Capitolo 1

Categorie

Definizione 1.0.1: Categoria

Una **categoria** C è data da una classe di oggetti $\text{Ob}(C)$ e $\forall X, Y \in \text{Ob}(C)$ da un insieme di morfismi da X a Y indicato con $\text{Hom}(X,Y) = \text{Hom}_C(X,Y) = C(X,Y)$ e da una azione composizione di morfismi, cioè $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(C)$ (anche scritto $X, Y, Z \in C$) un'operazione

$$C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)(f,g) \qquad \mapsto g \circ f$$

tale che

0. $C(X,Y) \cap C(X',Y') \neq \varnothing \implies X = X'$ e $Y = Y'$

1. $\circ$ è associativa, cioè $\forall X, Y, Z, W \in C$ e $\forall f \in C(X,Y)$ e $\forall g \in C(Y,Z)$ e $\forall h \in C(Z,W)$ allora
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. $\forall X \in C$ esiste $1_X = \text{id}_X \in C(X,X)$ che è eleemento neutro di X cioè $\forall Y \in C$ e $\forall f \in C(X,Y)$,
$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

Esempio 1.0.1. La categoria degli insiemi $\texttt{Set}$ che ha come oggetti tutti gli insiemi e $\forall X, Y \in \texttt{Set}$ i morfismi $\texttt{Set}(X,Y) = \{f : X \to Y\}$ le funzioni e $\circ$ la composizione di funzioni

Osservazione. Se ho C tale che valgano solo 1. e 2. e non necessariamente 0. posso ottenere la categoria C' che soddisfa anche 0. ponendo $\text{Ob}(C') := \text{Ob}(C)$ e

$$C'(X,Y) := \{X\} \times C(X,Y) \times \{Y\}$$

Esempio 1.0.2. Le categorie concrete, in cui gli oggetti sono insiemi con qualche struttura e i morfismi sono funzioni tra insiemi che preservano la struttura (con $\circ$ sempre la composizione di funzioni). In particolare:

- La categoria $\texttt{Grp}$ dei gruppi, dove gli oggetti sono i gruppi e i morfismi gli omomorfismi di gruppi
- La categoria $\texttt{Rng}$ degli anelli
- Dato un anello A, la categoria $\texttt{A} - \texttt{Mod}$ / $\texttt{Mod} - \texttt{A}$ degli A-moduli sinistri / destri

- Dato un anello commutativo A, la categoria $\mathtt{A}-\mathtt{Alg}$ delle A-algebre
- La categoria $\mathtt{Top}$ degli spazi topologici (con funzioni continue come morfismi)

Nota. Dato $f \in C(X,Y)$ si può indicare con $f : X \to Y$ "come fosse una funzione"

Esempio 1.0.3. Le categorie discrete, cioè tali che gli unici morfismi sono 1_X per ogni $X \in C$.

Esempio 1.0.4. C tale che $\forall X, Y \in C$, $\#C(X,Y) = 1$, ottengo una relazione $\preccurlyeq$ su $\mathrm{Ob}(C)$ in cui

$$X \preccurlyeq Y \iff C(X,Y) \neq \varnothing$$

e $\preccurlyeq$ è riflessivo (perché $\exists 1_X \in C(X,X) \forall X \in C$) e transitivo, perché $\exists \circ$. Ne consegue che $\preccurlyeq$ è un *preordine*

Viceversa, data una relazione di preordine $\preccurlyeq$ su un insieme (o una classe) S, ottengo una categoria C con $\mathrm{Ob}(C) := S$ e $\forall X, Y \in S$,

$$C(X,Y) := \begin{cases} \{f_{X,Y}\} & \text{se } X \preccurlyeq Y \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con l'unica composizione possibile

Esempio 1.0.5 (Categoria Vuota)**.** Prendendo $\mathrm{Ob}(C) = \varnothing$

Osservazione. $\forall X \in C$ con C una categoria, $\mathrm{End}_C(X) := C(X,X)$ è un monoide con $\circ$, ne consegue il prossimo esempio

Esempio 1.0.6 (Monoide)**.** Una categoria con un solo oggetto è un monoide. Viceversa ogni monoide può essere visto come categoria di un solo oggetto.

Esempio 1.0.7 (Diagrammi)**.** Possiamo definire categorie date da diagrammi, in cui si rappresentano i morfismi (non l'identità). Ad esempio:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \qquad \bullet \rightrightarrows \bullet \qquad \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

sono tre categorie diverse, rispettivamente con 2, 2, e 3 oggetti

Definizione 1.0.2: Categoria opposta

La **categoria opposta** di C è denotata C^{op} ed è definita da

$$\mathrm{Ob}(C^{op}) := \mathrm{Ob}(C) \quad C^{op}(X,Y) := C(Y,X)$$

con composizione in $\circ^{op}$ data da $f \circ^{op} g := g \circ f$

Osservazione.

$$(C^{op})^{op} = C$$

Esempio 1.0.8 (Categoria Prodotto)**.** Siano C_λ per $\lambda \in \Lambda$ delle categorie. Allora la categoria prodotto

$$C := \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

è definita da

$$\mathrm{Ob}(C) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ob}(C_\lambda)$$
$$C((X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda)$$
$$(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \circ (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} := (g_\lambda \circ f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

Esempio 1.0.9 (Cateogoria Coprodotto)**.** La categoria coprodotto

$$C := \coprod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

è definita con $\mathrm{Ob}(C) := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ob}(C_\lambda)$ l'unione disgiunta.

$$\forall X, Y \in C \quad C(X,Y) := \begin{cases} C_\lambda(X,Y) & \text{se } X, Y \in C_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\circ$ ovvia.

Definizione 1.0.3: Sottocategoria

Sia C una categoria. Allora una sottocategoria C' di C è data da una sottoclasse $\mathrm{Ob}(C') \subseteq \mathrm{Ob}(C)$ e $\forall X, Y \in C'$ da un sottoinsieme $C'(X,Y) \subseteq C(X,Y)$ tale che $\circ$ si restringe a C' e $1_X \in C'(X,X)$ per ogni $X \in C'$.
In particolare C' è una categoria.

Esempio 1.0.10. Se C è un monoide (cateogoria di un oggetto), allora le sottocategorie non vuote di C sono i sottomonoidi.

Definizione 1.0.4: Sottocategoria Piena

Una sottocategoria C' di C si dice **piena** se $C'(X,Y) = C(X,Y)$ per ogni $X, Y \in C'$

Osservazione. Una sottocategoria piena di C equivale a dare una sottoclasse di $\mathrm{Ob}(C)$

Esempio 1.0.11 (Gruppi Abeliani)**.** $\mathtt{Ab} \subseteq \mathtt{Grp}$ sottocategoria piena dei gruppi abeliani. Similmente anche $\mathtt{CRng} \subseteq \mathtt{Rng}$ sottocategoria piena degli anelli commutativi.

Oltre alle sotto-strutture sono anche importanti i quozienti, e anche qui possiamo dare una definizione astratta

Definizione 1.0.5: Congruenza

Una congruenza $\sim$ su una categoria C è data da una relazione di equivalenza $\sim$ su $C(X,Y)$ $\forall X, Y \in C$ tale che

$$\forall X, Y, Z \in C, \forall f, f' \in C(X,Y) \forall g, g' \in C(Y,Z) \quad f \sim f', g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f'$$

equivalentemente $g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f$ e $h \circ g \sim h \circ g'$

Definizione 1.0.6: Quoziente

Sia $\sim$ una congruenza su C, allora possiamo definire la categoria quoziente $C/\sim$ definita da

$$\mathrm{Ob}(C/\sim) = \mathrm{Ob}(C) \quad (C/\sim)(X,Y) := C(X,Y)/\sim \quad \forall X, Y \in C$$

e $\circ$ è indotta da quella di C, ossia

$$\overline{g} \circ \overline{f} := \overline{g \circ f}$$

Esempio 1.0.12 (Omotopia)**.** Sia $C = \texttt{Top}$ e $\sim_h$ l'omotopia, ossia $f, g : X \to Y$ sono omotope se $\exists H : X \times [0,1] \to Y$ continue tali che

$$f(x) = H(x,0), \quad g(x) = H(x,1) \quad \forall x \in X$$

e si ottiene $\texttt{Toph} := \texttt{Top}/\sim_h$

Esempio 1.0.13 (Gruppo quoziente)**.** Sia G un gruppo (visto come monoide, ossia categoria di un oggetto) e sia $H \lhd G$ e $\sim$ su G data da $a \sim b \iff aH = bH$. Allora G/N è la categoria quoziente $G/\sim$. Viceversa ogni $\sim$ congruenza su G si può scrivere in tal modo prendendo $H = \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$ (esercizio).

Definizione 1.0.7: morfismo invertibile

Sia $f : X \to Y$ un morfismo in una categoria C. Allora esso è invertibile a sinistra (destra) se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$).

Osservazione. f è invertibile a sinistra (destra) in C, allora f è invertibile a destra (sinistra) in C^{op}

Definizione 1.0.8: Isomorfismo

$f : X \to Y$ è un **isomorfismo** se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f' = 1_Y$

Osservazione. f è isomorfismo se e solo se f è invertibile a destra e a sinistra.

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ ovvio

$\Longleftarrow$ $\exists f', f''$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f'' = 1_Y$, allora

$$f' \circ (f \circ f'') = f' = f'' = (f' \circ f) \circ f''$$

e dunque f è invertibile.

In particolare dunque la f' della definizione di isomorfismo è unica e viene denotata f^{-1} □

Definizione 1.0.9

Siano $X, Y \in C$. Allora X e Y sono isomorfe ($X \cong Y$) se esiste un $f : X \to Y$ isomorfismo.

Osservazione. 1_X è isomorfismo e $1_X^{-1} = 1_X$. Se f isomorfismo allora f^{-1} isomorfismo e $(f^{-1})^{-1} = f$. Se f, g isomorfismi componibili, allora $g \circ f$ è isomorfismo e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Ne segue che $\cong$ è una relazione di equivalenza su $\mathrm{Ob}(C)$

Definizione 1.0.10

Un morfismo $f : X \to Y$ in C è detto **monomorfismo** se $\forall Z \in C$ la funzione

$$\begin{aligned} f_* : C(Z,X) &\longrightarrow C(Z,Y) \\ g &\longmapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

è iniettiva

Definizione 1.0.11: Epimorfismo

f è un **epimorfismo** in C se è monomorfismo in C^{op}, ossia $\forall Z \in C$ la funzione

$$\begin{aligned} f^* : C(Y,Z) &\longrightarrow C(X,Z) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

è iniettiva.

Proposizione 1.0.1. *f è invertibile a sinistra (destra), allora f è monomorfismo (epimorfismo)*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se f è invertibile a sinistra, allora è mono.

Sappiamo che $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$. Dobbiamo dimostrare che f_* è iniettiva. Siano $g, h \in C(Z, X)$ tali che $f_*(g) = f_*(h)$. Allora $f \circ g = f \circ g$, da cui $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$ e dunque $g = h$ □

Proposizione 1.0.2. *Sia C concreta. Allora*

$$f \textit{ invertibile a sinistra (destra)} \implies f \textit{ iniettiva (suriettiva)} \implies f \textit{ mono (epi)}$$

Dimostrazione. Non possiamo usare il trick della categoria opposta, perché non è detto che C^{op} sia ancora concreta.

Sia f' tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$), allora chiaramente f iniettiva (suriettiva) perché le composizioni 1_X e 1_Y sono biunivoche.

Se f è iniettiva, allora se f è suriettiva, allora □

In generale non vale nessuna delle $\Longleftarrow$.

Esempio 1.0.14. In `Set` se $f : X \to Y$ è suriettiva, allora f è invertibile a sinistra. Infatti basta scegliere (AOC) $f'(y) \in f^{-1}\{y\}$ per ogni $y \in Y$. Inoltre se $X \neq \varnothing$ e $f : X \to Y$ è iniettiva, allora f è invertibile a sinistra.

Esercizio 1.0.1

In $\mathtt{A}-\mathtt{Mod}$, mostrare che $f : M \to N$ iniettiva è invertibile a sinistra se e solo se $\mathrm{Im}(f) \subseteq N$ è addendo diretto.
Mostrare che $f : M \to N$ suriettiva è invertibile a destra se e solo se $\mathrm{Ker}(f) \subseteq M$ è addendo diretto
Concludere che valgono sempre entrambe le implicazioni se e solo se A è semisemplice.

Esempio 1.0.15. In `Set`, se f è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti, poniamo per assurdo $f : X \to Y$ non iniettiva, dunque siano $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$. Allora preso $Z = \{z\}$ e $g, h : Z \to X$ tali che $g(z) = x$ e $h(z) = y$ abbiamo che $f \circ g = f \circ h$ da cui $g = h$ e dunque $x = y$

Supponiamo f non suriettiva, mostrare *per esercizio* $\exists g, h : Y \to Z$ tali che $g \neq h$ ma $g \circ f = h \circ f$

Esempio 1.0.16. In $\mathtt{A}-\mathtt{Mod}$ $f : M \to N$ è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti $i : \mathrm{Ker} f \to M$ inclusione tale che $f \circ i = 0$ e anche $0 : \mathrm{Ker} f \to M$ è tale che $f \circ 0 = 0$. Concludiamo che $i = 0$ e dunque $\mathrm{Ker} f = 0$.

Similmente $\pi : N \to \mathrm{coKer} f$ è tale che $\pi \circ f = 0$ e se f è epi allora $0 = \pi$ e dunque $\mathrm{coKer} f = 0$ e dunque f è suriettiva.

Esempio 1.0.17. In $\texttt{Grp}$ f mono (epi), allora f iniettiva (suriettiva)

Per mono $\implies$ iniettiva si può usare la stessa dei moduli, mentre per l'altra è un po' più complicato, ma si dimostra che è vero lo stesso

Esempio 1.0.18. In $\texttt{Rng}$ $f : A \to B$ mono, allora f iniettiva.

Tuttavia f epi **non implica** f suriettiva. Ad esempio preso $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è epi, infatti $\forall A$ anello esiste al più un omomorfismo $\mathbb{Q} \to A$ ($f : \mathbb{Q} \to A$ sia omomorfismo, allora $f|_{\mathbb{Z}}$ è l'unico omomorfismo e $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$). Chiaramente però non è suriettiva.

Definizione 1.0.12: Funtore

Un funtore $F : C \to D$ tra 2 categorie è dato da una funzione $F : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ e $\forall X, X' \in C$ una funzione $F = F_{X,X'} : C(X, X') \to D(F(X), F(X'))$ tale che

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(se f e g sono componibili in C) e $F(1_X) = 1_{F(X)}$ per ogni $X \in C$

Proposizione 1.0.3. *Sia F un funtore e f invertibile a sinistra (destra). Allora $F(f)$ è invertibile a sinistra (destra)*

Dimostrazione. $\exists f'$ tale che $f' \circ f = 1_X$, allora $F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$. □

Osservazione. Segue che f iso, allora $F(f)$ iso e $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$

Esempio 1.0.19. Sia $C' \subseteq C$ sottocategoria. Allora $C' \to C$, $X \mapsto X$ e $f \mapsto f$ è un funtore

Esempio 1.0.20. Se $\sim$ è una congruenza, allora $C \to C/\sim$ è un funtore, con $X \mapsto X$ e $f \mapsto \overline{f}$

Esempio 1.0.21 (Funtore dimenticante)**.** $C \to \texttt{Set}$ con C categoria discreta e $X \mapsto X$, $f \mapsto f$ è un funtore, che "dimentica" la struttura aggiunta.

Analogamente anche $\texttt{Rng} \to \texttt{Ab}$, con $(A, +, \cdot) \to (A, +)$ è un funtore dimenticante.

Osservazione. Notare che il secondo funtore dimenticante non preserva gli epimorfismi. Sarebbe infatti $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'inclusione è un'epimorfismo in $\texttt{Rng}$ ma non in $\texttt{Ab}$

Esempio 1.0.22. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora la restrizione degli scalare è un funtore $\texttt{B} - \texttt{Mod} \to \texttt{A} - \texttt{Mod}$

Esempio 1.0.23. Funtore tra 2 categorie discrete C e D è una funzione $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$

Esempio 1.0.24. Un funtore tra 2 preordini C e D è una funzione $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ che preserva la relazione di preordine.

Esempio 1.0.25. Un funtore tra 2 monoidi è un omomorfismo di monoidi.

Più in generale dato G un monoide e una categoria C , un funtore $G \to C$ è dato da $X \in C$ e da un omomorfismo di monoidi $G \to \mathrm{End}_C(X)$

Se G è un gruppo un funtore $G \to C$ è dato da $X \in C$ e un omomorfismo di gruppi $G \to \mathrm{Aut}_C(X)$. Ad esempio se $C = \texttt{Set}$ il funtore dà un'azione di un gruppo su un insieme. Similmente se $C = \mathbb{K}$-spazi vettoriali ho una rappresentazione di G.

Esempio 1.0.26 (Funtore costante)**.** Date C, D categorie preso $Y \subseteq D$ si può considerare il funtore costante di valore Y, $C \to D$, $X \mapsto Y$ e $f \mapsto 1_Y$

Esempio 1.0.27. Presa $\texttt{Top}_*$ la categoria degli spazi topologici puntati, il gruppo fondamentale

$$\pi_1 : \texttt{Top}_* \to \texttt{Grp}$$

è un funtore

Esempio 1.0.28. $\forall n \in \mathbb{N}$ ci sono funtori di omologia (singolare)

$$H_n : \texttt{Top} \to \texttt{Ab}$$

Teorema 1.0.4: Omomorfismo

Sia $\sim$ una congruenza su C e $F : C \to D$ un funtore tale che se $f \sim f'$ in C allora $F(f) = F(f')$. Allora esiste un unico funtore $\overline{F} : C/_{\sim} \to D$ tale che $\overline{F}(\overline{f}) = F(f)$ per ogni f morfismo di C

Esempio 1.0.29. Negli esempi precedenti se f e f' sono omotope, allora $\pi_1(f) = \pi_1(f')$ e $H_n(f) = H_n(f')$, dunque inducono funtori

$$\pi_1 : \texttt{Toph}_* \to \texttt{Grp} \quad H_n : \texttt{Toph} \to \texttt{Ab}$$

Nota. I funtori che abbiamo definito si dicono anche funtori covarianti

Definizione 1.0.13: funtore controvariante

Un funtore **controvariante** $C \to D$ è un funtore (covariante) $C^{op} \to D$.

Esempio 1.0.30. $\forall n \in \mathbb{N}$ i funtori di coomologia (singolare) sono funtori controvarianti $H^n : \texttt{Top(h)}^{op} \to \texttt{Ab}$

Esempio 1.0.31. Sia C una categoria, $X \in C$

$$\begin{aligned} &C(X,-) : C \to \texttt{Set} \\ Y \mapsto C(X,Y) \quad &(f : Y \to Y') \mapsto (f_* : C(X,Y) \to C(X,Y')) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad g \mapsto f \circ g \end{aligned}$$

è un funtore perché $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$

Analogamente

$$\begin{aligned} &C(-,Y) : C^{op} \to \texttt{Set} \\ X \mapsto C(X,Y) \quad &(f : X \to X') \mapsto (f^* : C(X',Y) \to C(X,Y)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad g \mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Osservazione. C'è anche un funtore

$$\begin{gathered} C(-,=) : C^{op} \times C \to \texttt{Set} \\ (X,Y) \mapsto C(X,Y) \\ (f : X \to X', g : Y \to Y') \mapsto (f^* : C(X',Y) \to C(X,Y), g_* : C(X,Y) \to C(X,Y')) \end{gathered}$$

Esempio 1.0.32. Per ogni gruppo G, preso il sottogruppo dei commutatori $[G,G]$, allora per ogni $f : G \to H$ omomorfismo di gruppi, $f([G,G]) \subseteq [H,H]$ quindi si ottiene un funtore

$$\begin{gathered} \texttt{Grp} \to \texttt{Grp} \\ G \mapsto [G,G] \\ (f : G \to H) \to (f|_{[G,G]} : [G,G] \to [H,H]) \end{gathered}$$

e anche

$$\begin{aligned} \mathrm{Abel} : \texttt{Grp} &\to \texttt{Ab} \\ G &\mapsto \frac{G}{[G,G]} \text{ (abelianizzato di } G \text{)} \\ (f : G \to H) &\mapsto \left(\overline{f} : \frac{G}{[G,G]} \to \frac{H}{[H,H]} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & H \arrow[d, "q"] \\ \frac{G}{[G,G]} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{H}{[H,H]} \end{tikzcd}$$

Esercizio 1.0.2

Indicando con $Z(X)$ il centro di X,

a. Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Rng} \to \texttt{Rng}$ tale che $\forall A \in \texttt{Rng}$ $F(A) = Z(A)$.

b. Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Grp} \to \texttt{Ab}$ tale che $\forall G \in \texttt{Grp}$ $F(G) = Z(G)$.

Supponiamo l'esistenza di F.

a. Se prendo $i : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$, allora $F(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ e $F(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. A tal punto però $F(i) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ che non esiste perché altrimenti

$$-1 = F(i)(-1) = F(i)(i^2) = F(i)(i)^2$$

b. Consideriamo

$$\{(1), (12)\} \overset{i}{\hookrightarrow} S_3 \overset{\varepsilon}{\to} \{\pm 1\}$$

Allora $\varepsilon \circ i = \mathrm{Id}_{C_2}$. Allora avremmo

$$0_{\mathrm{End}(C_2)} = F(\varepsilon) \circ F(i) = F(\varepsilon \circ i) = F(\mathrm{id}_{C_2}) = \mathrm{id}_{C_2}$$

L'identità

$$\mathrm{id}_C : C \to C \quad X \mapsto X \quad f \mapsto f$$

è un funtore Si possono comporre i funtori. Dati ad esempio

$$C \overset{F}{\to} D \overset{G}{\to} E$$

funtori, possiamo definire $G \circ F : C \to E$ come $X \mapsto G(F(X))$ e $f \mapsto G(F(f))$ è un funtore.

La composizione è associativa e $F \circ \mathrm{id}_C = F = \mathrm{id}_C \circ F$

In tal modo otteniamo una categoria `Cat` delle categorie (piccole[1])

[1] si potrebbe anche fare di tutte le categorie, ma per motivi insiemistici/logici dovremmo introdurre gli universi di Grothendieck e fare le cose per bene. Al fine di evitare questo inutile sforzo, ci limitiamo a considerare le categorie piccole.

Definizione 1.0.14

Un funtore $F : C \to D$ è un isomorfismo se lo è in $\mathtt{Cat}$, cioè se $\exists G : D \to C$ funtore tale che $G \circ F = \mathrm{id}_C = F \circ G$

Definizione 1.0.15: iniettivo e suriettivo

Un funtore $F : C \to D$ è *iniettivo/suriettivo* se $F : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ è *iniettivo/suriettivo*.
Nel caso in cui F sia sia iniettivo che suriettivo, è **biunivoco**.

Definizione 1.0.16: Fedele e pieno

F è detto **fedele** (**pieno**) se $\forall X, Y \in C$, $F : C(X, Y) \to D(F(X), F(Y))$ è iniettivo (suriettivo).
Nel caso in cui F sia sia fedele che pieno, si dice che è **pienamente fedele**

Esercizio 1.0.3

F funtore è isomorfismo se e solo se F è pienamente fedele e biunivoco.

Esempio 1.0.33. Se $C' \subseteq C$ è una sottocategoria, allora il funtore di inclusione $i : C' \to C$ è iniettivo e fedele ed è pieno se e solo se $C' \subseteq C$ è piena.

Ad esempio se $\sim$ è una congruenza in C , allora il funtore quoziente $C \to C/\sim$ è biunivoco e pieno.

Esempio 1.0.34. Un omomorfismo di monoidi (categorie di un oggetto) è iniettivo (suriettivo) se e solo se come funtore è fedele (pieno). In ogni caso è biunivoco.

Esempio 1.0.35. I funtori dimenticanti $\mathbb{Z} - \mathtt{Mod} \to \mathtt{Ab}$ e $\mathbb{Z} - \mathtt{Alg} \to \mathtt{Rng}$ sono isomorfismi.

Esempio 1.0.36. Anche $\mathtt{Mod} - \mathtt{A} \cong \mathtt{A}^{\mathtt{op}} - \mathtt{Mod}$ ed esiste un isomorfismo (anche se non sono categorie piccole).

Definizione 1.0.17

Un funtore $F : C \to D$ è **essenzialmente *iniettivo/suriettivo*** se la funzione ridotta

$$\mathrm{Ob}(C)/_{\cong} \to \mathrm{Ob}(D)/_{\cong}$$

è *iniettivo/suriettivo*

Osservazione. Se F è suriettivo allora F è essenzialmente suriettivo. L'altra implicazione non vale. Ad esempio

$$(\bullet) \longrightarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

Nessuna delle implicazioni tra iniettiva e essenzialmente iniettiva è vera. Basti considerare

$$(\bullet) \longleftarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

per essenzialmente iniettiva $\not\Longrightarrow$ iniettiva e

$$(\bullet \qquad \bullet) \longrightarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

per iniettiva $\not\Longrightarrow$ essenzialmente iniettiva.

Proposizione 1.0.5. *Sia $F : C \to D$ un funtore pienamente fedele. Allora F è essenzialmente iniettivo*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in C$ tali che $F(X) \cong F(Y)$ in D. Devo dimostrare che $X \cong Y$ in C.

Sappiamo che esiste $g : F(X) \to F(Y)$ isomorfismo in D. Poiché F è pieno esiste $f \in C(X, Y)$ tale che $F(f) = g$. Analogamente $\exists f' \in C(Y, X)$ tale che $F(f') = g^{-1}$.

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) = g^{-1} \circ g = 1_{F(X) = F(1_X)}$$

Se F è fedele, allora $f' \circ f = 1_X$ e analogamente $f \circ f' = 1_Y$ da cui f è isomorfismo e duque $X \cong Y$ $\square$

Definizione 1.0.18: Trasformazione naturale

Siano $F, F' : C \to D$ funtori.
Una **trasformazione naturale** $\alpha : F \to F'$ (si può anche scrivere $\alpha : F \implies F'$) è il dato di un morfismo

$$\alpha_X : F(X) \to F'(X) \text{ in } D \; \forall X \in C$$

tale che $\forall f : X \to Y$ morfismo di C il diagramma

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ F'(X) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(Y) \end{tikzcd}$$

commuta in D, cioè $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$

Esempio 1.0.37. Consideriamo i due funtori Abel : `Grp` $\to$ `Grp` e id : `Grp` $\to$ `Grp`. C'è una trasformazione naturale $\alpha : \mathrm{id} \to \mathrm{Abel}$ definita per ogni $G \in$ `Grp` da

$$\begin{aligned} \alpha_G : G &\longrightarrow \frac{G}{[G, G]} \\ a &\longmapsto \alpha_G(a) = a[G, G] \end{aligned}$$

è naturale perché $\forall f : G \to H$ in `Grp` il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_G"] & H \arrow[d, "\alpha_H"] \\ \frac{G}{[G,G]} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{H}{[H,H]} \end{tikzcd}$$

Esempio 1.0.38. Supponendo di avere $F, F' : G \to$ `Set` funtori (G gruppo visto come categoria con un oggetto), cioè G-insiemi (azioni di G su insiemi). Allora una trasformazione naturale $\alpha : F \to F'$ è un morfismo di G-insiemi cioè una funzione $\alpha : F(G) \to F'(G)$ tale che $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in F(G)$.

Osservazione. $\forall F : C \to D$, $\mathrm{id}_F : F \to F$ data da $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ per ogni $X \in C$ è una trasformazione naturale.

Esercizio 1.0.4

Dati $F, F', F'' : C \to D$ funtori, $\alpha : F \to F'$ e $\beta : F' \to F''$ trasformazioni naturali, allora la composizione $\beta \circ \alpha : F \to F''$ è definita da

$$\beta_X \circ \alpha_X =: (\beta \circ \alpha)_X : F(X) \to F''(X)$$

Mostrare che $\alpha \circ \beta$ è una trasformazione naturale

La composizione dell'esercizio precedente è anche detta composizione verticale di trasformazioni naturali, per via di questo disegno esplicativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "F'" description] \arrow[r, bend right=60, "F''"'] & D \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow\alpha \quad \Downarrow\beta$$

Considerando funtori e trasformazioni naturali, si ottiene (assumiamo sempre C piccola) la categoria $\mathtt{Fun}(C, D)$ (anche denotata D^C) con oggetti i funtori $C \to D$, morfismi le trasformazioni naturali e composizione la composizione verticale.

Definizione 1.0.19

Data una categoria C, la categoria dei morfismi di C è

$$\mathtt{Mor}(C) := \mathtt{Fun}(\cdot \to \cdot, C)$$

che ha come oggetti esattamente $\{f :\to X - Y : f \text{ morfismo di } C\}$ e trasformazioni naturali date da $(X \xrightarrow{f} Y) \to (X' \xrightarrow{f'} Y')$ è data da $(g : X \to X', h : Y \to Y')$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

Definizione 1.0.20

Date $F, G : C \to D$ funtori, $\alpha : F \to G$ trasformazione naturale, allora α è *isomorfismo* (*naturale* o di funtori) se è isomorfismo in $\mathtt{Fun}(C, D)$ cioè se $\exists \beta : G \to F$ trasformazione naturale tale che $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$.
In tal caso F e G si dicono *isomorfi* (denotato $F \cong G$).

Osservazione. $\cong$ di funtori è una relazione di equivalenza

Esempio 1.0.39. Il primo gruppo di omologia si può vedere come l'abelianizzato del gruppo fondamentale. In linguaggio categorico abbiamo

$$\mathtt{Top}_* \xrightarrow{\pi_1} \mathtt{Grp} \xrightarrow{\text{Abel}} \mathtt{Ab}$$

e

$$\mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top} \xrightarrow{H_1} \mathtt{Ab}$$
$$(X, x_0) \mapsto \text{comp. c.p.a. a } x_0$$

sono funtori isomorfi

Osservazione. $F \cong F'$ allora F e F' inducono la stessa funzione $\mathrm{Ob}(C)/_{\cong} \to \mathrm{Ob}(D)/_{\cong}$ quindi F è essenzialmente *iniettiva* / *suriettiva* se e solo se F' lo è.

Esercizio 1.0.5

Mostrare che non necessariamente la precedente osservazione vale per le proprietà di iniettività e suriettività.

Proposizione 1.0.6. *Se $F \cong F'$ allora F è* fedele/pieno *se e solo se F' è* fedele/pieno.

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \to F'$ l'isomorfismo. Definiamo $\overline{\alpha} = (g \mapsto \alpha_Y \circ F(F) \circ \alpha_X^{-1})$ Per ogni $X, Y \in C$,

$$\begin{tikzcd} & D(F(X), F(Y)) \arrow[dd, "\overline{\alpha}"] \\ C(X,Y) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F'"'] & \\ & D(F'(X), F'(Y)) \end{tikzcd}$$

□

Proposizione 1.0.7. *α, β trasformazioni naturali inducono una trasformazione naturale $\beta * \alpha : G \circ F \to G' \circ F'$*

$$\begin{tikzcd} G(F(X)) \arrow[r, "G(\alpha_X)"] \arrow[d, "\beta_{F(X)}"] & G(F'(X)) \arrow[d, "\beta_{F'(X)}"] \\ G'(F(X)) \arrow[r, "G'(\alpha_X)"] & G'(F'(X)) \end{tikzcd}$$

dunque $(\beta * \alpha)_X := \beta_{F'(X)} \circ G(\alpha_X) = G'(\alpha_x) \circ \beta_{F(X)}$.

Dimostrazione che è una trasformazione naturale. Vogliamo mostrare che $b * a$ è naturale, cioè $\forall f : X \to Y$ in C il diagramma

$$\begin{tikzcd} G(F(X)) \arrow[r, "G(F(f))"] \arrow[d, "(\beta*\alpha)_X"] & G(F(X)) \arrow[d, "(\beta*\alpha)_Y"] \\ G'(F'(X)) \arrow[r, "G'(F'(f))"] & G'(F'(X)) \end{tikzcd}$$

commuta. Ma questo è vero perché

$$\begin{aligned} G'(F'(f)) \circ (\beta * \alpha)_X &= G'(F'(f)) \circ G'(\alpha_x) \circ \beta_{F(X)} = G'(F'(f) \circ \alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\overset{\alpha \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y \circ F(f)) \circ \beta_{F(X)} = G'(\alpha_Y) \circ G'(F(f) \circ \beta_{F(X)}) = \\ &\overset{\beta \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y) \circ \beta_{F(Y)} \circ G(F(f)) = (\beta * \alpha)_Y \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

□

Ovviamente è chiaro che si potrebbe definire allora la categoria delle trasformazioni naturali eccetera e andare avanti all'infinito. Per assiomatizzare queste cose in realtà bisognerebbe esplicitare che abbiamo definito le "2-frecce" e che quindi siamo in una *2-categoria*

Nota (zione). Se $\beta = \mathrm{id}_G$ invece di $\mathrm{id}_G * \alpha$ si scrive $G \circ \alpha$ (dunque con $(G\circ\alpha)_X = G(\alpha_X)$). Se $\alpha = \mathrm{id}_F$ invece di $\beta * \mathrm{id}_F$ si scrive $\beta \circ F$ (con $(\beta \circ F)_X = \beta_{F(X)}$). In generale

$$\beta * \alpha = (\beta \circ F') \circ (G \circ \alpha) = (G' \circ \alpha) \circ (\beta \circ F)$$

Osservazione. Se α, β sono isomorfismi, allora $\beta * \alpha$ è isomorfismo. Questo significa che se

$$F \cong F', \quad G \cong G' \implies G \circ F \cong G' \circ F'$$

cioè l'isomorfismo di funtori è una congruenza su $\mathtt{Cat}$ e quindi si ottiene la categoria $\mathtt{Cat}/_{\cong}$

Definizione 1.0.21: Equivalenza

Un funtore $F : C \to D$ è un'equivalenza se $\exists G : D \to C$ funtore tale che $G \circ F \cong \mathrm{id}_G$ e $F \circ G \cong \mathrm{id}_D$.
Un tale G si dice un *quasi-inverso* di F.

Osservazione. F è un'equivalenza se e solo se $\overline{F}$ in $\mathtt{Cat}/_{\cong}$ è un isomorfismo.

Segue che se $F \cong F'$, allora F è un'equivalenza se e solo se F' è un'equivalenza e un quasi-inverso di F è unico a meno di isomorfismo e l'equivalente di categorie è una relazione di equivalenza su $\mathtt{Cat}$

Definizione 1.0.22: Scheletro

Una sottocategoria piena $C' \subseteq C$ è detta *scheletro* se $\forall X \in C$, $\exists! X' \in C'$ tale che $X \cong X'$

Lemma 1.0.8. *Sia $F : C \to D$ un funtore, e si supponga che $\forall X \in C$, $\alpha_X : F(X) \to F'(X)$ sia un isomorfismo in D. Allora $F' : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ Si estende in modo unico a un funtore $F' : C \to D$ tale che $\alpha : F \to F'$ è isomorfismo.*

Teorema 1.0.9: Finalmente un teorema

Un funtore $F : C \to D$ è un'*equivalenza* se e solo se F è *pienamente fedele* e *essenzialmente suriettivo*

Osservazione. Non è necessario aggiungere l'ipotesi che F sia essenzialmente iniettivo perché come mostrato prima pienamente fedele implica essenzialmente iniettivo (ma non essenzialmente suriettivo).

Esempio 1.0.40. Supponiamo che $C' \subseteq C$ sia una sottocategoria piena. Allora il funtore di inclusione $C' \hookrightarrow C$ è pienamente fedele ed è essenzialmente suriettivo (quindi è un'equivalenza) se e solo se $\forall X \in C$ esiste $X' \in C'$ tale che $X \cong X'$.

Dimostrazione.

$\implies$ Sia $G : D \to C$ un quasi-inverso di F. Allora $F \circ G \cong \mathrm{id}_G$ che è essenzialmente suriettivo, e dunque F è essenzialmente suriettivo. D'altra parte lo stesso $F \circ G$ è fedele, e dunque G è fedele.

Ora, per ogni $X, Y \in C$,

$$C(X,Y) \overset{F_{X,Y}}{\to} D(F(X), F(Y)) \overset{G_{F(X),F(Y)}}{\to}{}^{\text{inj}} \; C(G(F(X)), G(F(Y)))$$

poiché la composizione è biunivoca e G è fedele, allora entrambi devono essere biunivoci, ossia in particolare F è pienamente fedele.

$\Longleftarrow$ Consideriamo prima il caso di un'inclusione $C' \subseteq C$ sottocategoria piena tale che $\forall X \in C$ esista $X' \in C$ tale che $X \cong X'$. Sia $I : C' \to C$ il funtore di inclusione (pienamente fedele e essenzialmente suriettivo).

Allora $\forall X \in C$ scelto (AoC) un isomorfismo $\alpha_X : X \to \tilde{P}(X) \in C'$ e se $X \in C'$ in particolare prendiamo $\alpha_X = 1_X$. Applico ora il lemma 1.0.8 con $F = \mathrm{id}_C$ e dunque $\exists!$ estensione di $\tilde{P}$ a un funtore $\tilde{P} : C \to C$ tale che $\alpha : \mathrm{id}_C \to \tilde{P}$ è isomorfismo. Allora $\exists! P : C \to C'$ funtore tale che $\tilde{P} = I \circ P$ e P è un quasi-inverso di I poiché $I \circ P = \tilde{P} \cong \mathrm{id}_C$ e $P \circ I = \mathrm{id}_{C'}$.

In generale, dato $F : C \to D$ pienamente fedele. Siano allora $I : C' \to C$ e $J : D' \to D$ due scheletri. Per il caso qui fatto I, J sono equivalenze e siano $P : C \to C'$ quasi-inverso di I e $Q : D \to D'$ quasi-inverso di J.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "P"'] & D \arrow[d, shift left, "Q"] \\ C' \arrow[r, "F'"] \arrow[u, shift right, "I"'] & D' \arrow[u, shift left, "J"] \end{tikzcd}$$

Sia $F' := Q \circ F \circ I : C' \to D'$ come nel diagramma. Allora I, F, Q sono pienamente fedeli e essenzialmente suriettivi (I per definizione, F per ipotesi e Q perché è un'equivalenza e vale il punto ($\Longrightarrow$)) dunque F' è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

F' è essenzialmente biunivoco, C' e D' sono scheletri, dunque F' è biunivoco, quindi isomorfismo e quindi equivalenza.

$$F = \mathrm{id}_D \circ F \circ \mathrm{id}_c \cong J \circ Q \circ F \circ I \circ P = J \circ F' \circ P$$

equivalenza perché lo sono J, F' e P

$\square$

Esempio 1.0.41. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme X che vedo come categoria C con $\mathrm{Ob}(C) = X$ e $C(x,y) \neq \varnothing \iff x \sim y$.

Il funtore $C \to X/_\sim$ (categoria discreta) definito da $x \mapsto \overline{x}$ è un'equivalenza poiché pienamente fedele e essenzialmente suriettiva.

Esercizio 1.0.6

Mostrare che ogni categoria equivalente a una categoria discreta è una relazione di equivalenza, ossia una categoria dove $\forall X, Y \in C$, $C(X,Y) \neq O \iff x \sim y$ per una qualche $\sim$ relazione di equivalenza.

1.1 Categorie preadditiva

Definizione 1.1.1: Categoria preadditiva

Una categoria *preadditiva* è una categoria $\mathcal{A}$ con una struttura di gruppo abeliano (notazione: additivo) su $\mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ ed è tale che la composizione di morfismi sia $\mathbb{Z}$-bilineare, ossia

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{e} \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $f, f' \in \mathcal{A}(X,Y)$ e $g, g' \in \mathcal{A}(Y,Z)$.

Osservazione. Si dice anche che $\mathcal{A}$ è una $\mathtt{Ab}$-Categoria. Si può studiare quando si può generare una categoria simile partendo da altre categorie invece di $\mathtt{Ab}$ ma non è argomento di questo corso.

Si può anche dire che $\mathcal{A}$ è $\mathbb{Z}$-lineare. Più in generale $\forall$[2] anello commutativo A una categoria A-lineare è una categoria $\mathcal{A}$ con una struttura di A-modulo su $\mathcal{A}(X,Y)$ tale che la composizione sia A-bilineare.

Proposizione 1.1.1. *Se A è non commutativo, allora $\forall a, b \in A$ e $\forall f : X \to Y$ morfismo di $\mathcal{A}$,*

$$(ab)f = (ba)f$$

Dimostrazione.

$$(ab)f = a(bf) = a((bf) \circ 1_X) = (bf) \circ (a1_x) = f \circ (b(a1_X)) = f \circ (ba)1_X = (ba)f$$

□

Esempio 1.1.1. Sia A un anello, allora $A{-}\mathtt{Mod}$ è preadditiva. Infatti per ogni $M, N \in (A{-}\mathtt{Mod})$, $A{-}\mathtt{Mod}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$ è un gruppo abeliano e $\circ$ è $\mathbb{Z}$-bilineare. Se A è commutativo, allora $A{-}\mathtt{Mod}$ è anche A-lineare. Più in generale se B è una A-algebra allora $B{-}\mathtt{Mod}$ è A-lineare.

Osservazione. Sia $X \in \mathcal{A}$ categoria A-lineare (quindi A commutativo). Allora $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è una A-algebra. Infatti $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X), \circ)$ è un monoide e $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}$ è A-modulo e $\circ$ è A-lineare.

Quindi le categorie A-lineari con un solo oggetto sono A-algebre. In particolare ***le categorie preadditive con un solo oggetto sono anelli***.

Osservazione. Sia $\mathcal{A}$ preadditiva, allora $\mathcal{A}^{op}$ è preadditiva con la stessa struttura di gruppo abeliano su $\mathcal{A}^{op}(X,Y) = \mathcal{A}(Y,X)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$.

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva, allora $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}'$, allora $\mathcal{A}'$ è preadditiva. In particolare la condizione è sempre verificata per le categorie piene.

Sia $\mathcal{A}$ preadditiva, $\sim$ una congruenza tale che $\forall X, Y \in \mathcal{A}$, $\forall f, f', g \in \mathcal{A}(X,Y)$ allora $f \sim f' \implies f+g \sim f'+g$. In tale ipotesi $\mathcal{A}/_\sim$ è preadditiva con $\overline{f}+\overline{g} = \overline{f+g}$.

Data una tale congruenza, sia $\forall X, Y \in \mathcal{A}$

$$\mathfrak{I}(X,Y) = \{f \in \mathcal{A}(X,Y) : f \sim 0\}$$

e indichiamo con $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ la collezione di tutti gli $\mathfrak{I}(X,Y)$. Allora vale la proprietà di ideale, gioè dati f, g morfismi di $\mathcal{A}$ componibili,

$$f \circ \mathfrak{I} \text{ o } g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

Se per esempio $f \in \mathfrak{I}$ ossia $f \sim 0$, allora $g \circ f \sim g \circ 0 = 0$ e dunque $g \circ f \in \mathfrak{I}$.

Arriviamo dunque alla seguente definizione

Definizione 1.1.2

Definiamo un ideale $\mathfrak{I}$ in una categoria preadditiva $\mathcal{A}$ come $\mathfrak{I}(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ tale che

$$f \in \mathfrak{I} \text{ o } g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

[2] normalmente in mezzo alla frase così avrei scritto esplicitamente "per ogni" ma trovavo divertente la quantità di $\mathcal{A}$ e di A nella frase quindi ho valutato simpatico aggiungere anche un $\forall$

Viceversa, dato $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, si ottiene una congruenza $\sim$ su $\mathcal{A}$ definito da

$$f \sim f' \iff f' - f \in \mathfrak{I}(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathcal{A} \quad \forall f,f' \in \mathcal{A}(X,Y)$$

ed è tale che $f \sim f' \implies f + g \sim f' + g$.

In tali ipotesi si può anche denotare $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ invece di $\mathcal{A}/_{\sim}$.

Una categoria $\mathcal{C}$ può non avere nessuna struttura di categoria preadditiva (ad esempio se $\exists X,Y \in \mathcal{C}$) tale che $\mathcal{C}(X,Y) = \varnothing$ o averne più di una.

Esempio 1.1.2. G Possiamo pensare ad anelli A e B tali che $(A,\cdot) \cong (B,\cdot)$ e $(A,+) \ncong (B,+)$.

Ad esempio possiamo prendere $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}[X]/(X^2)$. Allora evidentemente

$$(A,+) \cong C_4 \ncong C_2 \times C_2 \cong B$$

ma gli elementi diversi da 0 e 1 di A sono $\overline{2}$ e $\overline{3}$ e sono tali che $\overline{2}^2 = \overline{0}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$ e $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2}$. Similmente in B abbiamo che $\overline{X}^2 = \overline{0}$, $\overline{1+X}^2 = \overline{1}$ e $\overline{X} \cdot \overline{1+X} = \overline{X}$

Definizione 1.1.3

Un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie preadditive è additivo se

$$F_{X,Y} : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(F(X),F(Y))$$

è omomorfismo di gruppi $\forall X,Y \in \mathcal{A}$.

Più in generale $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie A-lineari è detto A-lineare se $F_{X,Y}$ è A-lineare $\forall X,Y \in \mathcal{A}$.

Esempio 1.1.3. Sia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X,Y \in \mathcal{A}'$. Allora l'inclusione $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ è addditivo.

Esempio 1.1.4. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva e $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, allora il funtore $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{I}$ definito da $X \mapsto X$ e $f \mapsto \overline{f}$ è additivo.

Esercizio 1.1.1

Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additivo tale che "$\mathfrak{I} = \ker F$" cioè $F(f) = 0$, $\forall f \in \mathfrak{I}$, allora mostrare che esiste un unico $\overline{F} : \mathcal{A}/\mathfrak{I} \to \mathcal{B}$ funtore additivo tale che $F = \overline{F} \circ P$

Esempio 1.1.5. Siano A,B anelli (categorie preadditive con un solo oggetto), allora un funtore additivo $A \to B$ è un omomorfismo di anelli.

Più in generale per ogni anello A e per ogni $\mathcal{A}$ categoria preadditiva un funtore additivo $A \to \mathcal{A}$ è dato da un oggetto $X \in \mathcal{A}$ e un omomorfismo di anelli $A \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$. Quindi un A-modulo è un funtore additivo $A \to \mathtt{Ab}$

Esempio 1.1.6. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari $B\text{−}\mathtt{Mod} \to A\text{−}\mathtt{Mod}$ è additivo.