$ .

Inoltre se  $M' \subseteq M$  è  $B$ -sottomodulo allora è anche un  $A$ -sottomodulo e se  $g : M \rightarrow N$  è  $B$ -lineare allora  $g$  è anche  $A$ -lineare.

Prima della prossima definizione ricordiamo che il **centro** di un anello è sottoanello, con il centro l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri elementi e indicato con  $Z(A)$ ,

$$Z(A) := \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$$

#### Definizione 47

Sia  $A$  commutativo. Allora una  $A$ -algebra è un omomorfismo di anelli  $f : A \rightarrow B$  tale che  $\text{im } f \subseteq Z(B)$

Se  $f$  è evidente si dice che  $B$  è una  $A$ -algebra

**Esempio 48.**  $M_n(A)$  è una  $A$ -algebra con  $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

**Esempio 49.** Se  $A = \mathbb{Z}$  per ogni  $B$  anello l'unico omomorfismo di anelli  $\mathbb{Z} \rightarrow B$  è una  $\mathbb{Z}$ -algebra. Infatti l'omomorfismo unico  $\mathbb{Z} \rightarrow Z(B)$  deve essere lo stesso di  $\mathbb{Z} \rightarrow B$

#### Definizione 50: Morfismo di $A$ -algebre

Siano  $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C$   $A$ -algebre. Un (omo/iso/...)morfismo di  $A$ -algebre da  $f$  a  $g$  è  $h : B \rightarrow C$  (omo/iso/...)morfismo di anelli tale che  $h \circ f = g$

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \downarrow & \searrow g & \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

**Esempio 51.** Ogni omomorfismo di anelli è omomorfismo di  $\mathbb{Z}$ -algebra.

**Esempio 52.** Sia  $f : A \rightarrow B$  una  $A$ -algebra. Allora  $\forall I \subseteq B$  ideale  $B/I$  è  $A$ -algebra con  $\pi \circ f$

*Osservazione (motivazione della definizione).* Se  $f : A \rightarrow B$   $A$ -algebra, allora  $B$  è un anello e  $A$ -modulo (per restrizione degli scalari) tale che

$$a(bb') = (ab)b' = b(ab')$$

**Lemma 53.** Sia  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$  una successione esatta di  $A$ -moduli. Siano  $f' : A^m \rightarrow M'$  e  $f'' : A^n \rightarrow M''$  omomorfismi. Allora esiste un diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^m & \longrightarrow & A^{m+n} & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dimostrazione.

□

**Proposizione 54.** Sia  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$  esatta di  $A$ -moduli. Allora

1.  $Mf.g. \implies M''f.g.$
2.  $M', M''f.g. \implies Mf.g.$
3.  $M', M''f.p. \implies Mf.p.$
4.  $Mf.g., M''f.p. \implies M'f.g.$
5.  $M'f.g., Mf.p. \implies M''f.g.$

Dimostrazione.

1. già visto
2. In esercizio la dimostrazione diretta. In alternativa possiamo applicare il lemma 53. Infatti esistono  $f' : A^m \rightarrow M'$  e  $f'' : A^n \rightarrow M''$  omomorfismi suriettivi e per il lemma 53 il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^m & \longrightarrow & A^{m+n} & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

commuta. Applicando ora il lemma del serpente otteniamo la successione esatta

$$\text{coKer } f' = 0 \rightarrow \text{coKer } f \rightarrow 0 = \text{coKer } f'' \implies \text{coKer } f = 0 \implies Mf.g.$$

3. Si può fare una dimostrazione simile a quella precedente e applicando il lemma del serpente troviamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f' \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \rightarrow 0 = \text{coKer } f'$$

per il punto 1.  $M$  è finitamente generato e dunque  $M$  è finitamente presentato.

4.  $M''$  f.p.  $\implies \exists$  successione esatta  $A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{h} M'' \rightarrow 0$ . Esiste dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A^m & \xrightarrow{g} & A^n & \xrightarrow{h} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

infatti voglio  $f$  tale che  $p \circ f = h$  e posso come prima (esercizio). allora per il lemma del serpente trovo che

$$0 \rightarrow \text{coKer } f' \rightarrow \text{coKer } f \rightarrow 0 = \text{coKer}_{\text{id}_{M''}}$$

è una successione esatta, e dunque  $\text{coKer } f' \cong \text{coKer } f = M/\text{Im } f$  per cui

$$0 \rightarrow \text{Im } f' \rightarrow M' \rightarrow \text{coKer } f' \rightarrow 0$$

è esatta. Concludiamo che  $\text{Im } f' \cong A^m/\text{Ker } f'$  e dunque è f.g., da cui anche  $M'$  è finitamente generato per il punto 1.

5.  $M$  è finitamente generato, dunque  $M''$  è finitamente generato per il punto 0. Come prima  $\exists A^m \rightarrow A^n, A^n \rightarrow M''$  omomorfismi suriettivi e trovo il diagramma del lemma 53 e applicando il lemma del serpente ottengo la successione esatta

$$\text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \rightarrow 0 = \text{coKer } f'$$

Sia ora  $f : A^{m+n} \rightarrow M$  suriettiva, allora

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow A^{m+n} \rightarrow M \rightarrow 0$$

è esatta,  $A^{m+n}$  è finitamente generata,  $M$  è finitamente presentato, dunque  $\text{Ker } f$  è f.g., quindi per il punto 3.  $\text{Ker } f''$  è f.g. e per il punto 0.  $M$  è f.p.

□

### Esercizio 55

Dimostrare il punto 1. della dimostrazione precedente direttamente.

**Corollario 56.** Sia  $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ . Allora  $M$  è f.g. / f.p. se e solo se  $M_i$  è f.g. / f.p. per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* La successione  $0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \rightarrow M \rightarrow M_n \rightarrow 0$  è esatta, dunque  $\implies$  usando induzione su  $n$  e i punti 1. e 2. della proposizione precedente  $\iff M_n$  è f.g. per il punto 0., ed è f.p. per il punto 4.

□

*Osservazione.* per il punto 3., se  $M$  è f.p. allora ogni  $A^n \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$  esatta si estende a

$$A^m \rightarrow A^n \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

*Osservazione.* Sia  $A$  non noetheriano. Allora  $\exists M$   $A$ -modulo f.g. non noetheriano, ad esempio  $M = A$ , ossia  $\exists M' \subseteq M$  sottomodulo non f.g. e in tal caso anche quando  $M$  è finitamente presentato, ad esempio nel caso  $M = A$ ,  $M/M'$  non è f.p. perché contraddirrebbe il punto 3.

Uno può chiedersi dato un modulo se i suoi sottomoduli finitamente generati siano anche moduli finitamente presentati. Questo non è in generale vero ma motiva la seguente definizione

### Definizione 57: Modulo coerente

Uno modulo  $M$  è detto **coerente** se è finitamente generato e tutti i suoi sottomoduli finitamente generati sono finitamente presentati.

*Osservazione.* Chiaramente essendo  $M \subseteq M$  un sottomodulo, se è coerente è anche f.p.

### Definizione 58: Anello coerente

Un anello  $A$  è **coerente** (a sinistra) se  $_A A$  è  $A$ -modulo coerente (ossia tutti gli ideali sinistri f.g. di  $A$  sono f.p.)

*Osservazione.* Se  $A$  è noetheriano e  $M$  è un  $A$ -modulo, allora

$$M \text{ coerente} \iff M \text{ f.p.} \iff M \text{ f.g.} \iff M \text{ noetheriano}$$

in particolare  $A$  è coerente.

*Dimostrazione.* Sappiamo già che  $M$  noetheriano se e solo se  $M$  f.g. Resta da dimostrare dunque che  $M$  noetheriano se e solo se  $M$  è coerente. So che  $M' \subseteq M$  f.g. è noetheriano (perché  $M$  lo è). Allora esiste la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker}p \rightarrow A^n \xrightarrow{p} M' \rightarrow 0$$

Ora poiché  $A$  è noetheriano, anche  $A^n$  lo è, e dunque  $\text{Ker}p$  è noetheriano, dunque  $\text{Ker}p$  è f.g. e infine  $M'$  è f.p.  $\square$

*Osservazione.* Sia  $A$  coerente non noetheriano, allora  $_A A$  è coerente non noetheriano

**Esempio 59.** Sia  $A$  non noetheriano,  $I \subseteq A$  ideale sinistro non f.g., allora  $A/I$  è f.g. non f.p. e  $A/I$  può anche essere noetheriano.

Un esempio è  $A = \mathbb{K}[X_n | n \in \mathbb{N}]$ ,  $I = (X_n | n \in \mathbb{N})$ ,  $A/I = \mathbb{K}$

*Osservazione.* Sia  $f : M \rightarrow N$   $A$ -lineare, con  $M, N$  finitamente generati. Allora  $\text{Im}f \cong M/\text{Ker}f$  e  $\text{coKer}f \cong N/\text{Im}f$  sono finitamente generati (punto 0. della proposizione) ma non necessariamente anche  $\text{Ker}f$  se  $A$  è non noetheriano.

**Proposizione 60.** Sia  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} m \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$  esatta di  $A$ -moduli.

1.  $M'$  f.g. e  $M$  coerente, allora  $M''$  è coerente
2.  $M', M''$  coerenti, allora  $M$  è coerente
3.  $M$  è coerente,  $M''$  è f.p., allora  $M'$  è coerente

in particolare  $M', M, M''$  sono coerenti se due di essi lo sono.

*Dimostrazione.* 1.  $M''$  è f.g. per il punto 0. della proposizione 54.  $N'' \subseteq M''$  è f.g., allora c'è una successione esatta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow N := p^{-1}(N'') \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

Allora  $N$  è f.g. per 1. di 54 e dunque  $N$  è f.p. perché  $M$  è coerente, da cui  $N''$  è f.p. per 4. di 54

2.  $M$  è f.g. per 1. di 54, se  $N \subseteq M$  sottomodulo finitamente generato, allora esiste la successione esatta

$$0 \rightarrow N' := i^{-1}(N) \rightarrow N \rightarrow N'' := p(N) \rightarrow 0$$

Allora  $N''$  è f.g. per 0. di 54 da cui  $N''$  è f.p. per la coerenza di  $M$ , dunque  $N'$  è f.g. per 3. di 54. Segue dalla coerenza di  $M'$  che  $N'$  è f.p. e dunque  $N$  lo è per 2. di 54

3.  $M'$  è f.g. per 3. di 54 dunque  $M'$  è coerente perché  $M' \cong i(M') \subseteq M$  sottomodulo è f.g. e  $M$  è coerente.

□

### Esercizio 61

mostrare che

$$\bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ coerente} \iff M_i \text{ coerente } \forall i$$

**Corollario 62.** Sia  $f : M \rightarrow N$  A-lineare,  $M, N$  coerenti, allora  $\text{Ker } f, \text{Im } f, \text{coKer } f$  sono coerenti.

*Dimostrazione.*  $\text{Im } f \cong M/\text{Ker } f$  è f.g. per 0. di 54

□

**Corollario 63.** Se  $A$  è coerente e  $M$  è un  $A$ -modulo f.p., allora  $M$  è coerente.

*Dimostrazione.* Basta osservare che per definizione esiste una successione esatta

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

e in particolare dunque  $M \cong \text{coKer } f$  e poiché  $A^m$  e  $A^n$  sono coerenti, lo è pure  $M$

□

**Esempio 64.** Sia  $A$  commutativo tale che  $A[X_1, \dots, X_n]$  sia coerente  $\forall n \in \mathbb{N}$  (ad esempio  $A$  noetheriano, per il teorema della base di Hilbert) Allora  $A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda]$  è coerente  $\forall \Lambda$ , anche se non è noetheriano per  $\#\Lambda = +\infty$  e  $A \neq 0$ .

*Idea della dimostrazione.* Sia  $I \subseteq B$  ideale f.g., ossia  $I = (f_1, \dots, f_n)$ . Allora  $\exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$  finito tale che  $f_1 \in B_0 := A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda_0]$

□

**Esempio 65** (Anello non coerente). Presi  $A$  e  $B$  come prima, ma supponiamo che  $A = \mathbb{K}$  campo. Prendiamo dunque  $J := (X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ , con  $\#\Lambda = +\infty$ . Allora preso

$$C = B/J^2$$

non è coerente. Preso infatti ad esempio

$$I = C\overline{X_\lambda} \text{ con } \lambda \in \Lambda$$

è f.g. ma non f.p. perché c'è la successione esatta

$$0 \rightarrow J/J^2 \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow 0$$

e  $J/J^2$  è  $C$ -modulo annullato da  $J/J^2$  e come  $C/(J/J^2) \cong B/J \cong \mathbb{K}$ -modulo ha dimensione  $\infty$  con base  $\{\overline{x_\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$

## Capitolo 2

# Categorie

### Definizione 66: Categoria

Una **categoria**  $\mathcal{C}$  è data da una classe di oggetti  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  e  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  da un insieme di morfismi da  $X$  a  $Y$  indicato con  $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$  e da una azione composizione di morfismi, cioè  $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  (anche scritto  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ ) un'operazione

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)(f, g) \mapsto g \circ f$$

tale che

$$0. \quad \mathcal{C}(X, Y) \cap \mathcal{C}(X', Y') \neq \emptyset \implies X = X' \text{ e } Y = Y'$$

$$1. \quad \circ \text{ è associativa, cioè } \forall X, Y, Z, W \in \mathcal{C} \text{ e } \forall f \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ e } \forall g \in \mathcal{C}(Y, Z) \text{ e } \forall h \in \mathcal{C}(Z, W) \text{ allora}$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$2. \quad \forall X \in \mathcal{C} \text{ esiste } 1_X = \text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X) \text{ che è elemento neutro di } X \text{ cioè } \forall Y \in \mathcal{C} \text{ e } \forall f \in \mathcal{C}(X, Y),$$

$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

**Esempio 67.** La categoria degli insiemi **Set** che ha come oggetti tutti gli insiemi e  $\forall X, Y \in \text{Set}$  i morfismi  $\text{Set}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$  le funzioni e  $\circ$  la composizione di funzioni

*Osservazione.* Se ho  $\mathcal{C}$  tale che valgano solo 1. e 2. e non necessariamente 0. posso ottenere la categoria  $\mathcal{C}'$  che soddisfa anche 0. ponendo  $\text{Ob}(\mathcal{C}') := \text{Ob}(\mathcal{C})$  e

$$\mathcal{C}'(X, Y) := \{X\} \times \mathcal{C}(X, Y) \times \{Y\}$$

**Esempio 68.** Le categorie concrete, in cui gli oggetti sono insiemi con qualche struttura e i morfismi sono funzioni tra insiemi che preservano la struttura (con  $\circ$  sempre la composizione di funzioni). In particolare:

- La categoria **Grp** dei gruppi, dove gli oggetti sono i gruppi e i morfismi gli omomorfismi di gruppi
- La categoria **Rng** degli anelli
- Dato un anello  $A$ , la categoria  $\mathbf{A-Mod} / \mathbf{Mod-A}$  degli  $A$ -moduli sinistri / destri
- Dato un anello commutativo  $A$ , la categoria **A-Alg** delle  $A$ -algebre

- La categoria  $\text{Top}$  degli spazi topologici (con funzioni continue come morfismi)

*Nota.* Dato  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  si può indicare con  $f : X \rightarrow Y$  “come fosse una funzione”

**Esempio 69.** Le categorie discrete, cioè tali che gli unici morfismi sono  $1_X$  per ogni  $X \in \mathcal{C}$ .

**Esempio 70.**  $\mathcal{C}$  tale che  $\forall X, Y \in \mathcal{C}, \#\mathcal{C}(X, Y) \leq 1$ , ottengo una relazione  $\preccurlyeq$  su  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  in cui

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathcal{C}(X, Y) \neq \emptyset$$

e  $\preccurlyeq$  è riflessivo (perché  $\exists 1_X \in \mathcal{C}(X, X) \forall X \in \mathcal{C}$ ) e transitivo, perché  $\exists \circ$ . Ne consegue che  $\preccurlyeq$  è un *preordine*

Viceversa, data una relazione di preordine  $\preccurlyeq$  su un insieme (o una classe)  $S$ , ottengo una categoria  $\mathcal{C}$  con  $\text{Ob}(\mathcal{C}) := S$  e  $\forall X, Y \in S$ ,

$$\mathcal{C}(X, Y) := \begin{cases} \{f_{X,Y}\} & \text{se } X \preccurlyeq Y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con l'unica composizione possibile

**Esempio 71** (Categoria Vuota). Prendendo  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \emptyset$

*Osservazione.*  $\forall X \in \mathcal{C}$  con  $\mathcal{C}$  una categoria,  $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X, X)$  è un monoide con  $\circ$ , ne consegue il prossimo esempio

**Esempio 72** (Monoide). Una categoria con un solo oggetto è un monoide. Viceversa ogni monoide può essere visto come categoria di un solo oggetto.

**Esempio 73** (Diagrammi). Possiamo definire categorie date da diagrammi, in cui si rappresentano i morfismi (non l'identità). Ad esempio:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \quad \bullet \rightrightarrows \bullet \quad \bullet \longrightarrow \bullet \leftarrow \bullet$$

sono tre categorie diverse, rispettivamente con 2, 2, e 3 oggetti

#### Definizione 74: Categoria opposta

La **categoria opposta** di  $\mathcal{C}$  è denotata  $\mathcal{C}^{op}$  ed è definita da

$$\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad \mathcal{C}^{op}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

con composizione in  $\circ^{op}$  data da  $f \circ^{op} g := g \circ f$

*Osservazione.*

$$(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$$

**Esempio 75** (Categoria Prodotto). Siano  $\mathcal{C}_\lambda$  per  $\lambda \in \Lambda$  delle categorie. Allora la categoria prodotto

$$\mathcal{C} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita da

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{C}) &:= \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ob}(\mathcal{C}_\lambda) \\ \mathcal{C}((X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) &:= \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda) \\ (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \circ (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &:= (g_\lambda \circ f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}$$

**Esempio 76** (Cateogoria Coprodotto). La categoria coprodotto

$$\mathcal{C} := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita con  $\text{Ob}(\mathcal{C}) := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$  l'unione disgiunta.

$$\forall X, Y \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C}(X, Y) := \begin{cases} \mathcal{C}_\lambda(X, Y) & \text{se } X, Y \in \mathcal{C}_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con  $\circ$  ovvia.

### Definizione 77: Sottocategoria

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria. Allora una sottocategoria  $\mathcal{C}'$  di  $\mathcal{C}$  è data da una sottoclasse  $\text{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$  e  $\forall X, Y \in \mathcal{C}'$  da un sottoinsieme  $\mathcal{C}'(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$  tale che  $\circ$  si restringe a  $\mathcal{C}'$  e  $1_X \in \mathcal{C}'(X, X)$  per ogni  $X \in \mathcal{C}'$ .

In particolare  $\mathcal{C}'$  è una categoria.

**Esempio 78.** Se  $\mathcal{C}$  è un monoide (cateogoria di un oggetto), allora le sottocategorie non vuote di  $\mathcal{C}$  sono i sottomonoidi.

### Definizione 79: Sottocategoria Piena

Una sottocategoria  $\mathcal{C}'$  di  $\mathcal{C}$  si dice **piena** se  $\mathcal{C}'(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathcal{C}'$

*Osservazione.* Una sottocategoria piena di  $\mathcal{C}$  equivale a dare una sottoclasse di  $\text{Ob}(\mathcal{C})$

**Esempio 80** (Gruppi Abeliani).  $\mathbf{Ab} \subseteq \mathbf{Grp}$  sottocategoria piena dei gruppi abeliani. Similmente anche  $\mathbf{CRng} \subseteq \mathbf{Rng}$  sottocategoria piena degli anelli commutativi.

Oltre alle sotto-strutture sono anche importanti i quozienti, e anche qui possiamo dare una definizione astratta

### Definizione 81: Congruenza

Una congruenza  $\sim$  su una categoria  $\mathcal{C}$  è data da una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $\mathcal{C}(X, Y) \forall X, Y \in \mathcal{C}$  tale che

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{C}, \forall f, f' \in \mathcal{C}(X, Y) \forall g, g' \in \mathcal{C}(Y, Z) \quad f \sim f', g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f'$$

$$\text{equivalentemente } g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f \text{ e } h \circ g \sim h \circ g'$$

### Definizione 82: Quoziente

Sia  $\sim$  una congruenza su  $\mathcal{C}$ , allora possiamo definire la categoria quoziante  $\mathcal{C}/\sim$  definita da

$$\text{Ob}(\mathcal{C}/\sim) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad (\mathcal{C}/\sim)(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y)/\sim \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$$

e  $\circ$  è indotta da quella di  $\mathcal{C}$ , ossia

$$\bar{g} \circ \bar{f} := \overline{g \circ f}$$

**Esempio 83** (Omotopia). Sia  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$  e  $\sim_h$  l'omotopia, ossia  $f, g : X \rightarrow Y$  sono omotope se  $\exists H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua tali che

$$f(x) = H(x, 0), \quad g(x) = H(x, 1) \quad \forall x \in X$$

e si ottiene  $\text{Toph} := \text{Top}/\sim_h$

**Esempio 84** (Gruppo quoziante). Sia  $G$  un gruppo (visto come monoide, ossia categoria di un oggetto) e sia  $H \triangleleft G$  e  $\sim$  su  $G$  data da  $a \sim b \iff aH = bH$ . Allora  $G/N$  è la categoria quoziante  $G/\sim$ . Viceversa ogni  $\sim$  congruenza su  $G$  si può scrivere in tal modo prendendo  $H = \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$  (esercizio).

### Definizione 85: morfismo invertibile

Sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo in una categoria  $\mathcal{C}$ . Allora esso è invertibile a sinistra (destra) se  $\exists f' : Y \rightarrow X$  tale che  $f' \circ f = 1_X$  ( $f \circ f' = 1_Y$ ).

*Osservazione.*  $f$  è invertibile a sinistra (destra) in  $\mathcal{C}$ , allora  $f$  è invertibile a destra (sinistra) in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$

### Definizione 86: Isomorfismo

$f : X \rightarrow Y$  è un **isomorfismo** se  $\exists f' : Y \rightarrow X$  tale che  $f' \circ f = 1_X$  e  $f \circ f' = 1_Y$

*Osservazione.*  $f$  è isomorfismo se e solo se  $f$  è invertibile a destra e a sinistra.

*Dimostrazione.*

$\implies$  ovvio

$\Leftarrow$   $\exists f', f''$  tale che  $f' \circ f = 1_X$  e  $f \circ f'' = 1_Y$ , allora

$$f' \circ (f \circ f'') = f' = f'' = (f' \circ f) \circ f''$$

e dunque  $f$  è invertibile.

In particolare dunque la  $f'$  della definizione di isomorfismo è unica e viene denotata  $f^{-1}$   $\square$

### Definizione 87

Siano  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Allora  $X$  e  $Y$  sono isomorfe ( $X \cong Y$ ) se esiste un  $f : X \rightarrow Y$  isomorfismo.

*Osservazione.*  $1_X$  è isomorfismo e  $1_X^{-1} = 1_X$ . Se  $f$  isomorfismo allora  $f^{-1}$  isomorfismo e  $(f^{-1})^{-1} = f$ . Se  $f, g$  isomorfismi componibili, allora  $g \circ f$  è isomorfismo e  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Ne segue che  $\cong$  è una relazione di equivalenza su  $\text{Ob}(\mathcal{C})$

### Definizione 88

Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  è detto **monomorfismo** se  $\forall Z \in \mathcal{C}$  la funzione

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{C}(Z, X) &\longrightarrow \mathcal{C}(Z, Y) \\ g &\longmapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

è iniettiva

### Definizione 89: Epimorfismo

$f$  è un **epimorfismo** in  $\mathcal{C}$  se è monomorfismo in  $\mathcal{C}^{op}$ , ossia  $\forall Z \in \mathcal{C}$  la funzione

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{C}(Y, Z) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

è iniettiva.

**Proposizione 90.**  $f$  è invertibile a sinistra (destra), allora  $f$  è monomorfismo (epimorfismo)

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che se  $f$  è invertibile a sinistra, allora è mono.

Sappiamo che  $\exists f' : Y \rightarrow X$  tale che  $f' \circ f = 1_X$ . Dobbiamo dimostrare che  $f_*$  è iniettiva. Siano  $g, h \in \mathcal{C}(Z, X)$  tali che  $f_*(g) = f_*(h)$ . Allora  $f \circ g = f \circ h$ , da cui  $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$  e dunque  $g = h$   $\square$

**Proposizione 91.** Sia  $\mathcal{C}$  concreta. Allora

$$f \text{ invertibile a sinistra/destra} \implies f \text{ iniettiva/suriettiva} \implies f \text{ mono/epi}$$

*Dimostrazione.* Non possiamo usare il trick della categoria opposta, perché non è detto che  $\mathcal{C}^{op}$  sia ancora concreta.

Sia  $f'$  tale che  $f' \circ f = 1_X$  ( $f \circ f' = 1_Y$ ), allora chiaramente  $f$  iniettiva (suriettiva) perché le composizioni  $1_X$  e  $1_Y$  sono biunivoche.

Se  $f$  è iniettiva, allora siano  $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$ . Dunque  $\forall x \in X$

$$f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \xrightarrow{f \text{ inj.}} g_1(x) = g_2(x)$$

ossia  $f_*$  è iniettiva, ossia  $f$  è monomorfismo.

se  $f$  è suriettiva, allora siano  $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ . Sappiamo che  $\forall y \in Y$  esiste  $x_y \in X$  tale che  $f(x_y) = y$ . Allora abbiamo che, assumendo che  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$g_1(y) = g_1(f(x_y)) = g_2(f(x_y)) = g_2(y) \quad \forall y \in Y$$

ossia  $f^*$  è iniettiva e dunque  $f$  è epimorfismo  $\square$

In generale non vale nessuna delle  $\Leftarrow$ .

**Esempio 92.** In **Set** se  $f : X \rightarrow Y$  è suriettiva, allora  $f$  è invertibile a sinistra. Infatti basta scegliere (AOC)  $f'(y) \in f^{-1}\{y\}$  per ogni  $y \in Y$ . Inoltre se  $X \neq \emptyset$  e  $f : X \rightarrow Y$  è iniettiva, allora  $f$  è invertibile a sinistra.

### Esercizio 93

In **A – Mod**, mostrare che  $f : M \rightarrow N$  iniettiva è invertibile a sinistra se e solo se  $\text{Im}(f) \subseteq N$  è addendo diretto.

Mostrare che  $f : M \rightarrow N$  suriettiva è invertibile a destra se e solo se  $\text{Ker}(f) \subseteq M$  è addendo diretto

Concludere che valgono sempre entrambe le implicazioni se e solo se  $A$  è semisemplice.

**Esempio 94.** In **Set**, se  $f$  è mono (epi), allora  $f$  è iniettiva (suriettiva).

Infatti, poniamo per assurdo  $f : X \rightarrow Y$  non iniettiva, dunque siano  $x, y \in X$  tali che  $f(x) = f(y)$ . Allora preso  $Z = \{z\}$  e  $g, h : Z \rightarrow X$  tali che  $g(z) = x$  e  $h(z) = y$  abbiamo che  $f \circ g = f \circ h$  da cui  $g = h$  e dunque  $x = y$

Supponiamo  $f$  non suriettiva, mostrare per esercizio  $\exists g, h : Y \rightarrow Z$  tali che  $g \neq h$  ma  $g \circ f = h \circ f$

**Esempio 95.** In  $\mathbf{A-Mod}$   $f : M \rightarrow N$  è mono (epi), allora  $f$  è iniettiva (suriettiva).

Infatti  $i : \text{Ker } f \rightarrow M$  inclusione tale che  $f \circ i = 0$  e anche  $0 : \text{Ker } f \rightarrow M$  è tale che  $f \circ 0 = 0$ . Concludiamo che  $i = 0$  e dunque  $\text{Ker } f = 0$ .

Similmente  $\pi : N \rightarrow \text{coker } f$  è tale che  $\pi \circ f = 0$  e se  $f$  è epi allora  $0 = \pi$  e dunque  $\text{coker } f = 0$  e dunque  $f$  è suriettiva.

**Esempio 96.** In  $\mathbf{Grp}$   $f$  mono (epi), allora  $f$  iniettiva (suriettiva)

Per mono  $\implies$  iniettiva si può usare la stessa dei moduli, mentre per l'altra è un po' più complicato, ma si dimostra che è vero lo stesso

**Esempio 97.** In  $\mathbf{Rng}$   $f : A \rightarrow B$  mono, allora  $f$  iniettiva.

Tuttavia  $f$  epi **non implica**  $f$  suriettiva. Ad esempio preso  $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  è epi, infatti  $\forall A$  anello esiste al più un omomorfismo  $\mathbb{Q} \rightarrow A$  ( $f : \mathbb{Q} \rightarrow A$  sia omomorfismo, allora  $f|_{\mathbb{Z}}$  è l'unico omomorfismo e  $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$ ). Chiaramente però non è suriettiva.

### Definizione 98: Funtore

Un funtore  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  tra 2 categorie è dato da una funzione  $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$  e  $\forall X, X' \in \mathcal{C}$  una funzione  $F = F_{X, X'} : \mathcal{C}(X, X') \rightarrow D(F(X), F(X'))$  tale che

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(se  $f$  e  $g$  sono componibili in  $\mathcal{C}$ ) e  $F(1_X) = 1_{F(X)}$  per ogni  $X \in \mathcal{C}$

**Proposizione 99.** Sia  $F$  un funtore e  $f$  invertibile a sinistra (destra). Allora  $F(f)$  è invertibile a sinistra (destra)

*Dimostrazione.*  $\exists f'$  tale che  $f' \circ f = 1_X$ , allora  $F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$ .  $\square$

*Osservazione.* Segue che  $f$  iso, allora  $F(f)$  iso e  $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$

**Esempio 100.** Sia  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  sottocategoria. Allora  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $X \mapsto X$  e  $f \mapsto f$  è un funtore

**Esempio 101.** Se  $\sim$  è una congruenza, allora  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$  è un funtore, con  $X \mapsto X$  e  $f \mapsto \bar{f}$

**Esempio 102** (Funtore dimenticante).  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  con  $\mathcal{C}$  categoria discreta e  $X \mapsto X$ ,  $f \mapsto f$  è un funtore, che “dimentica” la struttura aggiunta.

Analogamente anche  $\mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , con  $(A, +, \cdot) \rightarrow (A, +)$  è un funtore dimenticante.

*Osservazione.* Notare che il secondo funtore dimenticante non preserva gli epimorfismi. Sarebbe infatti  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  l'inclusione è un'epimorfismo in  $\mathbf{Rng}$  ma non in  $\mathbf{Ab}$

**Esempio 103.** Sia  $A \rightarrow B$  un omomorfismo di anelli. Allora la restrizione degli scalare è un funtore  $\mathbf{B-Mod} \rightarrow \mathbf{A-Mod}$

**Esempio 104.** Funtore tra 2 categorie discrete  $\mathcal{C}$  e  $D$  è una funzione  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$

**Esempio 105.** Un funtore tra 2 preordini  $\mathcal{C}$  e  $D$  è una funzione  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$  che preserva la relazione di preordine.

**Esempio 106.** Un funtore tra 2 monoidi è un omomorfismo di monoidi.

Più in generale dato  $G$  un monoide e una categoria  $\mathcal{C}$ , un funtore  $G \rightarrow \mathcal{C}$  è dato da  $X \in \mathcal{C}$  e da un omomorfismo di monoidi  $G \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$

Se  $G$  è un gruppo un funtore  $G \rightarrow \mathcal{C}$  è dato da  $X \in \mathcal{C}$  e un omomorfismo di gruppi  $G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ . Ad esempio se  $\mathcal{C} = \text{Set}$  il funtore dà un'azione di un gruppo su un insieme. Similmente se  $\mathcal{C} = \mathbb{K}$ -spazi vettoriali ho una rappresentazione di  $G$ .

**Esempio 107** (Funtore costante). Date  $\mathcal{C}, D$  categorie preso  $Y \subseteq D$  si può considerare il funtore costante di valore  $Y, \mathcal{C} \rightarrow D, X \mapsto Y$  e  $f \mapsto 1_Y$

**Esempio 108.** Presa  $\text{Top}_*$  la categoria degli spazi topologici puntati, il gruppo fondamentale

$$\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$$

è un funtore

**Esempio 109.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  ci sono funtori di omologia (singolare)

$$H_n : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$$

#### Teorema 110: Omomorfismo

Sia  $\sim$  una congruenza su  $\mathcal{C}$  e  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  un funtore tale che se  $f \sim f'$  in  $\mathcal{C}$  allora  $F(f) = F(f')$ . Allora esiste un unico funtore  $\overline{F} : \mathcal{C}/\sim \rightarrow D$  tale che  $\overline{F}(\overline{f}) = F(f)$  per ogni  $f$  morfismo di  $\mathcal{C}$

**Esempio 111.** Negli esempi precedenti se  $f$  e  $f'$  sono omotope, allora  $\pi_1(f) = \pi_1(f')$  e  $H_n(f) = H_n(f')$ , dunque inducono funtori

$$\pi_1 : \text{Toph}_* \rightarrow \text{Grp} \quad H_n : \text{Toph} \rightarrow \text{Ab}$$

*Nota.* I funtori che abbiamo definito si dicono anche funtori covarianti

#### Definizione 112: funtore controvariante

Un funtore **controvariante**  $\mathcal{C} \rightarrow D$  è un funtore (covariante)  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow D$ .

**Esempio 113.**  $\forall n \in \mathbb{N}$  i funtori di coomologia (singolare) sono funtori controvarianti  $H^n : \text{Top}(h)^{op} \rightarrow \text{Ab}$

**Esempio 114.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria,  $X \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y) \quad (f : Y \rightarrow Y') &\mapsto (f_* : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

è un funtore perché  $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-, Y) : \mathcal{C}^{op} &\rightarrow \text{Set} \\ X \mapsto \mathcal{C}(X, Y) \quad (f : X \rightarrow X') &\mapsto (f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

è un funtore controvariante perché  $(f' \circ f)^* = f^* \circ f'^*$

*Osservazione.* C'è anche un funtore

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-, =) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ (X, Y) &\mapsto \mathcal{C}(X, Y) \\ (f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y') &\mapsto g_* \circ f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y') \end{aligned}$$

**Esempio 115.** Per ogni gruppo  $G$ , preso il sottogruppo dei commutatori  $[G, G]$ , allora per ogni  $f : G \rightarrow H$  omomorfismo di gruppi,  $f([G, G]) \subseteq [H, H]$  quindi si ottiene un funtore

$$\begin{aligned} \mathbf{Grp} &\rightarrow \mathbf{Grp} \\ G &\mapsto [G, G] \\ (f : G \rightarrow H) &\mapsto (f|_{[G, G]} : [G, G] \rightarrow [H, H]) \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} \mathbf{Abel} &: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab} \\ G &\mapsto \frac{G}{[G, G]} \text{ (abelianizzato di } G \text{ )} \\ (f : G \rightarrow H) &\mapsto \left( \bar{f} : \frac{G}{[G, G]} \rightarrow \frac{H}{[H, H]} \right) \\ \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ \frac{G}{[G, G]} & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{H}{[H, H]} \end{array} \end{aligned}$$

### Esercizio 116

Indicando con  $Z(X)$  il centro di  $X$ ,

- a. Mostrare che non esiste un funtore  $F : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Rng}$  tale che  $\forall A \in \mathbf{Rng} F(A) = Z(A)$ .
- b. Mostrare che non esiste un funtore  $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$  tale che  $\forall G \in \mathbf{Grp} F(G) = Z(G)$ .

Supponiamo l'esistenza di  $F$ .

- a. Se prendo  $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$ , allora  $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$  e  $F(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ . A tal punto però  $F(i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  che non esiste perché altrimenti

$$-1 = F(i)(-1) = F(i)(i^2) = F(i)(i)^2$$

- b. Consideriamo

$$\{(1), (12)\} \xrightarrow{i} S_3 \xrightarrow{\varepsilon} \{\pm 1\}$$

Allora  $\varepsilon \circ i = \text{Id}_{\mathcal{C}_2}$ . Allora avremmo

$$0_{\text{End}(\mathcal{C}_2)} = F(\varepsilon) \circ F(i) = F(\varepsilon \circ i) = F(\text{id}_{\mathcal{C}_2}) = \text{id}_{\mathcal{C}_2}$$

L'identità

$$\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad X \mapsto X \quad f \mapsto f$$

è un funtore Si possono comporre i funtori. Dati ad esempio

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E$$

funtori, possiamo definire  $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow E$  come  $X \mapsto G(F(X))$  e  $f \mapsto G(F(f))$  è un funtore.

La composizione è associativa e  $F \circ \text{id}_{\mathcal{C}} = F = \text{id}_{\mathcal{C}} \circ F$

In tal modo otteniamo una categoria  $\mathcal{C}\text{at}$  delle categorie (piccole<sup>1</sup>)

### Definizione 117

Un funtore  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  è un isomorfismo se lo è in  $\mathcal{C}\text{at}$ , cioè se  $\exists G : D \rightarrow \mathcal{C}$  funtore tale che  $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}} = F \circ G$

### Definizione 118: iniettivo e suriettivo

Un funtore  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  è *iniettivo/suriettivo* se  $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$  è *iniettivo/suriettivo*.

Nel caso in cui  $F$  sia sia iniettivo che suriettivo, è **biunivoco**.

### Definizione 119: Fedele e pieno

$F$  è detto **fedeale (pieno)** se  $\forall X, Y \in \mathcal{C}, F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow D(F(X), F(Y))$  è iniettivo (suriettivo).

Nel caso in cui  $F$  sia sia fedeale che pieno, si dice che è **pienamente fedeale**

### Esercizio 120

$F$  funtore è isomorfismo se e solo se  $F$  è pienamente fedeale e biunivoco.

**Esempio 121.** Se  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  è una sottocategoria, allora il funtore di inclusione  $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  è iniettivo e fedeale ed è pieno se e solo se  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  è piena.

Ad esempio se  $\sim$  è una congruenza in  $\mathcal{C}$ , allora il funtore quoziante  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$  è biunivoco e pieno.

**Esempio 122.** Un omomorfismo di monoidi (categorie di un oggetto) è iniettivo (suriettivo) se e solo se come funtore è fedeale (pieno). In ogni caso è biunivoco.

**Esempio 123.** I funtori dimenticanti  $\mathbb{Z}-\text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$  e  $\mathbb{Z}-\text{Alg} \rightarrow \text{Rng}$  sono isomorfismi.

**Esempio 124.** Anche  $\text{Mod}-\mathbf{A} \cong \mathbf{A}^{\text{op}}-\text{Mod}$  ed esiste un isomorfismo (anche se non sono categorie piccole).

### Definizione 125

Un funtore  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  è **essenzialmente iniettivo/suriettivo** se la funzione ridotta

$$\text{Ob}(\mathcal{C})/\cong \rightarrow \text{Ob}(D)/\cong$$

è *iniettivo/suriettivo*

*Osservazione.* Se  $F$  è suriettivo allora  $F$  è essenzialmente suriettivo. L'altra implicazione non vale. Ad esempio

$$(\bullet) \longrightarrow (\bullet \xrightleftharpoons[]{} \bullet)$$

Nessuna delle implicazioni tra iniettiva e essenzialmente iniettiva è vera. Basti considerare

$$(\bullet) \longleftarrow (\bullet \xrightleftharpoons[]{} \bullet)$$

---

<sup>1</sup>si potrebbe anche fare di tutte le categorie, ma per motivi insiemistici/logici dovremmo introdurre gli universi di Grothendieck e fare le cose per bene. Al fine di evitare questo inutile sforzo, ci limitiamo a considerare le categorie piccole.

per essenzialmente iniettiva  $\Rightarrow$  iniettiva e

$$(\bullet \quad \bullet) \longrightarrow (\bullet \xleftarrow{\quad} \bullet)$$

per iniettiva  $\Rightarrow$  essenzialmente iniettiva.

**Proposizione 126.** *Sia  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  un funtore pienamente fedele. Allora  $F$  è essenzialmente iniettivo*

*Dimostrazione.* Siano  $X, Y \in \mathcal{C}$  tali che  $F(X) \cong F(Y)$  in  $D$ . Devo dimostrare che  $X \cong Y$  in  $\mathcal{C}$ .

Sappiamo che esiste  $g : F(X) \rightarrow F(Y)$  isomorfismo in  $D$ . Poiché  $F$  è pieno esiste  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  tale che  $F(f) = g$ . Analogamente  $\exists f' \in \mathcal{C}(Y, X)$  tale che  $F(f') = g^{-1}$ .

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) = g^{-1} \circ g = 1_{F(X)} = F(1_X)$$

Se  $F$  è fedele, allora  $f' \circ f = 1_X$  e analogamente  $f \circ f' = 1_Y$  da cui  $f$  è isomorfismo e dunque  $X \cong Y$   $\square$

### Definizione 127: Trasformazione naturale

Siano  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow D$  funtori.

Una **trasformazione naturale**  $\alpha : F \Rightarrow F'$  (si può anche scrivere  $\alpha : F \implies F'$ ) è il dato di un morfismo

$$\alpha_X : F(X) \rightarrow F'(X) \text{ in } D \quad \forall X \in \mathcal{C}$$

tale che  $\forall f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $\mathcal{C}$  il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \alpha_X & & \downarrow \alpha_Y \\ F'(X) & \xrightarrow{F'(f)} & F'(Y) \end{array}$$

commuta in  $D$ , cioè  $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$

**Esempio 128.** Consideriamo i due funtori  $\text{Abel} : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$  e  $\text{id} : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ . C'è una trasformazione naturale  $\alpha : \text{id} \Rightarrow \text{Abel}$  definita per ogni  $G \in \text{Grp}$  da

$$\begin{aligned} \alpha_G : G &\longrightarrow \frac{G}{[G, G]} \\ a &\longmapsto \alpha_G(a) = a[G, G] \end{aligned}$$

è naturale perché  $\forall f : G \rightarrow H$  in  $\text{Grp}$  il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow \alpha_G & & \downarrow \alpha_H \\ \frac{G}{[G, G]} & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{H}{[H, H]} \end{array}$$

**Esempio 129.** Supponendo di avere  $F, F' : G \rightarrow \text{Set}$  funtori ( $G$  gruppo visto come categoria con un oggetto), cioè  $G$ -insiemi (azioni di  $G$  su insiemi). Allora una trasformazione naturale  $\alpha : F \Rightarrow F'$  è un morfismo di  $G$ -insiemi cioè una funzione  $\alpha : F(G) \rightarrow F'(G)$  tale che  $\alpha(gx) = g\alpha(x)$  per ogni  $g \in G$  e per ogni  $x \in F(G)$ .

*Osservazione.*  $\forall F : \mathcal{C} \rightarrow D$ ,  $\text{id}_F : F \rightarrow F$  data da  $(\text{id}_F)_X = \text{id}_{F(X)}$  per ogni  $X \in \mathcal{C}$  è una trasformazione naturale.

### Esercizio 130

Dati  $F, F', F'' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtori,  $\alpha : F \rightarrow F'$  e  $\beta : F' \rightarrow F''$  trasformazioni naturali, allora la composizione  $\beta \circ \alpha : F \rightarrow F''$  è definita da

$$\beta_X \circ \alpha_X =: (\beta \circ \alpha)_X : F(X) \rightarrow F''(X)$$

Mostrare che  $\alpha \circ \beta$  è una trasformazione naturale

La composizione dell'esercizio precedente è anche detta *composizione verticale* di trasformazioni naturali, per via di questo disegno esplicativo:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \alpha & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \Downarrow \beta & \\ & F'' & \end{array}$$

Considerando funtori e trasformazioni naturali, si ottiene (assumiamo sempre  $\mathcal{C}$  piccola) la categoria  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  (anche denotata  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ ) con oggetti i funtori  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , morfismi le trasformazioni naturali e composizione la composizione verticale.

### Definizione 131

Data una categoria  $\mathcal{C}$ , la categoria dei morfismi di  $\mathcal{C}$  è

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) := \text{Fun}(\cdot \rightarrow \cdot, \mathcal{C})$$

che ha come oggetti esattamente  $\{f : X \rightarrow Y \text{ morfismo di } \mathcal{C}\}$  e trasformazioni naturali date da  $(X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$  è data da  $(g : X \rightarrow X', h : Y \rightarrow Y')$  tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

### Definizione 132

Date  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtori,  $\alpha : F \rightarrow G$  trasformazione naturale, allora  $\alpha$  è *isomorfismo (naturale o di funtori)* se è isomorfismo in  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  cioè se  $\exists \beta : G \rightarrow F$  trasformazione naturale tale che  $\beta \circ \alpha = \text{id}_F$ ,  $\alpha \circ \beta = \text{id}_G$ .

In tal caso  $F$  e  $G$  si dicono *isomorfi* (denotato  $F \cong G$ ).

*Osservazione.*  $\cong$  di funtori è una relazione di equivalenza

**Esempio 133.** Il primo gruppo di omologia si può vedere come l'abelianizzato del gruppo fondamentale. In linguaggio categorico abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Top}_* &\xrightarrow{\pi_1} \text{Grp} \xrightarrow{\text{Abel}} \text{Ab} \\ &\text{e} \\ \text{Top}_* &\rightarrow \text{Top} \xrightarrow{H_1} \text{Ab} \\ (X, x_0) &\mapsto \text{comp. c.p.a. che contiene } x_0 \end{aligned}$$

sono funtori isomorfi

*Osservazione.*  $F \cong F'$  allora  $F$  e  $F'$  inducono la stessa funzione  $\text{Ob}(\mathcal{C})/\cong \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})/\cong$  quindi  $F$  è essenzialmente *iniettiva / suriettiva* se e solo se  $F'$  lo è.

### Esercizio 134

Mostrare che non necessariamente la precedente osservazione vale per le proprietà di iniettività e suriettività.

**Proposizione 135.** *Se  $F \cong F'$  allora  $F$  è fedele/pieno se e solo se  $F'$  è fedele/pieno.*

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha : F \rightarrow F'$  l'isomorfismo. Sia allora  $\bar{\alpha} : \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \rightarrow \mathcal{D}(F'(X), F'(Y))$  definita da  $\bar{\alpha}(g) := \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}$ . Per ogni  $X, Y \in \mathcal{C}$ , il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}(F(X), F(Y)) & \\ F \nearrow & & \downarrow \bar{\alpha} \\ \mathcal{C}(X, Y) & & \\ F' \searrow & & \downarrow \\ & \mathcal{D}(F'(X), F'(Y)) & \end{array}$$

commuta. Infatti preso  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ , per la trasformazione naturale  $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$  si ha che

$$(\bar{\alpha} \circ F)(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} = F'(f)$$

Inoltre  $\bar{\alpha}$  è una biezione, infatti ha inversa  $\bar{\alpha}^{-1}(h) = \alpha_Y^{-1} \circ h \circ \alpha_X$ :

$$\bar{\alpha}(\bar{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha})(g) = \bar{\alpha}^{-1}(\alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}) = \alpha_Y^{-1} \circ \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X = g$$

e similmente l'altra composizione. Allora chiaramente se  $F$  è *fedele/pieno*, allora  $F' = \bar{\alpha} \circ F$  è *iniettivo/suriettivo*.

□

**Proposizione 136.**  *$\alpha, \beta$  trasformazioni naturali inducono una trasformazione naturale  $\beta * \alpha : G \circ F \rightarrow G' \circ F'$*

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{G(\alpha_X)} & G(F'(X)) \\ \downarrow \beta_{F(X)} & & \downarrow \beta_{F'(X)} \\ G'(F(X)) & \xrightarrow{G'(\alpha_X)} & G'(F'(X)) \end{array}$$

dunque  $(\beta * \alpha)_X := \beta_{F'(X)} \circ G(\alpha_X) = G'(\alpha_X) \circ \beta_{F(X)}$ .

*Dimostrazione che è una trasformazione naturale.* Vogliamo mostrare che  $b * a$  è naturale, cioè  $\forall f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{G(F(f))} & G(F(X)) \\ \downarrow (\beta * \alpha)_X & & \downarrow (\beta * \alpha)_Y \\ G'(F'(X)) & \xrightarrow{G'(F'(f))} & G'(F'(X)) \end{array}$$

commuta. Ma questo è vero perché

$$\begin{aligned} G'(F'(f)) \circ (\beta * \alpha)_X &= G'(F'(f)) \circ G'(\alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = G'(F'(f) \circ \alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\stackrel{\alpha \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y \circ F(f)) \circ \beta_{F(X)} = G'(\alpha_Y) \circ G'(F(f)) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\stackrel{\beta \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y) \circ \beta_{F(Y)} \circ G(F(f)) = (\beta * \alpha)_Y \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

□

Ovviamente è chiaro che si potrebbe definire allora la categoria delle trasformazioni naturali eccetera e andare avanti all'infinito. Per assiomatizzare queste cose in realtà bisognerebbe esplicitare che abbiamo definito le “2-frecce” e che quindi siamo in una *2 categoria*

*Nota* (zione). Se  $\beta = \text{id}_G$  invece di  $\text{id}_G * \alpha$  si scrive  $G \circ \alpha$  (dunque con  $(G \circ \alpha)_X = G(\alpha_X)$ ). Se  $\alpha = \text{id}_F$  invece di  $\beta * \text{id}_F$  si scrive  $\beta \circ F$  (con  $(\beta \circ F)_X = \beta_{F(X)}$ ). In generale

$$\beta * \alpha = (\beta \circ F') \circ (G \circ \alpha) = (G' \circ \alpha) \circ (\beta \circ F)$$

*Osservazione.* Se  $\alpha, \beta$  sono isomorfismi, allora  $\beta * \alpha$  è isomorfismo. Questo significa che se

$$F \cong F', \quad G \cong G' \implies G \circ F \cong G' \circ F'$$

cioè l'isomorfismo di funtori è una congruenza su  $\mathcal{C}\mathbf{at}$  e quindi si ottiene la categoria  $\mathcal{C}\mathbf{at}/\cong$

### Definizione 137: Equivalenza

Un funtore  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  è un'equivalenza se  $\exists G : D \rightarrow \mathcal{C}$  funtore tale che  $G \circ F \cong \text{id}_G$  e  $F \circ G \cong \text{id}_D$ .

Un tale  $G$  si dice un *quasi-inverso* di  $F$ .

*Osservazione.*  $F$  è un'equivalenza se e solo se  $\overline{F}$  in  $\mathcal{C}\mathbf{at}/\cong$  è un isomorfismo.

Segue che se  $F \cong F'$ , allora  $F$  è un'equivalenza se e solo se  $F'$  è un'equivalenza e un quasi-inverso di  $F$  è unico a meno di isomorfismo e l'equivalente di categorie è una relazione di equivalenza su  $\mathcal{C}\mathbf{at}$

### Definizione 138: Scheletro

Una sottocategoria piena  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  è detta *scheletro* se  $\forall X \in \mathcal{C}, \exists ! X' \in \mathcal{C}'$  tale che  $X \cong X'$

**Lemma 139.** *Sia  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  un funtore, e si supponga che  $\forall X \in \mathcal{C}, \alpha_X : F(X) \rightarrow F'(X)$  sia un isomorfismo in  $D$ . Allora  $F' : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$  Si estende in modo unico a un funtore  $F' : \mathcal{C} \rightarrow D$  tale che  $\alpha : F \rightarrow F'$  è isomorfismo.*

### Teorema 140: Finalmente un teorema

Un funtore  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  è un'equivalenza se e solo se  $F$  è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo

*Osservazione.* Non è necessario aggiungere l'ipotesi che  $F$  sia essenzialmente iniettivo perché come mostrato prima pienamente fedele implica essenzialmente iniettivo (ma non essenzialmente suriettivo).

**Esempio 141.** Supponiamo che  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  sia una sottocategoria piena. Allora il funtore di inclusione  $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$  è pienamente fedele ed è essenzialmente suriettivo (quindi è un'equivalenza) se e solo se  $\forall X \in \mathcal{C}$  esiste  $X' \in \mathcal{C}'$  tale che  $X \cong X'$ .

*Dimostrazione.*

$\implies$  Sia  $G : D \rightarrow \mathcal{C}$  un quasi-inverso di  $F$ . Allora  $F \circ G \cong \text{id}_G$  che è essenzialmente suriettivo, e dunque  $F$  è essenzialmente suriettivo. D'altra parte lo stesso  $F \circ G$  è fedele, e dunque  $G$  è fedele.

Ora, per ogni  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{F_X, Y} D(F(X), F(Y)) \xrightarrow{G_{F(X)}, F(Y)} \text{inj } \mathcal{C}(G(F(X)), G(F(Y)))$$

poiché la composizione è biunivoca e  $G$  è fedele, allora entrambi devono essere biunivoci, ossia in particolare  $F$  è pienamente fedele.

- $\Leftarrow$  Consideriamo prima il caso di un'inclusione  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  sottocategoria piena tale che  $\forall X \in \mathcal{C}$  esista  $X' \in \mathcal{C}'$  tale che  $X \cong X'$ . Sia  $I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  il funtore di inclusione (pienamente fedele e essenzialmente suriettivo).

Allora  $\forall X \in \mathcal{C}$  scelto (AoC) un isomorfismo  $\alpha_X : X \rightarrow \tilde{P}(X) \in \mathcal{C}'$  e se  $X \in \mathcal{C}'$  in particolare prendiamo  $\alpha_X = 1_X$ . Applico ora il lemma 139 con  $F = \text{id}_{\mathcal{C}}$  e dunque  $\exists!$  estensione di  $\tilde{P}$  a un funtore  $\tilde{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tale che  $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{P}$  è isomorfismo. Allora  $\exists! P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  funtore tale che  $\tilde{P} = I \circ P$  e  $P$  è un quasi-inverso di  $I$  poiché  $I \circ P = \tilde{P} \cong \text{id}_{\mathcal{C}'}$  e  $P \circ I = \text{id}_{\mathcal{C}'}$ .

In generale, dato  $F : \mathcal{C} \rightarrow D$  pienamente fedele. Siano allora  $I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  e  $J : D' \rightarrow D$  due scheletri. Per il caso qui fatto  $I, J$  sono equivalenze e siano  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  quasi-inverso di  $I$  e  $Q : D \rightarrow D'$  quasi-inverso di  $J$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & D \\ P \uparrow I & & J \downarrow Q \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{F'} & D' \end{array}$$

Sia  $F' := Q \circ F \circ I : \mathcal{C}' \rightarrow D'$  come nel diagramma. Allora  $I, F, Q$  sono pienamente fedeli e essenzialmente suriettivi ( $I$  per definizione,  $F$  per ipotesi e  $Q$  perché è un'equivalenza e vale il punto ( $\implies$ )) dunque  $F'$  è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

$F'$  è essenzialmente biunivoco,  $\mathcal{C}'$  e  $D'$  sono scheletri, dunque  $F'$  è biunivoco, quindi isomorfismo e quindi equivalenza.

$$F = \text{id}_D \circ F \circ \text{id}_{\mathcal{C}} \cong J \circ Q \circ F \circ I \circ P = J \circ F' \circ P$$

equivalenza perché lo sono  $J, F'$  e  $P$

□

**Esempio 142.** Sia  $\sim$  una relazione d'equivalenza su un insieme  $X$  che vedo come categoria  $\mathcal{C}$  con  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = X$  e  $\mathcal{C}(x, y) \neq \emptyset \iff x \sim y$ .

Il funtore  $\mathcal{C} \rightarrow X/\sim$  (categoria discreta) definito da  $x \mapsto \bar{x}$  è un'equivalenza poiché pienamente fedele e essenzialmente suriettiva.

### Esercizio 143

Mostrare che ogni categoria equivalente a una categoria discreta è una relazione di equivalenza, ossia una categoria dove  $\forall X, Y \in \mathcal{C}, \mathcal{C}(X, Y) \neq \emptyset \iff x \sim y$  per una qualche  $\sim$  relazione di equivalenza.

## 2.1 Categorie preadditive

### Definizione 144: Categoria preadditiva

Una categoria *preadditiva* è una categoria  $\mathcal{A}$  con una struttura di gruppo abeliano (notazione: additivo) su  $\mathcal{A}(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathcal{A}$  ed è tale che la composizione di morfismi sia  $\mathbb{Z}$ -bilineare, ossia

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{e} \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

per ogni  $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ ,  $f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$  e  $g, g' \in \mathcal{A}(Y, Z)$ .

*Osservazione.* Si dice anche che  $\mathcal{A}$  è una Ab-Categoria. Si può studiare quando si può generare una categoria simile partendo da altre categorie invece di Ab ma non è argomento di questo corso.

Si può anche dire che  $\mathcal{A}$  è  $\mathbb{Z}$ -lineare. Più in generale  $\forall^2$  anello commutativo  $A$  una categoria  $A$ -lineare è una categoria  $\mathcal{A}$  con una struttura di  $A$ -modulo su  $\mathcal{A}(X, Y)$  tale che la composizione sia  $A$ -bilineare.

**Proposizione 145.** Se  $A$  è non commutativo, allora  $\forall a, b \in A$  e  $\forall f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $\mathcal{A}$ ,

$$(ab)f = (ba)f$$

*Dimostrazione.*

$$(ab)f = a(bf) = a((bf) \circ 1_X) = (bf) \circ (a1_X) = f \circ (b(a1_X)) = f \circ (ba)1_X = (ba)f$$

□

**Esempio 146.** Sia  $A$  un anello, allora  $A\text{-Mod}$  è preadditiva. Infatti per ogni  $M, N \in (A\text{-Mod})$ ,  $A\text{-Mod}(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)$  è un gruppo abeliano e  $\circ$  è  $\mathbb{Z}$ -bilineare. Se  $A$  è commutativo, allora  $A\text{-Mod}$  è anche  $A$ -lineare. Più in generale se  $B$  è una  $A$ -algebra allora  $B\text{-Mod}$  è  $A$ -lineare.

*Osservazione.* Sia  $X \in \mathcal{A}$  categoria  $A$ -lineare (quindi  $A$  commutativo). Allora  $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$  è una  $A$ -algebra. Infatti  $(\text{End}_{\mathcal{A}}(X), \circ)$  è un monoide e  $\text{End}_{\mathcal{A}}$  è  $A$ -modulo e  $\circ$  è  $A$ -lineare.

Quindi le categorie  $A$ -lineari con un solo oggetto sono  $A$ -algebre. In particolare le categorie preadditive con un solo oggetto sono anelli.

*Osservazione.* Sia  $\mathcal{A}$  preadditiva, allora  $\mathcal{A}^{op}$  è preadditiva con la stessa struttura di gruppo abeliano su  $\mathcal{A}^{op}(X, Y) = \mathcal{A}(Y, X)$  per ogni  $X, Y \in \mathcal{A}$ .

*Osservazione.* Se  $\mathcal{A}$  è preadditiva, allora  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  sottocategoria tale che  $\mathcal{A}'(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathcal{A}'$ , allora  $\mathcal{A}'$  è preadditiva. In particolare la condizione è sempre verificata per le categorie piene.

Sia  $\mathcal{A}$  preadditiva,  $\sim$  una congruenza tale che  $\forall X, Y \in \mathcal{A}, \forall f, f', g \in \mathcal{A}(X, Y)$  allora  $f \sim f' \implies f+g \sim f'+g$ . In tale ipotesi  $\mathcal{A}/\sim$  è preadditiva con  $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$ .

Data una tale congruenza, sia  $\forall X, Y \in \mathcal{A}$

$$\mathfrak{I}(X, Y) = \{f \in \mathcal{A}(X, Y) : f \sim 0\}$$

e indichiamo con  $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$  la collezione di tutti gli  $\mathfrak{I}(X, Y)$ . Allora vale la proprietà di ideale, cioè dati  $f, g$  morfismi di  $\mathcal{A}$  componibili,

$$f \in \mathfrak{I} \circ g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

Se per esempio  $f \in \mathfrak{I}$  ossia  $f \sim 0$ , allora  $g \circ f \sim g \circ 0 = 0$  e dunque  $g \circ f \in \mathfrak{I}$ .

Arriviamo dunque alla seguente definizione

#### Definizione 147

Definiamo un ideale  $\mathfrak{I}$  in una categoria preadditiva  $\mathcal{A}$  come  $\mathfrak{I}(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathcal{A}$  tale che

$$f \in \mathfrak{I} \circ g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

---

<sup>2</sup>normalmente in mezzo alla frase così avrei scritto esplicitamente “per ogni” ma trovavo diversamente la quantità di  $\mathcal{A}$  e di  $A$  nella frase quindi ho valutato simpatico aggiungere anche un  $\forall$

Viceversa, dato  $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$  ideale, si ottiene una congruenza  $\sim$  su  $\mathcal{A}$  definito da

$$f \sim f' \iff f' - f \in \mathfrak{I}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{A} \quad \forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$$

ed è tale che  $f \sim f' \implies f + g \sim f' + g$ .

In tali ipotesi si può anche denotare  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  invece di  $\mathcal{A}/\sim$ .

Una categoria  $\mathcal{C}$  può non avere nessuna struttura di categoria preadditiva (ad esempio se  $\exists X, Y \in \mathcal{C}$  tale che  $\mathcal{C}(X, Y) = \emptyset$  o averne più di una).

**Esempio 148.** G Possiamo pensare ad anelli  $A$  e  $B$  tali che  $(A, \cdot) \cong (B, \cdot)$  e  $(A, +) \not\cong (B, +)$ .

Ad esempio possiamo prendere  $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  e  $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2)$ . Allora evidentemente

$$(A, +) \cong \mathcal{C}_4 \not\cong \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \cong B$$

ma gli elementi diversi da 0 e 1 di  $A$  sono  $\bar{2}$  e  $\bar{3}$  e sono tali che  $\bar{2}^2 = \bar{0}$ ,  $\bar{3}^2 = \bar{1}$  e  $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2}$ . Similmente in  $B$  abbiamo che  $\bar{X}^2 = \bar{0}$ ,  $\bar{1+X}^2 = \bar{1}$  e  $\bar{X} \cdot \bar{1+X} = \bar{X}$

### Definizione 149

Un funtore  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tra categorie preadditive è additivo se

$$F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(F(X), F(Y))$$

è omomorfismo di gruppi  $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ .

Più in generale  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tra categorie  $A$ -lineari è detto  $A$ -lineare se  $F_{X,Y}$  è  $A$ -lineare  $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ .

**Esempio 150.** Sia  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  sottocategoria tale che  $\mathcal{A}'(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathcal{A}'$ . Allora l'inclusione  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  è additivo.

**Esempio 151.** Se  $\mathcal{A}$  è preadditiva e  $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$  ideale, allora il funtore  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{I}$  definito da  $X \mapsto X$  e  $f \mapsto \bar{f}$  è additivo.

### Esercizio 152

Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  additivo tale che “ $\mathfrak{I} = \ker F$ ” cioè  $F(f) = 0$ ,  $\forall f \in \mathfrak{I}$ , allora mostrare che esiste un unico  $\bar{F} : \mathcal{A}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathcal{B}$  funtore additivo tale che  $F = \bar{F} \circ P$

**Esempio 153.** Siano  $A, B$  anelli (categorie preadditive con un solo oggetto), allora un funtore additivo  $A \rightarrow B$  è un omomorfismo di anelli.

Più in generale per ogni anello  $A$  e per ogni  $\mathcal{A}$  categoria preadditiva un funtore additivo  $A \rightarrow \mathcal{A}$  è dato da un oggetto  $X \in \mathcal{A}$  e un omomorfismo di anelli  $A \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ . Quindi un  $A$ -modulo è un funtore additivo  $A \rightarrow \mathbf{Ab}$

**Esempio 154.** Sia  $A \rightarrow B$  un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari  $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  è additivo.

**Esempio 155.** Se  $\mathcal{A}$  preadditiva, allora  $\forall X \in \mathcal{A}$  ci sono funtori additivi

$$\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab} \quad , \quad \mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

e in generale se  $\mathcal{A}$  è  $A$ -lineare, allora i due funtori hanno codominio  $A\text{-Mod}$  e sono  $A$ -lineari

Notare che se  $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$  sono funtori additivi, allora  $G \circ F$  è additivo. Inoltre  $\text{id}_{\mathcal{A}}$  è additivo. Dunque si ottiene una categoria contenente le **categorie preadditive** (piccole) e morfismi i funtori additivi.

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria (piccola) e  $\mathcal{A}$  una categoria preadditiva. Allora  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è preadditiva (in modo naturale) con la seguente struttura

$\forall F, G \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  e  $\forall \alpha, \beta : F \rightarrow G$  trasformazioni naturali allora  $\alpha + \beta : F \rightarrow G$  trasformazione naturale definita  $\forall X \in \mathcal{C}$  da

$$(\alpha + \beta)_X := \alpha_X + \beta_X : F(X) \rightarrow G(X) \text{ in } \mathcal{A}$$

è naturale perché  $\forall f : X \rightarrow \mathcal{C}$ ,

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \alpha_X + \beta_X & & \downarrow \alpha_Y + \beta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

commuta

Se anche  $\mathcal{C}$  è preadditiva sia

$$\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

la sottocategoria piena di  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  con oggetti i funtori additivi. Allora tale categoria è preadditiva.

**Esempio 156.** Se  $A$  è anello, allora gli  $A$ -moduli sono gli oggetti di  $\text{AddFun}(A, \text{Ab})$  (già visto) e in effetti  $A\text{-Mod} \cong \text{AddFun}(A, \text{Ab})$ , poiché dati  $M, N : A \rightarrow \text{Ab}$  funtori (cioè  $A \rightarrow \text{End}(M)$  e  $A \rightarrow \text{End}(N)$  omomorfismi di anelli) la trasformazione naturale  $\alpha : M \rightarrow N$  è data da  $\alpha : M \rightarrow N$  in  $\text{Ab}$  tale che  $\forall a \in A$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{a} & N \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ N & \xrightarrow{-a} & N \end{array}$$

commuta, cioè  $a\alpha(x) = \alpha(ax)$  per ogni  $x \in M$ , ossia  $\alpha$  è omomorfismo di  $A$ -moduli.

*Osservazione.*  $\forall \mathcal{A}$  preadditiva (piccola) si può definire la categoria (preadditiva)  $\mathcal{A}\text{-Mod} := \text{AddFun}(\mathcal{A}, \text{Ab})$ .

**Proposizione 157.** Siano  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  preadditive,  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  funtori tali che  $F \cong G$  e  $F$  additivo. Allora  $G$  è additivo

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha : F \rightarrow G$  isomorfismo. Allora  $\forall f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{A}$ ,  $G(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1}$ . Inoltre  $\forall f, f' : X \rightarrow Y$ ,

$$\begin{aligned} G(f + f') &= \alpha_Y \circ F(f + f') \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ (F(f) + F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = \\ &= \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} + \alpha_Y \circ F(f') \circ \alpha_X^{-1} = G(f) + G(f') \end{aligned}$$

□

*Osservazione.* Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore pienamente fedele con  $\mathcal{B}$  preadditiva. Allora esiste un'unica struttura preadditiva su  $\mathcal{A}$  tale che  $F$  sia additivo

*Dimostrazione.*  $\forall X, Y \in \mathcal{A}$  voglio che  $F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(F(X), F(Y))$  sia isomorfismo di gruppi (già è biettiva), che è vero se e solo se  $\forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$

$$f + f' = F^{-1}(F(f) + F(f'))$$

Infatti è ovvio che se  $+$  è così definita, allora  $F$  sia omomorfismo di gruppi. Viceversa, se  $F$  è omomorfismo di gruppi, allora anche  $F^{-1}$  è omomorfismo di gruppi, e dunque  $F^{-1}(F(f) + F(f')) = F^{-1}(F(f)) + F^{-1}(F(f')) = f + f'$ .

□

### 2.1.1 Prodotti, coprodotti, proprietà universali

### Definizione 158: Prodotto

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria, siano  $X_\lambda \in \mathcal{C}$  con  $\lambda \in \Lambda$  insieme. Un prodotto degli  $X_\lambda$  è dato da  $X \in \mathcal{C}$  con morfismi morfismi  $p_\lambda \in \mathcal{C}(X, X_\lambda)$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$  tale che vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda, \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(Y, X_\lambda) \quad \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) : f_\lambda = p_\lambda \circ f$$

o equivalentemente i seguenti diagramma commutano :

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ f_\lambda \downarrow & \searrow \exists! f & \text{al variare di } \lambda \in \Lambda \\ X_\lambda & \xleftarrow{p_\lambda} & X \end{array}$$

**Proposizione 159.** Siano  $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  e  $(X', \{p'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ . due prodotti in  $\mathcal{C}$  degli  $X_\lambda$ . Allora  $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$  tale che  $p'_\lambda = p_\lambda \circ f$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$  e  $f$  è isomorfismo.

Viceversa se  $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  è un prodotto degli  $X_\lambda$  e  $f : X' \rightarrow X$  è isomorfismo, anche  $(X', \{p_\lambda \circ f\}_{\lambda \in \Lambda})$  è un prodotto degli  $X_\lambda$

*Osservazione.* Si dice che il prodotto è *unico a meno di unico isomorfismo*

*Dimostrazione.* (Prima parte) Esiste unico  $f$  per la proprietà universale, analogamente  $\exists! f' \in \mathcal{C}(X, X')$  tale che  $p_\lambda = p'_\lambda \circ f$ ,  $\forall \lambda \in \Lambda$ . Dunque  $p_\lambda = p'_\lambda \circ f' = p_\lambda \circ f \circ f' = p_\lambda \circ 1_X$ . Ne consegue che  $1_X = f \circ f'$  per la proprietà universale e analogamente  $1_Y = f' \circ f$ .

(Seconda parte) Dati  $Y \in \mathcal{C}$  e  $g_\lambda : Y \rightarrow X'_\lambda$  devo dimostrare che  $\exists! g : Y \rightarrow X$  tale che  $g_\lambda = f_\lambda \circ f \circ g$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ . Ora per la proposizione universale di  $X$   $\exists! g : Y \rightarrow X$  tale che  $g_\lambda = p_\lambda \circ g$ . Voglio  $g = f \circ g'$  cioè  $g' = f^{-1} \circ g$   $\square$

*Nota* (zione). L'oggetto prodotto  $X$  si indica con

$$X =: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

**Esempio 160.** In **Set** il prodotto di insiemi  $X_\lambda$  per  $\lambda \in \Lambda$  è dato dall'usuale prodotto cartesiano con le proiezioni.

In categorie concrete come **Grp**, **Rng**,  $A$ -Mod un prodotto si ottiene dal prodotto in **Set** mettendo la struttura disgiuntiva componente per componente.

**Esempio 161.** In **FinSet** (la sottocategoria piena di **Set**) con oggetti insiemi finiti, non esiste  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  se  $\#\Lambda = \infty$  e  $\#X_\lambda > 1$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$

Infatti se per assurdo supponiamo il prodotto essere  $X$  per la proprietà universale  $\forall Y \in \mathbf{FinSet}, \infty > \#\mathbf{Set}(Y, X) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \#\mathbf{Set}(Y, X_\lambda) = \infty$

*Osservazione.* Se  $\#\Lambda = 1$  allora un prodotto di  $X_1$  è  $p_1 : X \rightarrow X_1$  in  $\mathcal{C}$  tale che  $\forall Y \in \mathcal{C}$  e  $\forall f_1 : Y \rightarrow X_1 \exists! f : Y \rightarrow X$  tale che  $f_1 = p_1 \circ f$

Questo è vero se  $p_1$  è isomorfismo ( $f = p_1^{-1} \circ f_1$ ). D'altra parte se  $p_1$  non è isomorfismo non fattorizza unicamente ogni altro morfismo. Quindi un prodotto di  $X \in \mathcal{C}$  è qualunque isomorfismo  $X' \rightarrow X$  (in particolare  $1_X$ ).

### Definizione 162: Oggetto terminale

Un oggetto terminale di una categoria  $\mathcal{C}$  è un prodotto vuoto in  $\mathcal{C}$ , cioè  $X \in \mathcal{C}$  tale che  $\forall Y \in \mathcal{C}$  esiste un unico  $Y \rightarrow X$  morfismo di  $\mathcal{C}$ , cioè  $\#\mathcal{C}(Y, X) = 1$

**Esempio 163.** In  $\text{Set}$   $X$  è terminale se e solo se  $\#X = 1$ . Analogamente in  $\text{Grp}, \text{Rng}, A\text{-Mod}$  è ogni gruppo anello o  $A\text{-Mod}$  banale.

**Esempio 164.** Se  $G$  è un monoide non banale, allora  $G$  (come categoria con un solo oggetto) non ha oggetto terminale.

**Proposizione 165.** Una categoria  $\mathcal{C}$  ha tutti i prodotti finiti se e solo se ha oggetto terminale e i prodotti di coppie di oggetti.

*Dimostrazione.* Dimostro solo per induzione l'implicazione non ovvia.

Il passo base è dato dalla presenza dell'oggetto terminale. Per induzione supponiamo che esista il prodotto di  $n - 1$  oggetti  $X' = \prod_{i=1}^{n-1} X_i$  con  $p'_i : X' \rightarrow X_i$  per ogni  $i$ . Sia ora un elemento  $X_n$  e per ipotesi esiste  $X = X' \times X_n$  con  $p_n : X \rightarrow X_n, p' : X \rightarrow X'$ . Allora  $X$  è prodotto di tutti gli  $\{X_i\}_{i=1}^n$  con  $p_i := p'_i \circ p'$  per ogni  $i < n$ .  $\square$

### Definizione 166: Coprodotto

Un coprodotto di  $X_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) in una categoria  $\mathcal{C}$  è un prodotto degli  $X_\lambda$  in  $\mathcal{C}^{op}$ , cioè è dato da  $X \in \mathcal{C}$  e da morfismi  $i_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, X)$  tali che vale la proprietà universale (duale di quella del prodotto)

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda, \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, Y), \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y) : f_\lambda = f \circ i_\lambda$$

e viene denotato

$$X =: \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Diagrammaticamente, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \uparrow f_\lambda & \nwarrow \exists! f & \\ X_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \end{array}$$

commuta

Nelle categorie preadditive si può parlare di **somma diretta** invece di coprodotto e usare  $\bigoplus$  invece di  $\coprod$ .

**Esempio 167.** In  $\text{Set}$  il coprodotto è l'unione disgiunta. In  $A\text{-Mod}$  è la somma diretta usuale. In  $\text{Grp}$  i coprodotti sono i **prodotti liberi**.

### Definizione 168: Oggetto iniziale

Un *oggetto iniziale* di  $\mathcal{C}$  è un coprodotto vuoto in  $\mathcal{C}$ , ossia  $X \in \mathcal{C}$  tale che  $\forall Y \in \mathcal{C}, \#\mathcal{C}(X, Y) = 1$

Può succedere che uno stesso oggetto sia terminale che iniziale. In tal caso per entrambe le definizioni esiste un solo morfismo da uno all'altro. Se tale morfismo è un isomorfismo allora l'oggetto è sia iniziale che terminale.

### Definizione 169: Oggetto nullo

Un oggetto sia iniziale che terminale si dice *nullo*

**Esempio 170.** In  $\text{Set}$ ,  $\emptyset$  è iniziale (non nullo). In  $\text{Grp}/A\text{-Mod}$  ogni *gruppo/modulo* banale è nullo. In  $\text{Rng}$ ,  $\mathbb{Z}$  è iniziale (non nullo)

Se  $X \in \mathcal{C}$  è nullo allora  $\forall Y, Z \in \mathcal{C}$  esiste il morfismo  $0 \in \mathcal{C}(Y, Z)$  dato dalla composizione  $Y \xrightarrow{\exists!} X \xrightarrow{\exists!} Z$ . In tal caso abbiamo che effettivamente  $f \circ 0 = 0$  e  $0 \circ g = 0$  per ogni  $f, g$  componibili con 0.

**Esempio 171.** In  $\mathcal{A}$  preadditiva (in cui esiste un oggetto nullo) il morfismo 0 di cui sopra coincide con 0 dello struttura preadditiva.

### Definizione 172: Preservazione del prodotto

Un funtore  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva un prodotto  $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  di  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$  se  $(F(X), \{F(p_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$  è un prodotto degli  $F(X_\lambda)$  in  $\mathcal{D}$ .

Diremo inoltre che  $F$  preserva i prodotti (o prodotti finiti) se preserva tutti i prodotti (o prodotti finiti) che esistono in  $\mathcal{C}$

*Osservazione.* Se  $F$  preserva un prodotto degli  $X_\lambda$ , allora li preserva tutti.

### Definizione 173: Preservazione del coprodotto

$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  preserva un coprodotto di  $\mathcal{C}$  se  $F^{op}$  preserva il corrispondente prodotto di  $\mathcal{C}^{op}$

**Esempio 174.** I funtori dimenticanti  $\mathbf{Grp}/\mathbf{Rng}/A-\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  preservano i prodotti ma non i coprodotti.

Ora vedremo in particolare cosa succede nelle categorie preadditive, in cui alcune valgono alcune simpatiche proprietà non ovvie.

### Definizione 175: Biprodotto

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria preadditiva. Un biprodotto di  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$  è dato da  $X \in \mathcal{A}$  e morfismi (in  $\mathcal{A}$ )  $p_j : X \rightarrow X_j$  e  $i_j : X_j \rightarrow X$ ,  $\forall j = 1..n$ . tali che

$$\begin{aligned} p_j \circ i_j &= 1_{X_j} \quad ; \quad p_k \circ i_j = 0 \quad \forall j, k = 1..n \text{ con } j \neq k \\ &\text{e } \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = 1_X \end{aligned}$$

*Osservazione.*  $(X, i_1, \dots, i_n, p_1, \dots, p_n)$  è un biprodotto di  $X_1, \dots, X_n$  in  $\mathcal{A}$  se e solo se  $(X, p_1, \dots, p_n, i_1, \dots, i_n)$  è un biprodotto in  $\mathcal{A}^{op}$

Se  $n = 0$  la condizione diventa  $1_X = 0$ , dunque l'anello degli endomorfismi  $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$  è banale.

Se  $n = 1$   $i_1$  e  $p_1$  sono isomorfismi e l'uno l'inverso dell'altro.

*Osservazione.* Basta verificare  $p_k \circ i_j = 0$  per  $j, k = 1..n - 1$  e  $j \neq k$  (dunque per  $n = 2$ ) non è necessario verificare quella parte della definizione

*Dimostrazione.* Sia  $k < n$ . Allora supponendo che  $p_k \circ i_j = 0$  se  $k \neq j < n$ ,

$$\begin{aligned} p_n \circ i_k &= p_n \circ 1_X \circ i_k = p_n \circ \left( \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j \right) \circ i_k = \sum_{j=1}^n p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k = \\ &= p_n \circ i_n \circ p_n \circ i_k + \sum_{j=1}^{n-1} p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k = \\ &= 1_{X_n} \circ p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \circ 1_{X_k} = p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \\ \implies p_n \circ i_k &= 0 \end{aligned}$$

□

**Proposizione 176.** Sia  $\mathcal{A}$  una categoria preadditiva e siano  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$ . Allora  $X \in \mathcal{A}$  è biprodotto di  $X_1, \dots, X_n$  se e solo se  $X$  è un prodotto di  $X_1, \dots, X_n$  se e solo se  $X$  è un coprodotto di  $X_1, \dots, X_n$ .

Più precisamente  $(X, p_1, \dots, p_n)$  è un prodotto di  $X_1, \dots, X_n$  se e solo se esistono (unici)  $i_1, \dots, i_n$  tali che  $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$  è un biprodotto di  $X_1, \dots, X_n$ . Analogamente e dualmente per il coprodotto.

*Dimostrazione.*

$\implies$  Per la proprietà universale del prodotto  $\exists! i_j : X_j \rightarrow X$  per ogni  $j = 1..n$  tali che

$$p_k \circ i_j = (f_j =) \begin{cases} 1_{X_j} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad \begin{array}{c} X_j \\ \delta_{kj} 1_{X_j} \downarrow \quad \swarrow \exists! i_j \\ X_k \xleftarrow[p_k]{} X \end{array}$$

Resta da dimostrare che

$$\sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = 1_X \iff \forall k, p_k \circ \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = p_k \text{ (proprietà universale)}$$

e effettivamente

$$p_k \circ \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = \sum_{j=1}^n p_k \circ i_j \circ p_j = \underbrace{p_k \circ i_k \circ p_k}_{1_{X_k}} = p_k$$

$\iff$  Dati  $f_j : Y \rightarrow X_j$  devo dimostrare che  $\exists! f : Y \rightarrow X$  tale che  $f_j = p_j \circ f$  per ogni  $j = 1..n$ . Allora posso definire

$$f := \sum_{k=1}^n i_k \circ f_k : Y \rightarrow X \text{ e allora } p_j \circ f = \sum_{k=1}^n p_j \circ i_k \circ f_k = f_j$$

essa è unica poiché se  $f' : Y \rightarrow X$  è tale che  $\forall j, f_j = p_j \circ f'$ , allora

$$f' = 1_X \circ f' = \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j \circ f' = \sum_{j=1}^n i_j \circ f_j = f$$

□

*Osservazione* ( $n = 0$ ). In una categoria preadditiva un oggetto è terminale  $\iff$  è iniziale  $\iff$  è nullo  $\iff 1_X = 0$

*Osservazione.* Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo e sia  $X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n}$  un biprodotto di  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$ . Allora  $(F(X), \{F(i_j)\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$  è un biprodotto di  $F(X_1), \dots, F(X_n)$  in  $\mathcal{B}$ .

**Corollario 177.** Un funtore  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  additivo preserva i prodotti e i coprodotti finiti.

*Nota* (zione matriciale nelle categorie preadditive). Sia  $\mathcal{A}$  una categoria preadditiva. Siano  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_n$  in  $\mathcal{A}$  tali che  $\exists(X, i_j^X, p_j^X)$  biprodotto di  $X_1, \dots, X_n$  e  $\exists(Y, i_j^Y, p_j^Y)$  biprodotto di  $Y_1, \dots, Y_n$ . Dati  $f_{j,k} : X_k \rightarrow Y_j$  morfismi di  $\mathcal{A}$  indico con la matrice  $m \times n$  ( $f_{j,k}$ ) il morfismo  $f : X \rightarrow Y$  definito da

$$f = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n i_j^Y \circ f_{j,k} \circ p_k^X$$

### Definizione 178: Categoria additiva

Una *categoria additiva* è una categoria preadditiva in cui esistono tutti i biprodotti.

**Esempio 179.**  $A\text{-Mod}$  è additiva per ogni anello  $A$ .

**Esempio 180.**  $A$  anello come categoria preadditiva con un solo oggetto è additiva se e solo se  $A = 0$

*Osservazione.* Se  $\mathcal{A}$  è additiva, allora anche  $\mathcal{A}^{op}$  lo è.

**Esempio 181.** Le sottocategorie piene di  $A\text{-Mod}$  con oggetti i moduli *f.g. / f.p. / coerenti / noetheriani / artiniani / liberi* sono additive. Non vale per esempio per ciclici.

**Proposizione 182.** *Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo essenzialmente suriettivo. Allora se  $\mathcal{A}$  è additiva, anche  $\mathcal{B}$  è additiva. In particolare  $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$  è additivo per ogni  $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$  ideale.*

*Dimostrazione.*  $\forall Y_1, \dots, Y_n$ , se  $F$  è ess. suriettivo, allora  $\exists X_j \in \mathcal{A}$  tale che  $F(X_j) \cong Y_j$ . A meno di cambiare  $F$  con  $F' \cong F$  posso supporre  $F(X_j) = Y_j$ .

Allora se  $\exists X$  biprodotto di  $X_1, \dots, X_n$  in  $\mathcal{A}$ ,  $F(X)$  è biprodotto di  $Y_1, \dots, Y_n$   $\square$

*Osservazione.* Sia  $\mathcal{C}$  una categoria (piccola) e  $\mathcal{A}$  additiva. Allora  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è additiva.

*Dimostrazione.* Dati  $F_1, \dots, F_n \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  devo dimostrare che esiste il loro biprodotto. Per ogni  $X \in \mathcal{C}$  esiste  $F(X)$  biprodotto di  $F_1(X), \dots, F_n(X)$  in  $\mathcal{A}$ .

$\forall f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $C$  definisco  $F(f)$  come il morfismo definito con la notazione matriciale da

$$F(X) = \bigoplus_{i=1}^n F_i(X) \begin{pmatrix} F_1(f) & & 0 \\ 0 & \cdots & F_n(X) \end{pmatrix} F(Y) = \bigoplus_{i=1}^n F_i(Y)$$

Allora  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  è un funtore e ci sono trasformazioni naturali  $i_j : F_j \rightarrow F$  e  $p_j : F \rightarrow F_j$  le cui componenti sono

$$(i_j)_X := i_j^X : F_j(X) \rightarrow F(X) ; \quad (p_j)_X := p_j^X : F(X) \rightarrow F_j(X)$$

Poiché  $\mathcal{C}$  è preadditiva,  $\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è additiva. Poiché  $F_1, \dots, F_n \in \text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ , allora  $F = \bigoplus_{i=1}^n$  è additivo, infatti

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \begin{pmatrix} F_1(f+g) & & 0 \\ 0 & \cdots & F_n(f+g) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_1(f) + F_1(g) & & 0 \\ 0 & \cdots & F_n(f) + F_n(g) \end{pmatrix} = F(f) + F(g) \end{aligned}$$

$\square$

**Esempio 183.** Se  $\mathcal{A}$  è preadditiva (piccola), allora  $\mathcal{A}\text{-Mod} := \text{AddFun}(\mathcal{A}, \text{Ab})$  è additiva.

**Proposizione 184.** *Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore con  $\mathcal{A}$  additiva,  $\mathcal{B}$  preadditiva,  $F$  che preserva i prodotti (o coprodotti) finiti. Allora  $F$  è additivo*

*Dimostrazione (idea).* Sia  $0 \in \mathcal{A}$  oggetto nullo, allora  $F(0)$  è termianle, dunque  $F(0)$  è nullo (perché  $B$  è preadditiva), ossia  $F(0) = 0$ .

Allora segue che  $F$  preserva i biprodotti. Infatti se  $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$  è un biprodotto di  $X_1, \dots, X_n$  in  $\mathcal{A}$ , allora  $(X, p_1, \dots, p_n)$  è un prodotto di  $X_1, \dots, X_n$  in  $\mathcal{A}$  e dunque  $F(X), \{F(p_j)\}_{j=1..n}$  è un prodotto di  $F(X_1), \dots, F(X_n)$  in  $\mathcal{B}$ . Allora  $\exists! i'_j : F(X_j) \rightarrow F(X)$  tali che  $(F(X), \{i'_j\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$  è un biprodotto di  $F(X_1), \dots, F(X_n)$ . Ma allora deve essere  $i'_j = F(i_j)$  poiché

$$F(p_k \circ i_j) = F(p_k) \circ F(i_j) = F(p_k) \circ i'_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

$$F(0 : Y \rightarrow Z) = 0 : F(Y) \rightarrow F(Z)$$

E allora se  $f, g : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{A}$ , allora  $f + g$  è la composizione

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{(1 \quad 1)} Y$$

Allora  $F(f + g)$  è la composizione

$$F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} F(X) \oplus F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & F(g) \end{pmatrix}} F(Y) \oplus F(Y) \xrightarrow{(1 \quad 1)} F(Y)$$

che è  $F(f) + F(g)$  □

**Corollario 185.** Se  $\mathcal{A}$  è additiva, allora  $\mathcal{A}$  ha un'unica struttura preadditiva.

*Dimostrazione.* Considero  $\mathcal{B} := \mathcal{A}$  come categoria con una qualunque struttura preadditiva e  $F = \text{id}$ . Allora per la proposizione 184,  $F$  è additivo. Poiché  $F$  è pienamente fedele, esiste un'unica struttura preadditiva su  $\mathcal{A}$  tale che  $F = \text{id}$  è additivo, dunque la struttura di  $\mathcal{B}$  coincide con quella di  $\mathcal{A}$  □

*Osservazione.* Sia  $\mathcal{A}$  un anello commutativo,  $\mathcal{A}$  una categoria  $A$ -lineare e additiva. Allora non necessariamente la struttura  $A$ -lineare è unica. Data infatti una struttura  $A$ -lineare posso cambiarla su  $\mathcal{A}(X, Y), \forall X, Y \in \mathcal{A}$ . Se è data da omomorfismi di anelli  $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \text{End}(\mathcal{A}(X, Y))$  considero  $A \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \text{End}(\mathcal{A}(X, Y))$  con  $\alpha$  omomorfismo di anelli non banale.

**Corollario 186.** Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono categorie equivalenti e  $\mathcal{A}$  è additiva, allora  $\mathcal{B}$  è additiva.

*Dimostrazione.* So già che  $\mathcal{B}$  è preadditiva. Allora  $\exists F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  equivalenza, additivo per la proposizione 184.  $F$  è essenzialmente suriettivo, dunque  $\mathcal{B}$  è additivo. □

## 2.2 Limiti e colimiti

L'obiettivo nostro è riuscire a generalizzare il concetto di ker e coker che era definito sui moduli. Vedremo che il giusto contesto sarà quello delle categorie *abeliane*. (probabilmente) A scopo di definire tale struttura, introduciamo i seguenti nuovi concetti

### Definizione 187

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria,  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtore (con  $\mathcal{L}$  piccola).

Un *limite* di  $I$  è dato da  $X \in \mathcal{C}$  con una trasformazione naturale  $\alpha : K_X \rightarrow I$  dove

$$K_X : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C} \text{ è il funtore costante di valore } X, \text{ ossia } \mathcal{L} \xrightarrow[\substack{K_X \\ I}]{} \mathcal{C}.$$

In altri termini,  $\forall L \in \mathcal{L}, \alpha_L : X \rightarrow I(L)$  è tale che  $\forall l : L \rightarrow L'$  in  $\mathcal{L}$ , il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \alpha_L & \searrow \alpha_{L'} & \\ I(L) & \xrightarrow[I(l)]{} & I(L') \end{array}$$

Inoltre, vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \beta : K_Y \rightarrow I \text{ trasformazione naturale, } \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) \text{ t.c. } \beta = \alpha \circ K_f$$

dove  $K_f : K_Y \rightarrow K_X$  è la trasformazione naturale definita da  $(K_f)_L := f$  per ogni  $L \in \mathcal{L}$ . In altre parole  $\beta_L = \alpha_L \circ f$  per ogni  $L \in \mathcal{L}$ , ossia il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \nearrow \alpha_L & \searrow \alpha_{L'} & \\ \exists! f & I(L) & I(L') \\ \uparrow \beta_L & \xrightarrow[I(l)]{} & \uparrow \beta_{L'} \\ Y & & \end{array}$$

**Esempio 188** (Prodotto). Se  $\mathcal{L} = \Lambda$  insieme (categoria discreta), allora  $I$  è dato dagli  $I(\lambda) =: X_\lambda \in \mathcal{C}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ), e un limite di  $I$  è un prodotto degli  $I(\lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) perché un limite è dato da  $X \in \mathcal{C}$  con morfismi  $\alpha_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$  (qualunque, perché  $l$  può essere solo  $1_\lambda$ ) tali che  $\forall Y \in \mathcal{C}$  e  $\forall \beta_\lambda : Y \rightarrow X_\lambda$ ,

$$\begin{array}{c} \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) : \beta_\lambda = \alpha_\lambda \circ f \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ \begin{array}{ccc} X & & \\ \nearrow \alpha_\lambda & \searrow \alpha_\lambda & \\ \exists! f & X_\lambda & X_\lambda \\ \uparrow \beta_\lambda & \xrightarrow[1_\lambda]{} & \uparrow \beta_\lambda \\ Y & & \end{array} \end{array}$$

**Esempio 189.** Sia  $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$ . Allora  $I$  è dato da  $I(\mathcal{L}) = Y \xrightarrow[g]{f} Z$  in  $\mathcal{C}$ . Un limite di  $I$  è dato da  $X \in \mathcal{C}$  con morfismi  $\alpha_1 : X \rightarrow Y$  e  $\alpha_2 : X \rightarrow Z$  tali che  $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_1$  o equivalentemente  $h : X \rightarrow Y$  tale che  $f \circ h = g \circ h$ .

La proprietà universale diventa:

$$\forall X' \in \mathcal{C}, \forall h' : X' \rightarrow Y : f \circ h' = g \circ \exists! k : X' \rightarrow X : h' = h \circ k$$

$$\begin{array}{c} \text{ossia il diagramma} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y & \xrightarrow[g]{f} & Z \\ \uparrow \exists! k & \nearrow h' & & & \\ X' & & & & \end{array} \quad \text{commuta} \end{array}$$

tale  $h$  si dice *equalizzatore* di  $f$  e  $g$ .

In **Set** si può prendere  $X := \{y \in Y : f(y) = g(y)\} \xrightarrow{i} Y$ . Analogamente in **Grp**, **Rng** e  $A\text{-Mod}$  e sarà sottogruppo, sottoanello e sottomodulo come diagramma

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{f} & Z \\ \exists! k \uparrow & \nearrow h' & & & \\ X' & & & & \end{array}$$

**Esempio 190** (Prodotto fibrato o *pullback*). Sia  $\mathcal{L} = (\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet)$ . Allora  $I$  è

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & & \\ \downarrow g_2 & & \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z \end{array}$$

dato da  $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z$  in  $\mathcal{C}$ . Un limite di  $I$  è  $X \in \mathcal{C}$  con morfismi  $f_1 : X \rightarrow Y_1$  e  $f_2 : X \rightarrow Y_2$  (e  $h : X \rightarrow Z$ ) tale che

$$(h =)g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$$

e la proprietà universale diventa: dati  $f'_i : X' \rightarrow Y_i$  tali che  $g_1 \circ f'_1 = g_2 \circ f'_2$ , allora  $\exists! f : X' \rightarrow X$  tale che  $f'_1 = f_1 \circ f$ . Equivalentemente si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X' & & & & \\ \nearrow \exists! f & \swarrow f'_2 & & & \\ & X & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \\ \downarrow f'_1 & & \downarrow f_1 & \downarrow g_2 & \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z & & \end{array}$$

In tal caso  $(X, f_1, f_2)$  si dice *prodotto fibrato* di  $g_1, g_2$  (o *pullback*)

**Esempio 191** (Prodotto fibrato su **Set**). **Set** (o altre categorie concrete) si può prendere  $X := \{y_1, y_2 \in Y_1 \times Y_2 : g_1(y_1) = g_2(y_2)\}$

**Esempio 192.** Se prendiamo  $\mathcal{L} = \emptyset$  e  $I$  il funtore vuoto, allora la definizione di limite diventa (notare l'assenza di  $\alpha$  e  $\beta$  che sono funzioni vuote)

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$$

ossia  $X$  è oggetto terminale

### Definizione 193: Colimite

Un *colimite* di  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  è un limite di  $I^{op} : \mathcal{L}^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$ , cioè è dato da  $X \in \mathcal{C}$  con una trasformazione naturale  $\alpha : I \rightarrow K_X$  tale che  $\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \beta : I \rightarrow K_Y$  trasformazione naturale,  $\exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$  tale che  $\beta = K_f \circ \alpha$  (cioè  $\beta_L = f \circ \alpha_L$  per ogni  $L \in \mathcal{L}$ ).

Equivalentemente,  $L, L' \in \mathcal{L}, Y \in \mathcal{C}, \beta_L : I(L) \rightarrow Y$  e  $b_{L'} : I(L') \rightarrow Y$ , esiste unico  $f : X \rightarrow Y$  tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ \alpha_L \uparrow & & \alpha_{L'} \swarrow & & \\ \exists! f & I(L) & \xrightarrow{I(l)} & I(L') & \\ \beta_L \downarrow & & & \swarrow \beta_{L'} & \\ Y & & & & \end{array}$$

**Esempio 194.** Se  $\mathcal{L} = (\bullet \Rightarrow \bullet)$ , allora un colimite di  $I$  (dato da  $Y \xrightarrow[g]{f} Z$ ) è dato da  $h : Z \rightarrow X$  tale che  $h \circ f = h \circ g$  tale che  $\forall h' : Z \rightarrow X'$  tale che  $h' \circ f = h' \circ g$ ,  $\exists! k : X \rightarrow X'$  tale che  $h' = k \circ h$ . Equivalentemente il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow[g]{f} & Z & \xrightarrow{h} & X \\ & \searrow h' & \downarrow \exists! k & & \\ & & X' & & \end{array}$$

commuta e  $h$  si dice *coequalizzatore* di  $f$  e  $g$ .

### Esercizio 195 Coprodotto fibrato o *pushout*

Definire il coprodotto fibrato, che è il duale del prodotto fibrato.

Sia  $\mathcal{L} = (\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)$  (duale di quella del prodotto fibrato). Allora una colimite

$$\begin{array}{c} Y_2 \\ \uparrow g_2 \end{array}$$

di  $I$  (la cui immagine in  $\mathcal{C}$  è  $Y_1 \xleftarrow[g_1]{ } Z$ ) è dato da  $X \in \mathcal{C}$ ,  $f_1 : Y_1 \rightarrow X$ ,  $f_2 : Y_2 \rightarrow X$ ,  $h : Z \rightarrow X$  morfismi tali che  $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 (= h)$ . Inoltre la proprietà universale dice che  $\forall X' \in \mathcal{C}$ ,  $f'_1 \in \mathcal{C}(Y_1, X')$  e  $f'_2 \in \mathcal{C}(Y_2, X')$  tali che  $f'_1 \circ g_1 = f'_2 \circ g_2$ , allora  $\exists! f : X \rightarrow X'$  tale che  $f \circ f_i = f'_i$  per  $i \in \{1, 2\}$ .

Equivalentemente, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{\quad} & f'_2 & \xleftarrow{\quad} & Y_2 \\ \nearrow \exists! f & & \swarrow f_2 & & \uparrow g_2 \\ X & \xleftarrow{f_2} & Y_2 & \xleftarrow{f_1} & Y_1 \\ \uparrow f'_1 & & \uparrow g_1 & & \xleftarrow{g_1} Z \end{array}$$

In tal caso  $(X, f_1, f_2)$  si dice *prodotto cofibrato* di  $g_1, g_2$  (o *pushout*)

**Esempio 196.** In **Set** un coequalizzatore di  $Y \xrightarrow[g]{f} Z$  è dato dalla proiezione al quoziente  $Z \rightarrow Z/\sim$  dove  $\sim$  è la più piccola relazione di equivalenza su  $Z$  che contiene  $\{(f(y), g(y)) | y \in Y\} \subseteq Z \times Z$

*Nota* (zione). In alcuni casi invece di *limiti/colimiti* si può parlare di *limiti inversi/limiti diretti*.

**Esempio 197.** Similmente a prima, prendendo  $\mathcal{L} = \emptyset$  e  $I$  il funtore vuoto, la definizione diventa

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \quad \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$$

ossia  $X$  è un oggetto iniziale.

**Proposizione 198** (Unicità del limite). *Se  $(X, \alpha)$  limite esiste, allora è unico a meno di isomorfismo. In altre parole dati  $(X, \alpha)$  e  $(Y, \beta)$  limiti di  $I$ , allora  $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$  tale che  $\beta = \alpha \circ K_f$  e  $f$  è isomorfismo.*

Viceversa, se  $(X, \alpha)$  è un limite di  $I$  e  $f : Y \rightarrow X$  è isomorfismo, allora anche  $(X', \alpha \circ K_f)$  è un limite di  $I$

### Esercizio 199 D

imostrare la proposizione 198

*Nota (zione).* Un limite di  $I$  si indica con  $\lim I$  o  $\varprojlim I$  e analogamente un colimite di  $I$  si indica con  $\operatorname{colim} I$  o  $\varinjlim I$ .

Un (co)equalizzatore di  $f, g : Y \rightarrow Z$  si indica con  $(\text{co})\text{eq}(f, g)$

Un prodotto fibrato di  $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \xleftarrow{g_2} Y_2$  si indica con  $Y_1 \times_Z Y_2$ . Similmente per i coprodotti fibrati si usa  $Y_1 \coprod_Z Y_2$

**Proposizione 200.** *Sia  $\gamma : I \rightarrow I'$  una trasformazione naturale tra funtori  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  e sia  $(\lim I)$  un limite di  $I$ . Allora*

1. *Se  $(\lim I', \alpha')$  è un limite di  $I'$  allora  $\exists! \lim \gamma \in \mathcal{C}(\lim I, \lim I')$  tale che  $\alpha' \circ K_{\lim \gamma} = \gamma \circ \alpha$ , inoltre se  $\gamma$  è isomorfismo, allora anche  $\lim \gamma$  è isomorfismo.*

$$\begin{array}{ccc} K_{\lim I} & \xrightarrow{K_{\lim \gamma}} & K_{\lim I'} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ I & \xrightarrow[\gamma]{} & I' \end{array}$$

2. *Se  $\gamma$  è isomorfismo, allora  $(\lim I, \gamma \circ \alpha)$  è un limite di  $I'$*

*Dimostrazione.* 1. Segue direttamente dal fatto che  $(\lim I', \alpha')$  è un limite di  $I'$  e  $\gamma \circ \alpha$  è una trasformazione naturale

2. Sia  $Y \in \mathcal{C}$  e  $\beta : K_Y \rightarrow I'$  trasformazione naturale. Allora  $\gamma^{-1} \circ \beta : K_Y \rightarrow I$  è trasformazione naturale e dunque  $\exists! f \in \mathcal{C}(Y, \lim I)$  tale che  $\gamma^{-1} \circ \beta = \alpha \circ K_f$ , da cui  $\beta = \gamma \circ \alpha \circ K_f$

□

### Teorema 201: Condizione sufficiente per l'esistenza dei limiti

Sia  $\mathcal{L}$  una categoria piccola. Allora esistono tutti i (co)limiti dei funtori  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  se in  $\mathcal{C}$  esistono tutti i (co)equalizzatori e tutti i (co)prodotti indicizzati dagli oggetti e dai morfismi di  $\mathcal{L}$ .

Più precisamente un (co)limite di  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  è dato da  $(X, \alpha)$  con

$$X = \text{eq} \left( \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L) \xrightarrow[g]{h} \prod_{(l:L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})} I(L') \right)$$

dove  $p_l \circ g := p_{L'}$ ,  $p_l \circ h := I(l) \circ p_L \quad \forall (l : L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})$

Indicando con  $i : X \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$  il morfismo naturale,

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \alpha_L := p_L \circ i : X \rightarrow I(L)$$

*idea di dimostrazione.*  $\alpha$  è naturale perché  $g \circ i = h \circ i$ . Più in generale, dato  $j : Y \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$  in  $\mathcal{C}$ , sia  $\beta_L := p_L \circ j : Y \rightarrow I(L)$ . Allora  $\beta : K_Y \rightarrow I$  è una trasformazione naturale se e solo se  $g \circ j = h \circ j$ . Osservando questo, una qualunque trasformazione naturale  $\beta : K_Y \rightarrow I$  è ottenuta da  $j : Y \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$  con  $g \circ j = h \circ j$  ponendo  $\beta_L = p_L \circ j$ .

Per definizione di equalizzatore,  $\exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$  tale che  $j = i \circ f$  che è equivalente a  $\beta_L = \alpha_L \circ f$  e  $\beta = \alpha \circ K_f$ .

$\beta$  è naturale se e solo se  $\forall l : L \rightarrow L'$  morfismo di  $\mathcal{L}$ ,  $I(l) \circ \beta_L = \beta_{L'}$  cioè  $I(l) \circ p_L \circ j = p_{L'} \circ j \iff p_l \circ h \circ j = p_l \circ g \circ j \stackrel{\text{prop. univ. prodotto}}{\iff} h \circ j = g \circ j$  □

### Definizione 202

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria.

$\mathcal{C}$  ha i (co)limiti di forma  $\mathcal{L}$  se esistono i (co)limiti di tutti i funtori  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ .

$\mathcal{C}$  è (co)completa se ha i (co)limiti di forma  $\mathcal{L}$  per ogni categoria piccola  $\mathcal{L}$ .

$\mathcal{C}$  è finitamente (co)completa se ha i (co)limiti di forma  $\mathcal{L}$  per ogni categoria finita  $\mathcal{L}$  (ossia se  $\text{Mor}\mathcal{L}$  è finito)

**Corollario 203.**  $\mathcal{C}$  categoria è (finitamente) (co)completa se e solo se ha (co)equalizzatori e (co)prodotti (finiti).

**Esempio 204.**  $\text{Set}$  è completa e cocompleta (anche  $\text{Grp}$ ,  $\text{Rng}$  e  $A\text{-Mod}$ )

### Definizione 205

Sia  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtore.  $F$  preserva un (co)limite  $(X, \alpha)$  di  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  se  $(F(X), F \circ \alpha^a)$  è un (co)limite di  $F \circ I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$

<sup>a</sup>Composizione orizzontale:  $\alpha : K_X \rightarrow I \implies F \circ \alpha : F \circ K_X = K_{F(X)} \rightarrow F \circ I$

*Osservazione.* Se  $F$  preserva un limite di  $I$ , allora  $F$  preserva tutti i limiti di  $I$ .

$F$  preserva i (co)limiti (finiti) se preserva i (co)limiti di forma  $\mathcal{L}$  per ogni  $\mathcal{L}$  categoria piccola (finita)

**Corollario 206.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria (finitamente) (co)completa. Allora  $F$  preserva i (co)limiti (finiti) se e solo se  $F$  preserva i (co)prodotti (finiti) e i (co)equalizzatori.

**Esempio 207.** I funtori dimenticanti  $\text{Grp}, \text{Rng}, A\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$  preservano i limiti ma non i colimiti.

**Esempio 208.**  $\forall X \in \mathcal{C}$  i funtori  $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  e  $\mathcal{C}(-, X) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$  preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

Analogamente se  $\mathcal{A}$  è una categoria preadditiva, allora  $\forall X \in \mathcal{A}$  i funtori  $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  e  $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \text{Ab}$  preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

*controesempio colimiti.* Se  $\mathcal{C} = \text{Set}$  e  $\#X \geq 2$ , allora  $\mathcal{C}(X, -)$  non preserva i coprodotti.  $\square$

$\mathcal{C}(X, -)$  preserva i limiti. Infatti sia  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  funtore con limite  $(Y, \alpha)$ . Allora abbiamo che  $\forall L \in \mathcal{L} \alpha_L \in \mathcal{C}(Y, I(L))$  tale che  $\forall l : L \rightarrow L'$  morfismo di  $\mathcal{L}$ ,  $I(l) \circ \alpha_L = \alpha'_{L'}$ . Ma allora

$$(\alpha_L)_{L \in \mathcal{L}} \in \text{eq} \left( \prod_{L \in \mathcal{L}} C(Y, I(L)) \xrightarrow[h]{g} \prod_{(l: L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})} C(Y, I(L')) \right)$$

$\square$

*Osservazione.* Sia  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  con  $F \cong F'$ . Se  $F$  preserva un limite  $(X, \alpha)$  di  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ , allora anche  $F'$  lo preserva.

Infatti  $(F(X), F \circ \alpha)$  è un limite di  $F \circ I$  e  $\gamma : F \rightarrow F'$  è isomorfismo, dunque  $\gamma \circ I : F \circ I \rightarrow F' \circ I$  è isomorfismo, dunque  $(F(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha))$  è un limite di  $F' \circ I$ . Segue dunque che  $(F'(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha) \circ K_{\gamma_X^{-1}} = F' \circ \alpha)$  dove l'ultima uguaglianza è perché  $\alpha$  è naturale.

*Osservazione.* Vedremo che ogni equivalenza di categorie preserva sia i limiti che i colimiti.

Sgue che se  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  sono equivalenti e  $\mathcal{C}$  ha i limiti di forma  $\mathcal{L}$ , lo stesso vale per  $\mathcal{D}$ . Infatti sia  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$  funtore e sia  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  equivalenza con quasi-inverso  $G$ . Allora  $G \circ I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  ha limite  $(X, \alpha)$  e dunque anche  $F \circ G \circ I \cong I$  ha limite

Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  categorie (con  $\mathcal{C}$  piccola) e sia  $X \in \mathcal{C}$ . Allora c'è un funtore di valutazione in  $X$

$$\begin{aligned} \text{ev}_X : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &\longrightarrow \mathcal{D} \\ F &\longmapsto \text{ev}_X(F) = F(X) \\ (\alpha : F \rightarrow G) &\longmapsto (\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)) \end{aligned}$$

E  $\forall f : X \rightarrow Y$ , ev induce una trasformazione naturale  $\text{ev}_f : \text{ev}_X \rightarrow \text{ev}_Y$  definita da  $(\text{ev}_f)_X : \text{ev}_X(F) = F(X) \xrightarrow{F(f)} \text{ev}_Y(F) = F(Y)$

**Proposizione 209.** Se in  $\mathcal{D}$  esistono i limiti di forma  $\mathcal{L}$ , allora esistono anche in  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  e si calcolano “puntualmente”, cioè, dato  $I : \mathcal{L} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  si ha che

$$(\lim I)(X) = \lim (\text{ev}_X \circ I)$$

e  $\forall f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $\mathcal{C}$

$$(\lim I)(f) = \lim (\text{ev}_f \circ I)$$

con trasformazioni naturali  $\alpha(X) : K_{\lim(\text{ev}_X \circ I)} \rightarrow \text{ev}_X \circ I$  e  $\forall L \in \mathcal{L} \alpha(X)_L : \lim(\text{ev}_X \circ I) \rightarrow (\text{ev}_X \circ I)(L) = I(L)(X)$ .

La trasformazione naturale  $\alpha : K_{\lim I} \rightarrow I$  è definita  $\forall L \in \mathcal{L}$  da

$$a_L : \lim I \rightarrow I(L) \text{ morfismo in } \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

cioè una trasformazione naturale definita  $\forall X \in \mathcal{C}$  da

$$\underbrace{(\alpha_L)_X}_{\alpha(X)_L} : \underbrace{(\lim I)(X)}_{\lim(\text{ev}_X \circ I)} \rightarrow I(L)(X)$$

### 2.2.1 Limiti in categorie preadditivive

#### Definizione 210: (co)Nucleo

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria preadditiva. Un (co)nucleo di  $f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $\mathcal{A}$  è un

(co)equalizzatore di  $X \xrightarrow[f]{0} Y$

*Osservazione.* Il (co)equalizzatore di  $X \xrightarrow[f]{g} Y$  è (co)nucleo di  $f - g$

Un nucleo di  $f : X \rightarrow Y$  è dunque  $i : K \rightarrow X$  tale che  $f \circ i = 0$  e  $\forall i' : K' \rightarrow X$  tale che  $f \circ i' = 0$ , allora  $\exists! g : K' \rightarrow K$  tale che  $i' = i \circ g$ . Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ K & \xrightarrow{i} & i' & \xrightarrow{f} & Y \\ \nearrow \exists! g & & \uparrow & & \nearrow 0 \\ K' & & & & \end{array}$$

Un conucleo di  $f$  è  $p : Y \rightarrow C$  tale che  $p \circ f = 0$  e  $\forall p' : Y \rightarrow C'$  tale che  $p' \circ f = 0$  allora  $\exists! h : C \rightarrow C'$  tale che  $p' = h \circ p$ . Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} C \\ & & \searrow 0 & \downarrow p' & \swarrow \exists! h \\ & & K' & & \end{array}$$

**Esempio 211.** In  $A\text{-Mod}$  un nucleo di  $f : M \rightarrow N$  è dato dall'inclusione  $\text{Ker } f \hookrightarrow M$ .

Un conucleo di  $f$  è dato invece dalla proiezione a quoziante

$$\pi : N \rightarrow \text{coker } f := \frac{N}{\text{Im } f}$$

effettivamente

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi} \frac{N}{\text{Im } f} \\ & & \searrow 0 & \downarrow g & \swarrow \exists! g' \\ & & P & & \end{array}$$

rappresenta il teorema di omomorfismo per moduli.

*Osservazione.* In quanto limiti, nuclei e conuclei sono unici a meno di unico isomorfismo

### Definizione 212: Categoria preabeliana

Una categoria *preabeliana* è una categoria additiva in cui esistono nuclei e conuclei.

*Osservazione.* Una categoria è preabeliana se e solo se è preadditiva e finitamente completa e cocompleta.

*Osservazione.* Se  $\mathcal{A}$  è preabeliana, allora  $\mathcal{A}^{op}$  è preabeliana.  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  sottocategoria piena è preabeliana se è chiusa per prodotti e coprodotti finiti, per nuclei e per conuclei (cioè  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{A}' \implies \exists i : K \rightarrow X$  nucleo di  $f$  in  $\mathcal{A}$  con  $K \in \mathcal{A}'$ ).

Ad esempio, se  $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$  e  $\mathcal{A}'$  con oggetti i moduli noetheriani/artiniani/coerenti, allora  $\mathcal{A}'$  è preabeliana.

**Esempio 213.** Sia  $\mathcal{A}$  una sottocategoria piena di  $A\text{-Mod}$  con oggetti i moduli *finitamente generati/finitamente presentati* (è sempre additiva).

Allora  $\mathcal{A}$  è preabeliana se e solo se  $A$  è *noetheriano/coerente*.

Infatti  $M$   $A$ -modulo è *f.g./f.p.* se e solo se  $M$  è *noeth./coerente*. Viceversa  $\mathcal{A}$  è in ogni caso chiusa per conuclei in  $A\text{-Mod}$ , ma in generale non per nuclei. Sia  $A$  non *noeth./coerente*. Allora in entrambi i casi  $\exists f : M \rightarrow N$  in  $\mathcal{A}$  tale che  $\text{Ker } f$  non è f.g. Infatti nel primo caso si può prendere  $f = \pi : A \rightarrow A/\mathfrak{I}$  con  $\mathfrak{I}$  ideale sinistro non f.g., mentre nel secondo caso  $\exists \mathfrak{J} \subseteq A$  ideale sinistro f.f.g. non f.p. se prendo  $f : A^n \rightarrow A$  con  $\text{im } f = \mathfrak{J}$ .

Per assurdo sia ora  $g : K \rightarrow M$  un nucleo di  $f$  in  $\mathcal{A}$  (dunque  $f \circ g = 0$ ). In ogni caso  $K$  è f.g. e dunque  $\text{img}$  è f.g.  $\implies x \in \text{Ker } f \setminus \text{img}$ .

Sia  $h : A \rightarrow M$ ,  $a \mapsto ax$  in  $\mathcal{A}$  tale che  $f \circ h = 0$ , ma  $\exists h' : A \rightarrow K$  tale che  $h = g \circ h'$ , e il che contraddice la proprietà universale.

**Esempio 214.** Sia  $A$  un dominio d'integrità,  $\mathcal{A} \subseteq A\text{-Mod}$  sottocategoria piena con oggetti i moduli senza torsione, ossia tali che

$$T(M) := \{x \in M : \text{Ann}(x) \neq 0\} = 0 \quad (T(M) \subseteq M \text{ sottomodulo})$$

Allora  $\mathcal{A}$  è chiusa per nuclei ( $M \in \mathcal{A}, M' \subseteq M$  sottomodulo, allora  $M' \in \mathcal{A}$ ), ma non è chiusa per conuclei se  $A$  non è un campo (esiste infatti  $0 \neq I \neq A$ ) ideale  $I, A \in \mathcal{A}$  ma  $\text{coker}(I \hookrightarrow A) = A/I \notin \mathcal{A}$ .

$\mathcal{A}$  è comunque preabeliana, infatti  $\forall f : M \rightarrow N$  in  $\mathcal{A}$ , un conucleo di  $f$  in  $\mathcal{A}$  è

$$N \xrightarrow{\pi} \text{coker } f \xrightarrow{\pi'} C := \frac{\text{coker } f}{T(\text{coker } f)}$$

Allora  $\pi' \circ \pi \circ f = 0$  evidentemente. Inoltre vale la proprietà universale, infatti

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } f & \xrightarrow{\pi'} & C \\ & \searrow 0 & \downarrow g & & \nearrow \exists! g' & & \\ & & P \in \mathcal{A} & & & \nearrow \exists! g'' & \end{array}$$

dove la freccia tratteggiata è dovuta alla proprietà universale del conucleo in  $A\text{-Mod}$  mentre quella punita (ossia quella voluta in  $\mathcal{A}$ ) è dovuta al fatto, più generale, che dato  $g' : L \rightarrow P$  in  $A\text{-Mod}$  con  $P \in \mathcal{A}$  e  $\pi' : L \rightarrow L/T(L)$

$$\exists! g'' : \frac{L}{T(L)} \rightarrow P \text{ t.c. } g' = g'' \circ \pi'$$

poiché  $g'(T(L)) \subseteq T(P) = 0$  e dunque si può applicare il teorema di omomorfismo.

*Nota.* zione In una categoria preabeliana,  $\forall f : X \rightarrow Y$ , indico con

$$\begin{aligned} \ker f &: \text{Ker } f \rightarrow X \text{ un nucleo di } f \\ \text{coker } f &: Y \rightarrow \text{Coker } f \text{ un conucleo di } f \end{aligned}$$

**Proposizione 215.** Sia  $C$  una categoria piccola,  $\mathcal{A}$  una categoria preabeliana, allora  $\text{Fun}(C, \mathcal{A})$  è preabeliana. Se  $C$  è preadditiva, allora  $\text{AddFun}(C, \mathcal{A})$  (che è additiva) è chiusa per conuclei e nuclei in  $\text{Fun}(C, \mathcal{A})$  e quindi è preabeliana.

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha : F \rightarrow G$  un morfismo in  $\text{AddFun}(C, \mathcal{A})$ . Devo dimostrare che  $\text{Ker}\alpha$ ,  $\text{Coker}\alpha$  (in  $\text{Fun}(C, \mathcal{A})$ ) sono additivi. Effettivamente

$$\forall X \in \mathcal{C} \quad \text{Ker}(\alpha)(X) = \text{Ker}(\alpha_X)$$

e  $\forall f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $C'$ ,  $\text{Ker}(\alpha)(f)$  è l'unico morfismo  $f'$  tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\alpha_X) & \xrightarrow{\text{ker}(\alpha_X)} & F(X) \xrightarrow{\alpha_X} G(X) \\ \downarrow f' & & \downarrow F(f) \quad \downarrow G(f) \\ \text{Ker}(\alpha_Y) & \xrightarrow{\text{ker}(\alpha_Y)} & F(Y) \xrightarrow{\alpha_Y} G(Y) \end{array}$$

Analogamente dato  $g : X \rightarrow Y$ , allora  $\text{Ker}(\alpha)(g) = g'$  tale che l'analogo diagramma commuta. Dunque abbiamo

$$F(f + g) = F(f) + F(g), \quad G(f + g) = G(f) + G(g) \implies f' + g' = (f + g)'$$

□

**Proposizione 216.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria. Allora ogni equalizzatore/coequalizzatore in  $\mathcal{C}$  è un mono/epimorfismo in  $\mathcal{C}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f : X \rightarrow Y$  un equalizzatore di  $Y \xrightarrow[h]{g} Z$ . Dati  $l, l' : W \rightarrow X$  tali che  $f \circ l = f \circ l'$ . Devo dimostrare che  $l = l'$ . Effettivamente

$$g \circ (f \circ l) = h \circ (f \circ l) \implies \exists! \bar{l} : W \rightarrow X \text{ t.c. } f \circ l = f \circ \bar{l} \implies l = \bar{l} = l'$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow[h]{g} & Z \\ \uparrow \exists! \bar{l} & \nearrow & & \searrow f \circ l & \\ W & & & & \end{array}$$

in particolare in una categoria preadditiva i **nuclei** sono **mono** e i **conuclei** sono **epi**.  $\square$

*Osservazione.* In  $\mathcal{A}$  categoria preadditiva,  $f : X \rightarrow Y$  è mono  $\iff$  dato  $g : X' \rightarrow X$  t.c.  $f \circ g = 0$ , allora  $g = 0$ . Analogamente per gli epimorfismi.

### Definizione 217: Categoria abeliana

Una categoria *abeliana* è una categoria preabeliana in cui ogni monomorfismo è un nucleo e ogni epimorfismo è un conucleo

*Osservazione.* Per la proposizione 216 il viceversa vale sempre.

**Esempio 218.**  $A\text{-Mod}$  è abeliana  $\forall A$  anello.

Infatti se  $f : M \rightarrow N$  in  $A\text{-Mod}$  è *mono/epi* se e solo se  $f$  è *iniettivo/suriettivo*.

Se  $f$  è iniettivo, allora  $\text{im } f \cong M$  e l'inclusione  $\text{im } f \xrightarrow{i} N$  è un nucleo di  $\text{coker } f : N \rightarrow \text{Coker } f$ . Dunque anche  $f$  è un nucleo di  $\text{coker } f$  poiché  $f = i \circ f'$  con  $f' : M \rightarrow \text{im } f$  isomorfismo.

Se  $f$  è suriettivo, per il primo teorema di isomorfismo  $N \cong M/\text{Ker } f$  e sia  $\bar{f}$  l'isomorfismo. Allora

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{j := \text{ker } f} & M & \xrightarrow{f} & N \\ & & \searrow \text{coker } j & & \uparrow \exists! \bar{f} \\ & & & & \text{Coker}(j) \end{array}$$

commuta e dunque  $f$  è un conucleo di  $j$ .

*Osservazione.* Se  $\mathcal{A}$  è abeliana, anche  $\mathcal{A}^{op}$  è abeliana.

**Proposizione 219.** Sia  $\mathcal{A}$  una categoria preadditiva con oggetto nullo 0. Allora un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  di  $\mathcal{A}$  è mono/epimorfismo  $\iff \text{Ker } f = 0 / \text{Coker } f = 0$

*Dimostrazione.*

$\implies$  Devo dimostrare che  $0 \xrightarrow{0} X$  è un nucleo di  $f$ . Se  $f \circ 0 = 0$ , dato  $g : Z \rightarrow X$  tale che  $f \circ g = 0$ , allora  $g = 0$  (perché  $f$  è mono) e dunque fattorizza in modo unico attraverso 0.

$\impliedby$  Se  $\text{Ker } f = 0$  dato  $g : Z \rightarrow X$  tale che  $f \circ g = 0$ , allora per definizione di nucleo,  $g$  fattorizza in modo unico attraverso  $0 \rightarrow X$ , dunque  $g = 0$

$\square$

### Definizione 220: Immagine e coimmagine

Un'immagine di  $f : X \rightarrow Y$  in una categoria preabeliana è un nucleo di un conucleo di  $f$ . Una coimmagine di  $f$  è un conucleo di un nucleo di  $f$ . Diagrammaticamente abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{\text{coker } f} \text{Coker } f \\ & & \downarrow \text{coker}(\text{ker } f) = \text{coim } f & & \uparrow \text{im } f = \ker(\text{coker } f) \\ & & \text{Coim } f & & \text{Im } f \end{array}$$

*Nota* (zione). Se  $f$  è nucleo di  $g$  si scrive  $f = \text{kerg}$

**Proposizione 221.** Sia  $f$  un (co)nucleo in una categoria preabeliana. Allora

$$f = (\text{co})\text{im}(f)$$

*Dimostrazione.* Sia  $f : X \rightarrow Y$  un nucleo di  $g : Y \rightarrow Z$ . Voglio dimostrare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \exists! h' \searrow & \uparrow h & \swarrow \text{coker } f & \uparrow \exists! g' & \\ & Y' & \xrightarrow{0} & \text{Coker } f & \end{array}$$

Ossia  $f$  è nucleo di  $\text{coker } f$ . È sempre vero che  $\text{coker } f \circ f = 0$ . Dato  $h : Y' \rightarrow Y$  tale che  $\text{coker } f \circ h = 0$ , devo dire che  $\exists! h' : Y' \rightarrow X$  tale che  $h = f \circ h'$ .

□

**Corollario 222.** Sia  $f$  mono/epi in una categoria abeliana. Allora  $f = (\text{co})\text{im}(f)$ .

**Proposizione 223.** Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana. Sia  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  una sottocategoria piena chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei. Allora  $\mathcal{A}'$  è abeliana.

*Dimostrazione.*  $\mathcal{A}'$  è già preabeliana.

$f : X \rightarrow Y$  mono di  $\mathcal{A}' \iff \text{Ker } f = 0$  in  $\mathcal{A}'$  e quindi in  $\mathcal{A}$ , ossia  $f$  è mono in  $\mathcal{A}$ , ma allora  $f = \text{im } f$  in  $\mathcal{A}$  e quindi in  $\mathcal{A}'$

□

**Esempio 224.** In particolare le sottocategorie di  $A\text{-Mod}$  con oggetti i moduli noeth./artin./coerenti sono abeline

**Esempio 225.** Sia  $\mathcal{C}$  piccola,  $\mathcal{A}$  categoria abeliana. Allora  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è abeliana.

*Dimostrazione.* Sappiamo già che  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è preabeliana.

ora  $\alpha : F \rightarrow G$  è mono in  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \iff \text{Ker } \alpha = 0 \iff \text{Ker}(\alpha_X) = 0$  per ogni  $X \in \mathcal{C}$ , cioè  $\alpha_X$  mono in  $\mathcal{A}$  abeliana e dunque  $\alpha_X = \text{im}(\alpha_X) \implies \alpha = \text{im } \alpha$ .

□

Se  $\mathcal{C}$  è preadditiva, allora  $\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è chiusa per nuclei e conuclei in  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  e dunque  $\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è abeliana. In particolare  $\mathcal{A}\text{-Mod} = \text{AddFun}(\mathcal{A}, \text{Ab})$  è abeliana  $\forall \mathcal{A}$  preadditiva piccola.

**Proposizione 226.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  monomorfismo e epimorfismo in una categoria abeliana. Allora  $f$  è isomorfismo.

*Dimostrazione.*  $f$  è mono, dunque  $f = \text{im } f = \ker(\text{coker } f)$ . Poiché  $f$  è epi,  $\text{Coker } f = 0$ , dunque un'immagine di  $f$  è  $1_Y$ , e quindi  $f$  è isomorfismo.

□

**Esempio 227.** Sia  $\mathcal{A}$  sottocategoria piena di  $A\text{-Mod}$  ( $A$  dominio d'integrità non campo) dei moduli senza torsione. Allora  $\mathcal{A}$  non è abeliana.

*Dimostrazione.* Sia  $0 \neq I \neq A$  ideale. Allora l'inclusione  $i : I \rightarrow A$  è mono ( $\text{Ker } i = 0$ ), epi ( $\text{Coker } i = (A/I)/(T(A/I)) = 0$ ) ma non è isomorfismo.  $\square$

**Proposizione 228.** Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono due categorie equivalenti, allora  $\mathcal{A}$  è abeliana se e solo se  $\mathcal{B}$  è abeliana.

*Dimostrazione.* So già che  $\mathcal{B}$  è preabeliana. Per dualità basta dimostrare che se  $f : X \rightarrow Y$  è monomorfismo di  $\mathcal{B}$ , allora è nucleo.

Sia  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  un'equivalenza (quindi preserva i (co)nuclei). Allora se  $f$  è mono  $\text{Ker } f = 0$ , dunque  $\text{Ker}(F(f)) = F(0) = 0$  è dunque  $F(f)$  è mono.

Inoltre  $F(f) = \text{im}(F(f)) = \text{Ker}(\text{coker}(F(f)))$ . Ma  $\text{im}(F(f)) = F(\text{im}(f))$ . A meno di isomorfismo,  $F(f) = F(\text{im}(f))$  e dunque  $f = \text{im}(f)$  poiché  $F$  è pienamente fedele.  $\square$

*Nota (zione).* I mono si possono indicare con  $\rightarrow$  e gli epi con

### Teorema 229

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria preabeliana. Allora

1.  $\forall f : X \rightarrow Y$  di  $\mathcal{A}$ ,  $\exists! s(f) : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$  tale che  $f = \text{im}(f) \circ s(f) \circ \text{coim}(f)$
2.  $\mathcal{A}$  è abeliana se e solo se  $s(f)$  è isomorfismo per ogni morfismo  $f$  di  $\mathcal{A}$

*Dimostrazione.*

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{\text{coker } f} \text{Coker } f \\ & \text{coim } f \downarrow & \nearrow f' & & \uparrow \text{im } f \\ \text{Coim } f & \dashrightarrow_{s(f)} & \text{Im } f & & \end{array}$$

1.  $f \circ \text{ker } f = 0$  e  $\text{coim } f = \text{coker}(\text{ker } f)$ . Dunque esiste unico  $f' : \text{Coim } f \rightarrow Y$  tale che  $f = f' \circ \text{coim } f$ .

$$0 = \text{coker } f \circ f = \text{coker } f \circ f' \circ \text{coim } f \implies \text{coker } f \circ f' = 0$$

poiché  $\text{coim } f$  è epi.

Inoltre

$$\text{im } f = \text{ker}(\text{coker } f) \implies \exists! s(f) : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f : f' = \text{im } f \circ s(f)$$

dove  $s(f)$  è unico perché  $\text{im } f$  è mono e  $\text{coim } f$  è epi.

2.  $\implies$  Per dualità basta dimostrare che  $f$  mono  $\implies f$  nucleo

$$\text{coim } f = \text{coker}(\text{ker } f) = \text{coker}(0 \rightarrow X) \implies \text{coim } f \text{ iso} \implies f = \text{im } f \circ \text{iso}$$

cioè  $f$  “=”  $\text{im } f$  è un nucleo

$\Leftarrow$   $s(f)$  è isomorfismo se e solo se  $s(f)$  è mono e epi. Per dualità basta dimostrare che  $s(f)$  è mono, che è vero se  $f'$  è mono. Dunque dimostreremo che  $f'$  è mono.

Sia  $g : Z \rightarrow \text{Coim } f$  tale che  $f' \circ g = 0$ , devo dimostrare che  $g = 0$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
& \text{Ker}f & \xrightarrow{\text{ker}f} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{coker}f} \text{Coker}f \\
& h' \uparrow & \nearrow h & \downarrow \text{coim}f & f' \nearrow & \text{im}f \uparrow & \nwarrow f'' \\
W & & & \text{Coim}f & \xrightarrow{s(f)} & \text{Im}f & \\
& g \nearrow & q \uparrow & \text{coker}g & \searrow & & \\
Z & & & & & = & \text{Coker}g
\end{array}$$

ma  $f' \circ g = 0$ , quindi  $\exists! f'' : \text{Coker}g \rightarrow Y$  tale che  $f' = f'' \circ \text{coker}g$ .

Inoltre  $\text{coker}g \circ \text{coim}f : X \rightarrow \text{Coker}g$  epi e  $\mathcal{A}$  è abeliana, dunque

$$\exists h : W \rightarrow X : \text{coker}g \circ \text{coim}f = \text{coker}h$$

$$f \circ h = f' \circ \text{coim}f \circ h = f'' \circ \text{coker}g \circ \text{coim}f \circ h = f'' \circ \text{coker}h \circ h = 0$$

dunque  $\exists! h' : W \rightarrow \text{Ker}f$  tale che  $h = \text{Ker}f \circ h'$ .

□

**Corollario 230.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  morfismo in una categoria abeliana. Allora  $f$  si fattorizza come  $X \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} Y$  con  $e$  epi e  $m$  mono. Inoltre tale fattorizzazione è essenzialmente unica, cioè se  $X \xrightarrow{e'} I' \rightarrow Y$  è un'altra fattorizzazione simile, allora  $\exists! t : I \rightarrow I'$  (iso)morfismo tale che  $e' = t \circ e$  e  $m = m' \circ t$

dimostrazione unicità.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{e} & I & \xrightarrow{m} & Y \\
g \uparrow & \searrow e' & \uparrow t & \nearrow & \\
Z & & I' & & m' \\
& & \swarrow & &
\end{array}$$

Poiché  $e$  è epi, allora  $e = \text{coker}g$  con  $g : Z \rightarrow X$ . Allora  $e \circ g = 0 \implies m \circ e \circ g = m' \circ e' \circ g = 0 \implies e' \circ g = 0$  perché  $m'$  è mono. Poiché  $e = \text{coker}g$ ,

$$\exists! t : I \rightarrow I' : e' = t \circ e$$

Allora  $m' \circ t \circ e = m' \circ e' = m \circ e$ . Inoltre  $e$  è epi, dunque  $m' \circ t = m$ .

Verificare come esercizio che  $t$  è iso.

□

### Definizione 231: Sottoggetto

Un *sottoggetto* di  $X$  è una classe di equivalenza di monomorfismi  $Y \xrightarrow{i} X$ , dove  $(Y \xrightarrow{i} X) \sim (Y' \xrightarrow{i'} X)$  se  $\exists t : Y \rightarrow Y'$  isomorfismo tale che  $i = i' \circ t$ , ossia

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{i} & X \\
t \downarrow & \nearrow i' & \\
Y' & &
\end{array}$$

*Osservazione.* Sia  $\mathcal{C}'_X$  la sottocategoria di  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  con oggetti i mono con codominio  $X$ . Sia ora

$$\mathcal{C}'_X((Y \xrightarrow{i} X), (Y' \xrightarrow{i'} X)) := \{t \in \mathcal{C}(Y, Y') : i' \circ t = i\}$$

Inoltre  $t$  è tale che  $i' \circ t = i$  è mono, dunque  $t$  è mono. Inoltre  $t$ , se esiste, è unico, quindi  $\mathcal{C}'_X$  è un preordine.

Una relazione di preordine induce una relazione d'ordine sulle classi di isomorfismo degli oggetti. Quindi ottengo una relazione d'ordine sui sottoggetti di  $X$  (che indico con  $\subseteq$ ), cioè se  $Y, Y'$  sottoggetti di  $X$ , si scrive  $Y \subseteq Y'$  se  $\exists t$  tale che. Dualmente si ottiene la nozione di quoziante di  $X$  considerando gli epi  $X \twoheadrightarrow Y$ .

**Esempio 232.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  un monomorfismo in una categoria abeliana. Allora  $f = \text{im}(f)$  come sottoggetti di  $Y$ .

### Definizione 233: Complesso

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  in una categoria preadditiva è un *compleSSo* se  $g \circ f = 0$

**Proposizione 234.** In  $\mathcal{A}$  abeliana,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \text{coim } f \downarrow & \nearrow \text{im } f & & \swarrow \text{kerg} & \\ \text{Im } f & \xrightarrow[t]{\quad} & \text{Kerg} & & \end{array}$$

$$g \circ f = 0 \iff \exists(!) t : \text{Im } f \rightarrow \text{Kerg} \text{ t.c. } \text{im } f = \text{kerg} \circ t$$

*Dimostrazione.*

$\Leftarrow$

$$g \circ f = g \circ \text{im } f \circ \text{coim } f = \underbrace{g \circ \text{kerg} \circ t \circ \text{coim } f}_{0} = 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = g \circ f = g \circ \text{im } f \circ \text{coim } f, \text{coim } f \text{ epi} \implies g \circ \text{im } f = 0$$

da cui  $\exists! t : \text{Im } f \rightarrow \text{Kerg}$  tale che  $\text{im } f = \text{kerg} \circ t$  per la proprietà universale del nucleo.

□

*Osservazione.* In un complesso, esiste sempre tale  $t$ , ma non necessariamente è un isomorfismo

### Definizione 235: Successione esatta

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  complesso in una categoria abeliana è detta successione *esatta* se  $t : \text{Im } f \rightarrow \text{Kerg}$  tale che  $\text{im } f = \text{kerg} \circ t$  è isomorfismo (ossia  $\text{Im } f = \text{Kerg}$  come sottoggetti di  $Y$ )

*Osservazione.*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \text{coker } f \swarrow & & \text{coimg} \searrow & & \uparrow \text{img} \\ \text{Coker } f & \xrightarrow[t]{\quad} & \text{Coimg} & & \end{array}$$

$$g \circ f = 0 \iff \exists(!) t : \text{coimg} \circ t = \text{coker } f$$

e la successione è esatta se e solo se  $t$  è isomorfismo.

**Proposizione 236.**

1.  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  è esatta  $\iff \text{Ker } f = 0 \iff f$  mono.

1<sup>op</sup>.  $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$  è esatta  $\iff \text{Coker } f = 0 \iff f$  epi

2.  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  è esatta (in  $X$  e  $Y$ )  $\iff f = \text{kerg}$

2<sup>op</sup>.  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  è esatta  $\iff g = \text{coker } f$

3.  $\forall f : X \rightarrow Y$  la successione  $0 \rightarrow \text{Ker}f \xrightarrow{\text{ker}f} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{coker}f} \text{Coker}f \rightarrow 0$  è esatta.  
In particolare se  $f$  è mono, allora  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{coker}f} \text{Coker}f \rightarrow 0$  è esatta e  
 $f$  epi, dunque  $0 \rightarrow \text{Ker}f \xrightarrow{\text{ker}f} X \rightarrow Y \rightarrow 0$  è esatta

*Dimostrazione.* A quanto pare l'unica non ovvia è la 2.

- $\Rightarrow$  Se la successione è esatta in  $X$  allora  $f$  è mono, dunque  $f = \text{im}f$ . Se la successione è esatta in  $Y$  allora  $\text{im}f = \text{kerg} \Rightarrow f = \text{kerg}$
- $\Leftarrow$  Se  $f = \text{kerg}$ , allora  $f$  è mono, dunque successione esatta in  $X$ . Ma quindi  $(\text{ker}f) = f = \text{im}f$  e dunque esatta in  $Y$

□

### Definizione 237: Successione esatta corta

Le successioni esatte della forma  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  si dicono esatte corte.

**Proposizione 238.** Una successione esatta corta  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  in una categoria abeliana si spezza se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1.  $f$  è invertibile a sinistra
2.  $g$  è invertibile a destra
3.  $\exists r : Y \rightarrow X$  e  $s : Z \rightarrow Y$  tale che  $(Y, f, s, r, g)$  è un biprodotto di  $X$  e  $Z$

*Buona definizione.* Per dualità basta dimostrare che 1.  $\Leftrightarrow$  3.. Inoltre 3.  $\Rightarrow$  1. è ovvia, dunque dimostriamo solo 1.  $\Rightarrow$  3..

Sia  $h := 1_Y - f \circ r : Y \rightarrow Y$ . Allora  $h \circ f = f - f \circ \underbrace{r \circ f}_{1_X} = 0$ . Allora

$$g = \text{coker}f \Rightarrow \exists! s : Z \rightarrow Y : h = s \circ g \Rightarrow 1_Y = s \circ g + f \circ r$$

Dunque resta da dimostrare che  $g \circ s = 1_Z$ . Infatti  $g \circ s \circ g = g \circ h = g - g \circ f \circ r = g = 1_Z \circ g$  e  $g$  è epimorfismo, dunque  $g \circ s = 1_Z$ . □

### Definizione 239: Categoria semisemplice

Una categoria abeliana  $\mathcal{A}$  è detta *semisemplice* se tutte le successioni esatte corte di  $\mathcal{A}$  si spezzano

**Esempio 240.**  $A\text{-Mod}$  è semisemplice se e solo se  $A$  è semisemplice.

### Definizione 241: Funtore esatto

Un funtore  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tra categorie abeliane si dice *esatto a sinistra/destra* se  $F$  è additivo e preserva le successioni esatte rispettivamente della forma  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  o della forma  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ .

*Osservazione.*  $F$  è esatto a sinistra/destra  $\Leftrightarrow F$  è additivo e preserva i *nuclei/conuclei*  $\Leftrightarrow F$  preserva i *limiti/colimiti* finiti.

Usando l'osservazione si potrebbe definire anche  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  esatto a sinistra/destra se  $\mathcal{C}$  è finitamente completa/cocompleta e  $F$  preserva i *limiti/colimiti*

### Definizione 242

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tra categorie abeliane è detto *esatto* se lo è sia a sinistra che a destra.

*Osservazione.*  $F$  è esatto a sinistra/destra se  $F$  preserva i mono/epimorfismi. Infatti se  $f : X \rightarrow Y$  è mono, allora esiste una successione esatta  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z$

**Proposizione 243.** *Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo tra categorie abeliane. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- i)  $F$  è esatto a sinistra/destra
- ii)  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  è esatta in  $\mathcal{A} \implies$

$$0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \quad / \quad F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \rightarrow 0$$

è esatta in  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* i)  $\implies$  ii) è ovvia. Si supponga ora che valga ii). Allora sia  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  esatta in  $\mathcal{A}$ . si decomponga  $g = i \circ g'$  con  $i$  mono e  $g'$  epi, dunque  $Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{i} Z$ . Allora  $\ker g' = \ker g$  perché  $i$  è mono e  $\ker g = f$ , dunque  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z'$  è esatta. Segue che per ipotesi  $0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g')} F(Z')$  è esatta.

Poiché ora  $i$  è mono, allora  $F(i)$  è mono e dunque

$$F(f) = \ker(F(g')) = \ker(F(i) \circ F(g')) = \ker(F(g))$$

Ne consegue che  $0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$  è esatta.  $\square$

**Proposizione 244.** *Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo tra categoria abeliane. Allora le seguenti sono equivalenti:*

- i)  $F$  preserva le successioni esatte (della forma  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ ).
- ii)  $F$  è esatto.
- iii)  $F$  è esatto a sinistra e preserva gli epimorfismi.
- iii')  $F$  è esatto a destra e preserva i monomorfismi.
- iv)  $F$  preserva le successioni esatte corte.

*Dimostrazione.* Molte implicazioni sono ovvie, in particolare è evidente che i)  $\implies$  ii)  $\implies$  iii)  $\implies$  iv) e ii)  $\implies$  iii'  $\implies$  iv). Inoltre iv)  $\implies$  ii) per la proposizione 243. Resta da dimostrare che ii)  $\implies$  i).

Sia  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  esatta in  $\mathcal{A}$ .

Allora  $f = f' \circ p$  con  $p$  epi e  $f'$  mono. Inoltre  $\text{im } f = \ker g$  mma  $\text{im } f = \ker(\text{coker}(f))$  e poiché  $p$  è epi, allora  $\text{coker } f = \text{coker } f' \implies \text{im } f = \text{im } f'$ . Poiché  $f'$  è mono, allora  $\text{im } f' = f'$  e dunque  $\ker g = f'$ . Dunque  $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g} Z$  è esatta e  $F$  è esatto (a sinistra). Segue che  $0 \rightarrow F(X') \xrightarrow{F(f')} F(X) \rightarrow F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$  è esatta. Ma  $F(f) = F(f') \circ F(p)$  e  $F(p)$  è epi, essendo  $F$  esatto a destra, dunque  $\text{coker}(F(f)) = \text{coker}(F(f')) \implies \text{im}(F(f)) \implies \text{im}(F(f')) = \ker(F(g)) \implies$

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

è esatta.  $\square$

### Definizione 245

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  funtore tra categorie abeliane è esatto al centro se  $F$  è additivo e per ogni successione esatta  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$ , allora  $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$  è esatta in  $\mathcal{B}$ .

**Corollario 246.**  $F$  è esatto a sinistra/destra  $\iff F$  è esatto al centro e preserva i mono/epimorfismi.

**Osservazione.** Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo tra categorie abeliane. Allora  $F$  preserva le successioni esatte corte che si spezzano. Dunque se  $\mathcal{A}$  è semisemplice allora  $F$  è esatto.

**Esempio 247.** Sia  $A \rightarrow B$  un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari  $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  è esatto.

**Esempio 248.** Se  $\mathcal{A}$  è abeliana e  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  sottocategoria piena è chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei (dunque  $\mathcal{A}'$  è additiva), allora il funtore di inclusione  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  è esatto.

**Esempio 249.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria (piccola) e  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana (quindi  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$  è abeliana).

Allora  $\forall X \in \mathcal{C}$  il funtore di valutazione in  $X$

$$\begin{aligned} \text{ev}_X : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{A} \\ F &\longmapsto \text{ev}_X(F) = F(X) \\ \alpha &\longmapsto \text{ev}_X(\alpha) = \alpha_X \end{aligned}$$

è esatto

**Esempio 250.** Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana e  $X \in \mathcal{A}$ . Allora i funtori  $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  e  $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \text{Ab}$  sono esatti a sinistra (e più in generale preservano i limiti).

*Dim.*  $\mathcal{A}(X, -)$  esatto a sinistra (assumendo additivo).  $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y'' (\rightarrow 0)$  è esatta in  $\mathcal{A}$ . Allora  $0 \rightarrow \mathcal{A}(X, Y') \xrightarrow{f_*} \mathcal{A}(X, Y) \xrightarrow{g_*} \mathcal{A}(X, Y'')$  è esatta in  $\text{Ab}$ .

Infatti  $g \circ f = 0 \implies g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0_* = 0$  e dato  $h \in \mathcal{A}(X, Y)$  tale che  $g_*(h) = 0$ , devo dimostrare che  $\exists! h' \in \mathcal{A}(X, Y')$  tale che  $h = f_*(h')$ . Questo è vero

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f=\ker g} & Y & \xrightarrow{g} & Y'' \\ \nearrow h' & \downarrow h & \nearrow & & \searrow 0 \\ X & & & & \end{array} \quad \text{e per la proprietà}$$

perché  $0 = g_*(h) = g \circ h$ . E dunque

universale del ker tale  $h'$  esiste unico. □

In generale  $\mathcal{A}(X, -)$  e  $\mathcal{A}(-, X)$  non sono esatti a destra (ma lo sono se  $\mathcal{A}$  è semisemplice). In particolare, se  $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y'' \rightarrow 0$  non si spezza, allora  $\mathcal{A}(Y'', -)$  non è esatto a destra, perché  $g$  epi in  $\mathcal{A}$  ma  $g_*$  non è epi (suriettivo) in  $\text{Ab}$ . Infatti  $g_* : \mathcal{A}(Y'', Y) \rightarrow \mathcal{A}(Y'', Y'')$  è tale che  $\text{id}_{Y''} \notin \text{im}(g_*)$ . Analogamente  $\mathcal{A}(-, Y')$  non è esatto a destra.

**Esempio 251.** Sia  $A$  un dominio d'integrità non campo. Consideriamo  $F : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  dato da  $F(M) = M/T(M)$  e  $F(f : M \rightarrow N) = \bar{f} : M/T(M) \rightarrow N/T(N)$  omomorfismo indotto. Allora  $F$  è additivo (esercizio) e preserva mono e epi ma **non è esatto al centro** (e dunque neanche a sinistra o destra).

Infatti se  $f$  è suriettivo, allora anche  $\bar{f}$  è suriettivo e se  $f$  è iniettivo, allora  $\bar{f}$  è iniettivo poiché  $\bar{x} \in \ker \bar{f} \implies f(x) \in T(N) \implies \exists 0 \neq a \in A : 0 = af(x) = f(ax) \implies ax = 0$  per iniettività di  $f$ . Segue che quindi  $x \in T(M) \implies \bar{x} = \bar{0}$ .

Tuttavia nono è esatto al centro, infatti se  $0 \neq I \subsetneq A$  è ideale, allora  $0 \rightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \rightarrow 0$  è esatta in  $A\text{-Mod}$ , ma  $T(I) = T(A) = 0$  e  $T(A/I) = A/I$ , dunque  $F(I) = I$ ,  $F(A) = A$  e  $F(A/I) = 0$ , per cui si ottiene  $I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{F(\pi)} 0$  che **non** è esatta.

**Proposizione 252.** *Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  esatto e fedele tra categorie abeliane. Sia  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  una successione (qualunque) in  $\mathcal{A}$  tale che  $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$  è esatta in  $\mathcal{B}$ , allora  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  è esatta in  $\mathcal{A}$*

*Nota (zione).* Sia  $X' \subseteq X$  sottoggetto di  $X$ . Allora indico con  $X/X'$  un conucleo di  $X' \rightarrowtail X$

*Dimostrazione.*  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = 0 \stackrel{\text{additivo}}{=} F(0)$ , quindi  $g \circ f = 0$  poiché  $F$  è fedele, e dunque  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  è un complesso e quindi  $\text{Im } f \subseteq \text{Kerg}$  come sottoggetti. Devo dimostrare quindi che  $C := \text{Kerg}/\text{Im } f = 0$ . Poiché  $F$  preserva i nuclei,  $F(C) = F(\text{Kerg})/F(\text{Im } f) = \text{Ker}(F(g))/\text{Im}(F(f)) = 0$  perché la successione in  $\mathcal{B}$  è esatta. Segue dunque che  $F(1_C) = 0 = F(0 : C \rightarrow C)$  e  $F$  è fedele, dunque  $1_C = 0$ , ossia  $C = 0$  è l'oggetto nullo.  $\square$

### Teorema 253: Freyd - Mitchell

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana (piccola). Allora esiste un anello  $A$  e un funtore esatto pienamente fedele  $\mathcal{A} \rightarrow A\text{-Mod}$

**Corollario 254.** *Le dimostrazioni di caccia al diagramma in  $\mathcal{A}$  abeliana si possono fare in  $A\text{-Mod}$*

In realtà il teorema precedente si può utilizzare anche se  $\mathcal{A}$  non è piccola, perché tanto il diagramma solitamente prende pochi oggetti

### Lemma 255: del Serpente

Il seguente diagramma con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} (0 \longrightarrow )X' & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{p} & X'' & \longrightarrow 0 \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow Y' & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{q} & Y'' & (\longrightarrow 0) & \end{array}$$

induce una successione esatta

$$(0 \rightarrow) \text{Ker } f' \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \xrightarrow{d} \text{Coker } f' \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow \text{Coker } f'' (\rightarrow 0)$$

*Dimostrazione.* Corollario 254. Se invece volessimo dimostrarlo esplicitamente usando solo elementi categorici, si può dimostrare utilizzando prodotti fibrati difficili perché non si può usare la proprietà universale dei ker e coker banalmente (notare che  $d$  è dal lato sbagliato per poterlo fare)  $\square$

*Osservazione.* Se  $\mathcal{A}$  è una categoria (pre)abeliana, allora ci sono i funtori  $\text{Ker}$ ,  $\text{Coker} : \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  definita nel modo ovvio per  $\text{Ker}(f)$  e per ogni morfismo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow f' & \quad \downarrow f & \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array} : f \rightarrow f' \text{ in } \text{Mor}(\mathcal{A}), \text{ allora } \text{Ker}((i,j)) := i' \text{ tale che } \text{Ker } f \circ i' =$$

$i \circ \text{Ker } f'$  o equivalentemente (includendo anche la definizione di Coker) il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ker}(f') & \xrightarrow{i'} & \text{Ker}(f) \\
\downarrow \text{ker } f' & & \downarrow \text{ker } f \\
X' & \xrightarrow{i} & X \\
\downarrow f' & & \downarrow f \\
Y' & \xrightarrow{j} & Y \\
\downarrow \text{coker } f' & & \downarrow \text{coker } f \\
\text{Coker } f' & \xrightarrow{j'} & \text{Coker } f
\end{array}$$

e per il lemma del serpente  $\text{Ker}$  è esatto a sinistra e  $\text{Coker}$  è esatto a destra. Non sono però esatti, perché se prendo  $X' = Y'' = 0$ ,  $p = f$ ,  $j = 1_X$  e  $X \neq 0$ , allora ottengo la successione

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\cong} & X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\
& & & & & \parallel & & & \parallel \\
& & & & & \text{Ker } f'' & & & \text{Coker } f'
\end{array}$$

# Capitolo 3

## Moduli (reprise)

### Definizione 256: Bimodulo

Siano  $A, B$  anelli. Allora un  $(A, B)$ -bimodulo è un gruppo abeliano  $(M, +)$  con struttura di  $A$ -modulo sinistro e di  $B$ -modulo destro tale che  $(ax)b = a(xb)$  per ogni  $a \in A, b \in B$  e  $x \in M$ .

Se  $A = B$  allora si dice  $A$ -bimodulo invece che  $(A, A)$ -bimodulo.

*Osservazione.* Un  $(A, B)$ -bimodulo è anche un  $(B^{op}, A^{op})$ -bimodulo. In particolare

$$A\text{-bimodulo} = A^{op}\text{-bimodulo}$$

**Esempio 257.**  $A$  come anello è un  $A$ -bimodulo

**Esempio 258.** Se  $A$  è commutativo, allora se  $M$  è  $A$ -modulo è un  $A$ -bimodulo, con la proprietà aggiuntiva che  $ax = xa$  (più in generale se vale questa proprietà si dice che il bimodulo è *simmetrico*)

**Esempio 259.** Se  $B$  è una  $A$ -algebra e  $M$  un  $B$ -modulo *sinistro/destro*, allora  $M$  è un  $(B, A)/(A, B)$ -bimodulo.

Di conseguenza,  $\forall A$  anello e  $\forall M$   $A$ -modulo *sinistro/destro*,  $M$  è un  $(A, \mathbb{Z})/(\mathbb{Z}, A)$ -bimodulo.

### Definizione 260: Omomorfismo di bimoduli

Un omomorfismo di  $(A, B)$ -bimoduli è  $f : M \rightarrow N$  omomorfismo sia di  $A$ -moduli sinistri che di  $B$ -moduli destri.

Si ottiene che la categoria  $A\text{-Mod-}B$  degli  $(A, B)$ -bimoduli è una categoria abeliana.

**Proposizione 261.** Sia  $M \in A\text{-Mod-}B$  e  $N \in A\text{-Mod-}C$ . Allora  $\text{Hom}_A(M, N)$  è un  $(B, C)$ -bimodulo con

$$(bf)(x) := f(xb) \quad ; \quad (fc)(x) := f(cx) \quad \forall b \in B, c \in C, x \in M, f \in \text{Hom}_A(M, N)$$

*Dimostrazione.*  $bf$  è  $A$ -lineare, infatti  $(bf)(ax) = a(bf)(x)$  per ogni  $a \in A$  perché  $(bf)(ax) = f((ax)b) = f(a(xb)) = af(xb) = a(bf)(x)$ . Analogamente  $fc$  è  $A$ -lineare (lasciato per esercizio).

Devo dimostrare in particolare che  $(bb')(f) = b(b'f)$  e  $f(cc') = (fc)c'$ . Sono entrambe vere perché,  $\forall x \in M$

$$((bb')(f))(x) = f(x(bb')) = f((xb)b') = (b'f)(xb) = (b(b'f))(x)$$

e analogamente l'altra (lasciata per esercizio).

Resta da dimostrare che  $(bf)c = b(fc)$ . Infatti

$$(b(fc))(x) = (fc)(xb) = f(xb)(c) = (bf)(x)c = ((bf)c)(x)$$

□

**Corollario 262.** *Sia  $M \in A\text{-Mod-}B$ . Allora si ottengono funtori (additivi)*

$$\begin{aligned}\text{Hom}_A(M, -) : A\text{-Mod} &\rightarrow B\text{-Mod} \\ \text{Hom}_A(-, M) : (A\text{-Mod})^{op} &\rightarrow \text{Mod-}B\end{aligned}$$

*Dimostrazione.* resta da dimostrare che  $\forall g : N \rightarrow N'$  in  $A\text{-Mod}$ , allora  $g_* : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N')$  definita da  $f \mapsto g \circ f$  e  $g^* : \text{Hom}_A(N', M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M)$  definita da  $f' \mapsto f' \circ g$  sono  $B$ -lineari.

Dunque vogliamo mostrare che  $g_*(bf) = g \circ bf = b(g \circ f) = bg_*(f)$ . Effettivamente  $\forall x \in M$

$$(g \circ (bf))(x) = g((bf)(x)) = g(f(xb)) = (g \circ f)(xb) = (b(g \circ f))(x)$$

e analogamente  $g^*$  è  $B$ -lineare (lasciato per esercizio). □

**Esempio 263.** Il funtore  $\text{Hom}_A(A, -) : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  è isomorfo a  $\text{id}_{A\text{-Mod}}$  con isomorfismo naturale  $\alpha : \text{Hom}_A(A, -) \rightarrow \text{id}_{A\text{-Mod}}$  definito  $\forall M \in A\text{-Mod}$  da

$$\begin{aligned}\alpha_M : \text{Hom}_A(A, M) &\longrightarrow M \\ f &\longmapsto \alpha_M(f) = f(1)\end{aligned}$$

so già che  $\alpha_M$  è biunivoca. Resta da dimostrare che è  $A$ -lineare. Questo è vero perché,  $\forall a \in A$

$$\alpha_M(af) = (af)(1) = f(1a) = f(a1) = af(1) = a\alpha_M(f)$$

e inoltre se  $g : M \rightarrow N$  è  $A$ -lineare, allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}\text{Hom}_A(A, M) & \xrightarrow{\alpha_M} & M \\ \downarrow g_* & & \downarrow g \\ \text{Hom}_A(A, N) & \xrightarrow{\alpha_N} & N\end{array}$$

commuta. Questo è vero perché  $\forall f \in \text{Hom}_A(A, M)$ ,  $g(\alpha_M(f)) = g(f(1))$  e  $\alpha_N(g_*(f)) = a_N(g \circ f) = (g \circ f)(1)$

**Esempio 264.** Sia  $A$  commutativo,  $B$  una  $A$ -algebra,  $M, N$   $B$ -moduli. Allora Poiché  $M, N \in B\text{-Mod-}A$ ,  $\text{Hom}_B(M, N)$  è  $A$ -bimodulo simmetrico (ossia tale che  $\forall a \in A$  e  $\forall f \in \text{Hom}_B(M, N)$ ,  $(af)(x) = f(ax) = af(x)$ ).

In particolare se  $M, N$  sono  $A$ -moduli, allora  $\text{Hom}_A(M, N)$  è un  $A$ -modulo in questo modo.

### Definizione 265: Prodotto tensoriale

Un *prodotto tensoriale* di  $M \in \text{Mod-}A$  e  $N \in A\text{-Mod}$  è un gruppo abeliano  $T$  con una funzione  $t : M \times N \rightarrow T$  che sia  $A$ -bilanciata, cioè  $t$  è  $\mathbb{Z}$ -bilineare e

$$t(xa, y) = t(x, ay) \quad \forall a \in A, \forall x \in M, \forall y \in N$$

universale per tale proprietà, ossia  $t$  è tale che  $\forall G$  gruppo abeliano e  $\forall f : M \times N \rightarrow G$   $A$ -bilanciata  $\exists ! f' : T \rightarrow G$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $f = f' \circ t$

**Proposizione 266.** Siano  $(T, t)$  e  $(T', t')$  due prodotti tensoriali di  $M$  e  $N$ . Allora  $\exists! i : T \rightarrow T'$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $t' = i \circ t$  e  $i$  è isomorfismo.

Inoltre si può prendere  $T := \mathbb{Z}^{(M \times N)} / H$ . Con leggero abuso di notazione in  $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$  indico con  $(x, y)$  l'elemento della base indicizzato da  $(x, y) \in M \times N$ . Con tale notazione, e  $x, x' \in M$ ,  $y, y' \in N$  e  $a \in A$

$$H = \left\langle \underbrace{(x + x', y) - (x, y) - (x', y)}_{\text{additività nel primo argomento}}, \underbrace{(x, y + y') - (x, y) - (x, y')}_{\text{add. nel secondo arg.}}, \underbrace{(xa, y) - (x, ay)}_{\text{bilanciataggine}} \right\rangle$$

e

$$t(x, y) = (x, y) + H$$

*Dimostrazione unicità.* Per la proprietà universale di  $T, t$ ,  $\exists! i$  tale che  $t' = i \circ t$ . Analogamente per  $i' : T' \rightarrow T$  e come al solito  $i \circ i' = \text{id}_{T'}$  e  $i' \circ i = \text{id}_T$   $\square$

*Dimostrazione.* Dimostrazione esistenza  $t$  è  $A$ -bilanciata per definizione di  $T$ . Data  $f : M \times N \rightarrow G$   $A$ -bilanciata  $\exists! \tilde{f} : \mathbb{Z}^{(M \times N)} \rightarrow G$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$  per ogni  $x \in M$  e  $y \in N$ .

Allora  $f$  è  $A$ -bilanciata implica che  $\tilde{f}|_H = 0$  e per il teorema di omomorfismo per gruppi  $\exists! f' : T \rightarrow G$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $\tilde{f} = f' \circ \pi$  (con  $\pi : \mathbb{Z}^{(M \times N)} \rightarrow T$  la proiezione).

Abbiamo che  $t = \pi \circ j$ , con  $j : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}^{(M \times N)}$  definita da  $(x, y) \mapsto (x, y)$ .

Finalmente si conclude che

$$f = \tilde{f} \circ j = f' \circ \pi \circ j = f' \circ t$$

e  $f'$  è unica (esercizio).  $\square$

*Nota (zione).* Si indica  $T$  con  $M \otimes_A N$  e  $t(x, y)$  con  $x \otimes y$ .

*Osservazione.*  $M \otimes_A N = \langle x \otimes y : x \in M, y \in N \rangle = \langle x \otimes y : x \in U, y \in V \rangle$  con  $M = \langle U \rangle$  e  $N = \langle V \rangle$ . Uno potrebbe pensare che basti prendere  $U$  e  $V$  generatori come *modulo* di  $M$  e  $N$  ma questo in generale non basta e  $U, V$  devono essere generatori di  $M$  e  $N$  come gruppo.

**Proposizione 267.** Sia  $M \in \text{Mod-}A$  e  $N \in A\text{-Mod}$ . Allora la funzione

$$\begin{aligned} M \otimes_A N &\rightarrow N \otimes_{A^{\text{op}}} M \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x \end{aligned}$$

è ben definita ed è isomorfismo di gruppi

*Dimostrazione.* Bisogna controllare che

$$\begin{aligned} f : M \times N &\longrightarrow N \otimes_{A^{\text{op}}} M \\ (x, y) &\longmapsto f((x, y)) = y \otimes x \end{aligned}$$

sia  $A$ -bilanciata. Lo è perché

$$f(xa, y) = y \otimes (xa) = (ay) \otimes x = f(x, ay)$$

E dunque  $\exists! f' : M \otimes_A N \rightarrow N \otimes_{A^{\text{op}}} M$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $f(x \otimes y) = y \otimes x$

Immagino che sia per la solita ragione che  $f'$  è  $\mathbb{Z}$ -lineare.  $\square$

**Proposizione 268.** Sia  $f : M \rightarrow M'$  in  $\text{Mod-}A$  e  $g : N \rightarrow N'$  in  $A\text{-Mod}$ . Allora  $f \otimes g : M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N'$  data da  $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$  è (ben definita) e isomorfismo.

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi : M \times N \rightarrow M' \otimes_A N'$ ,  $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$  è  $A$ -bilanciata (esercizio).

Allora  $\exists! \varphi' : M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N'$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $\varphi'(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$   $\square$

**Corollario 269.** *Esistono i funtori (additivi)*

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A - : A\text{-Mod} & \longrightarrow & Ab \\ N & \longmapsto & M \otimes_A N \\ (g : N \rightarrow N') & \longmapsto & \text{id}_M \otimes g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} - \otimes_A N : \text{Mod-}A & \longrightarrow & Ab \\ M & \longmapsto & M \otimes_A N \\ (f : M \rightarrow M') & \longmapsto & f \otimes \text{id}_N \end{array}$$

**Proposizione 270.** *Sia  $M \in B\text{-Mod-}A$ ,  $N \in A\text{-Mod-}C$ . Allora  $M \otimes_A N \in B\text{-Mod-}C$  con  $b(x \otimes y) := (bx) \otimes y$  e  $(x \otimes y)c := x \otimes (yc)$*

*Dimostrazione.* Fissato  $b \in B$  devo vedere che la moltiplicazione a sinistra per  $b$  è ben definita. Infatti  $\varphi_b : M \rightarrow M$  data da  $x \mapsto bx$  è  $A$ -lineare e  $\varphi_{b*} : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$  definita da  $x \otimes y \mapsto (bx) \otimes y$  è  $\mathbb{Z}$ -lineare.

Va visto che  $\forall z \in M \otimes_A N$  e  $\forall b, b' \in B$  allora  $(bb')z = b(b'z)$ . Poiché basta verificarlo su un generatore allora basta verificarlo quando  $z = x \otimes y$  e lì è chiaro.

Analogamente per  $z(cc') = (zc)c'$  e  $(bz)c = b(zc)$ .  $\square$

**Corollario 271.** *Sia  $M \in B\text{-Mod-}A$ . Allora esistono i funtori (additivi)*

$$M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod} \quad e \quad - \otimes_B M : \text{Mod-}B \rightarrow \text{Mod-}A$$

*Dimostrazione.* Per  $M \otimes_A -$  resta da dimostrare che  $\forall g : N \rightarrow N'$  in  $A\text{-Mod}$ ,  $g_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N'$  è  $B$ -lineare, cioè  $g_*(bz) = bg_*(z)$  per ogni  $z \in M \otimes_A N$ . Posso supporre  $z = x \otimes y$  da cui

$$g_*(bz) = g_*(b(x \otimes y)) = \underbrace{g_*}_{\text{id}_M \otimes g}((bx) \otimes y) = (bx) \otimes g(y) = b(x \otimes g(y)) = bg_*(z)$$

Per  $- \otimes_B M$  il discorso è simile nelle categorie op.  $\square$

**Corollario 272.** *Sia  $A$  commutativo,  $M, N \in A\text{-Mod}$ . Allora  $M \otimes_A N \in A\text{-Mod}$*

*Osservazione.* Se  $A$  è commutativo, allora

$$\begin{aligned} t : M \times N &\rightarrow M \otimes_A N \\ (x, y) &\mapsto x \otimes y \end{aligned}$$

è  $A$ -bilineare (oltre che  $A$ -bilanciata ovviamente) perché  $t(ax, y) = (ax) \otimes y = a(x \otimes y) = x \otimes (ay) = t(x, ay)$ .

Inoltre, data  $f : M \times N \rightarrow P$   $A$ -bilineare (con  $P \in A\text{-Mod}$ , allora  $f$  è  $A$ -bilanciata e quindi  $\exists! f' : M \otimes_A N \rightarrow P$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $f = f' \circ t$  e  $f'$  è  $A$ -lineare perché  $f'(a(x \otimes y)) = f'((ax) \otimes y) = f'(t(ax, y)) = f(ax, y) = af(x, y) = \dots = af'(x \otimes y)$ ).

Una conseguenza è che su  $A$  commutativo si può definire  $M \otimes_A N$  attraverso la proposizione universale per le funzioni  $A$ -bilineari  $M \times N \rightarrow P$ .

*Osservazione.* Sia  $M \in B\text{-Mod-}A$  e  $N \in A\text{-Mod-}C$ . Allora  $M \otimes_A N = B(U \otimes V)C$  se  $M = BU$  e  $N = VC$

### Definizione 273: Funtore aggiunto

Sia  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  funtori. Si dice che  $F$  è *aggiunto sinistro* di  $G$  (o che  $G$  è *aggiunto destro* di  $F$ ) e si indica  $F \dashv G$  se  $\forall X \in \mathcal{C}$  e  $\forall Y \in \mathcal{D}$

$$\exists \varphi = \varphi_{X,Y} : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$$

biunivoca e naturale in  $X$  e  $Y$ , cioè  $\forall f : X' \rightarrow X$  in  $\mathcal{C}$  e  $\forall g : Y \rightarrow Y'$  in  $\mathcal{D}$  il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(F(X'), Y) & \xleftarrow{F(f)^*} & \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{D}(F(X), Y') \\ \varphi_{X', Y} \downarrow & & \varphi_{X, Y} \downarrow & & \downarrow \varphi_{X, Y'} \\ \mathcal{C}(X', G(Y)) & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C}(X, G(Y)) & \xrightarrow{G(g)_*} & \mathcal{C}(X, G(Y')) \end{array}$$

ossia  $\forall h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$ ,

$$\varphi_{X, Y'}(g \circ h) = G(g) \circ \varphi_{X, Y}(h) \text{ e } \varphi_{X', Y}(h \circ F(f)) = \varphi_{X, Y}(h) \circ f$$

*Osservazione.* Una  $\varphi$  come sopra definisce una trasformazione naturale (isomorfismo)  $\mathcal{D}(F(-), -) \Rightarrow \mathcal{C}(-, G(-))$  tra funtori  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$  (o viceversa dato un tale isomorfismo naturale si ottiene un'aggiunzione tra  $F$  e  $G$ ). Questo equivale a dire che, per ogni  $X' \xrightarrow{f} X$  e  $Y \xrightarrow{g} Y'$ , il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{\varphi_{X, Y}} & \mathcal{C}(X, G(Y)) \\ g_* \circ F(f)^* \downarrow & & \downarrow G(g)_* \circ f^* \\ \mathcal{D}(F(X'), Y') & \xrightarrow{\varphi_{X', Y'}} & \mathcal{C}(X', G(Y')) \end{array}$$

ossia che  $\forall h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$ , si ha che  $\varphi_{X', Y'} \circ g_* \circ F(f)^*(h) = G(g)_* \circ f^* \circ \varphi_{X, Y}(h)$ , ossia  $\varphi_{X', Y'}(g \circ h \circ F(f)) = G(g) \circ \varphi_{X, Y}(h) \circ f$

*Osservazione.*  $F \dashv G \iff G^{op} \dashv F^{op}$

**Esempio 274.** Se  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  è un'equivalenza e  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  è un quasi-inverso di  $F$ , allora  $F \dashv G$  e  $G \dashv F$

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che  $\forall X \in \mathcal{C}$  e  $Y \in \mathcal{D}$ ,

$$\mathcal{D}(F(X), Y) \xrightarrow[\sim]{G} \mathcal{C}(G(F(X)), G(Y)) \xrightarrow[\sim]{\alpha_X^*} \mathcal{C}(X, G(Y))$$

se  $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  isomorfismo ( $\implies \alpha_X : X \rightarrow G \circ F(X)$  isomorfismo in  $\mathcal{C}$ )  $\square$

**Esempio 275.**

$$(\text{Abel} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}) \dashv (\mathbf{Ab} \xrightarrow{\text{inclusione}} \mathbf{Grp})$$

con  $\text{Abel}(G) = G/[G, G]$ . Allora questo è vero perché  $\forall G \in \mathbf{Grp}$  e  $\forall H \in \mathbf{Ab}$

$$\mathbf{Ab}\left(\frac{G}{[G, G]}, H\right) \longleftrightarrow \mathbf{Grp}(G, H)$$

**Esempio 276.** Sia  $A$  un dominio d'integrità e  $\mathcal{A} \subseteq A\text{-Mod}$  la sottocategoria piena dei moduli senza torsione. Allora

$$\begin{aligned} (A\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{A}) &\dashv \left( \mathcal{A} \xrightarrow{\text{inclusione}} A\text{-Mod} \right) \\ M &\mapsto \frac{M}{T(M)} \end{aligned}$$

perché  $\forall M, N \in A\text{-Mod}$  con  $T(N) = 0$  allora

$$\text{Hom}_A(M/T(M), N) \cong \text{Hom}_A(M, N)$$

**Proposizione 277.** Se  $F \dashv G$  e  $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , allora  $F' \dashv G \iff F' \cong F$

*Dimostrazione.*

$\implies$  Cerco  $\alpha_X \in \mathcal{D}(F(X), F'(X))$  e possiamo prendere

$$\alpha_X = \varphi_{X, F'(X)}^{-1} \left( \varphi'_{X, F'(X)}(1_{F'(X)}) \right)$$

$\iff$  Sia  $\alpha : F \rightarrow F'$  l'isomorfismo. Allora voglio definire  $\varphi'_{X, Y} : \mathcal{D}(F'(X) \rightarrow Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$  per ogni  $X \in \mathcal{C}$  e  $Y \in \mathcal{D}$  e possiamo definirlo come  $\varphi'_{X, Y} = \varphi_{X, Y} \circ \alpha_X^*$

□

**Esempio 278.** Dati  $F : \mathbf{Set} \rightarrow A\text{-Mod}$  e  $G : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  dati da  $F : \Lambda \mapsto A^{(\Lambda)}$  e  $G : M \mapsto M$  il funtore dimenticante, allora  $F \dashv G$  poiché  $\text{Hom}_A(A^{(\Lambda)}, M) \leftrightarrow \mathbf{Set}(\Lambda, M)$

*Osservazione.* Dato  $(F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$  dato da  $\varphi_{X, Y} : \mathcal{D}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, G(Y))$ , ottengo una trasformazione naturale

$\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  (**unità** dell'aggiunto) e  $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  (**counità** dell'aggiunto)

definite da,  $\forall X \in \mathcal{C}$ ,  $\eta_X := \varphi_{X, F(X)}(1_{F(X)}) \in \mathcal{C}(X, G(F(X))) \cong \mathcal{D}(F(X), F(X)) \ni 1_{F(X)}$  e la  $\varepsilon$   $\forall Y \in \mathcal{D}$  data da  $\varepsilon_Y := \varphi_{G(Y), Y}^{-1}(1_{G(Y)})$ .

A questo punto, per ogni  $h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$ ,

$$\varphi(h) = \varphi(h \circ 1_{F(X)}) \stackrel{\varphi \text{ nat.}}{=} G(h) \circ \varphi(1_{F(X)}) = G(h) \circ \eta_X$$

Quindi  $\forall k \in \mathcal{C}(X, G(Y))$ , esiste unico  $h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$  tale che  $k = \varphi(h) = G(h) \circ \eta_X$

**Proposizione 279.** Se  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  sono preadditive e  $G$  è additiva, allora  $F$  è additivo e  $\varphi_{X, Y}$  è  $\mathbb{Z}$ -lineare per ogni  $X \in \mathcal{C}$  e  $Y \in \mathcal{D}$ . In altre parole  $\varphi$  dà trasformazioni naturali  $\mathcal{D}(F(-), =) \rightarrow \mathcal{C}(-, G(=))$  come funtori  $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ab}$

*Dimostrazione.*  $\forall h, h' \in \mathcal{D}(F(X), Y)$ , si ha che  $\varphi_{X, Y}(h + h') = G(h + h') \circ \eta_X = G(h) \circ \eta_X + G(h') \circ \eta_X = \varphi(h) + \varphi(h')$ . Inoltre  $\forall f' : X \rightarrow X'$  in  $\mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} G(F(f + f')) \circ \eta_{X'} &\stackrel{\eta \text{ nat.}}{=} \eta_{X'} \circ (f + f') = \eta_{X'} \circ f + \eta_{X'} \circ f' = \\ &= G(F(f)) \circ \eta_X + G(F(f')) \circ \eta_X = G(F(f) + F(f')) \circ \eta_X \\ \implies F(f + f') &= F(f) + F(f') \end{aligned}$$

□

### Teorema 280

Siano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  categorie qualunque e siano  $F, G$  funtori tali che

$$(F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$$

Allora  $F$  preserva i colimiti e  $G$  preserva i limiti.

*Idea della dimostrazione.* Sia  $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtore (con  $\mathcal{L}$  piccola) con  $\lim I = (Z \in \mathcal{D}, \alpha : K_Z \rightarrow I)$ . Allora per definizione di limite si ha che,  $\forall Y \in \mathcal{D}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{Y, Z} : \mathcal{D}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_Y, I) \\ g &\longmapsto \delta_{Y, Z}(g) = \alpha \circ K_g \end{aligned}$$

è biunivoca. Vogliamo dimostrare che  $\lim(G \circ I) = (G(Z), G \circ \alpha : K_{G(Z)} \rightarrow G \circ I)$ , ossia che  $\forall X \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned}\gamma_{X,Z} : \mathcal{C}(X, G(Z)) &\longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{C})(K_X, G \circ I) \\ f &\longmapsto \gamma_{X,Z}(f) = g \circ \alpha \circ K_f\end{aligned}$$

è biunivoca. A tale scopo notiamo che abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(X, G(Z)) & \xrightarrow{\gamma_{X,Z}} & \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{C})(K_X, G \circ I) \\ \varphi_{X,Z} \uparrow & & \uparrow \tilde{\varphi} \\ \mathcal{D}(F(X), Z) & \xleftarrow{\delta_{F(X),Z}} & \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_{F(X)}, I)\end{array}$$

dove  $\tilde{\varphi}$  è definita nel seguente modo per ogni  $\beta \in \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_{F(X)}, I)$ , ossia per ogni trasformazione naturale  $\beta : K_{F(X)} \rightarrow I$

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \tilde{\varphi}(\beta)_L := \varphi_{X,I(L)}(\beta_L) : X \rightarrow G(I(L))$$

si verifica che  $\tilde{\varphi}$  è ben definita ed è biunivoca, il diagramma commuta e dunque  $\gamma_{X,Z}$  è biunivoca.  $\square$

**Corollario 281.** *Ogni equivalenza di categorie preserva limiti e colimiti.*

**Corollario 282.** *Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore tra categorie additive. Allora:*

1. *Se  $F$  è aggiunto sinistro/destro,  $F$  è additivo (preserva infatti i coprodotti/prodotti finiti)*
2. *Se  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  sono abeliane e  $F$  è aggiunto sinistro/destro, allora  $F$  è esatto a destra/sinistra*

### Esercizio 283

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana. Dimostrare che  $\text{Ker}$  è esatto a sinistra e  $\text{Coker}$  è esatto a destra.

*Suggerimento:* (per  $\text{Ker}$ ) considerare il funtore  $\mathcal{A} \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{A})$  dato da  $X \mapsto (X \mapsto 0)$

### Teorema 284

Sia  $M \in B\text{-Mod-}A$ . Allora

$$(M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}) \dashv (\text{Hom}_B(M, -) : B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod})$$

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che,  $\forall N \in A\text{-Mod}$  e  $\forall P \in B\text{-Mod}$ ,  $\text{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \cong \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(M, P))$ . Questo è vero perché

$$\begin{array}{ccccc}\text{Hom}_B(M \otimes_A N, P) & \xrightarrow{\sim} & \text{Bal}_A^B(M \times N, P) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(M, P)) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \text{Hom}(M \otimes_A N, P) & \xrightarrow[\sim]{t^*} & \text{Bal}_A(M \times N, P) & \xleftarrow[\substack{f \mapsto \bar{f} \\ g \mapsto g}]{} & \text{Hom}_A(N, \text{Hom}(M, P))\end{array}$$

Dove:

- $t^*$  è biunivoca perché sappiamo che  $t : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$  è  $A$ -bilanciata universale.

- le due funzioni tra  $\text{Bal}_A$  e  $\text{Hom}_A$  sono definite da  $\tilde{g}(x, y) = g(y)(x)$  e  $\tilde{f}(y)(x) = f(x, y)$ . Sono chiaramente una l'inversa dell'altra, e l'unica verifica non ovvia da fare è che  $\tilde{f}(ay) = a\tilde{f}(y)$  per ogni  $a \in A$  e  $\forall y \in N$ , effettivamente abbiamo che,  $\forall x \in M$ ,

$$\tilde{f}(ay)(x) = f(x)(ay) = f(xa, y) = \tilde{f}(y)(xa) = a\tilde{f}(y)(x)$$

e analogamente se  $g$  è  $A$ -lineare, allora  $\tilde{g}$  è  $A$ -bilanciata.

- $\text{Bal}_A^B(M \times N, P) = \{f \in \text{Bal}_A(M \times N, P) | f \text{ è } B\text{-lineare nel primo argomento}\}$

Le biezioni rimangono nei sottoinsiemi, perché conservano la  $B$ -linearità  $\square$

**Corollario 285.**  $M \otimes_A -$  è esatto a destra e preserva i coprodotti (e anche  $\text{Hom}_B(M, -)$  è esatto a sinistra e preserva i prodotti)

**Corollario 286.** Se  $A$  è commutativo e  $M \in A\text{-Mod}$ , allora

$$(M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}) \dashv (\text{Hom}_A(M, -) : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod})$$

Osservazione.  $A \in A\text{-Mod}-A$ , dunque

$$(A \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}) \dashv (\text{Hom}_A(A, -) : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}) \cong \text{id}_{A\text{-Mod}}$$

da cui  $A \otimes_A - \cong \text{id}_{A\text{-Mod}}$  e potevamo vederlo più direttamente in quanto  $\forall M \in A\text{-Mod} A \otimes_A M \rightarrow M$  dato da  $a \otimes x \mapsto ax$  è ben definito ed è un isomorfismo con inverso  $M \rightarrow A \otimes_A M$  dato da  $x \mapsto 1 \otimes x$ .

**Proposizione 287.** Sia  $M \in \text{Mod}-A$ ,  $N \in A\text{-Mod}-B$  e  $P \in B\text{-Mod}$ . Allora

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

con isomorfismo tale che  $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$

Dimostrazione. Fissato  $z \in P$ , sia

$$\begin{aligned} f_z : M \times N &\longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P) \\ (x, y) &\longmapsto f_z((x, y)) = x \otimes (y \otimes z) \end{aligned}$$

Allora  $f_z$  è  $A$ -bilanciata e dunque per la proprietà universale del prodotto tensoriale  $\exists! f'_z : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P)$   $\mathbb{Z}$ -lineare tale che  $x \otimes y \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ . Sia ora

$$\begin{aligned} f : (M \otimes_A N) \times P &\longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P) \\ (w, z) &\longmapsto f((w, z)) = f'_z(w) \end{aligned}$$

Allora  $f$  è  $B$ -bilanciata. Infatti se  $w = x \otimes y$  (basta verificare in questo caso)

$$\begin{aligned} f(wb, z) &= f'_z(wb) = f'_z((x \otimes y)b) = f'_z(x \otimes yb) = x \otimes ((yb) \otimes z) = \\ &= x \otimes (y \otimes bz) = f'_{bz}(x \otimes y) = f'_{bz}(w) = \\ &= f(w, bz) \end{aligned}$$

Ora di nuovo per la proprietà universale del prodotto tensoriale possiamo dire che  $\exists! f' : (M \otimes_A N) \otimes_B P \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P)$   $\mathbb{Z}$ -bilineare t.c.  $f'((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$   $\square$

**Corollario 288.** Se  $A$  è commutativo e  $M, N, P \in A\text{-Mod}$ , allora  $(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P)$

Osservazione. Se  $M \in B\text{-Mod}-A$ , allora in generale  $M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  non preserva i monomorfismi.

Ad esempio sia  $A$  un dominio d'integrità non campo e sia  $0 \neq a \in A \setminus A^*$ . Allora  $f_a : A \rightarrow A$  dato da  $b \mapsto ab$  è monomorfismo in  $A\text{-Mod}$ , ma preso  $M = A/(a)$  abbiamo che  $\varphi_{a*} : M \otimes_A A \rightarrow M \otimes_A A$  dato da  $x \otimes b \mapsto x \otimes (ab)$  non è iniettivo

### 3.1 Funtori indotti da omomorfismi di anelli

A questo punto, dato un omomorfismo di anelli  $f : A \rightarrow B$ , esso induce i funtori

- $f^* : B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  (restrizione degli scalari)
- $f_! := B \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  (estensione degli scalari, considerando  $B \in B\text{-Mod-A}$ )
- $f_* := \text{Hom}_A(B, -) : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  (coestensione degli scalari, considerando  $B \in A\text{-Mod-B}$ )

Come notazione si può usare  $f_*$  invece di  $f^*$ ,  $f^*$  invece di  $f_!$  e  $f^!$  invece di  $f_*$

**Proposizione 289.** *Sia  $f : A \rightarrow B$  come sopra, ossia  $f \in \text{Rng}(A, B)$ , allora*

$$f_! \dashv f^* \dashv f_*$$

*Dimostrazione.*  $\forall N \in A\text{-Mod}$  e  $\forall P \in B\text{-Mod}$  devo dimostrare che

1.  $\text{Hom}_B(f_!(N), P) \cong \text{Hom}_A(N, f^*(P))$
2.  $\text{Hom}_A(f^*(P), N) \cong \text{Hom}_B(P, f_*(N))$

1.  $\text{Hom}_B(f_!(N), P) = \text{Hom}_B(B \otimes_A N, P) \cong \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(B, P))$  per il corollario 286 ma ora  $\text{Hom}_B(B, P) \cong P$  come  $A$ -modulo, dunque abbiamo che il precedente

$$\text{Hom}_B(f_!(N), P) \cong \text{Hom}_A(N, P) = \text{Hom}_A(N, f^*(P))$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato che effettivamente  $\text{Hom}_A(N, P)$  è la restrizione degli scalari.  $\square$

2.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(f^*(P), N) &\stackrel{P \text{ } A\text{-modulo}}{\cong} \text{Hom}_A(P, N) \cong \text{Hom}_A(B \otimes_B P, N) \cong \\ &\cong \text{Hom}_B(P, \text{Hom}_A(B, N)) = \text{Hom}_B(P, f_*(N)) \end{aligned}$$

$\square$

$\square$

**Corollario 290.**  $f_!$  è esatto a destra e  $f_*$  è esatto a sinistra

*Osservazione.*  $f_!(A) \cong B$

**Proposizione 291.** *Sia  $M \in A\text{-Mod}$  f.g./f.p.. Allora  $f_!(M) \in B\text{-Mod}$  è f.g./f.p..*

*Dimostrazione.* Se la successione  $(A^m \rightarrow) A^n \rightarrow M \rightarrow 0$  è esatta, allora anche

$$\underbrace{(f_!(A^m) \rightarrow)}_{B^m} \underbrace{f_!(A^n) \rightarrow}_{B^n} f_!(M) \rightarrow 0$$

è esatta, e dunque  $f_!(M)$  è f.g./f.p..  $\square$

**Corollario 292.** *Sia  $I \subseteq A$  un ideale e  $\pi : A \rightarrow A/I$  il quoziente. Allora  $\forall M \in A\text{-Mod}$ ,  $\pi_!(M) \cong M/IM$  (in  $A/I\text{-Mod}$ , dunque equivalentemente in  $A\text{-Mod}$ )*

*Dimostrazione.* La successione  $0 \rightarrow I \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A/I \rightarrow 0$  è esatta in  $A\text{-Mod-}A$ . So che  $\pi_!(M) = (A/I) \otimes_A M$ . A questo punto possiamo usare che  $- \otimes_A M : A\text{-Mod-}A \rightarrow A\text{-Mod}$  è esatto a destra, dunque.

$$\begin{array}{ccccccc} I \otimes_A M & \longrightarrow & A \otimes_A M & \longrightarrow & A/I \otimes_A M & \longrightarrow & \bullet \longrightarrow 0 \\ & & \searrow_{a \otimes x \mapsto ax} & & \nearrow \parallel & & \\ & & & & M & & \end{array}$$

$$\text{Ma allora } A/I \otimes_A M \cong \text{Coker}\left(\begin{smallmatrix} I \otimes_A M \rightarrow M \\ a \otimes x \mapsto ax \end{smallmatrix}\right) = M/IM$$

□

### Definizione 293: Proiettività e iniettività

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana e  $X \in \mathcal{A}$ . Allora  $X$  si dice *proiettivo* se  $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  è esatto (ossia equivalentemente se  $\mathcal{A}(X, -)$  preserva gli epi, cioè  $\forall f : Y \twoheadrightarrow Z$  epimorfismi di  $\mathcal{A}$ , allora  $f_* : \mathcal{A}(X, Z) \rightarrow \mathcal{A}(X, Y)$  è suriettivo, ossia per ogni  $g : X \rightarrow Z$  esiste  $s : X \rightarrow Y$  tale che  $f \circ s = g$ )

$X$  si dice *iniettivo* (in  $\mathcal{A}$ ) se è proiettivo in  $\mathcal{A}^{op}$ , cioè se  $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$  è esatto. (Equivalentemente  $\mathcal{A}(-, X)$  preserva gli epimorfismi, ossia  $\forall f : Y \rightarrow Z$  monomorfismo di  $\mathcal{A}$ ,  $f^* : \mathcal{A}(Z, X) \rightarrow \mathcal{A}(Y, X)$  è suriettivo).

*Osservazione.* Se  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  è esatta,  $Z$  è proiettivo oppure  $X$  è iniettivo, allora la successione si spezza. Ad esempio se  $Z$  è proiettivo, allora  $g : Y \rightarrow Z$  e esiste  $\text{id}_Z : Z \rightarrow Z$ , allora  $\exists s : Z \rightarrow Y$  tale che  $g \circ s = \text{id}_Z$ .

Quindi otteniamo che  $\mathcal{A}$  è semisemplice se e solo se tutti gli oggetti di  $\mathcal{A}$  sono proiettivi se e solo se tutti gli oggetti di  $\mathcal{A}$  sono iniettivi.

### Definizione 294: Moduli piatti

$M \in \mathbf{Mod}-A$  è *piatto* (su  $\mathcal{A}$ ) se  $M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  è esatto. Equivalentemente  $M \otimes_A -$  preserva i monomorfismi, cioè se  $f : N \rightarrow P$  iniettivo in  $A\text{-Mod}$ , allora  $f_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A P$  è iniettivo in  $\mathbf{Ab}$ .

### Proposizione 295.

1. Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana e  $X_\lambda \in \mathcal{A}$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ . Supponiamo inoltre che esista  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  (resp.  $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ). Allora  $X$  è proiettivo (resp. iniettivo) se e solo se tutti gli  $X_\lambda$  sono proiettivi (resp. iniettivi).
2. Sia  $A$  un anello,  $M_\lambda \in \mathbf{Mod}-A$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ . Allora

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è piatto} \iff M_\lambda \text{ è piatto } \forall \lambda \in \Lambda$$

*Dimostrazione.*

1. Basta dimostrare il caso  $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ . In tale caso sia  $f : Y \rightarrow Z$  un epimorfismo in  $\mathcal{A}$ . Allora  $X$  è proiettivo se e solo se  $f_* : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{A}(X, Z)$  è suriettivo. Ma

$$\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{A}\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, Y\right) \stackrel{\text{prop. univ.}}{\cong} \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Y)$$

quindi ora poiché il seguente diagramma commuta,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(X, Y) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{A}(X, Z) \\
\parallel & & \parallel \\
\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Y) & \xrightarrow[\substack{(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto (f \circ g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}]{\prod_{\lambda \in \Lambda} f_*} & \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Z)
\end{array}$$

La mappa  $f_*$  è suriettiva se e solo se  $\prod_{\lambda \in \Lambda} f_*$  è suriettiva. Ma quest'ultima lo è se tutte le sue componenti lo sono, ossia se ogni  $X_\lambda$  è proiettivo.

2.  $M$  è piatto se e solo se  $\forall f : N \rightarrow P$  iniettivo in  $A\text{-Mod}$ ,  $f_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A P$  è iniettivo in  $\mathbf{Ab}$ . Poiché  $- \otimes_A N$  preserva i coprodotti,  $M \otimes_A N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes N$ . Allora

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes_A N & \xrightarrow{f_*} & M \otimes_A P \\
\parallel & & \parallel \\
\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes_A N & \xrightarrow{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f_*} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes_A P
\end{array}$$

ma ora  $f_*$  è iniettivo  $\iff$  se  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f_*$  è iniettivo  $\iff$  ogni componente di  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f_*$  è iniettiva  $\iff$  ogni  $M_\lambda$  è piatto.

□

### Corollario 296.

1. Un  $A$ -modulo è proiettivo se e solo se è addendo diretto di un modulo libero.
2. Ogni modulo proiettivo è piatto.

*Dimostrazione.*  $A \in A\text{-Mod}$  è proiettivo e piatto perché  $\text{Hom}_A(A, -) : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  è isomorfo al funtore dimenticante, e dunque è esatto. Analogamente  $- \otimes_A A : \text{Mod-}A \rightarrow \mathbf{Ab}$  è isomorfo al funtore dimenticante e dunque è esatto.

Sia  $\mathcal{P}$  una collezione di oggetti (chiusa per isomorfismi) di  $A\text{-Mod}$  tale che  $A \in \mathcal{P}$  e tali che se  $M_\lambda \in A\text{-Mod}$  (con  $\lambda \in \Lambda$ ), si ha che

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \in \mathcal{P} \iff M_\lambda \in \mathcal{P} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Allora ogni  $M$  addendo diretto di un modulo libero è tale che  $M \in \mathcal{P}$ . Infatti in tal caso  $\exists N \in A\text{-Mod}$  tale che  $M \oplus N$  è libero, dunque  $M \oplus N \cong A^{(\Lambda)}$  per qualche  $\Lambda$ , e dunque  $A \in \mathcal{P} \implies A^{(\Lambda)} \in \mathcal{P} \implies M \oplus N \in \mathcal{P} \implies M \in \mathcal{P}$ , quindi sia i proiettivi che i piatti contengono gli addendi diretti dei moduli liberi.

Per concludere basta dimostrare che se  $M \in A\text{-Mod}$  è proiettivo, allora è addendo diretto di un modulo libero. Questo è vero perché  $\exists L \in A\text{-Mod}$  libero, e  $N \subseteq L$  sottomodulo tale che  $M \cong L/M$ , cioè esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$$

ma poiché  $M$  è proiettivo la successione si spezza, e dunque  $L \cong M \oplus N$

□

**Esempio 297.** Sia  $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  (semisemplice), allora  $\langle \bar{2} \rangle$  è un  $A$ -modulo proiettivo non libero.

**Esempio 298.** Sia  $A$  un dominio d'integrità che non sia un campo, sia  $0 \neq a \in A \setminus A^*$ . Allora  $A/(a)$  come  $A$ -modulo non è piatto, infatti  $A \rightarrow A; b \mapsto ab$  è omomorfismo iniettivo in  $A\text{-Mod}$  tale che

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes_A A/(a) & \xrightarrow{\varphi_{a*}} & A \otimes_A A/(a) \\
\parallel & & \parallel \\
A/(a) & \xrightarrow{0} & A/(a)
\end{array}$$

dove chiaramente  $0 : x \mapsto ax$  in  $A/(a)$  non è iniettivo.

**Proposizione 299.**  $M \in A\text{-Mod}$  è iniettivo se solo se per ogni  $I \subseteq A$  ideale sinistro  $\forall g : I \rightarrow M$   $A$ -lineare,  $\exists x \in M$  tale che  $g(a) = ax$  per ogni  $a \in I$ .

*Dimostrazione.*

$$\implies \text{Poiché } M \text{ è iniettivo, } \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad} & A \\ g \downarrow & \swarrow g' & \text{commuta, ossia esiste } g' : A \rightarrow M \\ M & & \end{array}$$

$A$ -lineare tale che  $g'|_I = g$ . Allora  $x := g'(1)$  e abbiamo che  $ax = g'(a) = g(a)$  per ogni  $a \in I$ .

$\Leftarrow$  Dato  $N_0 \subseteq N$  sottomodulo e  $f_0 : N_0 \rightarrow M$   $A$ -lineare, basta dimostrare che  $\exists f : N \rightarrow M$   $A$ -lineare tale che  $f|_{N_0} = f_0$ .

Sia ora

$$U := \{(N', f') | N_0 \subseteq N' \subseteq N \text{ sottomodulo e } f' : N' \rightarrow M \text{ è } A\text{-lineare ed è t.c. } f'|_{N_0} = f_0\}$$

Dove  $U$  è ordinato da  $(N', f') \leq (N'', f'') \iff N' \subseteq N''$  e  $f''|_{N'} = f'$ . Inoltre  $(N_0, f_0) \in U$  che dunque non è vuoto. Inoltre ogni catena  $(N_\lambda, f_\lambda)$  in  $U$  (per  $\lambda \in \Lambda$ ) ha un maggiorante  $N' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ ,  $f'$  tale che  $f'|_{N_\lambda} = f_\lambda$ .

Allora ci sono le ipotesi del lemma di Zorn, per cui esiste un elemento massimale  $(N_1, f_1) \in U$ . Ora dobbiamo solo dimostrare che  $N_1 = N$ . Supponiamo per assurdo che  $N_1 \subsetneq N$ . Allora  $\exists y \in N \setminus N_1$ . Sia ora  $I = \{a \in A : ay \in N_1\} \subseteq A$  ideale sinistro.  $g : I \rightarrow M$  data da  $a \mapsto f_1(ay)$  è  $A$ -lineare e per ipotesi  $\exists x \in M$  tale che  $f_1(ay) = g(a) = ax$  per ogni  $a \in I$ . Allora possiamo definire  $N_2 := N_1 + Ay$  e  $f_2 : N_2 \rightarrow M$  data da  $y_1 + ay \mapsto f_1(y_1) + ax$  che è ben definita (lasciato per esercizio),  $A$ -lineare, e  $(N_1, f_1) \not\leq (N_2, f_2)$ , che è assurdo.

□

### 3.1.1 Moduli divisibili e senza torsione

#### Definizione 300: Modulo divisibile

Sia  $A$  un dominio d'integrità,  $M \in A\text{-Mod}$ . Allora  $M$  è *divisibile* se  $\forall x \in M$  e  $\forall 0 \neq a \in A$ , allora  $\exists y \in M$  tale che  $x = ay$

*Osservazione.* Un modulo  $M$  è divisibile se e solo se  $\forall 0 \neq a \in A$  la funzione  $M \rightarrow M$  definita da  $x \mapsto ax$  è suriettiva. Analogamente  $M$  è senza torsione se e solo se tale funzione è iniettiva.

*Osservazione.* Se  $M$  è divisibile e  $M' \subseteq M$  sottomodulo, allora  $M/M'$  è ancora divisibile.

**Esempio 301.** Il campo dei quozienti  $Q(A)$  è divisibile in  $A\text{-Mod}$ . Di conseguenza anche  $Q(A)/A$  è divisibile.

**Proposizione 302.** Sia  $A$  un dominio d'integrità e  $M \in A\text{-Mod}$ . Allora se  $M$  è iniettivo, allora  $M$  è divisibile. Inoltre se  $A$  è PID vale anche l'altra implicazione.

*Dimostrazione.*  $M$  è iniettivo se e solo se  $\forall I \subseteq A$  ideale e  $\forall g : I \rightarrow M$   $A$ -lineare, allora  $\exists x \in M$  tale che  $g(a) = ax$  per ogni  $a \in I$ .

$M$  è d'altra parte divisibile se e solo se  $\forall 0 \neq I \subseteq A$  ideale **principale** e  $\forall g : I \rightarrow M$   $A$ -lineare, allora  $\exists x \in M$  tale che  $g(a) = ax$  per ogni  $a \in I$ . Questa definizione

equivalente vale perché in tal modo  $I = (b)$ , con  $0 \neq b \in A$ , allora  $I \cong A$  in  $A\text{-Mod}$ , quindi  $g : I \rightarrow M$   $A$ -lineare è determinata da  $g(b) = y \in M$ . Allora chiedere l'esistenza dell' $x$  di cui sopra equivale a dire che  $\exists x \in M$  tale che  $g(ab) = abx$  per ogni  $ab \in I$ , ossia  $y = bx$ .

La proposizione segue ovviamente dalla similarità delle due caratterizzazioni.  $\square$

### Definizione 303: Avere abbastanza iniettivi o proiettivi

Una categoria abeliana  $\mathcal{A}$  ha abbastanza iniettivi se  $\forall X \in \mathcal{A} \exists X \rightarrowtail Y$  mono con  $Y$  iniettivo.

Dualmente  $\mathcal{A}$  ha abbastanza proiettivi se  $\mathcal{A}^{op}$  ha abbastanza iniettivi, cioè se  $\forall X \in \mathcal{A} \exists Y \twoheadrightarrow X$  epi (di  $\mathcal{A}$ ) con  $Y$  proiettivo (in  $\mathcal{A}$ ).

**Esempio 304.**  $A\text{-Mod}$  ha abbastanza proiettivi perché ogni modulo è quoziante di un modulo libero, e i moduli liberi sono proiettivi.

**Proposizione 305.** Sia  $f : A \rightarrow B$  un omomorfismo di anelli. Se  $A\text{-Mod}$  ha abbastanza iniettivi, allora  $B\text{-Mod}$  ha abbastanza iniettivi.

*Dimostrazione.* Sia  $N \in B\text{-Mod}$ . Per ipotesi  $\exists i : f^*(N) \rightarrowtail M$  mono in  $A\text{-Mod}$  con  $M$  iniettivo. Sappiamo che  $f^* \dashv f_* = \text{Hom}_A(B, -)$ . Allora  $f_*$  è esatto a sinistra e dunque  $f_*(i)$  è mono. Sia  $\eta : \text{id}_{B\text{-Mod}} \rightarrow f_* \circ f^*$  unità dell'aggiunzione. Allora  $\eta_N : N \rightarrow f_*(f^*(N)) = \text{Hom}_A(B, N)$ . Viene lasciato in esercizio mostrare che effettivamente tale mappa è  $y \mapsto (b \mapsto by)$ .

Se  $y \in \text{Ker}(\eta_N)$  allora  $\eta_N(y)(1) = 0$ , quindi  $\eta_N$  è iniettiva, allora

$$N \xrightarrow{\eta_N} f_*(f^*(N)) \xrightarrow{f_*(i)} f_*(M)$$

dunque basta dimostrare che  $f_*(M)$  è iniettivo, cioè  $\text{Hom}_B(-, f_*(M)) \cong \text{Hom}_A(f^*(-), M)$  è esatto. Questo è vero poiché sono esatti sia  $f^*$  che  $\text{Hom}_A(-, M)$ .  $\square$

**Proposizione 306.**  $\text{Ab} \cong \mathbb{Z}\text{-Mod}$  ha abbastanza iniettivi.

**Corollario 307.** Per ogni anello  $A$ ,  $A\text{-Mod}$  ha abbastanza iniettivi.

*Dimostrazione.* Per la proposizione 302,  $G$  è iniettivo se e solo se è divisibile (perché  $\mathbb{Z}$  è PID). So che  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \in \text{Ab}$  è divisibile (e allora anche  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}^\Lambda$  lo è per ogni  $\Lambda$ ) allora per ogni  $0 \neq a \in G$ , voglio trovare  $f_a : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  è omomorfismo tale che  $f_a(a) \neq 0$ . A questo punto si può definire

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{G \setminus \{0\}} \\ b &\longmapsto f(b) = (a \mapsto f_a(b)) \end{aligned}$$

omomorfismo iniettivo. Per trovare tale  $f_a$  considero  $\langle a \rangle \hookrightarrow G$ . Esiste  $g_a : \langle a \rangle \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  omomorfismo tale che  $g_a(a) \neq 0$ . Allora poiché  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  è iniettivo esiste  $f_a : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  tale che  $f_a|_{\langle a \rangle} = g_a$ .  $\square$

*Osservazione.*  $\text{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \text{Ab}^{op} \rightarrow \text{Ab}$  è esatto (poiché  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  è iniettivo) e fedele.

Infatti, dato  $f : G \rightarrow G'$  in  $\text{Ab}$  tale che  $\widehat{f} = f^* : \widehat{G}' := \text{Hom}(G', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = G$ , allora se  $\widehat{f} = 0$ , segue che  $f = 0$ . Infatti,  $\forall h \in \widehat{G}'$ ,  $f^*(h) = h \circ f = 0$ . Allora se  $\exists a \in G : f(a) = a' \neq 0$  allora posso prendere una  $h \in \widehat{G}'$  (la  $f_{a'}$  della dimostrazione sopra) tale che  $h(a') = h(f(a)) \neq 0$ . Allora necessariamente  $f = 0$ .

**Proposizione 308.** Le seguenti condizioni sono equivalenti

i)  $M \in \text{Mod} - A$  è piatto

ii)  $\widehat{M} \in A\text{-Mod}$  è iniettivo

iii)  $\forall I \subseteq A$  ideale sinistro,  $M \otimes_A I \rightarrow M$  dato da  $x \otimes a \mapsto xa$  è iniettivo.

*Dimostrazione.*  $M$  è piatto se e solo se  $\forall f : N \rightarrow P$  mono in  $A\text{-Mod}$ ,  $f_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A P$  è iniettivo in  $\text{Ab}$ . Questo è equivalente a dire che  $\widehat{f}_* : \widehat{M \otimes_A P} \rightarrow \widehat{M \otimes_A N}$  è suriettivo, dove  $\widehat{M \otimes_A P} = \text{Hom}(M \otimes_A P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}_A(P, \widehat{M})$  e  $\widehat{M \otimes_A N} \cong \text{Hom}_A(N, \widehat{M})$ . Ma questo è equivalente a dire che  $\widehat{m}$  è iniettivo in  $A\text{-Mod}$ .

Per iii) basta considerare  $f : I \rightarrow A$  inclusione, con  $I$  ideale sinistro.  $\square$

## Capitolo 4

# Algebra Omologica

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria preadditiva, e  $C(\mathcal{A})$  la categoria dei complessi. Siano  $X^\cdot$  e  $Y^\cdot \in C(\mathcal{A})$ . Allora dati  $\kappa^i \in \mathcal{A}(X^i, Y^{i-1})$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$

$$\text{sono arrivati in ritardo} \quad (4.0.1)$$

### Definizione 309: Omotopia

Sia  $f^\bullet \in C(\mathcal{A})(X^\cdot, Y^\cdot)$  è *omotopo a 0* se  $\exists k^i \in \mathcal{A}(X^i, Y^{i-1})$  tale che vale (4.0.1).  $f^\bullet$  e  $g^\bullet \in C(\mathcal{A})(X^\bullet, Y^\bullet)$  sono *omotopi* (denotato con  $f^\bullet \sim g^\bullet$ ) se  $f^\bullet - g^\bullet$  è omotopo a 0.

*Osservazione.*  $\text{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet) := \{f^\bullet \in C(\mathcal{A})(X^\bullet, Y^\bullet) | f^\bullet \sim 0\}$

Come conseguenza si ottiene una categoria preadditiva  $K(\mathcal{A}) := C(\mathcal{A})/\text{Htp}$  (categoria *omotopa* di  $\mathcal{A}$ ) con funtore additivo  $Q = Q_{\mathcal{A}} : C(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$  tale che  $X^\bullet \mapsto X^\bullet$  e  $f^\bullet \mapsto [f^\bullet]$

*Osservazione.* Si dimostra che se  $\mathcal{A}$  è abeliana, allora

$$\mathcal{A} \text{ è semisemplice} \iff K(\mathcal{A}) \text{ è abeliana} \iff K(\mathcal{A}) \text{ è preabeliana}$$

*Osservazione.* Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo tra categorie preadditive. Allora  $F$  induce funtori  $C(F) : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{B})$  e  $K(F) : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$  tali che, per ogni  $X \in C(\mathcal{A})$ ,  $C(F)(X^\bullet) = K(F)(X^\bullet) =$

$$= \left( \cdots \rightarrow F(X^{i-1}) \xrightarrow{F(d^{i-1})} F(X^i) \xrightarrow{F(d^i)} F(X^{i+1}) \right)$$

e per funtorialità  $F(d^i) \circ F(d^{i-1}) = F(d^i \circ F^{i-1}) = F(0) = 0$  perché è additivo.

E esplicitamente  $\forall f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ,  $C(F)(f^\bullet)^i := F(f^i)$  e  $K(F)([f^\bullet]) := [C(F)(f^\bullet)]$  (mostrare per esercizio che è sempre ben definito). Di solito si scrive direttamente  $F$  invece di  $C(F)$  o  $K(F)$

**Lemma 310.** *Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana. Sia  $f^\bullet \in \text{Htp}(X^\bullet, Y^\bullet)$ . Allora  $H^i(f^\bullet) = 0$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$*

*Dimostrazione.*  $f^i = d_{Y^\bullet}^{i-1} \circ k^i + k^{i+1} \circ d_{X^\bullet}^i$ . Osservando il diagramma a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im}(d_{X^\bullet}^{i-1}) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{X^\bullet}^i) & \longrightarrow & H^i(X^\bullet) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow I^i(f^\bullet) & & \downarrow K^i(f^\bullet) & & \downarrow H^i(f^\bullet) \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}(d_{Y^\bullet}^{i-1}) & \longrightarrow & \text{Ker}(d_{Y^\bullet}^i) & \longrightarrow & H^i(Y^\bullet) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ma allora  $H^i(f^\bullet) = 0 \iff K^i(f^\bullet)$  fattorizza attraverso  $I^i(Y^\bullet) \rightarrow K^i(Y^\bullet)$  se e solo se  $\text{Im}(K^i(f^\bullet)) \subseteq \text{Im}(d_{Y^\bullet}^{i-1})$ . Allora  $K^i(f^\bullet)$  è indotto da  $f^i$ , quindi da  $d_{Y^\bullet}^{i-1} \circ K^i$  (perché  $d_X^i$  è 0 su  $K^i(f^\bullet)$ ).  $\square$

**Corollario 311.** *Sia  $\mathcal{A}$  abeliana. Allora  $\forall i \in \mathbb{Z}$  il funtore  $H^i : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  induce un funtore additivo  $H^i : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$*

### Definizione 312: Risoluzione

Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana. Una *risoluzione a sinistra/destra* di un oggetto  $X \in \mathcal{A}$  è una successione esatta

$$\dots \rightarrow X^{-2} \rightarrow X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow X \rightarrow 0/0 \rightarrow X \rightarrow X^0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots$$

(di solito si scrive  $\dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X \rightarrow 0$  nel caso di risoluzione sinistra). Inoltre una tale soluzione ha *lunghezza*  $n$  se (ad esempio nel caso di risoluzione destra)

$$X^n \neq 0 \text{ e } (X^i = 0) \quad \forall i > n$$

Se tale  $n$  non esiste si dice che la lunghezza è  $\infty$

Esistono diversi tipo di risoluzione a seconda del tipo di problemi che si sta affrontando. Per i nostri scopi vedremo di studiare gli oggetti iniettivi e suriettivi.

### Definizione 313

Una risoluzione *proiettiva/iniettiva* di  $X \in \mathcal{A}$  è una risoluzione *sinistra/destra con  $X_i$  proiettivo / con  $X^i$  iniettivo* per ogni  $i \in \mathbb{N}$ .

**Proposizione 314.** *Ogni  $X \in \mathcal{A}$  ha una risoluzione proiettiva/iniettiva se e solo se  $\mathcal{A}$  ha abbastanza proiettivi/iniettivi.*

*Dimostrazione.*

$\implies$  ovvio.

$\impliedby$   $\exists d^0 : X^0 \rightarrow X$  epimorfismo, con  $X^0$  proiettivo. Allora  $\exists \tilde{d}^1 : X^1 \rightarrow \text{Ker}(d^0)$  epi con  $X^1$  proiettivo. Allora  $d^1 := \text{Ker}(d^0) \circ \tilde{d}^1 : X^1 \rightarrow X^0$  e si può proseguire per induzione.  $\square$

**Proposizione 315.** *Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana e sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo di  $\mathcal{A}$ . E siano*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{s} & X^0 & \xrightarrow{d^0} & X^1 & \xrightarrow{d^1} \dots \text{ risoluzione di } X \\ & & f \downarrow & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{t} & I^0 & \xrightarrow{\ell^0} & I^1 & \xrightarrow{\ell^1} \dots \text{ complesso con ogni } I^i \text{ iniettivo} \end{array}$$

*Si denoti inoltre  $X^\bullet := (0 \rightarrow X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \rightarrow \dots)$  e  $I^\bullet := (0 \rightarrow I^0 \xrightarrow{\ell^0} I^1 \rightarrow \dots)$ . Allora*

1)  $\exists f : X^\bullet \rightarrow I^\bullet$  in  $C(\mathcal{A})$  che estende  $f$ , cioè  $f^0 \circ s = t \circ f$

2)  $[f^\bullet]$  è unico in  $K(\mathcal{A})$

*Dimostrazione.* Siano  $\tilde{X}^\bullet$  e  $\tilde{I}^\bullet$  i complessi delle righe del diagramma. In particolare  $\tilde{X}^{-1} = X$ ,  $\tilde{X}^i = X^i$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  e  $\tilde{X}^i = 0$  per ogni  $i < -1$ . Similmente per  $\tilde{I}^\bullet$ . Inoltre si denoti anche  $s = d^{-1}$  e  $t = \ell^{-1}$ .

- 1) Cerco  $\tilde{f}^\bullet : \tilde{X}^\bullet \rightarrow \tilde{I}^\bullet$  in  $C(\mathcal{A})$  tale che  $\tilde{f}^{-1} = f$ . Dato  $n \in \mathbb{N}$  e supponendo di avere già definito  $\tilde{f}^i$  per ogni  $i < n$  tale che  $\tilde{f}^i \circ d^{i-1} = \ell^{i-1} \circ \tilde{f}^{i-1}$  per ogni  $i < n$ .

Cerco ora  $f^n = \tilde{f}^n : X^n \rightarrow I^n$  tale che  $f^n \circ d^{n-1} = \ell^{n-1} \circ \tilde{f}^{n-1}$ .

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X}^{n-2} & \xrightarrow{d^{n-2}} & \tilde{X}^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & \tilde{X}^n = X^n \\ \tilde{f}^{n-1} \downarrow & & \searrow & & \downarrow f^n \\ \tilde{I}^{n-1} & \xrightarrow{\ell^{n-1}} & I^n & & \end{array}$$

è esatto, dunque  $I^n$  è iniettivo. Allora

$$\mathcal{A}(X^n, I^n) \xrightarrow{d^{n-1*}} \mathcal{A}(\tilde{X}^{n-1}, I^n) \xrightarrow{d^{n-2*}} \mathcal{A}(\tilde{X}^{n-2}, I^n)$$

è esatta, e quindi esiste  $f^n \in \mathcal{A}(X^n, I^n)$  tale che

$$\begin{aligned} d^{n-1*}(f^n) &= f^n \circ d^{n-1} = \ell_{n-1} \circ \tilde{f}^{n-1} \iff \\ \iff 0 &= d^{n-2*}(\ell^{n-1} \circ \tilde{f}^{n-1}) = \ell^{n-1} \circ \tilde{f}^{n-1} \circ d^{n-2} = \underbrace{\ell^{n-1} \circ \ell^{n-2}}_0 \circ \tilde{f}^{n-2} \end{aligned}$$

- 2) Dati  $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow I$  che estendono  $f$ , devo dimostrare che  $f^\bullet \sim g^\bullet$ . Basta allora dimostrarre che dato  $h^\bullet : X^\bullet \rightarrow I^\bullet$  che estende  $0 : X \rightarrow Y$ , allora  $h^\bullet \sim 0$ . A tale scopo, sia  $\tilde{h}^\bullet : \tilde{X}^\bullet \rightarrow \tilde{I}^\bullet$  dato da  $\tilde{h}^i := h^i, \forall i \in \mathbb{N}$  e  $\tilde{h}^i := 0, \forall i < 0$ . Allora  $\tilde{h}^\bullet$  è un morfismo in  $C(\mathcal{A})$ . Voglio dunque dimostrare che  $\exists k^i : \tilde{X}^i \rightarrow \tilde{I}^{i-1}$  tale che

$$\tilde{h}^i = \ell^{i-1} \circ k^i + k^{i+1} \circ d^i \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \text{ con } k^0 = 0 \quad (4.0.2)$$

(infatti da questo seguirebbe che  $\tilde{h}^\bullet \sim 0$  e  $h^\bullet \sim 0$ ).

Dato  $n \in \mathbb{N}$  e assumendo di avere già definito  $k^i$  per ogni  $i \leq n$  tale che (4.0.2) valga per ogni  $i < n$ . Cerco allora  $k^{n+1} : X^{n+1} \rightarrow I^n$  tale che valga (4.0.2) per  $i = n$ . Allora il seguente diagramma con prima riga esatta commuta:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X}^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1} \\ h^n - \ell^{n-1} \circ k^n \downarrow & & \swarrow & & \downarrow k^{n+1} \\ I^n & & & & \end{array}$$

e come prima dunque  $\exists k^{n+1}$  tale che valga (4.0.2) per  $i = n$  se e solo se

$$\begin{aligned} 0 &= \ell^{n-1} \circ k^n \circ d^{n-1} = \ell^{n-1} \circ (\tilde{h}^{n-1} - \ell^{n-2} \circ k^{n-1}) = \\ &= \tilde{h}^n \circ d^{n-1} - \ell^{n-1} \circ \tilde{h}^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

□

**Corollario 316.** Una risoluzione iniettiva di  $X \in \mathcal{A}$  categoria abeliana (se esiste) è unica a meno di isomorfismo in  $K(\mathcal{A})$ .

*Dimostrazione.* Siano  $0 \rightarrow X \rightarrow I^\bullet$  e  $0 \rightarrow X \rightarrow J^\bullet$  risoluzioni iniettive di  $X$ . Allora applico la proposizione 315 con  $f = 1_X$ , dunque  $\exists f^\bullet : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$  che estende  $1_X$ . Analogamente  $\exists g^\bullet : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$  che estende  $1_X$ . Segue che anche  $g^\bullet \circ f^\bullet : I^\bullet \rightarrow I^\bullet$  estende  $1_X$ , ma anche  $1_{I^\bullet}$  estende  $1_X$ , da cui  $g^\bullet \circ f^\bullet \sim 1_{I^\bullet}$  e analogamente  $f^\bullet \circ g^\bullet \sim 1_{J^\bullet}$  da cui  $[f^\bullet]$  è isomorfismo. □

**Corollario 317.** Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana con abbastanza iniettivi. Allora c'è un funtore "risoluzione iniettiva"  $I_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow K(\mathcal{A})$  tale che  $I_{\mathcal{A}}(X) := I^{\bullet}$  e  $0 \rightarrow X \rightarrow I^{\bullet}$  è una risoluzione iniettiva (AoC per poterla scegliere per ogni  $X \in \mathcal{A}$ ).

Inoltre  $\forall f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{A}$ ,  $I_{\mathcal{A}}(f) := [f^{\bullet}]$  con  $f^{\bullet}$  che estende  $f$ . Si ottiene dunque un funtore (esercizio) la cui classe di isomorfismo non dipende dalle scelte.

### Teorema 318

Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo tra categorie abeliane. Se  $\mathcal{A}$  ha abbastanza iniettivi allora

$$R^i F : \mathcal{A} \xrightarrow{I_{\mathcal{A}}} K(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} K(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^i} \mathcal{B} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e ogni successione esatta  $\Sigma : 0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$  induce una successione esatta in  $\mathcal{B}$

$$0 \rightarrow R^0 F(X) \xrightarrow{R^0 F(f)} R^0 F(Y) \xrightarrow{R^0 F(g)} R^0 F(Z) \xrightarrow{w^0} R^1 F(X) \xrightarrow{R^1 F(f)} \dots$$

**Corollario 319.** 1.  $R^i F$  è esatto al centro  $\forall i \in \mathbb{N}$  e  $R^0 F$  è esatto a sinistra

2.  $R^0 F \cong F \iff F$  è esatto a sinistra

3.  $F$  è esatto se e solo se  $R^0 F \cong F$  e  $R^i F \cong 0$ , ossia  $R^0 F \cong F$  e  $R^1 F \cong 0$

*Dimostrazione.* 1. Chiaro

2. Un'implicazione ( $\Rightarrow$ ) è una diretta conseguenza di 1. Per  $\iff$  invece, sia  $X \in \mathcal{A}$  e sia  $0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \rightarrow \dots$  una risoluzione iniettiva di  $X$ . Allora

$$\begin{aligned} R^0 F(X) &= H^0(F(I^{\bullet})) = H^0(0 \rightarrow F(I^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I^1) \rightarrow \dots) \cong \\ &\cong \text{Ker}(F(d^0)) \xrightarrow[F \text{ esatto a sx}]{\cong} F(\text{Ker}(d^0)) \cong F(X) \end{aligned}$$

3. Se  $R^0 F \cong F$  e  $R^i F \cong 0$  per ogni  $i > 0$ , allora  $R^0 F \cong F$  e  $R^1 F \cong 0$ . Adesso, per il punto 2  $F$  è esatto a sinistra e anche a destra (poiché  $R^1 F \cong 0$ ). Resta da dimostrare che se  $F$  è esatto, allora  $R^i F \cong 0$  per ogni  $i > 0$ . Ma effettivamente abbiamo che

$$R^i F(X) = H^i(F(I^{\bullet})) = 0 \quad \forall i > 0$$

poiché  $F$  è esatto e  $0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$  è esatta, per cui anche la successione  $0 \rightarrow F(X) \rightarrow F(I^0) \rightarrow F(I^1) \rightarrow \dots$  è esatta.  $\square$

*Osservazione.* I funtori derivati destri sono interessanti solo per funtori esatti a sinistra (ma non a destra)

### Definizione 320: Funtore derivato sinistro

Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtore additivo, con  $\mathcal{A}$  con abbastanza proiettivi. Allora i funtori derivati sinistri di  $F$  sono  $L_i F := (R^i F^{op})^{op}$ .

In altre parole,  $\forall X \in \mathcal{A}$ , presa  $p_{\bullet} \rightarrow X \rightarrow 0$  una risoluzione proiettiva di  $X$  (con  $p_{\bullet} = \dots \rightarrow p_1 \rightarrow p_0 \rightarrow 0$  e

$$L_i F(X) := H_i(F(p_{\bullet})) = H_i(\dots \rightarrow F(p_1) \rightarrow F(p_0) \rightarrow 0)$$

Il teorema 4 diventa: ogni  $\Sigma : 0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$  in  $\mathcal{A}$  induce una successione esatta in  $\mathcal{B}$ , data da

$$\dots \rightarrow l_1 F(Z) \xrightarrow{w_0} L_0 F(X) \xrightarrow{L_0 F(f)} L_0 F(Y) \xrightarrow{L_0 F(g)} L_0 F(Z) \rightarrow 0$$

e il corollario diventa che  $L \circ F$  è esatto a destra, e  $L \circ F \cong F$  se e solo se  $F$  è esatto a destra.

*Osservazione.* Se abbiamo  $F : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}$  additivo, con  $\mathcal{A}$  con abbastanza proiettivi, allora gli  $R^i F$  si calcolano con le risoluzioni proiettive in  $\mathcal{A}$ , ossia  $\forall X \in \mathcal{A}, R^i F(X) = H^i(F(p_\bullet))$  con  $p_\bullet : X \rightarrow 0$  risoluzione proiettiva.

Preso dunque  $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  esatta in  $\mathcal{A}$ , questa induce  $0 \rightarrow R^0 F(Z) \rightarrow R^0 F(Y) \rightarrow R^0 F(X) \rightarrow R^1 F(Z) \rightarrow \dots$  esatta in  $\mathcal{B}$ .

*Osservazione.* Sia  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  additivo, con  $\mathcal{A}$  con abbastanza iniettivi. Se ho un diagramma commutativo a righe esatte in  $\mathcal{A}$  del tipo

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma : & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} Z & \longrightarrow 0 \\ & & & x \downarrow & & y \downarrow & & z \downarrow \\ \Sigma' : & 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} Z' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

allora il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & R^i F(X) & \xrightarrow{R^i F(f)} & R^i F(Y) & \xrightarrow{f} & R^i F(Z) & \xrightarrow{g} R(i+1)F(X) & \longrightarrow \dots \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & R^i F(X') & \xrightarrow{R^i F(f')} & R^i F(Y') & \xrightarrow{f'} & R^i F(Z') & \xrightarrow{g'} R^{i+1} F(X') & \longrightarrow \dots \\ & & & & & & & & \end{array}$$

Inoltre Se  $F, F' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sono funtori additivi, con  $\mathcal{A}$  con abbastanza iniettivi e  $\alpha : F \rightarrow F'$  una trasformazione naturale, allora  $\alpha$  induce  $C(\alpha) : C(F) \rightarrow C(F')$  ( $C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{B})$ ) data da  $C(\alpha)_X : C(F)(X^\bullet) \rightarrow C(F)(Y^\bullet)$  definita nel modo ovvio. Si scrive per brevità  $\alpha$  al posto di  $C(\alpha)$ . Analogamente  $\alpha$  al posto di  $K(\alpha)$  definita nello stesso modo. Allora  $\alpha$  induce  $H^i \circ \alpha \circ I_{\mathcal{A}}$ ,  $H^i \circ F \circ I_{\mathcal{A}} = R^i F \rightarrow R^i F'$  trasformazione naturale, per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . In altre parole, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & R^i F(X) & \xrightarrow{R^i F(f)} & R^i F(Y) & \xrightarrow{f} & R^i F(Z) & \xrightarrow{g} R(i+1)F(X) & \longrightarrow \dots \\ & & & (R^i \alpha)_X \downarrow & & x \downarrow & & & \\ & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & R^i F(X') & \xrightarrow{R^i F(f')} & R^i F(Y') & \xrightarrow{f'} & R^i F(Z') & \xrightarrow{g'} R^{i+1} F(X') & \longrightarrow \dots \\ & & & & & & & & \end{array}$$

**Esempio 321.** Sia  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana,  $X \in \mathcal{A}$ . Allora i funtori  $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ ,  $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \text{Ab}$  sono esatti a sinistra. Se  $\mathcal{A}$  ha abbastanza iniettivi si indica con

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, -) := R^i(\mathcal{A})(X, -)$$

e per ogni successione esatta in  $\mathcal{A}$ ,  $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y'' \rightarrow 0$  ottengo una successione esatta in  $\text{Ab}$ ,

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y') \xrightarrow{f_*} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) \xrightarrow{g_*} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y'') \xrightarrow{w^i} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(X, Y'')$$

con  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, -) \cong \mathcal{A}(X, -) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ .

Se  $\mathcal{A}$  ha abbastanza proiettivi indichiamo con  $\overline{\text{Ext}}_{\mathcal{A}}^i(-, X) = R^i(\mathcal{A})(-, X)$ . Esplicitamente se  $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y'' \rightarrow 0$  è una successione esatta in  $\mathcal{A}$ , allora essa induce la successione esatta

$$\dots \rightarrow \overline{\text{Ext}}_{\mathcal{A}}^i(Y'', X) \xrightarrow{g^*} \overline{\text{Ext}}_{\mathcal{A}}^i(Y, X) \xrightarrow{f^*} \overline{\text{Ext}}_{\mathcal{A}}^i(Y'', X) \xrightarrow{\overline{w}^i} \overline{\text{Ext}}_{\mathcal{A}}^{i+1}(Y'', X) \rightarrow \dots$$

Se  $\mathcal{A} = A-\text{Mod}$  scrivo  $\text{Ext}_A^i$  e  $\overline{\text{Ext}}_A^i$  invece del più pedante  $\text{Ext}_{A-\text{Mod}}^i$  e  $\overline{\text{Ext}}_{A-\text{Mod}}^i$ .

Inoltre,  $\forall M \in \text{Mod-}A$ ,  $M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$  è esatto a destra. Allora si indica  $\text{Tor}_i^A(M, -) := L_i(M \otimes_A -)$  e per ogni  $0 \rightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$  esatta in  $A\text{-Mod}$ , essa induce

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_i^A(M, N') \xrightarrow{f_*} \text{Tor}_i^A(M, N) \xrightarrow{g_*} \text{Tor}_i^A(M, N'') \rightarrow \dots$$

e il funtore  $\text{Tor}_0(M, -) \cong M \otimes_A -$ .

Dualmente, se  $N \in A\text{-Mod}$ , allora  $- \otimes_A N : \text{Mod-}A \rightarrow \text{Ab}$  è esatto a destra, dunque  $\overline{\text{Tor}}_i^A(-, N) := L_i(- \otimes_A N)$ .

Sia ora  $\mathcal{A}$  una categoria abeliana con abbastanza iniettivi,  $f : X \rightarrow X'$  un morfismo di  $\mathcal{A}$ . Allora  $\forall Y \in \mathcal{A}$ ,  $f^* : \mathcal{A}(X', Y) \rightarrow \mathcal{A}(X, Y)$  definisce una trasformazione naturale  $f^* : \mathcal{A}(X', -) \rightarrow \mathcal{A}(X, -)$  che induce una trasformazione naturale  $R^i f^* =: f^* : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X', -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, -)$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Si ottiene dunque un funtore  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(-, =) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  tale che  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(-, =) \cong \mathcal{A}(-, =)$ .

Analogamente, se  $\mathcal{A}$  ha abbastanza proiettivi, ottengo, per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , un funtore  $\overline{\text{Ext}}_{\mathcal{A}}^i : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  tale che  $\overline{\text{Ext}}_{\mathcal{A}}^0(-, =) \cong \mathcal{A}(-, =)$ .

Analogamente (sorry se qui noi si continua a fare analogie), per ogni anello  $A$  si ottengono funtori  $\text{Tor}_i^A(-, =)$ ,  $\overline{\text{Tor}}_i^A(-, =) : \text{Mod-}A \times A\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$  tali che  $\text{Tor}_0^A(-, =) \cong \overline{\text{Tor}}_0^A(-, =) \cong - \otimes_A -$ .

**Proposizione 322.** *Siano  $F, F', F'' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  funtori additivi,  $\mathcal{A}$  con abbastanza iniettivi,  $F' \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} F''$  trasformazioni naturali tali che  $\forall I \in \mathcal{A}$  iniettivo, la successione  $0 \rightarrow F'(I) \xrightarrow{\alpha_I} F(I) \xrightarrow{\beta_I} F''(I) \rightarrow 0$  è esatta in  $\mathcal{B}$ ...*

Allora, per ogni  $X \in \mathcal{A}$ , la seguente successione è esatta in  $\mathcal{B}$ :

$$\dots \rightarrow R^i F'(X) \xrightarrow{(R^i \alpha)_X} R^i F(X) \xrightarrow{(R^i \beta)_X} R^i F''(X) \rightarrow R^{i+1} F''(X) \rightarrow \dots$$

*Dimostrazione.*  $0 \rightarrow X \rightarrow I^\bullet$  è una risoluzione iniettiva di  $X$ . Allora  $R^i F^{(')}(X) := H^i(F^{(')}(I^\bullet))$ . Allora la successione

$$0 \rightarrow F'(I^\bullet) \xrightarrow{\alpha_{I^\bullet}} F(I^\bullet) \xrightarrow{\beta_{I^\bullet}} F''(I^\bullet) \rightarrow 0$$

è esatta in  $C(\mathcal{B})$  perché per ipotesi  $0 \rightarrow F'(I^n) \xrightarrow{\alpha_{I^n}} F(I^n) \xrightarrow{\beta_{I^n}} F''(I^n)$  lo è in  $\mathcal{B}$  e applico la successione esatta di coomologia.  $\square$

**Corollario 323.** *Sia  $\mathcal{A}$  con abbastanza iniettivi. Una successione  $0 \rightarrow X'' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X' \rightarrow 0$  esatta in  $\mathcal{A}$  induce, per ogni  $Y \in \mathcal{A}$ , la successione esatta in  $\text{Ab}$*

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}^i(X', Y)} \xrightarrow{g^*} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X'', Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(X', Y) \rightarrow \dots$$

e analogamente, partendo dalla successione esatta corta  $0 \rightarrow Y' \rightarrow Y \rightarrow Y'' \rightarrow 0$  esatta in  $\mathcal{A}$ , allora  $\forall X \in \mathcal{A}$  la seguente successione è esatta in  $\text{Ab}$ :