# Appunti di Algebra 2

Github Repository: `0xke/appunti/Algebra2`

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Paola Frediani

I testi preferiti sono

– *Algebra*, di Michael Artin

– *Algebra*, di Herstein

## 1 Azioni di gruppi su insiemi

Chiameremo $G$ un gruppo e $S$ un insieme

**Definizione 1.1: Azione di gruppo**

Un'azione (sinistra) di $G$ su $S$ e un'applicazione

$$F : G \times S \to S$$

tale che

i) $F(e, s) = s$ per ogni $s \in S$

ii) $\forall g, h \in G$ e $\forall s \in S$ vale $F(g, F(h, s)) = F(gh, s)$

Si usa anche la notazione $F(g, s) =: g(s)$ che permette la scrittura più concisa

$$e(s) = s \quad \text{e} \quad g(h(s)) = (gh)(s) \quad \forall s \in S, \quad \forall g, h \in G$$

**Proposizione 1.1.** *Per ogni $g \in G$, l'applicazione $F_g : S \to S$ definita da $F_g(s) = F(g, s) = g(s)$ è una biiezione e in particolare*

$$F_g^{-1} = F_{g^{-1}} \tag{1.1}$$

*Dimostrazione.*

$$F_g \circ F_{g^{-1}}(s) = g(g^{-1}(s)) \overset{(ii)}{=} e(s) \overset{(i)}{=} s$$

e analogamente per l'altra composizione $\square$

**Proposizione 1.2.** *L'applicazione $\psi : G \to S(S) = \{f : S \to S$ biunivoche$\}$ dove $S(S)$ il gruppo delle permutazioni di $S$ è un omomorfismo di gruppi.*

*Dimostrazione.*

$$\psi(gh) = F_{gh} \overset{(ii)}{=} F_g \circ F_h = \psi(g) \circ \psi(h)$$

$\square$

**Definizione 1.2: Azione fedele**

Un'azione $F : G \times S \to S$ si dice **fedele** se $\psi$ è iniettivo

*Osservazione.* Ovvero se e solo se $\mathrm{Ker}\psi = \{e\} \iff (\psi(g) = \mathrm{Id}_S \iff g = e)$

**Esempio 1.1.** Se $S = G$ il gruppo stesso e sia

$$m : G \times G \to G \quad \text{con} \quad m(g, h) = gh$$

la moltiplicazione a sinistra. Allora $m$ è un'azione sinistra, infatti

i) $m(e, h) = eh = h$ per ogni $h \in G$

ii) $m(gg', h) = (gg')h = g(g'h) = m(g, g'h)$ per ogni $g, g', h \in G$

Inoltre $m$ è un'azione fedele, infatti

$$\psi(g)(h) = h \quad \forall h \in G \iff gh = h \implies g = e$$

*Osservazione.* Se $G$ è un gruppo finito, con $\#G = n$ allora $S(G) \cong S_n$ e poiché $\psi$ è iniettivo, $G \cong \psi(G) < S(G) \cong S_n$ il teorema di Cayley.

**Esempio 1.2.** Sempre con $G = S$ possiamo considerare l'azione di coniugio

$$\varphi : G \times G \to G \quad \text{con} \quad \varphi(g, h) = ghg^{-1}$$

i) $\varphi(e, h) = ehe^{-1} = h$ per ogni $h \in G$

ii) $\varphi(gg', h) = (gg')h(gg')^{-1} = gg'hg'^{-1}g^{-1} = g(\varphi(g', h))g^{-1} = \varphi(g, \varphi(g', h))$

$\psi : G \to S(G)$ e $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{Inn}(G) < \mathrm{Aut}(G)$. Non è necessariamente un'azione fedele, infatti

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \{g \in G : \forall h \in G \quad ghg^{-1} = h\} = Z(G)$$

da cui per il primo teorema di isomorfismo

$$G/Z(G) = \mathrm{Inn}(G)$$

**Esempio 1.3.** Con $G = S_n$ e $S = \{1, \dots, n\}$ allora la funzione

$$(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$$

è ovviamente un'azione

**Esempio 1.4.** Preso $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{1, \sigma\}$ con $\sigma^2 = 1$ e $S = \mathbb{C}$ allora la funzione

$$F : G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{con} \quad F(1, z) = z \quad \text{e} \quad F(\sigma, z) = \overline{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

è un'azione.

**Definizione 1.3: Orbita e Stabilizzatore**

Sia $F : G \times S \to S$ un'azione di un gruppo $G$ su $S$. Allora per ogni $s \in S$ si definisce **orbita** di $s$ l'insieme

$$O_s = \{g(s) : g \in G\}$$

e si definisce **stabilizzatore** di $s$ l'insieme

$$\mathrm{stab}_s = \{g \in G : g(s) = s\}$$

**Esempio 1.5.** Nell'esempio dell'azione di coniugio lo stabilizzatore di $h$ è

$$\mathrm{stab}_h = \{g \in G : ghg^{-1} = h\} = \{g \in G : gh = hg\} = C_G(h)$$

**Proposizione 1.3.** *Le orbite $O_s$ per un'azione di $G$ sono classi di equivalenza per la relazione di equivalenza su $S$ seguente:*

$$S \sim S' \iff \exists g \in G : s' = g(s) = F(g, s)$$

*Dimostrazione.* $\sim$ è in effetti una relazione di equivalenza, infatti:

- *riflessiva*: $s = e(s)$
- *simmetrica*: se $s' = g(s)$ allora $s = g^{-1}(s')$ per la proposizione 1.1
- *transitiva*: se $s' = g(s)$ e $s'' = h(s')$ allora $s'' = h(s') = h(g(s)) \stackrel{(ii)}{=} (hg)(s)$

Ne segue chiaramente che $O_s = [s]_\sim$ e allora $S = \coprod_{s \in S} O_s$ □

**Proposizione 1.4.** $stab_s < G$

*Dimostrazione.* Supponiamo $g, h \in \mathrm{stab}_s$. Allora $g(s) = h(s) = s$, ne consegue che

$$F_{gh^{-1}}(s) = F_g(F_{h^{-1}}(s)) \stackrel{(1.1)}{=} F_g(F_h^{-1}(s)) = F_g(s) = s$$

□