Appunti di Analisi 4

Github Repository: `0xke/appunti/Analisi4`

Primo semestre, 2024 - 2025, prof. Pierluigi Colli

Il corso tratterà sostanzialmente due tematiche:

– **Misura e Integrale di Lebesgue**

– Rudimenti di **Analisi Funzionale**, in particolare spazi di Hilbert e serie di Fourier.

In particolare i due argomenti sono legati dagli **spazi** L^p che rientrano in entrambe le categorie. Purtroppo non c'è un testo che contiene tutti e soli gli argomenti del corso, ma sul kiro c'è molto materiale didattico che può essere utilizzato.

Indice

1 Misura e integrazione di Lebesgue

In questa sezione si segue la linea dell'appendice sull'integrazione astratta di Sbordone al libro "Analisi Funzionale" di Brezis, edito da Liguori.

1.1 Algebre, σ-algebre, misure

Sia Ω un insieme ambiente, e sia $\mathcal{M}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω, ossia $\mathcal{M} \subseteq 2^\Omega$.

Definizione 1.1: Algebra

Una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω si dice **algebra** se

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$
2. Se $A \in \mathcal{M}$ allora $A^C \in \mathcal{M}$
3. Se $A, B \in \mathcal{M}$ allora anche $A \cup B \in \mathcal{M}$

Osservazione. Poiché $\varnothing \in \mathcal{M}$, anche $\Omega \in \mathcal{M}$ perché il complementare di $\varnothing$.

Osservazione. Se $A, B \in \Omega$, anche $\left(A^C \cup B^C\right)^C = A \cap B \in \mathcal{M}$

Osservazione. Se $A, B \in \mathcal{M}$ anche $A \cap B^C = A \smallsetminus B \in \mathcal{M}$

In pratica un'algebra è una famiglia di sottoinsiemi di Ω chiusa rispetto alle comuni operazioni di insiemi.

Esempio 1.1. $P(\Omega)$ è banalmente un'algebra perché contiene tutti i sottoinsiemi.
Anche $\{\varnothing, \Omega\}$ lo è poiché la loro unione è Ω.

Esempio 1.2. In $\Omega = \mathbb{R}^2$ consideriamo $\mathcal{M}$ costituita dai rettangoli. Allora $\mathcal{M}$ è un'algebra? NO, perché per quanto potrei metterci l'insieme vuoto e tutto $\mathbb{R}^2$, se considero ad esempio $[0,1] \times [0,2] \cup [0,2] \times [0,1]$ ottengo un poligono che non è un rettangolo.

Invece, potrei considerare la famiglia delle unioni finite di rettangoli, anche non limitati, e considerando anche l'insieme vuoto. Questa è un'algebra perché l'intersezione di due rettangoli è un rettangolo, e il complementare di un'unione finita di rettangoli è un'intersezione di finiti rettangoli.

Definizione 1.2: funzione finitamente additiva

Sia Ω un insieme e $\mathcal{M}$ un'algebra di sottoinsiemi di Ω.
Una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ si dice **finitamente additiva** se

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap B = \varnothing$ allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Va inteso che se per uno dei due $\mu(A) = +\infty$ allora $\mu(A \cup B) = +\infty$

Esempio 1.3. Nel caso dell'algebra delle unioni finite di rettangoli, potrei considerare la funzione che restituisce la somma delle aree dei rettangoli.

Proposizione 1.1. *Se μ è una funzione finitamente additiva su $\mathcal{M}$ algebra allora*

1. *(monotonia) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$*
2. *(sottrattività) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq B$ e $\mu(A) < +\infty$ allora $\mu(B \smallsetminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*

3. *(sub-additività) Se* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ *allora* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

Dimostrazione.

1. $B = A \cup (B \setminus A)$, quindi $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$
2. Da sopra, ma ho bisogno di aggiungere l'ipotesi $\mu(A) < +\infty$ per evitare di sottrarre $+\infty$
3. Considero $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$ ecc. ponendo sempre $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, per cui $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e so che $\mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$, usando prima l'additività e poi la monotonia.

□

Definizione 1.3: Misura

Sia Ω insieme, $\mathcal{M}$ algebra su Ω, allora $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ si dice **misura** se:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. (Numerabile additività / σ-additività) Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$ allora $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$

Osservazione. È evidente che la σ-additività implica l'additività finita, poiché si può prendere $A_1 = A$, $A_2 = B$ e $A_i = \varnothing$ per ogni $i \geq 3$

Vedremo nella definizione di misura che richiede la σ-additività. Vogliamo dunque poterla definire su uno spazio che permetta di assicurare che l'unione di una successione di insiemi sia ancora un insieme. Questo ci porta alla seguente definizione.

Definizione 1.4: σ-algebra

Sia Ω un insieme, $\mathcal{M}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. Allora $\mathcal{M}$ si dice **σ-algebra** se:

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$
2. Se $A \in \mathcal{M}$ allora anche $A^C \in \mathcal{M}$
3. Se $A_n \in \mathcal{M}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$

Osservazione. È evidente che una σ-algebra è un'algebra.

Osservazione. Se $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ posso concludere che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ (ragionando coi complementari).

Esempio 1.4. $\mathcal{M} = P(\Omega)$ è anche una σ-algebra. Vale lo stesso anche per $\mathcal{M} = \{\varnothing, \Omega\}$.

Esempio 1.5. L'unione finita di rettangoli, anche non limitati, che include l'insieme vuoto, invece non lo è, poiché un aperto qualunque di $\mathbb{R}^2$ è esprimibile come unione numerabile di rettangoli.

Teorema 1.2

Dato Ω e una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di Ω, esiste sempre una σ-algebra $\mathcal{M}$ che contiene $\mathcal{F}$ ed è contenuta in ogni σ-algebra che contiene $\mathcal{F}$, e viene denotata $\sigma(\mathcal{F})$

Dimostrazione. Data $\mathcal{F}$, allora esiste almeno $P(\Omega) \supseteq \mathcal{F}$. Prendo allora tutte le σ-algebre che contengono $\mathcal{F}$ e l'intersezione è una σ-algebra ed è contenuta in tutte. □

Esempio 1.6. Dato un insieme Ω, sia τ la collezione di aperti di Ω. La σ-algebra $\sigma(\tau)$ generata da τ viene detta σ-algebra di Borel e contiene tutti gli aperti, tutti i chiusi e tutte le unioni e intersezioni numerabili di aperti e chiusi.

Definizione 1.5: Definizioni utili

Dato Ω un insieme e una σ-algebra $\mathcal{M}$ su Ω, la coppia $(\Omega, \mathcal{M})$ viene detta **spazio misurabile** e la terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, dove μ è una misura su $\mathcal{M}$ viene detta **spazio di misura**.
Uno spazio di misura si dice **finito** se $\mu(\Omega) < +\infty$ e uno spazio di misura si dice **σ-finito** se $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ con $B_n \in \mathcal{M} \forall n \in \mathbb{N}$ e $\mu(B_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre se $\mu(A) = 0$ allora A si dice **trascurabile**. Ancora una proprietà si dice **vera quasi ovunque** se vale per ogni $x \in \Omega \setminus A$ dove A è trascurabile.

Esempio 1.7. $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{R}^N}$, sia O l'origine. Allora δ_O è la misura che ha valore 1 se e solo se $O \in A \in \mathcal{M}$, altrimenti 0. Allora questa è una misura perché data una successione di insiemi a due a disgiunti della σ-algebra la misura della loro unione è 1 se e solo se uno degli insiemi contiene O, e nel caso può essere solo uno, perché tali insiemi sono a due a due disgiunti. In particolare questa è una misura finita.

Esempio 1.8 (Misura del contare $\#$)**.** Consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$, dove per un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\#(A) = \begin{cases} n & \text{se } A \text{ ha } n \text{ elementi} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo che si tratta di una misura:

1. $\#(\varnothing) = 0$ ovviamente.
2. Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi a due a due disgiunti, allora

$$\#A := \#\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \#(A_i)$$

   Infatti si possono verificare due casi: se $\#A < \infty$ allora significa che ogni A_i è finito oppure vuoto e solo un numero finito di A_i (al massimo $\#A$ insiemi) sono diversi dall'insieme vuoto, e quindi il numero di elementi di A è la somma dei numeri di elementi degli A_i.

   L'altro caso è quando $\#A = +\infty$ che si può realizzare in diversi modi: se nella successione abbiamo un insieme A_i con un numero infinito di elementi e in tal caso l'eguaglianza è immediatamente soddisfatta, oppure si ha che $\#A_i < +\infty$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ ma la serie non può convergere, poiché significherebbe che esiste una sottosuccessione di elementi non vuoti, e tutti hanno almeno un elemento.

Notare che questo **non** è uno spazio di misura finito, ma è uno spazio di misura σ-finito perché $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$ dove naturalmente ogni singoletto ha $\#\{n\} = 1$. Inoltre è interessante notare che in questo spazio l'unico insieme trascurabile è l'insieme vuoto.

Teorema 1.3: Continuità della misura

Sia $\Omega, \mathcal{M}, \mu$ uno spazio di misura e sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi di $\mathcal{M}$.

1. Se $\{A_n\}$ è crescente, ossia $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, allora
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
2. Se $\{A_n\}$ è decrescente, ossia $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\mu(A_1) < +\infty$, allora
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Dimostrazione. 1. Noto che
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \ldots$$
E che gli insiemi nelle parentesi in questa espressione sono tutti a due a due disgiunti. Allora abbiamo per la σ-additività che
$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_1) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{k+1} \setminus A_k)\right)$$
Ma ora possiamo riapplicare la σ-additività della misura all'interno al limite ottenendo che
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots \cup (A_{n+1} \setminus A_n)\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1})$$

2. Vogliamo costruire una successione crescente. Poniamo $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \setminus A_2$, $B_3 = A_1 \setminus A_3$ ecc. Allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $B_n \subseteq B_{n+1}$. Allora per la continuità della misura crescente $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ da cui la tesi, poiché essendo $\mu(A_1) < +\infty$ possiamo scrivere
$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$
ma anche
$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
da cui la tesi.

□

Osservazione. Notiamo che se fosse $\mu(A_1) = +\infty$ il risultato non segue necessariamente. Ad esempio nello spazio di misura $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$ Possiamo considerare la successione $A_1 = \mathbb{N}$, $A_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $A_3 = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ecc. Allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ ma $\mu(A_n) = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi il limite delle misure è $+\infty$ ma la misura dell'intersezione è 0

1.2 Misura esterna

Definizione 1.6: Misura esterna

Sia Ω un insieme e consideriamo l'algebra 2^Ω, allora $\lambda : 2^\Omega \to [0, +\infty]$ si dice **misura esterna** se

1. $\lambda(\varnothing) = 0$
2. (monotonia) Se $A \subseteq B$ allora $\lambda(A) \leq \lambda(B)$
3. (sub-additività) Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi di 2^Ω allora

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

Misura esterna su $\mathbb{R}^N$ Ora vogliamo introdurre su $\mathbb{R}^N$ una misura esterna, che chiameremo $\mu^\star$. Lavoriamo con intervalli di $\mathbb{R}^n$, ossia prodotti cartesiani di intervalli reali di estremi sinistri $\{a_1, \ldots, a_N\}$ e sinistri $\{b_1, \ldots, b_N\}$ di ogni tipologia. Naturalmente abbiamo che $a_i \leq b_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$. Un un intervallo I di $\mathbb{R}^n$ è dunque il prodotto cartesiano degli n intervalli di estremi a_i e b_i, con $i \in \{1, \ldots, N\}$. Per questi intervalli possiamo definire $|I| = \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i)$ la misura elementare. Allora definiamo

$$\mu^\star(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

Procediamo ora col verificare che questa è una misura esterna.

1. Naturalmente $\mu^\star(\varnothing) = 0$ perché l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme, in particolare per ogni ε posso creare una successione di intervalli con $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$
2. Se $A \subseteq B$ allora $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(B)$. Infatti tutte le successioni di intervalli che ricoprono B ricoprono anche A.
3. Abbiamo $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e vogliamo mostrare che $\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n)$. Possiamo supporre che la serie converga finita e tutti gli $\mu^\star(A_n)$ siano quindi finiti, perché altrimenti la disuguaglianza è banalmente soddisfatta. Allora per la definizione di $\mu^\star$ abbiamo che per ogni n e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{I_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $A_n \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \mu^\star(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Allora la successione $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ ricopre A. Allora per la definizione di $\mu^\star$ sicuramente abbiamo che

$$\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^\star(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n)$$

   Dove sommare su k e poi su n è equivalente a ogni altro modo di svolgere la somma perché la serie è assolutamente convergente.

Si può verificare che $\mu^\star(I) = |I|$ per gli intervalli, infatti naturalmente $\mu^\star(I) \leq |I|$ perché il ricoprimento $\{I\}$ fa parte dell'insieme su cui si fa l'estremo inferiore. Per l'altra disuguaglianza, consideriamo per ogni $\varepsilon > 0$ una successione $\{I_i\}$ di intervalli tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \mu^\star(I) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora dico che esiste una successione di intervalli aperti J_i tale che $I_i \subseteq J_i$ e inoltre $\sum_{i=1}^{\infty} |J_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| + \frac{\varepsilon}{2}$ (basta richiedere che $|J_i| \leq |I_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$). Succede allora che $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. Ora diciamo che esiste un intervallo chiuso $K \subseteq I$ tale che $|K| \geq |I| - \varepsilon$, succede quindi che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, dunque essendo K compatto e J_i aperti esiste un sottoricoprimento finito di K. A meno di riordinare i J_i quindi $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} J_i$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$. Allora abbiamo

$$|I| - \varepsilon \leq |K| \leq \sum_{i=1}^{k} |J_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |J_i| \leq \mu^\star(I) + \varepsilon$$

che essendo vero per ogni ε ci porta a ottenere la disuguaglianza $|I| \leq \mu^\star(I)$.

1.3 Misura di Lebesgue

Ora invece vogliamo costruire la misura di Lebesgue e gli insiemi misurabili secondo Lebesgue, ma prima introduciamo un po' di proposizioni.

Proposizione 1.4. *Per $\delta > 0$ fissato e per $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha che*

$$\mu^\star(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad diam(I_n) \leq \delta \right\}$$

Dimostrazione. Se prendo un qualunque ricoprimento di A con intervalli, posso costruirne uno analogo dove il diametro di ogni intervallo è $\leq \delta$. Questo si può fare eventualmente "spezzando" gli intervalli in intervalli più piccoli, tenendo la somma della serie uguale. □

Proposizione 1.5. *Siano $F_1, \ldots, F_n$ insiemi chiusi, limitati e disgiunti a due a due. Allora vale l'additività della misura esterna:*

$$\mu^\star\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^\star(F_i)$$

Dimostrazione. Iniziamo con due insiemi, F_1 e F_2 chiusi e limitati, con $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Allora per la subadditività della misura esterna $\mu^\star(F_1 \cup F_2) \leq \mu^\star(F_1) + \mu^\star(F_2)$. Inoltre, $\forall \varepsilon > 0$ esiste (per la definizione con l'inf) un ricoprimento $\{I_n\}$ di $F_1 \cup F_2$ tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |I_n| \leq \mu^\star(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$, chiediamo inoltre che $\mathrm{diam}(I_n) \leq \frac{d}{3}$, con d la distanza tra F_1 e F_2 (sfrutto la chiusura).

Tutti gli I_n tali che $I_n \cap F_1 \neq \varnothing$ danno un ricoprimento di F_1, e similmente tutti gli I_m tali che $I_m \cap F_2 \neq \varnothing$ danno un ricoprimento di F_2. Allora necessariamente

$$\mu^\star(F_1) + \mu^\star(F_2) \leq \sum_{I_n \cap F_1 \neq \varnothing} |I_n| + \sum_{I_m \cap F_2 \neq \varnothing} |I_m| \leq \mu^\star(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$$

Si conclude per induzione. □

Proposizione 1.6. *Sia G un aperto limitato e ε una costante positiva. Allora esiste $F \subseteq G$ chiuso tale che*

$$\mu^\star(F) > \mu^\star(G) - \varepsilon,$$

ossia si può approssimare un aperto limitato dal basso con insiemi chiusi.

Dimostrazione. Costruisco una successione I_n di intervalli disgiunti tali che $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\mu^\star(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_n|$ (notare che vengono presi tutti i punti perché G è aperto usando la reticolazione in figura 1). Dico che esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{i=1}^{\overline{n}} |I_n| > \mu^\star(G) - \frac{\varepsilon}{2}$.

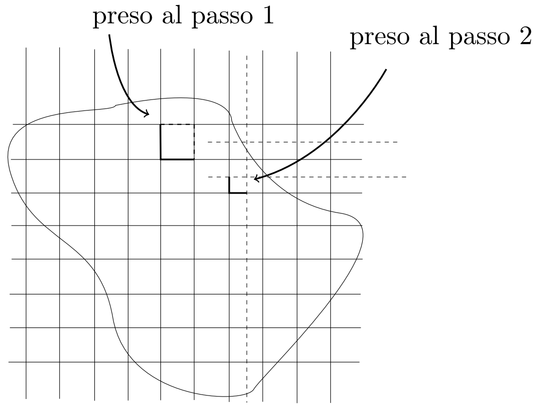


Figura 1: Reticolazione usata per costruire I_n della dimostrazione della Proposizione 1.6

Per ognuno degli I_i fisso un intervallo chiuso $J_i \subseteq I_i$ e tale che $|J_i| > |I_i| - \frac{\varepsilon}{2\overline{n}}$. In questo modo ho che evidentemente i J_i sono chiusi, limitati e disgiunti a due a due. Allora $F = \bigcup_{i=1}^{\overline{n}} J_i$. Allora per la proposizione precedente $\mu^\star(F) = \sum_{i=1}^{\overline{n}} \mu^\star(J_i) = \sum_{i=1}^{\overline{n}} |J_i| > \sum_{i=1}^{\overline{n}} |I_i| - \frac{\varepsilon}{2} > \mu^\star(G) - \varepsilon$. □

Proposizione 1.7. *Sia G un aperto* ***limitato****, $F \subseteq G$ chiuso. Allora*

$$\mu^\star(G \setminus F) = \mu^\star(G) - \mu^\star(F)$$

Dimostrazione. Per la proposizione 1.6, applicata sull'aperto $G \setminus F$, so che esiste un chiuso $F_1 \subseteq G \setminus F$ tale che $\mu^\star(F_1) > \mu^\star(G \setminus F) - \varepsilon$. Allora, per la proposizione 1.5, $\mu^\star(F) + \mu^\star(F_1) = \mu^\star(F \cup F_1)$, da cui

$$\mu^\star(F) + \mu^\star(G \setminus F) < \mu^\star(F) + \mu^\star(F_1) + \varepsilon = \mu^\star(F \cup F_1) + \varepsilon \leq \mu^\star(G) + \varepsilon$$

Inoltre, per subadditività, $\mu^\star(G) \leq \mu^\star(F) + \mu^\star(G \setminus F)$ da cui l'uguaglianza. Poiché sono tutti valori finiti, posso sottrarre $\mu^\star(F)$ da ambo i lati ottenendo la tesi. □

Definizione 1.7: Misurabilità secondo Lebesgue

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è **misurabile secondo Lebesgue** se $\forall \varepsilon > 0$ esistono un chiuso $F_\varepsilon \subseteq A$ e un aperto $G_\varepsilon \supseteq A$ tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$

Osservazione. Con i seguenti risultati si dimostrerà che la misura esterna $\mu^\star$, ristretta alla classe degli insiemi misurabili (secondo Lebesgue), è una misura.

Teorema 1.8

La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è un'algebra.

Dimostrazione.
1. $\varnothing$ è misurabile, poiché $F = \varnothing$ e $G = \varnothing$ soddisfano la definizione.

2. Se A è misurabile, allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono $F_\varepsilon \subseteq A$ chiuso e $G_\varepsilon \supseteq A$ aperto tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Allora $F_\varepsilon^C \supseteq A^C$ aperto e $G_\varepsilon^C \subseteq A^C$ chiuso, e $\mu^\star(G_\varepsilon^C \smallsetminus F_\varepsilon^C) = \mu^\star(G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

3. Se A, B sono misurabili, allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono $F_\varepsilon \subseteq A$ chiuso e $G_\varepsilon \supseteq A$ aperto tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, e $F'_\varepsilon \subseteq B$ chiuso e $G'_\varepsilon \supseteq B$ aperto tali che $\mu^\star(G'_\varepsilon \smallsetminus F'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

   Allora
$$\text{chiuso } F_\varepsilon \cap F'_\varepsilon \subseteq A \cap B \subseteq G_\varepsilon \cap G'_\varepsilon \text{ aperto}$$
   e
$$\mu^\star(G_\varepsilon \cap G'_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon \cap F'_\varepsilon) \leq \mu^\star(G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) + \mu^\star(G'_\varepsilon \smallsetminus F'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

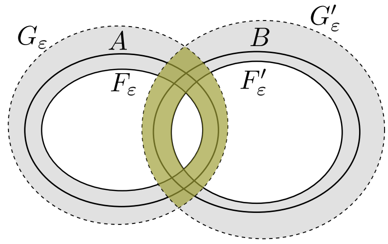


Figura 2: $G_\varepsilon \cap G'_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon \cap F'_\varepsilon \subseteq (G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) \cup (G'_\varepsilon \smallsetminus F'_\varepsilon)$

□

Proposizione 1.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ limitato. Allora A è misurabile se e solo se*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists F_\varepsilon \subseteq A \text{ chiuso} : \mu^\star(F_\varepsilon) > \mu^\star(A) - \varepsilon$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Se A è misurabile, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $F_\varepsilon \subseteq A$ chiuso e $G_\varepsilon \supseteq A$ aperto tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Allora, per monotonia e subadditività, $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(F_\varepsilon) + \mu^\star(G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) \leq \mu^\star(F_\varepsilon) + \varepsilon$

$\Longleftarrow$ Per 1.4 e la definizione di inf esiste una successione I_n di intervalli aperti di diametro ≤ 1 tali che $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |I_n| < \mu^\star(A) + \varepsilon$. Prendo come G_ε l'unione di tutti gli I_n tali che $I_n \cap A \neq \varnothing$. Allora G_ε è aperto limitato contenente A, limitato perché avendo diametro minore o eguale a 1 l'unione si "distacca" da A al più di 1. Allora
$$\mu^\star(G_\varepsilon \smallsetminus F_\varepsilon) = \mu^\star(G_\varepsilon) - \mu^\star(F_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_n| - \mu^\star(F_\varepsilon) < \mu^\star(A) + \varepsilon - \mu^\star(F_\varepsilon) < 2\varepsilon$$
La prima uguaglianza per 1.7 e l'ultima disuguaglianza per l'ipotesi.

□

Teorema 1.10

La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra su $\mathbb{R}^N$ e $\mu^\star$ è σ-additiva su $\mathcal{M}$. In altre parole, $\mu^\star$ ristretto a $\mathcal{M}$ è una misura.

Dimostrazione. Divideremo la dimostrazione in tre parti.

1. Sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_n \cap A_m = \varnothing$, $\forall n \neq m$ e $\exists I$ intervallo tale che $A_n \subseteq I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Allora $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq I$. Per la proposizione 1.9, dato $\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste un $F_n \subseteq A_n$ chiuso tale che $\mu^\star(F_n) > \mu^\star(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Per subadditività $\mu^\star(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^\star(A_i)$ quindi, per definizione di limite, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{i=1}^k \mu^\star(A_i) > \mu^\star(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Sia $F := \bigcup_{n=1}^k F_n$, che è chiuso. Allora possiamo dire che $\mu^\star(F) = \sum_{i=1}^k \mu^\star(F_i) > \sum_{i=1}^k \mu^\star(A_i) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu^\star(A) - \varepsilon$. Abbiamo quindi trovato un chiuso contenuto in A con la proprietà richiesta in 1.9, sfruttando la limitatezza di A se ne conclude la misurabilità.

   Per la $\sigma-$additività, sia k generico:

$$\sum_{i=1}^k \mu^\star(A_i) < \sum_{i=1}^k \mu^\star(F_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu^\star\left(\bigcup_{i=1}^k F_i\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^\star(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

   Da cui trovo che, per $\varepsilon \to 0$ e $k \to \infty$

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu^\star(A_i) \geq \mu^\star(A)$$

   dove la seconda uguaglianza è per la subadditività della misura esterna.

2. Sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_n \cap A_m = \varnothing$, $\forall n \neq m$. Di nuovo sia $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

   Reticoliamo $\mathbb{R}^N$ con intervalli $\{I_j\}$ **di diametro fissato** (e.g. 1) tali che $I_i \cap I_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ e $\bigcup_{j=1}^\infty I_j = \mathbb{R}^N$. Ci interessiamo agli insiemi $B_j := \bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cap I_j)$ che sono misurabili per il punto (1), infatti $(A_i \cap I_j) \subseteq I_j$, sono disgiunti a due a due e $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = A$. Per misurabilità e limitatezza dei B_j, fissati $\varepsilon > 0$ e j intero, esistono F_j chiuso e G_j aperto tali che $F_j \subseteq B_j \subseteq G_j$ e $\mu^\star(G_j \setminus F_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$. A questo punto definisco F, G:

$$F := \bigcup_{j=1}^\infty F_j \subseteq A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty G_j =: G$$

   È evidente che G è aperto. Inoltre F è chiuso. Infatti, data una successione $\{x_n\}$ convergente in $\mathbb{R}^N$ a valori in F, risulta limitata per la convergenza, e allora i suoi valori cadono in un numero finito di insiemi F_j (per come è stato reticolato $\mathbb{R}^N$). Poiché l'unione di tali F_j è chiusa, ho che $x \in F$, e quindi F è chiuso.

   Adesso prendiamo

$$G \setminus F = \bigcup_{j=1}^\infty (G_j - F) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty (G_j - F_j)$$

   che ha misura $\mu^\star(G \setminus F) \leq \sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$ quindi A è misurabile.

   Ora vogliamo mostrare la σ-additività. Possiamo assumere che $\mu^\star(A_i) < +\infty$ per ogni i, altrimenti la tesi è banale. Nel caso in cui $\sum_{i=1}^\infty \mu^\star(A_i) = +\infty$, deduciamo che

$$\sum_{i=1}^k \mu^\star(A_i) \overset{\mathcal{M} \text{ è un'algebra}}{=} \mu^\star\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \mu^\star(A) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

   e quindi $\mu^\star(A) = +\infty$.

Si analizza infine il caso in cui $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i)$ converge. Poiché $\mu^\star(A_i)$ è minore o eguale a $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_i \cap I_j)$ abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_i \cap I_j) \overset{1.}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(B_j)$$

Avendo invertito le serie nell'ultimo passaggio (serie assolutamente convergente). Analizziamo la ridotta

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \mu^\star(B_j) &\leq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(F_j) + \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(G_j \setminus F_j) \\ &\leq \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^j} \\ &\leq \mu^\star(A) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Dove nella diseguaglianza centrale si è usata la proposizione 1.5. Assieme alla disuguaglianza precedente, per $n \to \infty$ e per arbitrarietà di ε otteniamo che $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i) \leq \mu^\star(A)$, mentre l'altra diseguaglianza è data dalla subadditività.

3. Sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ e $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Vogliamo provare che $A \in \mathcal{M}$. La dimostrazione è simile ad alcune già viste. Costruisco un'altra successione $\{B_n\} \subseteq \mathcal{M}$ di insiemi a due a due disgiunti. Definisco $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \smallsetminus A_1$, $B_3 = A_3 \smallsetminus (A_1 \cup A_2)$, ecc. Sono misurabili perché sappiamo già che $\mathcal{M}$ è un'algebra. Ora poiché $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_j$, A è misurabile per il punto 2.

□

Quindi ora possiamo considerare lo spazio di misura di Lebesgue $\left(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}, \mu\right)$ con $\mathcal{M}$ i misurabili secondo Lebesgue e $\mu = \mu^\star$ la misura esterna.

Teorema 1.11: Caratterizzazione degli insiemi misurabili

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile secondo Lebesgue se e solo se A può essere rappresentato come

- Unione numerabile di chiusi e di un insieme trascurabile

oppure

- Intersezione numerabile di aperti meno un trascurabile

Dimostrazione. Gli intervalli sono misurabili, l'insieme vuoto è misurabile. Sia N un insieme trascurabile, allora N è misurabile. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ prendo $\varnothing =: F \subseteq N \subseteq G := \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ con I_i intervalli aperti e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(I_i) < \varepsilon$, a questo punto naturalmente quindi $\mu^\star(G \smallsetminus F) < \varepsilon$. Gli aperti sono misurabili, infatti un aperto limitato si può scrivere come unione numerabile di intervalli (per II-numerabilità). Nel caso in cui A sia un aperto qualunque, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A \cap (-n, n)^N\right)$, ciascuna delle intersezioni è unione numerabile di intervalli e l'unione numerabile di un'unione numerabile è numerabile, quindi è misurabile. Inoltre tutti i chiusi sono misurabili in quanto complementare di aperti. Ne consegue che la σ-algebra $\mathcal{B}$ di Borel generata dalla famiglia τ degli aperti di $\mathbb{R}^n$ è contenuta in $\mathcal{M}$.

Ne consegue che se scrivo A come unione numerabile di chiusi e di un trascurabile allora A è misurabile. Stessa cosa se scrivo A come intersezione numerabile di aperti meno un trascurabile.

Per il viceversa, supponiamo A misurabile, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono chiuso F_n e aperto G_n con $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ e $\mu^\star(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Considero $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e sia $N = A \setminus F$. N è trascurabile perché $\mu^\star(N) = \mu^\star(A \setminus F) \leq \mu^\star(G_n \setminus F) \leq \mu^\star(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ per ogni n quindi $\mu^\star(N) = 0$. In pratica quindi $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cup N$ unione numerabile di chiusi e di un trascurabile. Il complementare di A quindi si può rappresentare come $A^C = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right)^C \cap N^C = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^C\right) \setminus N$ ossia nel secondo modo. □

Proposizione 1.12. *Vale la seguente proprietà:*

$$\mu^\star(A) = \inf\{\mu(G) : G \text{ aperto }, G \supseteq A\} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Se inoltre $A \in \mathcal{M}$ allora

$$\mu(A) = \mu^\star(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ chiuso e limitato}, F \subseteq A\}$$

Dimostrazione. La prima è una conseguenza della rappresentabilità di un aperto tramite intervalli. Fissato ora $\varepsilon > 0$ e posto $A_n = A \cap (-n, n)^N$, per$A$ misurabile abbiamo

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

Se $\mu(A) < +\infty$ esiste n tale che $\mu(A_n) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ e A_n contiene un chiuso F tale che $\mu(F) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}$. Se invece $\mu(A) = +\infty$ esiste n con $\mu(A_n) > \varepsilon$ e A_n contiene un chiuso F tale che $\mu(F) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}$, pertanto $\mu(F) > \frac{\varepsilon}{2}$.

□

1.4 Insiemi Trascurabili

Un concetto molto importante della teoria della misura è quello di insieme trascurabile, ovvero di misura nulla.

Esempio 1.9. In $\mathbb{R}$ i punti sono trascurabili e le unioni numerabili di trascurabili sono trascurabili per σ-additività. In particolare, $\mathbb{Q}$ è trascurabile in $\mathbb{R}$

La funzione di Dirichlet è un esempio di funzione che non è integrabile secondo Riemann, ma è integrabile secondo Lebesgue. Vedremo più avanti in dettaglio ma per ora notiamo che la funzione di Dirichlet è

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Allora $d = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$ (quasi ovunque in X significa in $X \setminus N$ dove N è un trascurabile, come nella definizione 1.5).

Esempio 1.10. In $\mathbb{R}^2$ segmenti e rette sono insiemi trascurabili. L'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$$

è trascurabile in $\mathbb{R}^2$ poiché unione numerabile di rette $x = q$ con $q \in \mathbb{Q}$

Esempio 1.11 (Insieme di Cantor)**.** L'insieme di Cantor è un trascurabile di $\mathbb{R}$ che ha la cardinalità del continuo. Si costruisce prendendo la seguente successione di insiemi chiusi in $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

C_n è composto da 2^n intervallini ciascuno di lunghezza $\frac{1}{3^n}$ L'insieme di Cantor è

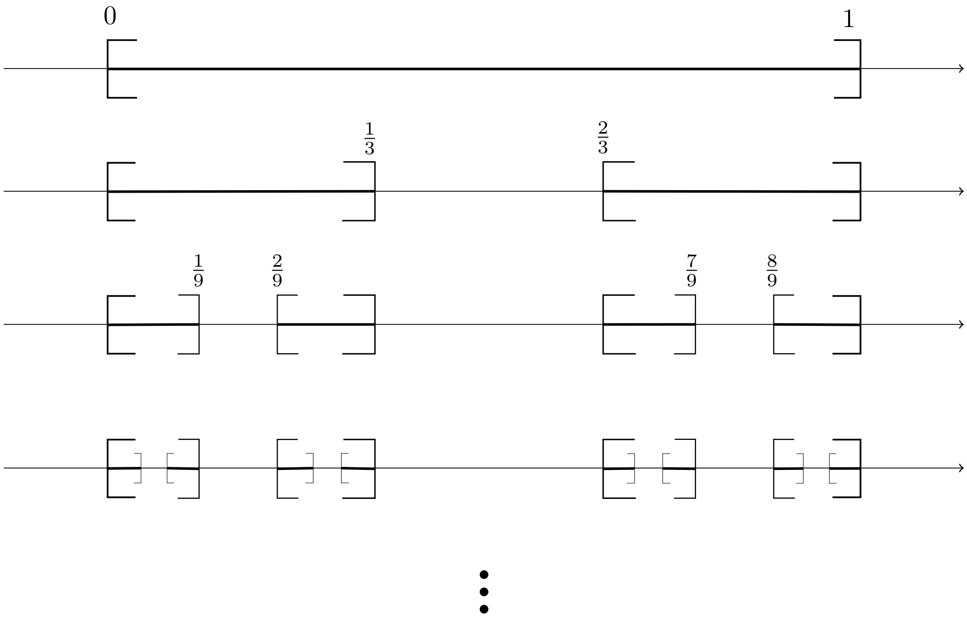


Figura 3: Successione la cui intersezione è l'insieme di Cantor

definito come

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \tag{1.1}$$

C è chiuso perché ogni C_n è chiuso, e C è non vuoto perché ad esempio $0 \in C$.

C_n è una successione decrescente di insiemi, di cui $\mu(C_0) = 1 < +\infty$. Allora per continuità della misura esterna

$$\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 0$$

quindi C è trascurabile.

Ora vogliamo dimostrare che ha la cardinalità del continuo. Scriviamo ogni numero di $[0,1]$ in base 3 come $0.c_1c_2c_3\ldots c_n\ldots_3$ con $c_i \in \{0,1,2\}$, scrittura equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$. La scrittura non è univoca: ad esempio il punto $\frac{1}{3}$ si può scrivere come 0.1 oppure $0.0\overline{2}$ dove la barra indica la periodicità. Notiamo che i punti dell'insieme di Cantor si **possono** rappresentare in base ternaria utilizzando le sole cifre 0 e 2.

I punti dell'intervallo $[0,1]$ si possono rappresentare anche in base binaria, ossia $y \in [0,1]$ si può scrivere come $0.d_1d_2\ldots d_n\ldots_2$ dove $d_i \in \{0,1\}$ per ogni i e $y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n 2^{-n}$. Ad esempio $1 = 0.\overline{1}_2$.

Possiamo costruire una funzione suriettiva dall'insieme di Cantor ai punti di $[0,1]$ (ossia determinare che la cardinalità di C è almeno quella del continuo) come segue. Si consideri x scritto usando le sole cifre $0,2$.

$$\begin{aligned} x \in C &\longmapsto y \in [0,1] \\ x = 0.c_1c_2\dots c_n\dots{}_3 &\longmapsto y = 0.d_1d_2\dots d_n\dots{}_2 \\ d_n = \frac{c_n}{2} & \qquad\quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ossia associamo a ogni punto dell'insieme di Cantor il numero reale ottenuto dividendo ogni sua cifra in base ternaria per due e leggendolo in base binaria. È una funzione suriettiva perché per ogni punto $y \in [0,1]$ possiamo ottenere un $x \in C$ moltiplicando per due ogni cifra e leggendo il numero in base ternaria. Notare che questa funzione non è iniettiva poiché, ad esempio, sia $\frac{1}{3} = 0.0\overline{2}_3$ che $\frac{2}{3} = 0.2_3$ hanno come immagine $\frac{1}{2} = 0.1_2 = 0.0\overline{1}_2$. Per determinare che la cardinalità è al più quella del continuo ho bisogno di una funzione iniettiva, ed è sufficiente l'inclusione. Concludo, per il teorema di Schröder–Bernstein, che esiste una biiezione tra C e $[0,1]$, ossia C ha la cardinalità del continuo.

1.5 Funzioni misurabili

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Definizione 1.8: Funzione misurabile

La funzione $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ si dice **misurabile** se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$$

La definizione verrà parzialmente motivata dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.13. *Le seguenti sono equivalenti:*

i) $f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) $f^{-1}([\alpha, +\infty]) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii) $f^{-1}([-\infty, \alpha)) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Dimostriamo che $i) \implies ii) \implies iii) \implies iv) \implies i)$.

Scriviamo quindi

$$f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \Omega : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

che è intersezione numerabile di insiemi misurabili (se vale la $i)$), quindi è misurabile.

Se ora vale la $ii)$, allora

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \left(f^{-1}([\alpha, +\infty])\right)^C \in \mathcal{M}$$

per cui vale la $iii)$. Analogamente alla prima implicazione, se vale la $iii)$ allora

$$f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \Omega : f(x) > \alpha + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$$

e quindi vale la *iv*). Infine se vale la *iv*) allora, analogamente alla seconda implicazione,

$$f^{-1}((\alpha,+\infty]) = \left(f^{-1}([-\infty,\alpha])\right)^C \in \mathcal{M}$$

e quindi vale la *i*). $\square$

Grazie alla proposizione so che f è misurabile se e solo se le controimmagini di tutte le semirette sono misurabili. Ma quindi anche tutti i segmenti sono misurabili, siccome $[a,b] = [a,+\infty] \cap [-\infty,b]$. Essendo misurabili le controimmagini degli intervalli, abbiamo che anche le controimmagini dei boreliani sono misurabili (i boreliani sono unioni numerabili di intervalli).

Le funzioni tipicamente incontrate sono misurabili, costruire una funzione non misurabile non è banale e richiede l'assioma della scelta. Ora procediamo con alcune proprietà della classe delle funzioni misurabili.

Proposizione 1.14. *Siano f,g funzioni misurabili. Allora anche* $\max(f,g)$ *e* $\min(f,g)$ *sono misurabili.*

Dimostrazione.

$$\{x \in \Omega : \max(f,g)(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in \Omega : g(x) > \alpha\}$$

che è unione di insiemi misurabili, quindi è misurabile. Analogamente per il minimo con l'intersezione. $\square$

Proposizione 1.15. *Sia f una funzione misurabile, allora anche $-f, f^+, f^-, |f|$ sono misurabili*

Dimostrazione. Per $-f$:

$$\{x \in \Omega : -f(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega : f(x) < -\alpha\}$$

che è misurabile per ipotesi.

Naturalmente anche la funzione 0 è misurabile, poiché la controimmagine delle semirette è $\varnothing$ oppure Ω che sono entrambi misurabili. Quindi anche $f^+ = \max(f,0)$ e $f^- = -\min(f,0)$ sono misurabili per sopra e per la proposizione precedente.

Per $|f|$:

$$\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in \Omega : f(x) < -\alpha\} & \alpha \geq 0 \\ \Omega & \alpha < 0 \end{cases}$$

$\square$

Proposizione 1.16. *Se f_n è una successione di funzioni misurabili allora*

$$g(x) = \sup_n f_n(x), \quad h(x) = \inf_n f_n(x), \quad u(x) = \limsup_n f_n(x), \quad v(x) = \liminf_n f_n(x)$$

sono tutte misurabili

Corollario 1.16.1. *Se f_n converge puntualmente a f allora f è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $g(x) = \sup_n f_n(x)$, allora

$$\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) > \alpha\}$$

poiché significa che esiste almeno un n tale che $f_n(x) > \alpha$.

Sia $h(x) = \inf_n f_n(x)$, consideriamo

$$\{x \in \Omega : h(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) > \alpha\}$$

poiché significa che per ogni n vale $f_n(x) > \alpha$.

Per quanto riguarda $u(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k(x)$ e $v(x) = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k(x)$ segue dal risultato su inf e sup.

Il corollario segue ovviamente poiché se la funzione converge allora il limite è ad esempio uguale al $\liminf$ $\square$

Proposizione 1.17. *Siano f, g misurabili. Allora la somma $f + g$, se è ben definita*[1]*, è misurabile.*

Dimostrazione.

$$\{x \in \Omega : f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \big(\{x \in \Omega : f(x) > \alpha - q\} \cap \{x \in \Omega : g(x) > q\}\big)$$

che è unione numerabile di insiemi misurabili, quindi è misurabile. L'eguaglianza è giustificata dal fatto che se $f(x) + g(x) > \alpha$ e $|g(x)| < \infty$ allora ad esempio $f(x) > \alpha - g(x) > \alpha - q$ per qualche $q < g(x)$ razionale, che esiste perché sicuramente tra $\alpha - f(x)$ e $g(x)$ esiste un razionale per densità di $\mathbb{Q}$, mentre se $f(x) = +\infty$ allora sicuramente $f(x) > \alpha - q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ quindi basta sceglierne uno tale che $g(x) > q$ che è fattibile sempre poiché per ipotesi $g(x) > -\infty$. L'altra implicazione invece è data dal fatto che se, per qualche q, $f(x) > \alpha - q$ e $q < g(x)$ allora $f(x) > \alpha - g(x)$ da cui $x \in (f+g)^{-1}((\alpha, +\infty])$. Infine se invece $g(x) = +\infty$ allora qualsiasi x è in $(f+g)^{-1}((\alpha, +\infty])$, ed esiste sempre un q tale che $f(x) > \alpha - q$ poiché $f(x) > -\infty$. È facile similmente notare che se $f(x)$ oppure $g(x)$ sono eguali a $-\infty$ allora entrambi gli insiemi sono $\varnothing$. $\square$

Proposizione 1.18. *Siano f, g misurabili. Allora $f \cdot g$ è misurabile, purché l'operazione sia ben definita.*

Dimostrazione. Iniziamo provando che se h è misurabile allora h^2 è misurabile. Questo perché $h^2(x) > \alpha \iff |h(x)| > \sqrt{\alpha}$ se α è positivo (altrimenti la controimmagine è banalmente misurabile). Ma allora chiedere che h^2 sia misurabile è equivalente a chiedere che lo sia $|h|$.

Inoltre se h è misurabile, allora $c\,h$, con $c \in \mathbb{R}$, è misurabile in quanto $c \cdot h(x) > \alpha \iff h(x) > \frac{\alpha}{c}$.

Notare adesso che $\dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} = fg$. $\square$

Proposizione 1.19. *Siano f, g misurabili. Allora $\frac{f}{g}$ è misurabile, purché l'operazione sia ben definita.*

Dimostrazione. Basta controllare che se h è misurabile e $h \neq 0$ allora anche $\frac{1}{h}$ è misurabile, poi usare la proposizione precedente. Infatti $\frac{1}{h(x)} > \alpha$ se e solo se

- $0 < h(x) < \frac{1}{\alpha}$ se $\alpha > 0$
- $h(x) < \frac{1}{\alpha}$ o $h(x) > 0$ se $\alpha < 0$
- $h(x) > 0$ se $\alpha = 0$

In tutti i tre e casi gli x che soddisfano tale requisito formano per ipotesi un insieme misurabile. $\square$

[1] ossia quando non succede mai che una delle due faccia $+\infty$ e l'altra $-\infty$

Definizione 1.9: Funzione semplice

Consideriamo uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Le **funzioni semplici** sono le funzioni che assumono un numero finito di valori reali. Quindi $s : \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice se si può scrivere come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche, ossia

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$$

dove $E_1, \dots, E_n$ sono sottoinsiemi di Ω e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.
Inoltre la funzione è semplice misurabile se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}$.

Esiste sempre una rappresentazione in tale modo di s dove i coefficienti $c_1, \dots, c_n$ sono diversi tra loro e gli insiemi $E_1, \dots, E_n$ sono a due a due disgiunti. Queste funzioni sono particolarmente utili nell'approssimare funzioni. Più precisamente

Proposizione 1.20. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Allora esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tali che $s_n \to f$ puntualmente. Se f è misurabile, allora anche le s_n possono essere scelte tutte misurabili. Inoltre se $f \geq 0$ ($f \leq 0$) in Ω, allora la successione $\{s_n\}$ può essere presa monotona non decrescente (non crescente).*

Dimostrazione. Cominciamo da f non negativa. Per n fissato scegliamo gli insiemi in base ai **valori** di f. Consideriamo $i = 1, \dots, n2^n$ e prendiamo

$$E_{n,i} = \left\{ x \in \Omega : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, \dots, n2^n\}$$

Inoltre sia

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\}$$

Ora possiamo scrivere

$$s_n(x) := \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x)$$

Abbiamo $s_n \leq f$ per costruzione. Vogliamo mostrare che per ogni $x \in \Omega$ abbiamo $s_n(x) \to f(x)$.

- Se $f(x) = +\infty$ allora $s_n(x) = n \to +\infty$
- Se $f(x) = 0$ allora $s_n(x) = 0 \to 0$
- Se $n \leq f(x) < n + 1$ allora $|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$

È chiaro che se f è misurabile allora ogni s_n è misurabile, gli insiemi scelti sono controimmagini di segmenti (gli $E_{n,i}$) e una semiretta (F_n).

Controlliamo che la successione s_n sia monotona non decrescente. Passando da s_n a s_{n+1} abbiamo un intervallo in più $[n, n+1)$, quindi se $f(x) < n$ allora $s_{n+1}(x) = s_n(x)$ oppure $s_{n+1}(x) = s_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}}$. Quindi la successione è non decrescente.

Consideriamo ora f di segno qualsiasi. Abbiamo $f = f^+ - f^-$, dove f^+ e f^- sono non negative. Costruiamo due successioni di funzioni semplici s_n^+ e s_n^- che convergono rispettivamente a f^+ e f^- e osserviamo che $s_n = s_n^+ - s_n^-$ è ancora una successione di funzioni semplici che converge a f. □

Osservazione. Se f è limitata allora la successione s_n converge uniformemente a f, infatti se $f = f^+ - f^-$ e sia f^+ che f^- sono limitate, per cui succede che $|f^+ - s_n^+| \leq \frac{1}{2^n}$ definitivamente e analogamente per f^-.

Lemma 1.21

Sia ora $\Omega = \mathbb{R}^N$ e sia $\mathcal{L}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Allora valgono tutte le considerazioni della proposizione precedente e inoltre la successione $\{s_n\}$ può essere scelta in modo che tutte le s_n siano nulle al di fuori di un compatto

Dimostrazione. Posso considerare una successione K_n di compatti che invade tutto $\mathbb{R}^N$ (esempio le palle, gli ipercubi, ecc) e operiamo come prima ma con una modifica (caso $f \geq 0$):

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i} \cap K_n}(x) + n\chi_{F_n \cap K_n}(x)$$

□

1.6 Integrale di Lebesgue

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Cominciamo dalle funzioni semplici misurabili non negative, ossia

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \quad c_i \geq 0 \ E_i \in \mathcal{M} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Allora definiamo un *integrale elementare* su $E \in \mathcal{M}$

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

Dove per convenzione $c_i\mu(E \cap E_i) = 0$ se $c_i = 0$ e $\mu(E \cap E_i) = +\infty$.

Esempio 1.12. In $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue, se prendo $s = \chi_{[0,+\infty)}$, allora $I_{\mathbb{R}}(s) = \mu([0, +\infty)) = +\infty$

Definizione 1.10: Integrale di Lebesgue

Sia $f : \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile e non negativa. Allora per ogni $E \in \mathcal{M}$ definiamo

$$\int_E f \, d\mu = \sup\{I_E(s) : s \text{ semplice misurabile }, 0 \leq s \leq f \text{ in } E \ \}$$

Se ora f è misurabile e di segno qualunque allora scrivendo $f = f^+ - f^-$ che noto sono misurabili e non negative, quindi, se almeno uno tra $\int_E f^+ d\mu$ e $\int_E f^- d\mu$ è finito definiamo

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

Se entrambi f^+ e f^- hanno integrale finito su E allora f è detta **integrabile** (o sommabile) su E e si scrive $f \in L^1(E)$.

Si tratta di una buona definizione? L'insieme su cui si valuta il sup non è vuoto, poiché la funzione $0 \leq f$ è una funzione semplice. Inoltre il sup può essere sia finito che $+\infty$.Inoltre è consistente con l'integrale elementare: se f è una funzione semplice, allora $\int_E f \, d\mu = I_E(f)$, infatti $f \leq f$ è semplice e per ogni s misurabile e tale che $0 \leq s \leq f$ in E avrò che $I_E(s) \leq I_E(f)$.

Proprietà dell'integrale

1. Se $f \in L^1(E)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f \in L^1(E)$ e $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

   Dimostrazione. Sia f misurabile e non negativa, sia $\alpha > 0$. Allora $\forall s$ semplice con $0 \leq s \leq f$ in E si ha che $I_E(\alpha s) = \alpha I_E(s)$ e che $0 \leq \alpha s \leq \alpha f$; procedendo con il sup il lato sinistro diventa $\alpha \int_E f d\mu$ e il lato destro notiamo che ogni αs è una funzione semplice u che rispetta la definizione di integrale per αf, quindi procedendo con il sup otteniamo la proprietà.

   Ora possiamo estendere a f misurabile e $\alpha \in \mathbb{R}$ scrivendo $f = f^+ - f^-$ e osservando che $\alpha f = \text{sign}(\alpha)|\alpha| f^+ - \text{sign}(\alpha)|\alpha| f^-$ dove se $\alpha < 0$ allora $-\text{sign}(\alpha) f^-$ e $-\text{sign}(\alpha) f^+$ sono non negative e misurabili. □

2. Se $f, g \in L^1(E)$ e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$, allora $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

   Dimostrazione. Sia $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$. Allora naturalmente $f^+ \leq g^+$ perché la funzione $x \mapsto x^+$ è non decrescente e $f^- \geq g^-$ perché la funzione $x \mapsto x^-$ è non crescente. Necessariamente ora $\int_E f^+ d\mu \leq \int_E g^+ d\mu$ per definizione col sup e similmente $\int_E g^- d\mu \leq \int_E f^- d\mu$ e infine dalle due diseguaglianze si ottiene quella richiesta. □

3. Se $\mu(E) < +\infty$, f è misurabile, e esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq f(x) \leq b$ per ogni $x \in E$ allora $f \in L^1(E)$ e $a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E)$

   Dimostrazione. $f = f^+ - f^-$ e abbiamo che $0 \leq a^+ \leq f^+ \leq b^+$ e $a^- \geq f^- \geq b^- \geq 0$. Le funzioni che valgono a^+, b^+, a^-, b^- su E sono funzioni semplici misurabili con integrale dato da $a^+\mu(E), b^+\mu(E), a^-\mu(E), b^-\mu(E)$ rispettivamente. Ora per definizione con il sup abbiamo che $\int_E f^+ d\mu \geq a^+\mu(E)$ e $\int_E f^- d\mu \geq b^-\mu(E)$. Sempre pensando alla definizione col sup notiamo che se s è una funzione semplice misurabile tale che $0 \leq s \leq f^+$ allora $s \leq b^+$ e quindi necessariamente $\int_E f^+ d\mu \leq \int_E b^+ d\mu = I_E(b^+) = b^+\mu(E)$. Similmente si trova anche $\int_E f^- d\mu \leq a^-\mu(E)$. Il risultato segue. □

4. Se $f \in L^1(E)$, $A \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq E$ allora $f \in L^1(A)$

   Dimostrazione. Abbiamo che $\int_E f^+ d\mu$ e $\int_E f^- d\mu$ sono entrambi finiti e

   $$\int_A f^+ d\mu = \int_E f^+ \chi_A d\mu \leq \int_E f^+ d\mu$$

   Similmente per f^-. □

5. Se $\mu(E) = 0$ e f è misurabile allora $f \in L^1(E)$ e $\int_E f d\mu = 0$

   Dimostrazione. Consideriamo la definizione col sup di $\int_E f^+ d\mu$ e allora per ogni s semplice misurabile tale che $0 \leq s \leq f^+$ abbiamo che
   $I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_1 \mu(E \cap E_i) = 0$ □

Teorema 1.22: Teorema di generazione di misure

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : \Omega \to [0, +\infty]$ una funzione misurabile e non negativa. Allora la funzione di insieme

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

è una misura

Dimostrazione. 1. $\nu(\varnothing) = \int_\varnothing f d\mu = 0$

2. Siano $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ con $A_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti, vogliamo provare che

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$$

Innanzitutto assumeremo che tutti i $\nu(A_n) < +\infty$ per ogni n, altrimenti naturalmente $\nu(A) = +\infty$ poiché $A_n \subseteq A$. Se $f = s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ semplice misurabile non negativa allora

$$\int_A s d\mu = I_A(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k \cap E_i)$$

Dove si è usata la σ-additività di μ. Scambiamo la somma e la serie. Lo possiamo fare perché:

(a) se sono tutte convergenti non c'è problema;

(b) se una delle serie corrispondenti a un $c_i > 0$ dovesse divergere allora necessariamente l'integrale originale è $+\infty$, ma anche la serie ottenuta scambiando somma e serie diverge, poiché ha termine generale maggiore di quello della serie divergente.

Quindi

$$I_A(s) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_k \cap E_i) = \sum_{k=1}^\infty I_{A_k}(s) = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} s d\mu$$

Sia ora f misurabile e non negativa e $0 \leq s \leq f$ in A. Abbiamo che

$$I_A(s) = \sum_{k=1}^\infty I_{A_k}(s) \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} f d\mu$$

Usando la definizione col sup otteniamo la diseguaglianza

$$\int_A f d\mu \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} f d\mu$$

Ora vogliamo dimostrare la diseguaglianza inversa. Per definizione di integrale, per ogni $\varepsilon > 0$ e $k = 1, \ldots, m$ esistono $s_1, \ldots, s_m$ semplici, misurabili e $0 \leq s_i \leq f$ in A_i tali che

$$\int_{A_i} f d\mu \leq \int_{A_i} s_i d\mu + \frac{\varepsilon}{m}$$

Osservo ora la funzione $s(x) = s_i(x)$ se $x \in A_i$ per $i = 1, \ldots, m$. Allora s è semplice, misurabile e $0 \leq s \leq f$ in $\bigcup_{i=1}^m A_i$. A questo punto

$$\sum_{i=1}^m \int_{A_i} f d\mu - m\frac{\varepsilon}{m} \leq \sum_{i=1}^m \int_{A_i} s_i d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^m A_i} s d\mu \leq \int_A f d\mu$$

Da cui troviamo che

$$\varepsilon + \int_A f d\mu \geq \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} f d\mu \quad \forall \varepsilon > 0\,,\, \forall m \in \mathbb{N}$$

per arbitrarietà di ε e per $m \to +\infty$ otteniamo la diseguaglianza desiderata.

$\square$

Corollario 1.22.1 (σ-additività dell'integrale)**.** *Se $f \in L^1(A)$ e $\{A_n\}$ è una successione di insiemi disgiunti a due a due, con $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, allora $f \in L^1(A_n)$ per ogni n e*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

Dimostrazione. Sia $f = f^+ - f^-$ e per f^+ e f^- vale il teorema di generazione di misure. $\square$

Corollario 1.22.2. *Se $f, g \in L^1(\Omega)$ e $f = g$ quasi ovunque in Ω, allora*

$$\forall E \in \mathcal{M} \qquad \int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

Dimostrazione. Se $f = g$ quasi ovunque allora esiste un insieme $F \in \mathcal{M}$ con $\mu(F) = 0$ tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \Omega \smallsetminus F$. Allora abbiamo

$$\int_E f d\mu = \int_{E\cap F} f d\mu + \int_{E\smallsetminus F} f d\mu = \int_{E\cap F} g d\mu + \int_{E\smallsetminus F} g d\mu = \int_E g d\mu$$

Dove i due integrali su $E \cap F$ sono uguali in quanto entrambi integrali su un trascurabile quindi uguali a 0 $\square$

Proposizione 1.23. *Sia $f \in L^1(E)$. Allora $|f| \in L^1(E)$ e*

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

Dimostrazione. $|f|$ è misurabile perché f è misurabile. Gli insiemi $A = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$ e $B = \{x \in E : f(x) < 0\}$ sono entrambi misurabili per misurabilità di f. Allora abbiamo che

$$\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty$$

dove gli ultimi due integrali sono finiti per ipotesi.

La diseguaglianza è ovvia, infatti

$$\left| \int_E f d\mu \right| = \left| \int_A f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu \right| \leq \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu = \int_E |f| d\mu$$

$\square$

Teorema 1.24: CNES per l'integrabilità

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ misurabile. Allora f è integrabile se e solo se esiste g integrabile tale che $|f| \leq g$ quasi ovunque, in simboli:

$$f \in L^1(\Omega) \iff \exists g \in L^1(\Omega) \quad |f| \leq g \quad \text{q.o.}$$

Nota. In questi casi si usa dire che f è "dominata" da g. L'enunciato precedente quindi si può anche dire f è integrabile se e solo se è misurabile e dominata da una funzione integrabile.

Dimostrazione. Se f è integrabile, allora è misurabile e dominata da $|f|$. Viceversa, se $|f| \leq g$ in Ω allora $f^+ < g$ e $f^- < g$. Allora $f^+, f^- \in L^1(\Omega)$ e dunque $f \in L^1(\Omega)$ □

Corollario 1.24.1. *In particolare se $|f|$ è integrabile e f è misurabile allora f è integrabile.*

Con questo risultato l'integrale di Lebesgue si distingue molto dall'integrale di Riemann. Ad esempio la funzione definita su $[0,1]$ come 1 sui razionali e -1 su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è integrabile secondo Riemann ma lo è secondo Lebesgue perché $|f| = 1$ è integrabile.

Integrale di Riemann L'integrale di Lebesgue che abbiamo introdotto è un'estensione dell'integrale di Riemann, cioè *ogni funzione R-integrabile è anche L-integrabile e, quando esistono entrambi gli integrali, questi coincidono.* Infatti una funzione f si dice R-integrabile in E se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una somma inferiore S e una somma superiore T tali che $T - S < \varepsilon$. Per ogni somma (superiore e inferiore) possiamo considerare la funzione a scala che su ogni elemento di suddivisione (intervallino, quadratino, ecc) prende il valore specifico che appare nella somma.

Osservazione. Le funzioni a scala sono particolari funzioni semplici, anche se la "filosofia" è diversa: per le funzioni a scala si divide il dominio, mentre per le funzioni semplici si guardano i valori assunti dalla funzione e poi si costruiscono gli insiemi su cui la funzione assume quei valori.

Chiamiamo

$$I_R = \sup_{\substack{s \text{ a scala} \\ s \leq f}} \int_E s dx = \inf_{\substack{S \text{ a scala} \\ t \geq f}} \int_E t dx$$

Invece f è L-integrabile se $f^+, f^- \in L^1(E)$. Se f è R-integrabile allora anche f^+ e f^- lo sono. Basta quindi mostrare che se g è non-negativa e R-integrabile allora è anche L-integrabile e i due integrali coincidono. Esiste quindi $I_R(g) = \int_E g dx$ integrale di Riemann. Per g tale esiste anche

$$I_L(g) = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \text{ semplice, misurabile, e } 0 \leq s \leq g \text{ in E} \right\}$$

Dobbiamo quindi provare che $I_R(g) = I_L(g)$. A tale scopo possiamo controllare che sia $I_R(g) < I_R(g)$ che $I_R(g) < I_L(g)$ portano a contraddizioni. Nel primo caso abbiamo $I_R(g) < I_L(g)$ quindi esiste una funzione a scala t tale che $t \geq g$ in E e $I_R(g) \leq \int_E t dx < I_L(g)$. Per tale funzione a scala, essendo t anche semplice abbiamo che $\int_E t dx = \int_E t d\mu$ ma allora ogni s nell'insieme il cui sup è $I_L(g)$ verifica $0 \leq s \leq t$ e quindi

$$\int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu < I_L(g)$$

e quindi $\int_E t d\mu$ è un maggiorante dell'insieme, per cui $I_L(g)$ non ne può essere il sup.

Supponiamo ora invece che $I_R(g) > I_L(g)$, allora esiste una funzione a scala s tale che $s \leq g$ in E e $I_L(g) < \int_E s d\mu \leq I_R(g)$. Ma allora s appartiene all'insieme il cui sup è $I_L(g)$ e ha un integrale più grande del sup stesso.

Ne consegue necessariamente che $I_L(g) = I_R(g)$

1.7 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Teorema 1.25: Beppo Levi - versione base

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione monotona non decrescente di funzioni misurabili e non negative su Ω. Posto $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \Omega$, allora $\forall E \in \mathcal{M}$ si ha

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Sia $\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, dove $\alpha \in [0, +\infty]$. Per monotonia dell'integrale e della successione di funzioni si ha

$$\int_E f d\mu \geq \int_E f_n d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \int_E f d\mu \geq \alpha$$

Vogliamo dimostrare l'altra diseguaglianza. Sia s semplice, misurabile e tale che $0 \leq s \leq f$ in E. Fissiamo $\delta \in (0,1)$ e definiamo la successione di insiemi

$$E_n := \{x \in E : f_n(x) \geq \delta s(x)\}$$

Affermiamo che $E_n \subseteq E_{n+1}$ e che $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Infatti, se x è tale che $f(x) < +\infty$ allora sicuramente esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f_n(x) \geq \delta s(x)$ per ogni $n \geq \overline{n}$ (per l'osservazione a 1.20). Nei punti in cui $f(x) = +\infty$, per limitatezza di s, vale lo stesso senza bisogno di ricorrere all'uso del δ. Quindi:

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \delta \int_{E_n} s d\mu$$

Nel limite per $n \to +\infty$ otteniamo

$$\alpha \geq \delta \int_E s d\mu \quad \forall \delta \in (0,1)$$

Per definizione di α e per continuità della misura data da s. Poiché vale per ogni $\delta \in (0,1)$ deve valere anche per $\delta = 1$. Otteniamo quindi

$$\alpha \geq \int_E s d\mu \quad \forall s \text{ semplice, misurabile e } 0 \leq s \leq f \text{ in } E$$

Prendendo il sup otteniamo la diseguaglianza desiderata. □

Lemma 1.26: Lemma di Fatou - versione base

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili e non negative su Ω. Allora, per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Sia $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. La successione $\{g_n\}$ è non negativa e di funzioni misurabili, inoltre $0 \leq g_n \leq f_n$ e $g_n \leq g_{n+1}$. Quindi g_n è una successione non decrescente e per il teorema di Beppo Levi abbiamo che

$$\int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu$$

Poiché $g_n \leq f_n$ per ogni n, e poiché $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sup_{n\in N} g_n(x) =$
$= \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu &= \int_E \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.\end{aligned}$$

Poiché $\lim = \liminf$ se il limite esiste e il $\liminf$ conserva le diseguaglianze di successioni. □

Proposizione 1.27 (Linearità dell'integrale di Lebesgue)**.** *Se* $f_1, f_2 \in L^1(E)$ *allora* $f = f_1 + f_2 \in L^1(E)$ *e inoltre*

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu$$

Dimostrazione. Siano u, v misurabili e non negative. Posto $w = u + v$ si ha

$$\int_E w d\mu = \int_E u d\mu + \int_E v d\mu \tag{1.2}$$

Infatti esistono due successioni s_n e t_n di funzioni semplici tali che $s_n \to u$ e $t_n \to v$ puntualmente dove sia $\{s_n\}$ che $\{t_n\}$ sono crescenti. Definiamo $h_n := s_n + t_n$ ottenendo ancora una successione crescente di funzioni semplici misurabili non negative. Notiamo che

$$\int_E h_n d\mu = \int_E s_n d\mu + \int_E t_n d\mu$$

per linearità degli integrali elementari. Prendendo il limite e applicando Beppo Levi, ossia 1.25 otteniamo (1.2).

Siano ora f_1, f_2 integrabili, quindi misurabili, so che $|f_1|, |f_2| \in L^1(E)$. Poiché $|f| = |f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$, ho l'integrabilità per la CNES 1.24. Sappiamo che

$$f^+ - f^- = f_1^+ - f_1^- + f_2^+ - f_2^- \iff f^+ + f_1^- + f_2^- = f_1^+ + f_2^+ + f^-$$

che è un uguaglianza tra due funzioni somme di funzioni misurabili non negative, per cui posso applicare la prima parte, ottenendo

$$\int_E f^+ d\mu + \int_E f_1^- d\mu + \int_E f_2^- d\mu = \int_E f_1^+ d\mu + \int_E f_2^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$$

da cui, riordinando i termini otteniamo la tesi. □

Nel lemma di Fatou 1.26 vale la disuguaglianza larga. L'uguaglianza vale, ad esempio, quando f_n è crescente in virtù di Beppo Levi 1.25, e i $\liminf$ sono dei $\lim$. Ci sono casi l'uguaglianza effettivamente non è verificata

Esempio 1.13 (Uguaglianza a $+\infty$)**.** Sia $\Omega = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue. Sia $f_n(x) = \chi_{[-n,n]}$. Allora $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ e $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = 2n$ otteniamo quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = +\infty = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

In accordo con Beppo Levi.

Esempio 1.14 (Disuguaglianza stretta)**.** Sia $\Omega = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue. Sia $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Allora $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \to +\infty$ otteniamo quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = 0 \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty$$

Una variante è $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ per cui

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = 0 \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = 1$$

Se ho una funzione integrabile su E, questa può prendere i valori $+\infty$ e $-\infty$? Sì, ma solo in un sottoinsieme trascurabile. In caso contrario la funzione non sarebbe integrabile perché f^+ oppure f^- sarebbero non limitate

Lemma 1.28 (Lemma di Fatou - versione estesa a successioni di funzioni di segno qualunque)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su Ω. Allora*

1. *Se esiste g integrabile su E tale che $g \le f_n$ su E allora*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

2. *Se esiste h integrabile in E tale che $f_n \le h$ su E allora*

$$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione parte 1. Poniamo $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \ge g(x)$ per $x \in E$. Possiamo considerare la successione $u_n(x) = f_n(x) - g(x)$ che verifica le ipotesi di Fatou base 1.26 in E e allora

$$\liminf_{n\to\infty} u_n(x) = f(x) - g(x) \implies \int_E (f-g) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n - g) d\mu$$

usando la linearità dell'integrale abbiamo

$$\int_E f d\mu - \underbrace{\int_E g d\mu}_{\text{finito}} \le \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E f_n d\mu - \underbrace{\int_E g d\mu}_{\text{finito}} \right) = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E g d\mu$$

da cui otteniamo la tesi. □

Dimostrazione parte 2. La successione $v_n = -f_n$ verifica $v_n \ge -h$ in E dove $-h$ è una funzione integrabile. Allora possiamo applicare la parte 1 a v_n ottenendo

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} v_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E v_n d\mu$$

poiché $\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\limsup_{n\to\infty} f_n$ segue che

$$\int_E -\limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \iff \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

□

Lemma 1.29: Lemma di Fatou - definitivo

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili in E tali che $\{\int_E f_n d\mu\}$ sia limitata. Allora

1. Se esiste $g \in L^1(E)$ tale che $g \leq f_n$ in Ω per ogni n, allora $\liminf_{n\to\infty} f_n$ è integrabile in E e
$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

2. Se esiste $h \in L^1(E)$ tale che $f_n \leq h$ in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\limsup_{n\to\infty} f_n$ è integrabile in E e
$$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Segue semplicemente da Fatou esteso 1.28, e il liminf è integrabile perché
$$-\infty < \int_E g d\mu \leq \int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu < +\infty$$
dove le prime diseguaglianze sono per integrabilità di g e $g \leq f_n$ e l'ultima perché la successione degli integrali è limitata.

Analogo il caso 2. □

Teorema 1.30: Beppo Levi - seconda versione

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_n\}$ una successione monotona di funzioni integrabili in $E \in \mathcal{M}$ tali che la successione degli integrali $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ sia limitata. Allora posto
$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$$
si ha che $f \in L^1(E)$ e inoltre
$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Osservazione. Si potrebbe estendere l'enunciato al caso di una successione che sia monotona solo quasi ovunque, cioè che esista $N \subseteq \Omega$ trascurabile tale che $f_n(x) \lesseqgtr f_{n+1}(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \Omega \setminus N$

Dimostrazione. Assumiamo f_n una successione decrescente. Quindi $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots$. Tutte le f_n sono integrabili e inoltre $f \leq f_n \leq f_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e f_1 è integrabile. Allora $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$ e dunque è integrabile per la parte 2 del lemma di Fatou 1.29. Ora possiamo applicare la parte 1 del lemma di Fatou 1.29 ottenendo
$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$
poiché $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n = f$ segue la tesi. □

Corollario 1.30.1 (Beppo Levi per le serie)**.** *Sia f_n una successione di funzioni misurabili e non negative. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a una funzione $s : \Omega \to [0, +\infty]$ tale che*

$$\int_E s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

In particolare se la serie degli integrali converge allora $s \in L^1(E)$

Dimostrazione. Si consideri la successione s_n delle ridotte, questa costituisce una successione crescente di funzioni misurabili e non negative e si può quindi applicare Beppo Levi base 1.25 ottenendo la tesi. Se poi la serie degli integrali converge allora la successione degli integrali delle ridotte è limitata e si può applicare Beppo Levi 1.30 □

Teorema 1.31: Convergenza Dominata di Lebesgue

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili tale che $f_n \to f$ puntualmente. Inoltre sia g una funzione integrabile in $E \in \mathcal{M}$ tale che

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora $f \in L^1(E)$ e inoltre

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Per poter applicare il lemma di Fatou abbiamo bisogno che f_n siano integrabili questo è vero perché sappiamo che $|f_n| \leq g$ e dunque $f_n \in L^1(E)$ per la CNES 1.24.

Ora per sappiamo che

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$$

possiamo allora applicare Fatou 1.29 che ci dice che $f = \liminf_{n\to\infty} f_n =$
$= \limsup_{n\to\infty} f_n$ è integrabile in E e inoltre

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

ma poiché $\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = f$ otteniamo la tesi. □

Notare come non abbiamo mai richiesto la convergenza uniforme, cosa che invece era essenziale per lo stesso risultato nell'integrale di Riemann

Nota. La convergenza puntuale, l'integrabilità di f_n e la limitatezza della successioni $\{f_n\}$ non bastano per passare al limite sotto il segno di integrale. Basti pensare all'esempio 1.14

Osservazione. Come nel teorema di Beppo Levi 1.30 possiamo estendere il teorema della convergenza dominata rilassando le ipotesi $f_n \to f$ puntualmente a $f_n \to f$ q.o. e $|f_n| \leq g$ q.o.

Funzioni $\frac{1}{x^\alpha}$ Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha > 0$ sia su $(0, 1)$ che in $(1, +\infty)$. Queste funzioni sono non limitate oppure hanno dominio non limitato, e possiamo estendere l'integrale di Riemann per integrarle in senso improprio in alcuni casi. In particolare

- $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $(0, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$
- $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$

dove l'integrale in senso improprio è definito come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Se consideriamo le funzioni

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } \varepsilon \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < \varepsilon \end{cases}$$

allora la famiglia di funzioni $\{f_\varepsilon\}$ risulta monotona rispetto a $\varepsilon \to 0^p$ ossia $\forall(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ si ha che

$$f_{\varepsilon_1}(x) \geq f_{\varepsilon_2}(x) \quad \forall x \in (0, 1)$$

passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, per il teorema di Beppo Levi, concludiamo che la funzione limite $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è L-integrabile se e solo se $\alpha < 1$.

Queste informazioni sono molto utili quando dobbiamo valutare l'integrabilità di una funzione. Ad esempio data una qualunque funzione misurabile $f(x)$ definita in $(1, +\infty)$ tale per cui esistano $C > 0$ e $\alpha > 1$ tali che $|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha}$ per ogni $x \in (1, +\infty)$ allora questa è integrabile. D'altro canto se $g(x)$ è una funzione su $(1, +\infty)$ tale che $g(x) \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$ per ogni $x > \overline{x}$ allora necessariamente g non è integrabile.

Esempio 1.15. Consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ in $(2, +\infty)$. Sappiamo che $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ ossia $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x}$ tale che $\forall x \geq \overline{x}$ si ha che $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon$ ossia $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{x}}$. Quindi g non è L-integrabile in $(1, +\infty)$.

Ora consideriamo la funzione g su $(1, 2)$. Sappiamo che $\ln x \sim x - 1$ per $x \to 1^+$. Ma sappiamo che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è integrabile perché $\frac{1}{x-1}$ non è L-integrabile in $(1, 2)$

Esercizio 1.1

Studiare l'integrabilità della funzione

$$f_\alpha(x) = |\log x|^\alpha \quad x \in (0, 1)$$

quindi quand'è che $f_\alpha \in L^1(0, 1)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

- se $\alpha = 0$ è chiaramente $f_0 = 1$ integrabile
- se $\alpha > 0$ dobbiamo studiare il comportamento vicino a 0. Vogliamo confrontare la funzione con $\frac{1}{x^\beta}$ che sappiamo essere integrabile per $\beta \in (0, 1)$. Abbiamo quindi ad esempio, per $\beta = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln x|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{(-\ln x)^\alpha}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{-\alpha(-\ln x)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = 2\alpha \frac{(-\ln x)^{\alpha-1}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

procedendo con l'Hôpital finché l'esponente non diventa negativo otteniamo che il limite non è più una forma indeterminata. Quindi otteniamo che il limite è 0. Abbiamo dunque che $\sqrt{x}|\ln x|^{\alpha}$ è limitata in $(0,1)$ e quindi $\exists C > 0$ tale che

$$|\ln x|^{\alpha} \leq \frac{C}{\sqrt{x}} \text{ che è integrabile} \quad \forall x \in (0,1)$$

Quindi $f_{\alpha} \in L^1(0,1)$ per ogni $\alpha > 0$.

– se $\alpha < 0$ Sia $\alpha = -\gamma$, con $\gamma > 0$. Abbiamo dunque

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{|\ln x|^{\gamma}} \overset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

ora poiché $\ln x \sim x - 1$ per $x \to 1$ abbiamo che

$$f_{\alpha}(x) \sim \frac{1}{|x-1|^{\gamma}}$$

che è integrabile per $\gamma < 1$. Quindi $f_{\alpha} \in L^1(0,1) \iff \alpha > -1$.

Osservazione. Ci sono funzioni integrabili in senso improprio che tuttavia non sono $\mathcal{L}$-integrabili. Il prossimo esempio ne è un esempio (scusate il gioco di parole) (scusato):

Esempio 1.16. Sia $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ in $[\frac{\pi}{2}, +\infty]$. Allora

1. f è integrabile in senso improprio:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\cos(x)}{x} dx = \frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{R} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{\sin R}{R} - \frac{2}{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Per $R \to \infty$ otteniamo che l'integrale converge in quanto anche il secondo integrale converge perché il suo valore assoluto è maggiorato da $\frac{1}{x^2}$.

2. f non è integrabile in senso di Lebesgue. Infatti se così fosse allora anche $|f| = |\cos x|/x$ sarebbe integrabile

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{|\cos x|}{x} dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \int_{\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} |\cos x| dx\end{aligned}$$

dove l'eguaglianza è data dalla minorazione per il minimo. Ora evidentemente tutti gli integrali sono uguali e valgono

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} |\cos x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos x dx = 2$$

quindi la ridotta della serie ora vale

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \to +\infty$$

e quindi $|f|$ e f non sono integrabili.

Esempio 1.17. Quali sono le funzione integrabili per la misura di Dirac? Consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{R}^N, 2^{\mathbb{R}^N}, \delta_O)$. Allora ogni funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è misurabile perché ogni insieme è misurabile. Se f è non negativa allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\delta_O = \sup\{I(s) : s \text{ semplice tale che } 0 \leq s \leq f\}$$

Quindi $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$ e $I(s) = \sum_{i=1}^n c_i \delta_O(E_i)$ che quindi

$$I(s) = \sum_{i:O\in E_i} c_i \le f(O)$$

dove l'ultima uguaglianza è data da $0 \le s \le f$ Ne concludiamo dunque che

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\delta_O = f(O)$$

Se ora f è di segno qualunque allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\delta_O = f^+(O) - f^-(O) = f(O)$$

Dunque f è integrabile se e solo se $f(O) \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.18 (Serie come integrali con misura del contare)**.** Consideriamo ora la misura del contare e lo spazio $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$. Le funzioni considerate sono le successioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Anche in questo caso sono misurabili perché tutti gli insiemi sono misurabili. Quali sono le funzioni integrabili? Sia $f \ge 0$. Abbiamo che

$$\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sup\{I(s) : s \text{ semplice tale che } 0 \le s \le f\}$$

dove $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$ dove chiediamo che gli E_i siano a due a due disgiunti. Osserviamo che posso usare una scrittura standard $\sum_{i=1}^k c_i \chi_{\{i\}}(x)$, che sono particolari funzioni semplici. Deve essere $c_i \le f(i)$ per $i = 1, \dots, k$. Concludiamo che

$$\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sum_{i=1}^{+\infty} f(i)\#(\{i\}) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(i)$$

Se $f(i) = +\infty$ per qualche i oppure la serie diverge allora l'integrale è $+\infty$. Concludiamo f non negativa, allora $f \in L^1(\mathbb{N})$ se $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ converge. Se ora f è di segno qualunque allora $f \in L^1(\mathbb{N})$ se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f^+(n) < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f^-(n) < +\infty$$

Notare che è verificata la proprietà $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$.

Esercizio 1.2

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{|\ln(n^7x^2)|}{3 + n^4x^2} & \text{se } x \ne 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a) Per quali n f_n è integrabile su $\mathbb{R}$? Esiste C_n tale che

$$|\ln(n^7x^2)| \le \frac{C_n}{\sqrt{|x|}} \quad \forall x \in (-1,1)\setminus\{0\}$$

Quindi f_n è integrabile in tutto $(-1, 1)$. Ora poiché

$$\frac{f_n}{x^{-\frac{3}{2}}} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

da cui

$$\exists \overline{x} > 0 \text{ tale che } \forall x \geq \overline{x} \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

dunque f_n è integrabile su tutto $\mathbb{R}$

b) Consideriamo ora la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

e sia C l'insieme di convergenza della serie, allora $s : C \to \mathbb{R}$ sia la somma della serie. Discutiamo ora la misurabilità di C e di s. Se $x = 0$ chiaramente diverge, mentre se $x \neq 0$ allora

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|7 \ln n + 2 \ln |x|}{3 + n^4 x^2}$$

Quindi $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è misurabile, inoltre s è misurabile in quanto limite di una successione di ridotte tutte misurabili.

c) Vale l'uguaglianza

$$\int_C s dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n dx \ ?$$

SÌ **alla grande** per Beppo Levi, infatti $f_n \geq 0$ e nel nostro caso i termini della serie sono tutti finiti.

Vogliamo ora vedere se $s \in L^1(C)$ sfruttando l'uguaglianza.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln(n^7 x^2)}{3 + n^4 x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n^2} \frac{|\ln(n^3 t^2)|}{3 + t^2} dt \leq \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|3 \ln n + 2 \ln |t||}{3 + t^2} dt$$

operando la sostituzione $n^2 x = t$, $n^2 dx = dt$. Ora nuovamente maggioriamo dividendo la frazione con la diseguaglianza triangolare

$$\leq \frac{3|\ln n|}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3 + t^2} dt + \frac{2}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln |t||}{3 + t^2} dt$$

che sono entrambi termini generali di serie convergente. Quindi $s \in L^1(C)$

1.8 Convergenze di funzioni misurabili

Di seguito vengono introdotti diversi concetti di convergenza di successioni di funzioni e relative implicazioni, il risultato chiave è il teorema di (Severini)-Egorov (1.33).

Definizione 1.11: Convergenza quasi ovunque

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una successione di funzioni misurabili $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ converge quasi ovunque a $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se esiste un insieme $F \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(F) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus F$

Definizione 1.12: Convergenza quasi uniforme

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una successione di funzioni misurabili $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ converge quasi uniformemente a $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $F \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(F) < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente in $\Omega \setminus F$.

Definizione 1.13: Convergenza in misura

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una successione di funzioni misurabili $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ converge in misura a $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Esempio 1.19. Consideriamo la successione $f_n(x) = x^n$ in $[0,1]$. Allora $f_n \to 0$ q.o. in $[0,1]$, perché per ogni $x \in [0,1)$ $f_n(x) \to 0$ e chiaramente $\mu[0,1] \setminus [0,1) = \mu(\{1\}) = 0$. Ma anche $f_n \to f$ quasi uniformemente, infatti per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo $F = [1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1]$ e nel complementare c'è convergenza uniforme. Infine, per la convergenza in misura,

$$\{x \in [0,1] : |x^n| > \varepsilon\} = \{x \in [0,1] : |x| > \varepsilon^{\frac{1}{n}}\} = (\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1]$$

e poiché $\mu(\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1] = 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} \to 0$ allora $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Esempio 1.20. Consideriamo la successione $f_n(x) = \frac{x}{n}$ in $\mathbb{R}$. Allora $f_n \to 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Anche qui non abbiamo convergenza uniforme, e neanche quasi uniforme, in quanto ogni insieme su cui c'è convergenza uniforme è limitato e ha complementare di misura non finita. Infine $\{x \in \mathbb{R} : |\frac{x}{n}| > \varepsilon\} = (-\infty, -\varepsilon n) \cup (\varepsilon n, +\infty)$ che ha sempre misura infinita, quindi $f_n \not\to f$ in misura.

Dal precedente esempio possiamo dedurre che q.o. $\not\Longrightarrow$ q.u. e che q.o. $\not\Longrightarrow$ in misura. Ora invece mostriamo le implicazioni che valgono.

Teorema 1.32: $f_n \overset{q.u.}{\to} f \implies f_n \overset{q.o.}{\to} f$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili tale che $f_n \overset{q.u.}{\to} f$ funzione misurabile. Allora $f_n \overset{q.o}{\to} f$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme $E_k \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(\Omega \setminus E_k) < \frac{1}{k}$ e $f_n \to f$ uniformemente, quindi anche puntualmente, in E_k. Ora prendiamo

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$$

allora dico che $f_n \to f$ puntualmente in E. Infatti per ogni punto $x \in E$ esiste k tale che $x \in E_k$ e quindi $f_n(x) \to f(x)$. Infine

$$\mu(E^C) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E^C\right) \leq \mu(E^C) < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi necessariamente $\mu(E^C) = 0$ e quindi $f_n \to f$ q.o. $\square$

Teorema 1.33: Severini-Egorov

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finito, ossia $\mu(\Omega) < +\infty$. Se $f_n \to f$ q.o. in Ω, allora $f_n \to f$ q.u. in Ω.

Dimostrazione. Iniziamo fissando $\varepsilon > 0$. $f_n \overset{q.o.}{\to} f$ in Ω, quindi esiste N trascurabile tale che $f_n \to f$ puntualmente in $\Omega \smallsetminus N$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ introduciamo gli insiemi

$$A_m = \bigcap_{n \geq m} \left\{ x \in \Omega \smallsetminus N : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

Gli insiemi A_m formano una successione crescente e inoltre $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m = \Omega \smallsetminus N$. Infatti se $x \in A_m$ per m fissato, si ha che $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $n \geq m$, quindi $f_n(x) \to f(x)$. Per continuità della misura

$$\lim_{m \to \infty} \mu(A_m) = \mu(\Omega \smallsetminus N) = \mu(\Omega)$$

dunque esisterà certamente un m_k tale che A_{m_k} ha complementare di misura minore di $\frac{\varepsilon}{2^k}$ $(\star)$. In A_{m_k} si avrà che $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $n \geq m_k$ e per ogni $x \in A_{m_k}$. Poniamo allora

$$E := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{m_k}$$

Allora su E c'è convergenza uniforme di f_n a f perché se $x \in E$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $m_k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m_k$ si ha che $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$.

Per mostrare che $\mu(E^C) < \varepsilon$ usiamo la subadditività:

$$\mu(E^C) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{A_{m_k}^C\} \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{m_k}^C) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

$\square$

Nota. L'ipotesi di $\mu(\Omega) < +\infty$ è stata usata in $(\star)$, infatti sappiamo che

$$\mu(A_{m_k}) + \mu(A_{m_k}^C) = \mu(\Omega)$$

e per dire che $\mu(A_{m_k}^C) \to 0$ dobbiamo poter sottrarre $\mu(A_{m_k})$ da entrambi i lati dell'uguaglianza.

Teorema 1.34: $f_n \overset{q.u.}{\to} f \implies f_n \overset{\mu}{\to} f$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Se $f_n \to f$ quasi uniformemente allora $f_n \to f$ in misura.

Dimostrazione. $\forall \sigma > 0$ esiste $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E^C) < \sigma$ e $f_n \to f$ uniformemente in E, quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$ e $\forall x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Proseguendo

$$\begin{aligned}\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = \underbrace{\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}}_{\text{vuoto per } n \geq n_\varepsilon} \cup \\ \cup \underbrace{\{x \in E^C : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}}_{\text{sottoinsieme di } E^C\text{, quindi di misura } < \sigma}\end{aligned}$$

ma allora abbiamo provato che

$$\forall \sigma > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \quad \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \sigma$$

e quindi $f_n \to f$ in misura. $\square$

Teorema 1.35: $f_n \xrightarrow{\mu} f \implies f_{n_k} \xrightarrow{q.o.} f$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili e f una funzione misurabile. Allora se $f_n \to f$ in misura, allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge quasi ovunque a f.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k : \forall n \geq n_k \quad \mu\left(\left\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{k^2}$$

Definisco $E_k := \left\{x \in \Omega : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$ e l'insieme $E = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq m} E_k$. Noto ora che $\mu(E) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ che tende a 0 per $m \to \infty$ in quanto coda di serie convergente e per $x \in E^C$ ho che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ in quanto

$$E^C = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq m} \left\{x \in \Omega : |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

ossia esiste un m tale che per ogni $k \geq m$ si ha che $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ e quindi $f_{n_k} \to f$ in E^C. In questo modo abbiamo trovato una sottosuccessione f_{n_k} che converge quasi ovunque a f. □

Esempio 1.21. È importante evidenziare che la convergenza in misura non implica la convergenza quasi ovunque, ma solo la convergenza di una sottosuccessione, ad esempio se $\Omega = [0, 1]$ e prendiamo

$$\begin{aligned}
&f_1 = \chi_{[0,1]} \\
&f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \quad f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]} \\
&f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{3}]}, \quad f_5 = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, \quad f_6 = \chi_{[\frac{2}{3},1]} \\
&f_7 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, \quad f_8 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{2}{4}]}, \quad f_9 = \chi_{[\frac{2}{4},\frac{3}{4}]}, \quad f_{10} = \chi_{[\frac{3}{4},1]} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allora $f_n \to 0$ in misura, infatti

$$\mu\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

ma non c'è convergenza quasi ovunque, infatti fissato $x \in [0, 1]$, la successione numerica $f_n(x)$ non ha limite, perché purché assuma principalmente il valore 0, ogni tanto assume il valore 1, e per ogni n esiste un $\overline{n} \geq n$ tale che $f_{\overline{n}}(x) = 1$, per cui non può esistere il limite. Poiché questo è vero per ogni $x \in [0, 1]$, non c'è convergenza puntuale in nessun sottoinsieme.

Esercizio 1.3

Sia

$$f_n(x) = \frac{2n\sqrt[3]{x} + 3}{1 + (nx)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

studiare:

a) per n fissato la misurabilità e l'integrabilità di f_n

$$f_n \sim c_n \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} \sim c_n \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \qquad \text{per } x \to \pm\infty$$

Quindi f_n è integrabile su tutto $\mathbb{R}$ in quanto $\frac{5}{3} > 1$

b) Dimostrare che $|f_n(x)| \leq \frac{5}{n}$ per ogni x con $|x| \geq 1$

$$|f_n(x)| \leq \frac{2n|x|^{\frac{1}{3}} + 3}{1 + n^2x^2} \leq \frac{\frac{2}{n}|x|^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + x^2} \leq \frac{2}{n}\frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \frac{\frac{3}{n^2}}{1} \leq \frac{2}{n} \cdot 1 + \frac{3}{n} = \frac{5}{n}$$

c) f_n converge quasi ovunque in $\mathbb{R}$? E quasi uniformemente? E in misura?

$f_n \overset{\text{q.o.}}{\to} 0$. Infatti per $x = 0$ $f_n(0) \to 3$ mentre per $x \neq 0$ abbiamo che $f_n(x) \to 0$.

Il punto b) ci dice che f_n converge quasi uniformemente a 0 in $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Ora possiamo considerare che in $(-1, 1)$ $f_n \to$ q.o., per cui per Severini-Egorov $f_n \to 0$ quasi uniformemente. Infine avendo convergenza q.u. in $(-1, 1)$ e convergenza q.u. in $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ allora abbiamo convergenza q.u. in $\mathbb{R}$. Infine $f_n \overset{\mu}{\to} 0$ in quanto la convergenza uniforme implica la convergenza in misura.

d) C'è convergenza in L^1? Ossia è vero che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - 0| d\mu = 0 \quad ?$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2n|x|^{\frac{1}{3}}}{1 + n^2x^2} dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{3}{1 + n^2x^2} dx}_{\leq \frac{3}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ per Lebesgue } \to 0}$$

Invece per il primo integrale operiamo la sostituzione $nx = t$, $ndx = dt$

$$\frac{1}{\cancel{n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\cancel{n}\sqrt[3]{\frac{t}{n}}}{1 + t^2} dt = \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt[3]{t}}{1 + t^2} dt \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

poiché l'integrale è finito.

1.9 Teoremi di Fubini e Tonelli

Vogliamo analizzare gli integrali multipli, per farlo consideriamo gli spazi prodotto. L'insieme ambiente e la σ-algebra sono definiti in maniera naturale, mentre richiede qualche accortezza aggiuntiva la definizione della misura prodotto.

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi di misura σ-finiti. Vogliamo costruire uno spazio di misura prodotto. L'insieme ambiente è $X \times Y$ e definiamo $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ come la σ-algebra generata da tutti gli insiemi del tipo $A \times B$, con $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$. Si ha che $(X \times Y, \mathcal{M} \times \mathcal{N})$ è uno spazio misurabile con una misura indotta da μ e ν. A tale scopo introduciamo nuovi insiemi e costruzioni. Sia $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Allora per ogni $(x, y) \in X \times Y$ abbiamo i due insiemi $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ e $E_y := \{x \in X : (x, y) \in E\}$. Introduciamo una proposizione finalizzata alla definizione della misura prodotto:

Proposizione 1.36. *Per ogni $x \in X$ si ha che $E_x \in \mathcal{N}$ e per ogni $y \in Y$ si ha che $E_y \in \mathcal{M}$. Inoltre le funzioni $x \mapsto \nu(E_x)$ e $y \mapsto \mu(E_y)$ sono misurabili in $(X, \mathcal{M})$ e*

$(Y, \mathcal{N})$ *rispettivamente. Si ha che*

$$\int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E_y) d\nu =: (\mu \times \nu)(E)$$

Per la dimostrazione di questa proposizione si usano le *famiglie monotone* di misure.

Definizione 1.14: Famiglia monotona

Una collezione $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme ambiente Ω si dice *famiglia monotona* se per ogni successione $\{A_n\}$ crescente di insiemi in $\mathcal{A}$ e per ogni successione $\{B_n\}$ decrescente di insiemi in $\mathcal{A}$ si ha che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

Data una collezione $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di Ω, si definisce $\nu(\mathcal{F})$ famiglia monotona generata da $\mathcal{F}$ come la più piccola famiglia monotona di insiemi contenente $\mathcal{F}$ (attenzione al bisticcio di simboli, qui ν non c'entra nulla con la misura introdotta poc'anzi).

Osservazione. Dato $\mathcal{F}$, si possono definire $\sigma(\mathcal{F})$ e $\nu(\mathcal{F})$, con $\sigma(\mathcal{F})$ che rappresenta la minima σ-algebra contenente $\mathcal{F}$.

Lemma 1.37. *Se $\mathcal{F}$ è un'algebra, allora $\nu(\mathcal{F})$ è anche una σ-algebra e coincide con $\sigma(\mathcal{F})$.*

Possiamo ora utilizzare questo lemma perché $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ è anche la σ-algebra generata dalle unioni finite di insiemi "rettangolari", ossia del tipo $A \times B$, con $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$, che formano un'algebra di insiemi.

Notiamo che

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(E) &= \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E_y) d\nu = \int_{X \times Y} \chi_E(x, y) d(\mu \times \nu) \\ &= \int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x, y) d\mu \right) d\nu\end{aligned}$$

Teorema 1.38: Tonelli

Sia F una funzione misurabile in $(X \times Y, \mathcal{M} \times \mathcal{N})$ e non negativa. Allora

- $F(x, y)$ è misurabile sia rispetto a x per q.o. y che rispetto a y per q.o. x
- La funzione $x \mapsto \int_Y F(x, y) d\nu$ è misurabile in $(X, \mathcal{M})$.
- La funzione $y \mapsto \int_X F(x, y) d\mu$ è misurabile in $(Y, \mathcal{N})$.
- Valgono le seguenti uguaglianze

$$\int_{X \times Y} F d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y F(x, y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X F(x, y) d\mu \right) d\nu$$

dove il secondo e il terzo integrale vengono chiamati *integrali iterati*. In particolare se esiste finito uno degli integrali iterati, allora $F \in L^1(X \times Y)$ e esiste finito anche l'altro integrale iterato.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema di Tonelli per funzioni semplici. Sia $F = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$. Allora, per quanto affermato sulla misura prodotto,

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} F \, d(\mu \times \nu) &= \sum_{i=1}^n c_i (\mu \times \nu)(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \int_X \left(\int_Y \chi_{E_i}(x, y) \, d\nu \right) d\mu \\ &= \int_X \left(\int_Y F(x, y) \, d\nu \right) d\mu\end{aligned}$$

Ora per passare da funzioni semplici a funzioni non negative, consideriamo una successione crescente di funzioni semplici $F_n \nearrow F$. Allora per il teorema di Beppo Levi abbiamo che

$$\int_{X \times Y} F d(\mu \times \nu) = \lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} F_n d(\mu \times \nu) = \lim_{n \to \infty} \int_X \left(\int_Y F_n(x, y) d\nu \right) d\mu$$

Ora per il teorema di Beppo Levi abbiamo che

$$\int_X \left(\int_Y F_n(x, y) d\nu \right) d\mu \to \int_X \left(\int_Y F(x, y) d\nu \right) d\mu$$

□

Osservazione. La non-negatività di F è essenziale per il teorema di Tonelli. Si consideri come esempio

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

su $\mathbb{R}^2$. Allora f è $\mathcal{L}$-integrabile su $\mathbb{R}$ rispetto a x e a y, e l'integrale vale 0 per simmetria, in simboli:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = 0$$

Eppure f non è $\mathcal{L}$-integrabile su $\mathbb{R}^2$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right| d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{r^2} |\cos\theta \sin\theta|}{r^{\cancel{4}}} \cancel{r} dr d\theta$$

e rispetto a r viene l'integrale di $\frac{1}{r}$ che non è integrabile né in un intorno di 0 né in un intorno di $+\infty$.

Teorema 1.39: Fubini

Sia $F \in L^1(X \times Y)$. Allora

- per q.o. $x \in X$, $F(x, \cdot) \in L^1(Y)$ e per q.o. $y \in Y$, $F(\cdot, y) \in L^1(X)$
- La funzione $x \mapsto \displaystyle\int_Y F(x, y) d\nu$ è integrabile su X e la funzione $y \mapsto$

$$\int_X F(x,y)d\mu \text{ è integrabile su } Y$$

- Valgono le seguenti uguaglianze

$$\int_{X\times Y} Fd(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y F(x,y)d\nu\right)d\mu = \int_Y \left(\int_X F(x,y)d\mu\right)d\nu$$

Dimostrazione. Sia $F = F^+ - F^-$, e in particolare $F^+, F^- \in L^1(X\times Y)$. Allora per il teorema di Tonelli abbiamo che

$$\int_{X\times Y} F^+ d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y F^+(x,y)d\nu\right)d\mu$$

e

$$\int_{X\times Y} F^- d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y F^-(x,y)d\nu\right)d\mu$$

e infine per sottrazione e linearità dell'integrale deduciamo l'uguaglianza finale. □

Esercizio 1.4

Si considerino in $\mathbb{R}^2$ le funzioni del tipo $(x_1, x_2) \mapsto |x|^{-\alpha}$, dove $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Per quali α queste funzioni sono integrabili in $B_1(0)$? E in $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$?

Definizione 1.15: Convoluzione

Siano due funzioni $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Allora la funzione

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$$

viene detto **prodotto di convoluzione** di f e g.

Proposizione 1.40. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora $f\star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (ed è ben definita).*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $F(x,y) = f(x-y)g(y)$, quindi $|F(x-y)| = |f(x-y)||g(y)|$. Abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dx = |g(y)|\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dx = |g(y)|\int_{\mathbb{R}^N} |f|d\mu$$

E abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\int_{\mathbb{R}^N} |f|d\mu dy = \int_{\mathbb{R}^N} |g|d\mu \int_{\mathbb{R}^N} |f|d\mu$$

che è finito, quindi per il teorema di Tonelli abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|dydx = \int_{\mathbb{R}^N} |f|d\mu \int_{\mathbb{R}^N} |g|d\mu < +\infty$$

Quindi ora sapendo che $F \in L^1$, possiamo applicare il teorema di Fubini e ottenere che $f\star g \in L^1$. □

Esercizio 1.5

La precedente proprietà non è vera per il prodotto normale di funzioni, trovare un controesempio dove $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ma $f\cdot g \notin L^1(\mathbb{R})$.

1.10 Misure Relative

In questo paragrafo si introduce il concetto di misura relativa, si dimostra il teorema di decomposizione di Hahn e si introducono i concetti di misura assolutamente continua e di misura singolare.

Definizione 1.16: Misura Relativa

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ si dice **misura relativa** se valgono le seguenti proprietà:

1. $\varphi(\varnothing) = 0$
2. Se $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ è una successioni di insiemi a due a due disgiunti, allora

$$\varphi\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

Ora procediamo con alcune osservazioni sulle misure relative

1. Le misure relative possono assumere valori negativi, ma sono sempre finite
2. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ è una serie convergente come conseguenza della σ-additività
3. Le misure finite sono anche misure relative
4. *($\neg$monotonia)* Infatti se $B \in \mathcal{M}$ tale che $\varphi(B) < 0$ abbiamo che $\varnothing \subseteq B$ ma $0 > \varphi(B)$
5. *(sottrattività)* Per la stessa dimostrazione di prima vale ancora, quindi se $A \subseteq B$ sono misurabili, allora abbiamo che $\varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A)$
6. *($\neg$subadditività)* Consideriamo lo spazio di misura relativa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_1 + \delta_{-1} - \delta_0)$, che mostreremo più avanti che è una misura. Sia $A = [-1, 0], B = [0, 1]$. Allora $A \cap B = \{0\}$ e $A \cup B = [-1, 1]$.

$$1 = 1 + 1 - 1 = \varphi(A \cup B) > \varphi(A) + \varphi(B) = (1 - 1) + (-1 + 1) = 0$$

7. *(continuità)* La dimostrazione del teorema 1.3, parte 1, non usava la positività né la monotonia, né la subadditività, ma solo σ-additività, ossia abbiamo che se A_n è una successione crescente di insiemi misurabili,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Per quanto riguarda le successioni decrescenti la dimostrazione del teorema 1.3 usava solo σ-additività e sottrattività, quindi abbiamo anche che se A_n è una successione decrescente di insiemi misurabili,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

notare che non necessitiamo di aggiungere l'ipotesi $\varphi(A_1) < +\infty$

Esempio 1.22. La misura δ_O di Dirac è una misura finita quindi è una misura relativa, mentre la misura del contare e la misura di Lebesgue non sono misure relative, perché $\#\mathbb{N} = +\infty$ e $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$.

Proposizione 1.41. *Se $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ sono misure finite su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora*

$$\begin{aligned} \varphi_+ := \varphi_1 + \varphi_2 : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto (\varphi_1 + \varphi_2)(E) = \varphi_1(E) + \varphi_2(E) \end{aligned}$$

è una misura finita (e quindi relativa).

$$\begin{aligned} \varphi_- := \varphi_1 - \varphi_2 : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto (\varphi_1 - \varphi_2)(E) = \varphi_1(E) - \varphi_2(E) \end{aligned}$$

è una misura relativa

Dimostrazione. La prima parte, φ_+ misura finita, è ovvia. Procediamo con la seconda.

1. $(\varphi_1 - \varphi_2)(E) = \varphi_1(E) - \varphi_2(E) \in \mathbb{R}$ per ogni $E \in \mathcal{M}$
2. $(\varphi_1 - \varphi_2)(\varnothing) = \varphi_1(\varnothing) - \varphi_2(\varnothing) = 0$
3. Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi disgiunti. Allora

$$\begin{aligned} (\varphi_1 - \varphi_2)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \varphi_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \varphi_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_1(A_i) - \varphi_2(A_i) \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.42 (Generazione di misure relative)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione, $f \in L^1$. Allora*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto \varphi(E) = \int_E f d\mu \end{aligned}$$

è una misura relativa

Dimostrazione.

1. $\varphi(E) \in \mathbb{R}$ poiché $f \in L^1$
2. $\varphi(\varnothing) = \int_\varnothing f d\mu = 0$
3. Sia $\{E_n\}$ una successione disgiunta di insiemi misurabili. Allora

$$\varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n)$$

□

Definizione 1.17: Insiemi positivi e negativi

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora

- diciamo che $P \in \mathcal{M}$ è positivo per φ se

$$\forall E \in \mathcal{M}, \quad E \subseteq P, \quad \varphi(E) \geq 0$$

– diciamo che $N \subseteq \mathcal{M}$ è negativo per φ se

$$\forall E \in \mathcal{M}, \quad E \subseteq N, \quad \varphi(E) \leq 0$$

Osservazione. $\varnothing$ è sia positivo che negativo per ogni misura relativa.

Osservazione. Non è da confondere il concetto di insieme a misura positiva/negativa con quello di insieme positivo/negativo.

Teorema 1.43: Teorema di decomposizione di Hahn

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora esistono due insiemi $A, B \in \mathcal{M}$ tali che $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \varnothing$, A è positivo e B è negativo.

Osservazione. La decomposizione di Hahn **non** è unica. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0 - \delta_1)$. Allora $(A, B) = (\{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ è una buona decomposizione di Hahn, ma anche $(A, B) = (\mathbb{R} \setminus \{1\}, \{1\})$ lo è. In generale basta prendere $1 \notin A \ni 0$ e $B = A^C$.

Si dimostrano due lemmi strumentali alla dimostrazione del teorema di decomposizione di Hahn.

Lemma 1.44. *Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora se esiste $A \in \mathcal{M}$ tale che $\varphi(A) > 0$ allora esiste $P \subseteq A$, con $P \in \mathcal{M}$ tale che P è positivo per φ e $\varphi(P) > 0$.*

Dimostrazione. Il caso in cui A sia positivo è banale, supponiamo quindi che A non sia positivo. Esiste dunque un sottoinsieme di A con misura negativa. Sia

$$n_1 := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists A' \in \mathcal{M}, \quad A' \subseteq A, \quad \varphi(A') < -\frac{1}{n} \right\}$$

quindi $A_1 \subseteq A$, $A_1 \in \mathcal{M}$, è tale che $\varphi(A_1) < -\frac{1}{n_1}$.

Se $A \setminus A_1$ è positivo abbiamo concluso, infatti $\varphi(A \setminus A_1) = \varphi(A) - \varphi(A_1) > \varphi(A) > 0$, supponiamo quindi che $A \setminus A_1$ non sia positivo e ripetiamo il procedimento.

$$n_2 := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists A' \in \mathcal{M}, \quad A' \subseteq A \setminus A_1, \quad \varphi(A') < -\frac{1}{n} \right\}$$

quindi $A_2 \in \mathcal{M}$, $A_2 \subseteq A - A_1$ e $\varphi(A_2) < -\frac{1}{n_2}$.

Ora se $A \setminus (A_1 \cup A_2)$ è positivo concludiamo, altrimenti ripetiamo. Se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $A \setminus (\bigcup_{i=1}^{N} A_i)$ è positivo abbiamo concluso, infatti

$$\varphi\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \varphi(A) - \sum_{i=1}^{N} \varphi(A_i) > \varphi(A) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n_i} > 0$$

Supponiamo quindi che non esista un tale N. Otteniamo una successione $\{A_k\}$ di insiemi $A_k \in \mathcal{M}$ con:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j, \quad \varphi(A_k) < -\frac{1}{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$n_k := \min\{n \in \mathbb{N} : \exists A' \in \mathcal{M}, \quad A' \subseteq A - \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right), \quad \varphi(A') < -\frac{1}{n}\}$$

Allora affermiamo che $P = A \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_K\right) \in \mathcal{M}$ sia positivo e abbia misura positiva.

$$\varphi(P) = \varphi(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k) > \varphi(A) > 0$$

Ci rimane da verificare che P sia positivo. Supponiamo per assurdo che esista un $E \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq P$ e $\varphi(E) < -\varepsilon$. Abbiamo che

$$\mathbb{R} \ni \varphi(P) = \varphi(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$$

quindi la serie è convergente, per cui $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$ e quindi esiste un $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n_{\overline{k}-1}} < \varepsilon \implies \varphi(E) < -\varepsilon < -\frac{1}{n_{\overline{k}-1}}$$

ma si era supposto che fosse

$$E \subseteq A \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \subseteq A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\overline{k}-1} A_k\right)$$

che è assurdo poiché in uno dei passi successivi E dovrebbe venir "eliminato" (un certo termine non si può ripetere all'infinito perché la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$ converge). □

Lemma 1.45. *Sia* $(\Omega, \mathcal{M})$ *con misura relativa* $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *e sia* $\{P_k\}$ *una successione di insiemi positivi. Allora*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k \text{ è positivo}$$

Dimostrazione. Costruiamo la successione $\tilde{P}_k$, dove $\tilde{P}_1 = P_1$, $\tilde{P}_2 = P_2 \setminus P_1$ e in generale

$$\tilde{P}_{k+1} = P_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\right)$$

Abbiamo che $\tilde{P}_k \subseteq P_k$ e quindi $\tilde{P}_k$ è positivo. Inoltre per ogni $i \neq j$ abbiamo che $\tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j = \varnothing$. Infine l'unione dei $\tilde{P}_k$ è uguale all'unione dei P_k, ossia

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{P}_k$$

Sia $E \in \mathcal{M}$ con $E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$. Allora

$$\varphi(E) = \varphi\left(E \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{P}_k\right) = \varphi\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(E \cap \tilde{P}_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\underbrace{E \cap \tilde{P}_k}_{\subseteq \tilde{P}_k}) > 0$$

□

Dimostrazione del teorema di decomposizione di Hahn. Sia

$$p := \sup\{\varphi(P) : P \in \mathcal{M}, \quad P \text{ positivo}\}$$

dove il sup è ben definito perché l'insieme è non vuoto in quanto contiene $\varphi(\varnothing) = 0$. Si consideri una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di A_n positivi tale che $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = p$. Si definisca $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, allora $A \in \mathcal{M}$ e A è positivo per il lemma precedente. Per definizione di p abbiamo che $\varphi(A) \leq p$. Inoltre

$$\varphi(A) = \varphi((A\setminus A_n) \cup A_n) = \varphi(A\setminus A_n) + \varphi(A_n) \geq \varphi(A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi $\varphi(A) \geq \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = p$. Abbiamo quindi che $\varphi(A) = p$.

Ora prendiamo $B = \Omega\setminus A \implies A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$. Vogliamo mostrare che B è negativo. Assumiamo per assurdo che non lo sia, ossia che ammetta un certo sottoinsieme di misura positiva. Per il primo lemma questo ammette un sottoinsieme positivo, e quindi esiste un insieme positivo $P \subseteq B$ con $P \in \mathcal{M}$. Ma allora $A \cup P$ è positivo e

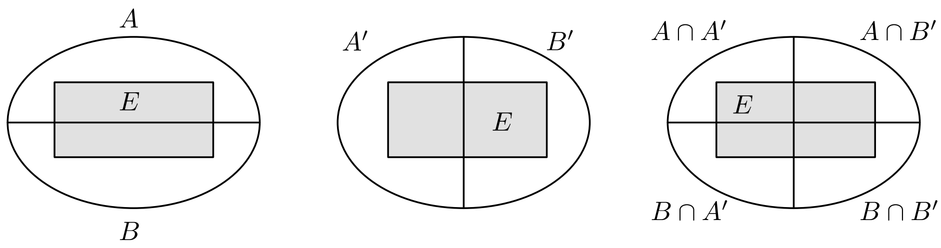
$$\varphi(A \cup P) = \varphi(A) + \varphi(P) = p + \varphi(P) > p$$

che è assurdo per la massimalità di p. Dunque B non ammette sottoinsiemi di misura positiva ed è quindi negativo. □

Teorema 1.46: Invarianza della decomposizione di Hahn

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio di misura con $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Siano (A, B) e (A', B') due decomposizioni di Hahn di Ω rispetto a φ. Allora $\forall E \in \mathcal{M}$ si ha che

$$\varphi(A \cap E) = \varphi(A' \cap E) \quad \text{e} \quad \varphi(B \cap E) = \varphi(B' \cap E)$$



Dimostrazione. Partiamo dalla prima:

$$\varphi(A \cap E) = \varphi(A \cap A' \cap E) + \varphi((A\setminus A') \cap E)$$

ma allora poiché $(A\setminus A') \cap E \subseteq A \cap B'$ abbiamo che ha misura necessariamente 0 da cui $\varphi(A\cap E) = \varphi(A\cap A'\cap E)$. Analogamente si dimostra che $\varphi(A'\cap E) = \varphi(A\cap A\cap E)$ da cui la tesi. Similmente si dimostra l'altra eguaglianza. □

Definizione 1.18: Variazione superiore, inferiore, totale

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio di misura e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Sia (A, B) una decomposizione di *Hahn*. Allora

- φ^+, definita con $\varphi^+(E) = \varphi(A \cap E)$ è detta **variazione superiore**
- φ^-, definita con $\varphi^-(E) = -\varphi(B \cap E)$ è detta **variazione inferiore**
- $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$ è detta **variazione totale**

Osservazione. La precedente è una buona definizione per il teorema di invarianza della decomposizione di Hahn.

Esempio 1.23. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ con la misura di Lebesgue, e sia $f \in L^1$. Allora $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ è una misura relativa. Consideriamo la decomposizione di Hahn $(A, B) = (\{f \geq 0, f \leq 0\})$. Allora

$$\varphi^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \varphi^-(E) = -\int_E f^- d\mu, \quad |\varphi|(E) = \int_E |f| d\mu$$

Esercizio 1.6

Come sono fatte le variazioni inferiori e totali della misura relativa data da somme di misure di Dirac?

Teorema 1.47

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio di misura con $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora

1) $\varphi^+, \varphi^-, |\varphi|$ sono misure finite (positive)

2) $\forall E \in \mathcal{M}$ abbiamo che $\varphi(E) = \varphi^+(E) - \varphi^-(E)$ e $|\varphi(E)| \leq |\varphi|(E)$

Dimostrazione.

1. $\forall E \in \mathcal{M}$, tutte le $\varphi^+(E), \varphi^-(E), |\varphi|(E) \in [0, +\infty)$. Inoltre $\varphi^+(\varnothing) = \varphi^-(\varnothing) = |\varphi|(\varnothing) = 0$.
2. $\varphi(E) = \varphi((E \cap A) \cup (E \cap B)) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B) = \varphi^+(E) - \varphi^-(E)$ e $|\varphi(E)| = |\varphi^+(E) - \varphi^-(E)| \leq \varphi^+(E) + \varphi^-(E) = |\varphi|(E)$

□

Definizione 1.19: μ-Assoluta continuità

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia φ una misura (o misura relativa) su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora φ si dice μ-**assolutamente continua** (denotato μ-a.c.) se vale

$$\mu(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

Esempio 1.24. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $f \in L^1(\Omega)$, con $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ misura relativa. Allora φ è μ-assolutamente continua. Infatti preso un insieme $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ abbiamo che $\varphi(E) = 0$ perché integra su un insieme trascurabile.

Esempio 1.25. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ lo spazio misurabile di Lebesgue. Consideriamo su tale spazio due misure: δ_O di Dirac centrata in $x = 0$ e λ la misura di Lebesgue 1-dimensionale.

Allora δ_0 non è λ-assolutamente continua, infatti, per $E = \{0\}$ si ha $\lambda(E) = 0$ ma $\delta_0(E) = 1$.

Similmente λ non è δ_0-assolutamente continua, infatti preso $E = (1, 2)$ abbiamo che $\delta_0(E) = 0$ ma $\lambda(E) = 1$.

Esempio 1.26. Ora sempre su $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ consideriamo la misura $\lambda_\star : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che mappa $E \mapsto \lambda(E \cap [0, 1])$. Si verifica facilmente che $\lambda_\star$ è una misura (finita).

Allora $\lambda_\star$ è λ-assolutamente continua, infatti preso E trascurabile per $\mathcal{L}^1$ abbiamo che $E \cap [0, 1] \subseteq E$ quindi anche $\lambda_\star(E) = \lambda(E \cap [0, 1]) \leq \lambda(E) = 0$.

λ non è tuttavia $\lambda_\star$-assolutamente continua, infatti preso $E = (1, 2)$ abbiamo che $\lambda(E) = 1$ ma $\lambda_\star(E) = \lambda(\varnothing) = 0$.

Proposizione 1.48. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia φ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora sono equivalenti:*

i) φ *è* μ*-assolutamente continua*

ii) φ^+, φ^- *sono* μ*-assolutamente continue*

iii) $|\varphi|$ *è* μ*-assolutamente continua*

Dimostrazione. i) $\implies$ ii). Sia (A, B) una decomposizione di Hahn di Ω per φ. Supponiamo che φ sia μ-assolutamente continua. Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ e quindi anche $\mu(E \cap A) = 0$ e $\mu(E \cap B) = 0$. Quindi per μ-a.c. $\varphi^+(E) = \varphi(E \cap A) = 0$ e similmente $\varphi^-(E) = -\varphi(E \cap B) = 0$.

ii) $\implies$ iii). Supponiamo che φ^+ e φ^- siano μ-assolutamente continue. Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$. Allora $\varphi^+(E) = 0$ e $\varphi^-(E) = 0$, ma allora $|\varphi|(E) = \varphi^+(E) + \varphi^-(E) = 0$.

iii) $\implies$ i). Supponiamo che $|\varphi|$ sia μ-assolutamente continua. Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$. Allora, per la parte 2 del teorema 1.47, $|\varphi(E)| \leq |\varphi|(E) = 0$, quindi $\varphi(E) = 0$ □

Proposizione 1.49. *Sia* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* φ *una misura relativa su* $(\Omega, \mathcal{M})$*. Se* φ *è* μ*-a.c. allora*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) < \delta \implies |\varphi|(E) < \varepsilon$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo quindi che valendo le ipotesi si abbia

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists E_n \in \mathcal{M} \quad \mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ ma } |\varphi|(E_n) \geq \varepsilon$$

Sia

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$$

Dove la successione interna all'intersezione è una successione decrescente. Inoltre abbiamo che $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ che è finito, e quindi si può usare la continuità della misura:

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la serie geometrica converge.

Ora per concludere vogliamo mostrare che $\varphi(E) \neq 0$ mostrando quindi che φ non è μ-a.c. Sappiamo che $|\varphi|$ è una misura finita. Allora per continuità abbiamo

$$|\varphi|(E) = \lim_{n\to\infty} |\varphi|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \overset{\text{monotonia}}{\geq} \lim_{n\to\infty} |\varphi|(E_n) \geq \varepsilon > 0$$

ora per la proposizione precedente anche φ non è μ-a.c., ottenendo la contraddizione desiderata. □

Corollario 1.49.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$*. Allora*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) < \delta \implies \left| \int_E f d\mu \right| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Data $f \in L^1$ possiamo associarle la misura relativa $\varphi(E) = \int f d\mu$ che è μ-a.c. Per la proposizione precedente sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) < \delta \implies |\varphi|(E) =< \varepsilon$$

Il corollario segue semplicemente da $\left|\int_E f d\mu\right| = |\varphi(E)| \leq |\varphi|(E)$ □

Definizione 1.20: Misura singolare

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia φ una misura o misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora φ è **μ-singolare** se esistono $A, B \in \mathcal{M}$ tali che

- $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$
- $\mu(A) = 0$ e $|\varphi|(B) = 0$

Osservazione. Se abbiamo μ, φ misure su $(\Omega, \mathcal{M})$ allora φ è μ-singolare se e solo se μ è φ-singolare (si dice che μ e φ sono mutuamente singolari).

Infatti se φ è μ-singolare allora esistono $A, B \in \mathcal{M}$, con $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$ tali che $\mu(A) = 0$ e $\varphi(B) = 0$. Allora chiaramente "scambiando" A e B si ottiene che μ è φ-singolare.

Proposizione 1.50. *Sia φ una misura o misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$ e sia μ una misura su $(\Omega, \mathcal{M})$. Se φ è μ-assolutamente continua e μ-singolare allora $\varphi = 0$.*

Dimostrazione. Sia φ μ-assolutamente continua e μ-singolare. Per μ-singolarità prendiamo la decomposizione di Ω in (A, B), dove:

$$\mu(A) = 0 \quad \text{e} \quad |\varphi|(B) = 0$$

Sia $E \in \mathcal{M}$. Vogliamo mostrare che $\varphi(E) = 0$. Per additività della misura relativa si ha:

$$\varphi(E) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B).$$

Si mostra che entrambi i termini sono nulli.

- $\mu(E \cap A) \leq \mu(A) \overset{\text{def di } A}{=} 0 \overset{\mu-\text{a.c.}}{\Longrightarrow} \varphi(E \cap A) = 0$;
- $|\varphi(E \cap B)| \leq |\varphi|(E \cap B) \leq |\varphi|(B) \overset{\text{def di } B}{=} 0 \implies \varphi(E \cap B) = 0$.

Pertanto, si conclude che $\varphi(E) = 0$, che completa la dimostrazione. $\square$

Esempio 1.27. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu)$ lo spazio di misura di Lebesgue e sia δ_0 la misura di Dirac in $x = 0$. Allora δ_0 è μ-singolare. Infatti preso $A = \{0\}$ e $B = \mathbb{R} - \{0\}$ si ha che $A \cap B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$, $\mu(A) = 0$ e $\delta_0(B) = 0$. Inoltre μ è δ_0-singolare, per l'osservazione precedente ossia con $(A, B) = (B, A)$

Proposizione 1.51. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia φ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora sono equivalenti:*

i) *φ è μ-singolare*

ii) *φ^+, φ^- sono μ-singolari*

iii) *$|\varphi|$ è μ-singolare*

Dimostrazione. i) $\implies$ ii) Sia A, B partizione per la μ-singolarità di φ. Allora $\mu(A) = 0$ e $|\varphi|(B) = 0$. Allora $|\varphi^+|(B) = \varphi^+(B) \leq |\varphi|(B) = 0$ e similmente per φ^-. Ne consegue che φ^+ e φ^- sono μ-singolari.

ii) $\implies$ iii) Sia (A, B) partizione di Ω tale che $\mu(A) = 0$ e $\varphi^+(B) = 0$. Siano (A', B') partizione di Ω con $\mu(A') = 0$ e $\varphi^-(B') = 0$. Prendiamo $(A \cup A', B \cap B')$ e mostriamo che è una decomposizione che rende φ μ-singolare. Intanto è una partizione, infatti $(A \cup A') \cup (B \cap B') = (A \cup A' \cup B) \cap (A \cup A' \cup B') = \Omega \cap \Omega = \Omega$ e $(A \cup A') \cap (B \cap B') = ((A \cap B) \cup (A' \cap B)) \cap B' = A' \cap B \cap B' = \varnothing$. Ora si ha che $\mu(A \cup A') = \mu(A) + \mu(A') = 0 + 0 = 0$ e $|\varphi|(B \cap B') = \varphi^+(B \cap B') + \varphi^-(B \cap B') \leq \varphi^+(B) + \varphi^-(B') = 0 + 0 = 0$

iii) $\implies$ i) Ovvia. $\square$

1.11 Derivata di Radon-Nikodym

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. L'obiettivo di questa sottosezione è definire la derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ di una misura relativa φ rispetto a una misura σ-finita μ su $(\Omega, \mathcal{M})$. L'idea di base (che mi sono fatto io) è quella che se φ è una misura di probabilità (ossia è positiva e $\varphi(\Omega) = 1$) e μ e la misura di Lebesgue allora la derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ è la densità di probabilità di φ. Poi cosa significhi generalizzare a una misura relativa generica non lo sa nessuno, ma si può fare. Arriveremo a una definizione tramite 2 generalizzazioni: prima la definiamo per misure finite, poi per μ misura σ-finita e infine anche per φ relativa.

Per dare un'intuizione, sia $\Omega = \mathbb{R}$ coi misurabili secondo Lebesgue e la misura μ di Lebesgue. Se si ricorda il teorema di generazione di misure 1.22 e la relativa generalizzazione per misure relative 1.42, una funzione $f \in L^1$ genera una misura relativa φ:

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu$$

Nel caso in cui venisse assegnata φ si può invertire il procedimento e trovare f che la genera? Verrà chiamata derivata di Radon-Nikodym quella funzione $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ tale per cui

$$\int_E \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \, d\mu = \varphi(E)$$

Si dimostrerà che, in generale, il giusto ambiente per definire una derivata di Radon-Nikodym che abbia questa proprietà è il caso in cui la misura μ sia $\sigma-$finita e φ sia $\mu-$assolutamente continua 1.57.

Inoltre verrà dimostrato che per φ misura relativa $\mu-$singolare, ossia per la quale è possibile trovare un insieme $\mu-$trascurabile su cui questa misura compie l'interezza della sua variazione, la derivata di Radon-Nikodym è nulla $\mu-$quasi ovunque (1.56). Ci si può raffigurare il risultato nel caso in cui $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sia una successione di valori reali (quindi trascurabile) e $\{\alpha_i\}$ dei coefficienti, per cui

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \delta_{x_i}$$

che intuitivamente ha una "sorta" di derivata Radon-Nikodym

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \delta(x - x_i)$$

dove la δ è la funzione delta di Dirac. Questa funzione è chiaramente nulla $\mu-$quasi ovunque.

Il teorema di Lebesgue 1.58 è il risultato che unisce questi due aspetti: si dimostrerà che ogni misura relativa si può scomporre in una parte assolutamente continua e una singolare, così da poter calcolare la derivata di Radon-Nikodym in maniera più generale.

Teorema 1.52: Decomposizione di Lebesgue-Radon-Nikodym

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Siano μ e φ due misure finite su $(\Omega, \mathcal{M})$. Sia

$$\mathcal{F} := \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{ll} (1) & g \geq 0 \ \mu\text{-q.o}, \\ (2) & g \in L^1, \\ (3) & \forall E \in \mathcal{M}, \ \int_E g \, d\mu \leq \varphi(E) \end{array} \right\}$$

Allora esiste unica (a meno di uguaglianza μ-q.o.) una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale

che
$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{g\in\mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu$$

Definizione 1.21: Derivata di Radon-Nikodym per misure finite

Siano μ e φ misure finite su $(\Omega, \mathcal{M})$. Chiamiamo **derivata di Radon-Nikodym** di φ rispetto a μ la funzione $f \in \mathcal{F}$ del teorema precedente e viene denotata con

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \quad ; \quad \int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu = \sup_{g\in\mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu$$

Dimostrazione del Teorema 1.52, ossia che 1.21 è ben definita.
Iniziamo dimostrando l'unicità. Sia

$$I = \sup_{g\in\mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu = \int_\Omega f_1 d\mu = \int_\Omega f_2 d\mu$$

per due funzioni $f_1, f_1 \in \mathcal{F}$. Ora costruiamo la seguente partizione di Ω:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \Omega : f_1(x) > f_2(x)\} \\ E_2 &= \{x \in \Omega : f_1(x) < f_2(x)\} \\ E_3 &= \{x \in \Omega : f_1(x) = f_2(x)\} \end{aligned}$$

supponiamo ora per assurdo che $\mu(E_1) > 0$. Sia $h = \max\{f_1, f_2\}$, allora $h \in \mathcal{F}$, infatti $h \geq f_1 \geq 0$, $h \in L^1(\Omega)$, perché $f_1, f_2 \in L^1$ e per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \int_E h d\mu &= \int_{E\cap E_1} h d\mu + \int_{E\cap E_2} h d\mu + \int_{E\cap E_3} h d\mu = \\ &= \int_{E\cap E_1} f_1 d\mu + \int_{E\cap E_2} f_2 d\mu + \int_{E\cap E_3} f_1 d\mu \leq \\ &\leq \varphi(E\cap E_1) + \varphi(E\cap E_2) + \varphi(E\cap E_3) = \varphi(E) \end{aligned}$$

tuttavia

$$\int_\Omega h d\mu = \int_{E_1} f_1 d\mu + \int_{E_2\cup E_3} f_2 d\mu > \int_{E_1} f_2 d\mu + \int_{E_2\cup E_3} f_2 d\mu = \int_\Omega f_2 d\mu = I$$

ma la f_2 avrebbe dovuto realizzare il sup, assurdo. Analogo per l'ipotesi assurda che $\mu(E_2) > 0$. Ne consegue che $f_1 = f_2$ $\mu-$q.o.

Ora mostriamo l'esistenza. Chiamiamo

$$I = \sup_{g\in\mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu$$

1. I esiste in quanto $\mathcal{F} \neq \varnothing$ perché $0 \in \mathcal{F}$.
2. $I \geq 0$ poiché $\int_\Omega g d\mu \geq 0$ per ogni $g \in \mathcal{F}$.
3. $I < +\infty$ poiché $\int_\Omega g d\mu \leq \varphi(\Omega)$ per ogni $g \in \mathcal{F}$.

quindi esiste una successione $\{g_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu = I$$

allora ne estraiamo una sottosuccessione (poi rinominata g_n per comodità) tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : I - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega g_n d\mu \leq I$$

e costruiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la successione $f_n = \max\{g_1, \dots, g_n\}$. Dimostriamo ora che $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$: $f_n \geq g_1 \geq 0$, $f_n \in L^1(\Omega)$ in quanto assume valori di funzioni integrabili e per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{E \cap E_i} f_n d\mu$$

dove gli E_i, per $i = 1, \dots, n$ sono così definiti:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in \Omega : g_1(x) \geq g_j(x)\, \forall j = 1, \dots, n\} \\
E_2 &= \{x \in \Omega : g_2(x) \geq g_j(x)\, \forall j = 1, \dots, n\} \setminus E_1 \\
E_3 &= \{x \in \Omega : g_3(x) \geq g_j(x)\, \forall j = 1, \dots, n\} \setminus (E_1 \cup E_2) \\
&\vdots \\
E_n &= \{x \in \Omega : g_n(x) \geq g_j(x)\, \forall j = 1, \dots, n\} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right)
\end{aligned}$$

che formano una partizione di Ω e sono misurabili, ne consegue che

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{E \cap E_i} f_n d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{E \cap E_i} g_i d\mu \overset{g_i \in \mathcal{F}}{\leq} \sum_{i=1}^n \varphi(E \cap E_i) = \varphi(E)$$

quindi $f_n \in \mathcal{F}$ e inoltre

$$g_n \leq f_n \implies I - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega g_n d\mu \leq \int_\Omega f_n d\mu \leq I \tag{1.3}$$

inoltre le f_n formano una successione monotona non decrescente, e quindi per il teorema di Beppo Levi 1.30 abbiamo che $f_n \to f : \Omega \to \mathbb{R}$ q.o. e tale che per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Si vuole mostrare che $f \in \mathcal{F}$, che è vero perché $f_n \geq 0 \implies f \geq 0$. Inoltre $f \in L^1$ perché per ogni $E \in \mathcal{M}$ (dunque anche $E = \Omega$) abbiamo che

$$\int_E f_n d\mu \leq \varphi(E) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu \leq \varphi(E)$$

e quindi possiamo concludere $f \in \mathcal{F}$ e inoltre da (1.3) otteniamo che

$$I - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega f_n d\mu \leq I \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} I \leq \int_\Omega f d\mu \leq I$$

□

Ora vogliamo generalizzare la definizione di derivata di Radon-Nikodym nel caso in cui μ che sia σ-finita, ossia si possa scrivere $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ e $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per farlo dobbiamo prima mostrare tre lemmi.

Lemma 1.53. *Sia $\Omega, \mathcal{M}$ uno spazio misurabile e siano μ e φ due misure finite. Allora $\forall g \in \mathcal{F}$ si ha che*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \geq g \quad \mu - q.o.$$

Dimostrazione. Fissiamo $g \in \mathcal{F}$. Sia $f = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$. Chiamiamo $E_{\geq} = \{x \in \Omega : f(x) \geq g(x)\}$ e $E_{<} = \Omega \smallsetminus E_{\geq}$. Chiamiamo $h := \max\{f, g\}$. Allora $h \in \mathcal{F}$ perché $h \geq f \geq 0$, $h \in L^1$ perché $f, g \in L^1$ e $\forall E \in \mathcal{M}$ abbiamo

$$\int_E h d\mu = \int_{E\cap E_{\geq}} h d\mu + \int_{E\cap E_{<}} h d\mu = \int_{E\cap E_{\geq}} f d\mu + \int_{E\cap E_{<}} g d\mu \leq \varphi(E)$$

ma adesso assumiamo $\mu(E_{<}) > 0$ e abbiamo

$$\int_\Omega h d\mu = \int_{E_{\geq}} f d\mu + \int_{E_{<}} g d\mu > \int_{E_{\geq}} g d\mu + \int_{E_{<}} f d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

che è assurdo per la definizione di f. Quindi $\mu(E_{<}) = 0$ $\square$

Lemma 1.54. *Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia μ una misura σ-finita. Allora esiste una famiglia $\{\Omega_n\}$ tale che*

$$\Omega_n \in \mathcal{M}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega, \quad \mu(\Omega_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{gli } \Omega_n \text{ sono } \textbf{disgiunti}$$

Dimostrazione. Se abbiamo una misura σ-finita μ allora sicuramente esiste una famiglia $\{E_n\}$ che soddisfa le prime tre richieste. Se ora costruiamo

$$\Omega_n = E_n \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

otteniamo una famiglia disgiunta che soddisfa tutte le richieste. $\square$

Lemma 1.55. *Sia $\Omega, \mathcal{M}$ uno spazio misurabile, sia μ una misura σ-finita su di esso e sia φ una misura finita. Esisterà una collezione Ω_n che soddisfa la tesi del lemma 1.54. Allora chiamiamo $\mu_n = \mu|_{\mathcal{M}_n}$ con $\mathcal{M}_n = 2^{\Omega_n} \cap \mathcal{M}$ e similmente $\varphi_n = \varphi|_{\mathcal{M}_n}$. Sia ora $\{\Theta_n\}$ una collezione di insiemi che ha le stesse proprietà del lemma 1.54 e definiamo come prima $\hat{\mu}_n = \mu|_{\hat{\mathcal{M}}_n}$ e $\hat{\varphi}_n = \varphi|_{\hat{\mathcal{M}}_n}$.*

Se definiamo ora

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\mu_n} \quad e \quad \hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Theta_n} \frac{\partial\hat{\varphi}_n}{\partial\hat{\mu}_n}$$

allora $f = \hat{f}$ μ-q.o.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $f = \hat{f}$ su ogni $\Omega_i \cap \Theta_j$. Questo è vero perché essendo in Ω_i, per il lemma 1.53 abbiamo che $f \geq \hat{f}$ μ_i-q.o. e essendo in Θ_j abbiamo che $\hat{f} \geq f$ $\hat{\mu}_j$-q.o. ma poiché entrambe le misure sono proiezioni di μ, allora $f = \hat{f}$ μ-q.o. in $\Omega_i \cap \Theta_j$. Poiché l'unione di tutti questi insiemi è Ω, segue la tesi. $\square$

Definizione 1.22: Derivata di Radon-Nikodym con μ σ-finita

Sia $\Omega, \mathcal{M}$ lo spazio misurabile del lemma 1.55. Allora f come definita sopra è la **derivata di Radon-Nikodym** di φ misura finita rispetto a μ misura σ-finita, ossia

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\mu_n}$$

e poiché le μ_n sono misure finite, ogni termine della sommatoria segue la definizione 1.21

Procedendo con la generalizzazione, vogliamo ora definire la derivata di una generica misura relativa φ rispetto a una misura σ-finita

Definizione 1.23: Derivata di Radon-Nikodym

Sia $\Omega, \mathcal{M}$ uno spazio misurabile, sia μ una misura σ-finita e sia φ una misura relativa. Allora $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ e definiamo la **derivata di Radon-Nikodym**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial \mu} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial \mu}$$

e poiché φ^+, φ^- sono misure finite, seguono la definizione 1.22

Teorema 1.56: Teorema di Radon-Nikodym meno bello

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Siano μ e φ rispettivamente una misura σ-finita e una misura relativa su esso. Sia φ μ-singolare. Allora

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0 \quad \mu - q.o.$$

Dimostrazione. Supponiamo μ, φ misure finite e sia φ μ-singolare, ossia esiste una partizione (A, B) di Ω dove $\mu(A) = 0$ e $\varphi(B) = 0$. Consideriamo ora $\mathcal{M} \ni E \subseteq B$, allora

$$0 \leq \int_E \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}_{\in \mathcal{F} \implies \geq 0} \, d\mu \overset{\in \mathcal{F}}{\leq} \varphi(E) \leq \varphi(B) = 0$$

e quindi, essendo $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ non-negativa, vale 0 μ-q.o. su B, ed essendo A μ-trascurabile segue la tesi.

Supponiamo ora che μ sia σ-finita, φ misura finita e μ-singolare. Sia (A, B) la partizione di Ω tale che $\mu(A) = 0$ e $\varphi(B) = 0$. Sia $\{\Omega_n\}$ la partizione di Ω tale che $\mu(\Omega_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo $(A_n, B_n) = (\Omega_n \cap A, \Omega_n \cap B)$. Allora ogni (A_n, B_n) è una partizione di Ω_n e $\mu_n(A_n) \leq \mu(A) = 0$ e $\varphi_n(B_n) \leq \varphi(B) = 0$ per cui ogni φ_n e μ_n-singolare e per il punto precedente

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu_n} = 0 \quad \mu_n\text{-q.o. } \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu_n} = 0 \quad \mu\text{-q.o.}$$

Infine andiamo al caso generale, con μ misura σ-finita e φ misura relativa μ-singolare. Allora per la proposizione 1.51 abbiamo che φ^+ e φ^- sono μ-singolari e quindi per il caso precedente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial \mu} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial \mu} = 0 - 0 = 0 \quad \mu\text{-q.o.}$$

□

Teorema 1.57: Teorema di Radon-Nikodym più bello

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Siano μ e φ rispettivamente una misura σ-finita e una misura relativa. Sia φ μ-assolutamente continua. Allora

$$\forall E \in \mathcal{M} \qquad \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu = \varphi(E)$$

Dimostrazione per φ, μ misure finite. Supponiamo per assurdo che esista un insieme $E_0 \in \mathcal{M}$ tale che $\int_{E_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu \neq \varphi(E_0)$, segue dalla definizione 1.21 che necessariamente $\int_{E_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu < \varphi(E_0)$. Ne segue che $\varphi(E_0) > 0$ e per μ-a.c. anche $\mu(E_0) > 0$.

Siccome μ è finita

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \int_{E_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu + \varepsilon\mu(E_0) = \int_{E_0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu < \varphi(E_0) \tag{1.4}$$

Definiamo ora la misura $\tilde{\varphi}$ come

$$\tilde{\varphi}(E) = \varphi(E) - \int_E \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

che essendo la differenza di due misure finite è una misura relativa. Sia quindi (A, B) una decomposizione di Hahn rispetto a $\tilde{\varphi}$. Abbiamo ora che $\tilde{\varphi}(E_0) > 0$ per (1.4) e $\tilde{\varphi}(A) \geq \tilde{\varphi}(A \cap E_0) \geq \tilde{\varphi}(A \cap E_0) + \tilde{\varphi}(B \cap E_0) = \tilde{\varphi}(E_0) > 0$, quindi

$$\varphi(A) - \int_A \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu = \tilde{\varphi}(A) > 0$$

da cui

$$\varphi(A) > \int_A \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu \geq 0 \overset{\mu-\text{a.c.}}{\Longrightarrow} \mu(A) > 0$$

Ora sia $f := \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\chi_A$. Allora $f \geq 0$, in quanto somma di funzioni non negative; $f \in L^1$ in quanto somma di funzioni L^1 e, $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\int_E f d\mu = \int_{E\cap A} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu + \int_{E\cap B} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu \leq \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B) = \varphi(E)$$

quindi abbiamo che $f \in \mathcal{F}$, ma

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\, d\mu &= \int_A \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu + \int_B \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\, d\mu \\
&> \int_A \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\, d\mu + \int_B \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\, d\mu \\
&= \int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\, d\mu.
\end{aligned}$$

dove la disuguaglianza si ha perché $\varepsilon > 0, \mu(A) > 0$. Ma è assurdo perché sappiamo per definizione di $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ che $\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu$ è il sup di tutti gli integrali di funzioni in $\mathcal{F}$. $\square$

Dimostrazione per μ σ-finita e φ misura finita. Sia $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partizione di Ω tale che $\mu(\Omega_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi le restrizioni $\mu_n, \varphi_n := \mu|_{\Omega_n}, \varphi|_{\Omega_n}$ sono misure finite e φ_n è μ_n-a.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\forall e \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu = \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\mu_n} \chi_{\Omega_n}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap\Omega_n} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\mu_n} d\mu \underset{\text{finite}}{\overset{\text{misure}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(E \cap \Omega_n) = \\
= \varphi(E)
\end{aligned}$$

$\square$

Dimostrazione generale: μ σ-finita e φ misura relativa. Scomponendo $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ otteniamo che $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_E \frac{\partial\varphi^+}{\partial\mu} - \frac{\partial\varphi^-}{\partial\mu} d\mu = \int_E \frac{\partial\varphi^+}{\partial\mu} d\mu - \int_E \frac{\partial\varphi^-}{\partial\mu} d\mu \underset{\text{mis.}}{\overset{\varphi^\pm}{=}} \varphi^+(E) - \varphi^-(E) = \\
= \varphi(E)
\end{aligned}$$

infatti φ è μ-a.c. e quindi φ^+ e φ^- sono μ-a.c. $\square$

Teorema 1.58: Teorema di Lebesgue

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, con μ misura e φ misura relativa. Allora esiste unica una misura φ_a μ-assolutamente continua e esiste unica una misura φ_s μ-singolare tali che

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_s$$

Esistenza, φ misura finita. Sia $K = \sup\{\varphi(N) : N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0\}$. Se $K = 0$ allora $\varphi = \varphi_a$ è μ-a.c. e $\varphi_s = 0$. Assumiamo quindi $K > 0$. Esiste quindi una successione E_n di insiemi misurabili tali che $\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = K$ e $\mu(E_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia ora $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Allora $\mu(E) = 0 \implies \varphi(E) \leq K$ e $\varphi(E) \geq \varphi(E_n)$ per ogni n, quindi per l'arbitrarietà di n abbiamo che $\varphi(E) \geq K$. Ne consegue proprio $\varphi(E) = K$.

Sia ora

$$\begin{aligned} \varphi_a(E) &:= \varphi(A \setminus E) && \forall A \in \mathcal{M} \\ \varphi_s(E) &:= \varphi(A \cap E) && \forall A \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Allora per ogni A misurabile abbiamo

- $\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus E) = (\varphi_s + \varphi_a)(A)$ ok.
- φ_a è μ-a.c. infatti se $N \in \mathcal{M}$ è tale che $\mu(N) = 0$ e se fosse vero che $\varphi_a(N) = \varphi(N \setminus E) > 0$ allora avremmo $\varphi(E \cup N) = \varphi(N \setminus E) + \varphi(E) > \varphi(E)$ che è assurdo
- φ_s è μ-singolare infatti presa la decomposizione $(E, \Omega \setminus E)$ abbiamo che $\mu(E) = 0$ e $\varphi_s(\Omega \setminus E) = \varphi((\Omega - E) \cap E) = \varphi(\varnothing) = 0$

□

Esistenza, φ misura relativa. Sia $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ differenza di misure finite. Allora abbiamo

$$\begin{cases} \varphi^+ = \varphi_a^+ + \varphi_s^+ \\ \varphi^- = \varphi_a^- + \varphi_s^- \end{cases} \implies \varphi = \varphi^+ - \varphi^- = \underbrace{(\varphi_a^+ - \varphi_a^-)}_{:=\varphi_a} + \underbrace{(\varphi_s^+ - \varphi_s^-)}_{:=\varphi_s}$$

dove φ_a e φ_s sono rispettivamente μ-a.c. e μ-singolare perché differenze di misure μ-a.c. e μ-singolari. □

Unicità. Sia $\varphi = \varphi_s + \varphi_a = \varphi'_s + \varphi'_a$, ne consegue che $\varphi_s - \varphi'_s = \varphi'_a - \varphi_a =: \varphi_0$ e quindi φ_0 è sia μ-a.c. che μ-singolare, quindi $\varphi_0 = 0$ e di conseguenza $\varphi_s = \varphi'_s$ e $\varphi_a = \varphi'_a$. □

Esercizio 1.7 Es. 2 del 23-01-2019

Indicata con λ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e con $\mathcal{L}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, si consideri

$$\varphi(A) = 2\lambda(A \cap [0,2]) - 3\int_{A\cap(-\infty,0)} e^x \, d\lambda + \int_A \frac{\sin x}{1+x^2} \, d\lambda \quad A \in \mathcal{L}$$

a. Provare che φ è una misura relativa su $\mathbb{R}$

b. Dire se φ è λ-a.c. e/o è λ-singolare

c. Scrivere la derivata di Radon-Nikodym di φ rispetto a λ

1.12 Misure di Lebesgue-Stieltjes

Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente e continua da sinistra, cioè

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0)$$

Allora F ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità, poiché è monotona. Infatti una funzione monotona ha solo tipi di discontinuità di tipo salto, e si riescono a "contare", infatti ogni intervallino corrispondente a un salto contiene almeno un numero razionale e quindi gli si può associare un numero razionale ivi contenuto.

Ora consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\mathcal{R} = \{[a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\varnothing\}$$

su tale famiglia definiamo una misura elementare

$$m_F([a, b)) = F(b) - F(a) \quad m_F(\varnothing) = 0$$

Notare che $\mathcal{R}$ non è nemmeno un'algebra lol. Tuttavia vale un risultatino

Proposizione 1.59. *Se $[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$ dove $[a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \varnothing$ per ogni $i \neq j$; allora*

$$m_F([a, b)) = \sum_{n=1}^{\infty} m_F([a_n, b_n))$$

Dimostrazione.

$\geq$ La ridotta $\sum_{n=1}^{k} m_F([a_n, b_n))$ della serie dà la somma delle lunghezze $F(b_n) - F(a_n) \geq 0$ per $n = 1, \dots, k$ e danno la variazione di F sugli intervallini. Allora poiché F è monotona,

$$\sum_{n=1}^{k} m_F([a_n, b_n)) \leq m_F([a, b)) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi la serie converge e la sua somma è minore o eguale di $m_F([a, b))$

$\leq$ Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\overline{b} < b$ tale che $F(\overline{b}) \geq F(b) - \varepsilon$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $\overline{a}_n < a_n$ tali che

$$F(\overline{a}_n) \geq F(a_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

osserviamo che $[a, \overline{b}] \subseteq [a, b)$ e invece $[a_n, b_n) \subseteq (\overline{a}_n, b_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$[a, \overline{b}] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{a}_n, b_n)$$

poiché $[a, \overline{b}]$ è un compatto, ne possiamo estrarre un sottoricoprimento finito, quindi esistono $n_1, \dots, n_k$ tali che

$$[a, \overline{b}] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (\overline{a}_{n_i}, b_{n_i})$$

e quindi abbiamo

$$F(\overline{b}) - F(a) \leq \sum_{n=1}^{k} (F(b_n) - F(\overline{a}_n))$$

e quindi

$$F(b) - \varepsilon - F(a) \leq F(\bar{b}) - F(a) \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{k} (F(b_n) - F(\bar{a}_n)) \leq \sum_{n=1}^{k} (F(b_n) - F(a_n)) + \sum_{n=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^n}$$

prendendo il limite per $k \to \infty$ si ottiene la tesi.

□

Possiamo ora definire una misura esterna $\mu_F^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ definita come

$$\mu_F^\star(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m_F(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \ ; \ I_n \in \mathcal{R} \ \forall n \right\}$$

Tale insieme non è mai vuoto, infatti $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$ ricopre ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$.

Proposizione 1.60. *$\mu_F^\star$ è una misura esterna.*

Dimostrazione.

- $\mu_F^\star(\varnothing) = 0$ in quanto posso ricoprire l'insieme vuoto con un'unione numerabile di insiemi vuoti che hanno misura nulla
- Se $A \subseteq B$ allora ogni ricoprimento di B è anche ricoprimento di A, per cui $\mu_F^\star(A) \leq \mu_F^\star(B)$
- Sia $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ allora $\mu_F^\star(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^\star(E_n)$. Infatti (dimostrandolo sono nel caso in cui la serie converge, perché altrimenti è ovvio), esiste $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_{n,k}$, con $I_{n,k} \in \mathcal{R}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} m_F(I_{n,k}) \leq \mu_F^\star(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Tale unione ricopre tutto E e allora necessariamente

$$\mu_F^\star(E) \leq \sum_{k,n \in \mathbb{N}} m_F(I_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{n,k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F^\star(E_n) + \varepsilon$$

da cui $\mu_F^\star(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F^\star(E_n)$ per arbitrarietà di ε

□

Ora a partire da questa misura esterna passiamo a considerare insiemi misurabili e misura di questi. Chiaramente misurabili e misura associata dipendono da F.

Teorema 1.61: Teorema di Caratheodory

Se $\mu^\star$ è una misura esterna su un insieme Ω, allora la famiglia

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \Omega : \forall E \subseteq \Omega\,,\ \mu^\star(E) = \mu^\star(E \cap A) + \mu^\star(E \setminus A)\}$$

è una σ-algebra e la restrizione di $\mu^\star$ a $\mathcal{M}$ è una misura. In particolare $(\Omega, \mathcal{M}, \mu^\star|_{\mathcal{M}})$ è uno spazio di misura.

Applichiamo quindi il teorema di Caratheodory alla misura esterna $\mu_F^\star$ e otteniamo che esiste una σ-algebra $\mathcal{M}_F$. Quindi in particolare la famiglia dei boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_F$. Inoltre la misura $\mu_F = \mu_F^\star|_{\mathcal{M}_F}$ è un'estensione della misura elementare m_F. Perdipiù $\mu_F(x_0) = 0$ se e solo se F è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$; infatti $\{x_0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_0, x_0 + \frac{1}{n})$ che è una successione decrescente di insiemi tutti di misura finita $F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0)$ e allora la loro intersezione è

$$\mu_F(x_0) = \lim_{n \to \infty} \mu_F\left(\left[x_0, x_0 + \frac{1}{n}\right)\right) = F\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - F(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) - F(x_0)$$

che è nulla se e solo se F è continua anche da destra in x_0.

Se prendo $F(x)$ costante allora ottengo la misura nulla. Se invece considero $F(x) = x$ ottengo la misura 1-dimensionale di Lebesgue e i misurabili di Lebesgue. Se prendo $F(x) = \chi_{(0,\infty)}$ funzione Heaviside allora μ_F coincide con la misura di Dirac centrata in 0 e $\mathcal{M}_F = 2^{\mathbb{R}}$.

Le misure che così costruiamo, ossia le misure di Lebesgue-Stieltjes, sono misure σ-finite. In particolare μ_F è finita se F è limitata, perché $\mu_F(\mathbb{R}) = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$ e se F è limitata allora i due limiti esistono e sono finiti.

2 Analisi Funzionale

In tutti gli spazi vettoriali considerati in questa sezione, il campo su cui opereremo sarà $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2.1 Spazi normati

Definizione 2.1: Spazio normato

Uno spazio normato è uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ dotato di una norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

1. *(definita positività)* $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. *(omogeneità)* $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$
3. *(diseguaglianza triangolare)* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, y \in V$

Esempio 2.1. $V = \mathbb{R}$, con norma $|\cdot|$

Esempio 2.2. $V = \mathbb{C}$, con norma $|\cdot| : x \mapsto x\overline{x}$

Esempio 2.3. $V = \mathbb{R}^N$ o $\mathbb{C}^N$ con la norma euclidea, ossia $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2}$

Esempio 2.4. $V = C^0[-1, 1]$ spazio vettoriale reale delle funzioni $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue in ogni punto. La norma è data da $\|f\|_\infty = \max f([-1, 1])$. La norma $\|\cdot\|_\infty$ è detta **norma uniforme** o norma infinito, e non è l'unica norma. Ad esempio possiamo definire

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$$

che è una norma perché è sempre positiva, vale 0 se e solo se $f = 0$, nel caso di $f \in C^0$, per linearità dell'integrale segue l'omogeneità e per la diseguaglianza triangolare del modulo e la linearità dell'integrale abbiamo che vale anche la diseguaglianza triangolare.

Esercizio 2.1

Verificare che le precedenti norme sono effettivamente norme.

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, dove la distanza tra due punti è data dalla norma della loro differenza. Un problema interessante è valutare se diverse norme danno su uno spazio metrico la stessa topologia, ossia caratterizzare le norme equivalenti.

Ricordiamo che in uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ gli aperti sono così caratterizzati: un insieme $A \subseteq V$ è aperto se e solo se per ogni $x \in A$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq A$, dove $B_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|y - x\| < \varepsilon\}$. Inoltre $C \subseteq V$ è chiuso se $V \smallsetminus C$ è aperto. $\{x_n\} \subseteq V$ è convergente se esiste $x \in V$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. C è chiuso se e solo se $\forall$ successione convergente contenuta in C, questa ha limite in C.

Le funzioni continue tra spazi normati $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ sono così caratterizzate: $f : V \to W$ è continua in $x_0 \in V$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad \|x - x_0\|_V < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_W < \varepsilon$$

Allora $f : V \to W$ è continua se è continua in ogni punto di V. Questo è equivalente alla definizione topologica, dove f è continua se per ogni aperto $A \subseteq W$ allora la controimmagine $f^{-1}(A) = \{x \in V : f(x) \in A\}$ è un aperto di V. Ancora questa è equivalente a dire che per ogni successione $\{v_n\}$ convergente in V, allora $f(v_n)$ converge in W a $f(\lim_{n\to\infty} v_n)$

Proposizione 2.1. *In uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$, la funzione $x \mapsto \|x\|$ è una funzione continua*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in V$ e $\varepsilon > 0$. Allora

$$\|x - x_0\| < \delta \implies |\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| < \delta$$

scegliendo $\delta = \varepsilon$ abbiamo la tesi. □

In uno spazio vettoriale V si possono considerare più norme, vediamo alcuni esempi di norme diverse su $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in [1, +\infty)$$

Come sono fatte le palle? Vedasi figura 4 Data una coppia (p, q) e fissata la palla

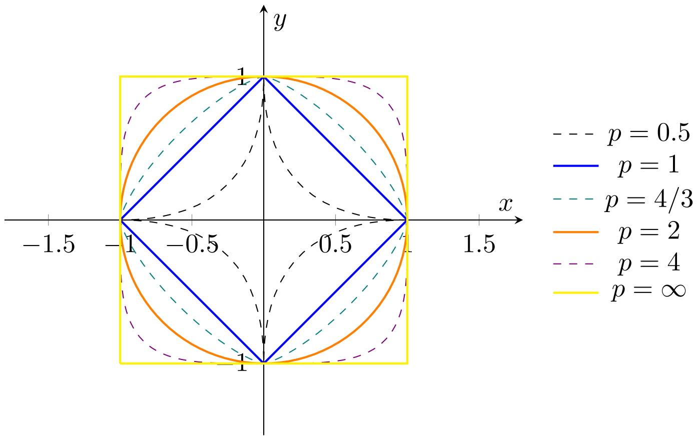


Figura 4: Palle $\|x\|_p < 1$ in $\mathbb{R}^2$

$\|x\|_p < 1$ esistono due palle $\|x\|_q < r$ e $\|x\|_q < R$ con R e r positivi, tali che la prima è contenuta in $\|x\|_p < 1$ e l'altra contiene $\|x\|_p < 1$.

Notare che si potrebbe in teoria prendere anche $p < 1$ ma non è più una norma perché non c'è la diseguaglianza triangolare.

Struttura topologica di uno spazio normato Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ è in particolare uno spazio metrico in cui la distanza d è quella indotta dalla norma, ossia $d(x, y) = \|x - y\|$. Questa è effettivamente una distanza, ad esempio per la disuguaglianza triangolare abbiamo che $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in V$. Possiamo quindi usare la struttura metrica per definire la topologia di V, ossia la topologia che ha come base le palle aperte rispetto alla distanza, ossia

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$$

Poiché gli aperti di una topologia che ha base $\mathcal{B}$ sono così caratterizzati:

$$A \text{ aperto} \iff \forall x \in A \quad \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq A$$

Infatti. Sia A aperto, allora $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$, e allora per ogni $x \in A$, deve essere che $x \in B_i$ per qualche i. Viceversa per ogni $x \in A$, sia B_x un aperto della base tale che $x \in B_x \subseteq A$, allora evidentemente $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ è aperto □

ne consegue che gli aperti di uno spazio normato sono

$$A \subseteq V \text{ aperto} \iff \forall x \in A \quad \exists \delta > 0 : B_\delta(x) = \{y \in V : \|x - y\| < \delta\} \subseteq A$$

Una successione convergente in $(V, \|\cdot\|)$ è una successione di punti $\{x_n\} \subseteq V$ tale che esiste $x \in V$ tale che $\|x_n - x\| \to 0$ per $n \to \infty$.

Un chiuso $C \subseteq V$ è tale se $V \smallsetminus C$ è aperto. Nel caso degli spazi normati, i chiusi sono così caratterizzati:

$$C \subseteq V \text{ chiuso} \iff \forall \{x_n\} \subseteq C \text{ convergente in } V \text{ si ha che } \lim_{n \to \infty} x_n \in C$$

Un **sottospazio** W di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è un sottoinsieme di V che è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V. Ossia è tale che $\forall x, y \in W$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ allora $\alpha x + \beta y \in W$. Inoltre un sottospazio vettoriale di uno spazio normato è a sua volta uno spazio normato, con la stessa norma ristretta al sottospazio.

Esempio 2.5. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidea e sia $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ il sottospazio delle ascisse. Allora W è uno spazio normato con la norma euclidea ristretta a W, ossia $\|x\| = |x|$. Anche il sottospazio $\{0\}$ costituito dal solo vettore nullo è un sottospazio di V.

Altri sottospazi di V sono ad esempio tutte le rette del tipo $\{\alpha x + \beta y = 0\}$ con α e β fissati

Possiamo chiederci quali di questi sottospazi siano chiusi. Allora chiaramente $\{0\}$ è chiuso (in qualsiasi spazio normato), in quanto controimmagine attraverso la funzione distanza da 0 del chiuso $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ (oppure perché normato $\implies$ metrico $\implies T1$). I sottospazi di dimensione 1 sono anche chiusi, in quanto controimmagine di $\{0\}$ attraverso la funzione continua $(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y$.

Esempio 2.6. Sia $V = C^0[0, 1]$ con la norma $\|f\|_\infty = \max f([0, 1])$. Prendiamo come sottospazio $X = \{\text{polinomi di qualunque grado su } [0, 1]\ \}$. Allora X è un sottospazio vettoriale in quanto $X \subseteq V$ e se $f, g \in X$ allora $f + g \in X$ e $\alpha f \in X$.

È chiuso X in V? No. Infatti possiamo costruire successioni di polinomi che convergano in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ (convergenza uniforme) ma il cui limite non è in X. Ad esempio consideriamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

che nell'intervallo $[0, 1]$ le ridotte tendono alla funzione e^x uniformemente in $[0, 1]$, ma il limite e^x non è un polinomio.

Definizione 2.2: Norme equivalenti

Date $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ norme in V, queste si dicono **equivalenti** se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$C_1 \|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C_2 \|v\|_a \quad \forall v \in V$$

Osservazione. La precedente è una relazione di equivalenza, infatti

- *riflessiva* $\|v\|_a = \|v\|_a$

- *simmetrica* se $C_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C_2\|v\|_a$ allora $\frac{1}{C_2}\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \frac{1}{C_1}\|v\|_b$
- *transitiva* se $C_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C_2\|v\|_a$ e $C_3\|v\|_b \leq \|v\|_c \leq C_4\|v\|_b$ allora $C_1C_3\|v\|_a \leq \|v\|_c \leq C_2C_4\|v\|_a$

Proposizione 2.2. *Due norme equivalenti inducono la stessa topologia sullo spazio V: gli aperti rispetto a una norma sono aperti anche rispetto all'altra, e viceversa.*

Proposizione 2.3. *In uno spazio vettoriale V di dimensione finita tutte le norme sono tra loro equivalenti*

Dimostrazione. Sia V di dimensione N. Fissiamo una base $\{e_1, \dots, e_N\}$. Ogni elemento $v \in V$ si può scrivere come $v = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$ per opportuni scalari α_i. Sia $\|\cdot\|_1$ la norma 1, ossia $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|$. Allora questa è una norma perché è sempre positiva, vale 0 solo se tutti gli $\alpha_i = 0$, ossia $v = 0$, vale l'omogeneità perché il modulo è omogeneo e vale la diseguaglianza triangolare perché vale per il modulo.

Sia ora $\|\cdot\|$ una norma qualunque in V.

$$\|v\| = \left\|\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^N |\alpha_i|\|e_i\| \leq M \sum_{i=1}^N |\alpha_i| = M\|v\|_1$$

per $M = \max_{1\leq i\leq N} \|e_i\|$. Ora dobbiamo provare che

$$\exists m > 0 : \quad \forall x \in V \quad \|x\| \geq m\|x\|_1$$

e la dimostriamo per assurdo. Affermiamo, per assurdo, che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in V \text{ tale che } \|x_k\|_1 > k\|x_k\|$$

Notiamo che, in particolare, $\|x_k\|_1 > 0$ per ogni k, quindi possiamo normalizzare per ogni k:

$$u_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_1} \implies \|u_k\|_1 = 1 > k\|u_k\|$$

Rappresentiamo ora u_k come

$$u_k = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,k} e_i$$

e quindi, per definizione di $\|\cdot\|_1$, abbiamo N successioni $\{\alpha_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ reali o complesse tali che $\sum_{i=1}^N |\alpha_{i,k}| = 1$ e quindi tutte le successioni sono limitate. Allora per compattezza ne esiste un'estratta $\{k_n\}$ tale che $\alpha_{i,k_n} \to \alpha_i$ in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Abbiamo ora la successione u_{k_n} che quindi converge a $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$ rispetto a $\|\cdot\|_1$ e quindi anche rispetto a $\|\cdot\|$ per la disuguaglianza

$$\|\cdot\| \leq M\|\cdot\|_1$$

dimostrata nella prima parte. Abbiamo che, per $\|u_k\| < \frac{1}{k}$ e per convergenza in $\|\cdot\|$:

$$\|u\| \leq \|u - u_{k_n}\| + \|u_{k_n}\| < \|u - u_{k_n}\| + \frac{1}{k_n} \to 0$$

per cui $\|u\| = 0$ e quindi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ma d'altra parte

$$|\|u\|_1 - 1| = |\|u\|_1 - \|u_{k_n}\|_1| \leq \|u - u_{k_n}\|_1 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i - \alpha_{i,k_n}| \to 0$$

ma allora $\|\mathbf{u}\|_\mathbf{1} = \mathbf{1}$ che è una contraddizione. $\square$

Esempio 2.7 (Norme non equivalenti)**.** Sia $V = C^0[-1,1]$ con le norme $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$ e $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. Queste due norme non sono equivalenti, infatti non è vero che esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty \le C\|f\|_1$ per ogni $f \in V$. In particolare vogliamo mostrare che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists f_k \in V : \|f_k\|_\infty > k\|f_k\|_1$$

Se prendiamo funzioni f_k come in figura 5 abbiamo che il massimo di f_k è k e

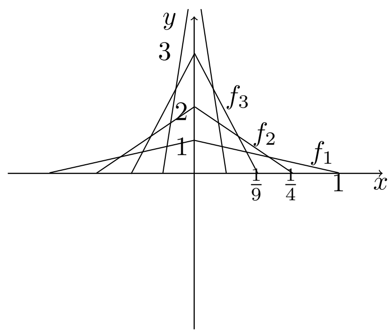


Figura 5: triangoli

l'integrale è $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k^2} \cdot k = \frac{1}{k}$. Allora abbiamo che

$$\frac{\|f_k\|_\infty}{\|f_k\|_1} = \frac{k}{\frac{1}{k}} = k^2 > k \text{ per ogni } k > 1$$

Definizione 2.3: Spazio di Banach

Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice **di Banach** se è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma

Esempio 2.8. Gli spazi $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ sono spazi di Banach.

Esercizio 2.2

Mostrare che $C^0[-1,1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach

Esempio 2.9. Su $V = C^0[-1,1]$, la norma $\|\cdot\|_1$ non induce uno spazio di Banach. Dobbiamo trovare una successione di Cauchy che non converge in V, quindi ad esempio trovare una funzione che converga a una funzione non continua. Prendiamo

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(nx) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \text{sign}x \text{ q.o.}$$

allora f_n è una successione di Cauchy, ossia

$$I_{n,m} := \int_{-1}^{1} |f_n - f_m| = \int_{-1}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - \frac{2}{\pi} \arctan(mx) \right| dx \to 0 \text{ per } n, m \to \infty$$

infatti

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_{-1}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - \text{sign}x + \text{sign}x - \frac{2}{\pi} \arctan(mx) \right| \le \\ &\le \int_{-1}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - \text{sign}x \right| dx + \int_{-1}^{1} \left| \text{sign}x - \frac{2}{\pi} \arctan(mx) \right| dx \end{aligned}$$

e vogliamo mostrare che entrambi gli integrali tendono a 0. Prendendo ad esempio il primo

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - \text{sign}x \right| dx = 2 \int_{0}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - 1 \right| dx \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

dove per l'ultimo limite possiamo usare sia il teorema della convergenza dominata (1.31) che il teorema della convergenza monotona (1.30). Dunque la successione è di Cauchy, ma non converge ad una funzione in $C^0[-1, 1]$

Esercizio 2.3

Sia V uno spazio vettoriale con due norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ e rispetto a $\|\cdot\|$ V è uno spazio di Banach. Mostrare che, se le due norme sono equivalenti, allora V è uno spazio di Banach anche con la norma $\|\cdot\|'$.

Osservazione. Se le norme non sono equivalenti, allora si deve tacere.

Proposizione 2.4. *Se V è uno spazio normato e $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale allora W è uno spazio normato con la norma di V ristretta a W. Inoltre:*

a. se W ha dimensione finita allora W è necessariamente chiuso;

b. se V è uno spazio di Banach, allora ogni sottospazio $W \subseteq V$ chiuso risulta esso stesso un Banach rispetto alla norma.

Dimostrazione. È chiaro che se $(V, \|\cdot\|)$ è normato, la stessa norma su W è una norma, infatti chiaramente valgono ancora le tre proprietà della norma, dove semplicemente invece di $\forall x \in V$ avremo $\forall x \in W$ ma questo non cambia nulla. Inoltre

a. Sia $\{f_n\} \subseteq W$, con $f_n \to f$ in $(V, \|\cdot\|)$. Allora $f_n \to f$ in $(W \cup \{f\}, \|\cdot\|)$ (intendendo il minimo spazio vettoriale che contiene W e f). Ma poiché $W \cup \{f\}$ ha dimensione finita, tutte le norme su di esso sono equivalenti, allora allora $f_n \to f$ anche rispetto ad altre norme. Supponiamo che $\{e_i\}_{i=1,\ldots,N}$ sia una base di W e supponiamo per assurdo che $f \notin W$. Allora ogni $f_n = 0 \cdot f + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n e_i$ e poiché $f_n \to f$ in norma 1, allora

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \iff 0 = \lim_{n\to\infty} |0 - 1| + \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i^n - 0| \geq 1$$

che è assurdo, quindi $f \in W$, ossia W è chiuso.

b. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in W con la norma $\|\cdot\|$. Quindi $f_n \in W$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\|f_n - f_m\| \to 0$ per $n, m \to \infty$. Segue quindi che f_n è di Cauchy in $(V, \|\cdot\|)$ e quindi, essendo V completo, esiste $f \in V$ tale che $\|f_n - f\| \to 0$ per $n \to \infty$. Dobbiamo mostrare che $f \in W$ ma poiché W è chiuso questo è ovvio.

□

Esempio 2.10 ($W \subseteq V$, W Banach, V no)**.** È possibile che W sia uno spazio di Banach mentre V no. Ad esempio sia $V = C^0[-1, 1]$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Sappiamo che non è uno spazio di Banach per l'esempio 2.9. Sia $W = \{f \in V : f(x) = \alpha \in \mathbb{R}\}$ il sottospazio delle funzioni costanti. È un sottospazio perché se $a, b \in W$ allora anche $\alpha a + \beta b$ è una funzione costante. Inoltre W è completo in quanto omeomorfo a $\mathbb{R}$ con la norma euclidea, che è completo. [2]

[2] In realtà la completezza non è una proprietà topologica, bisognerebbe giustificare meglio, ma è un ottimo modo per ricordare le sagge parole del Manetti ...

Esempio 2.11. Prendiamo $V = C^0[-1, 1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ che rende V uno spazio di Banach. Consideriamo lo spazio W dei polinomi che non è chiuso in V perché contiene tutti i polinomi di Taylor di e^x ma non la funzione limite e^x. In realtà, W è **denso** in V, ossia

$$\forall f \in V \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in W : \|f - g\|_\infty < \varepsilon$$

oppure

$$\forall f \in V, \quad \exists \{g_n\} \subseteq W \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_\infty = 0$$

(poiché $W \neq V$ chiaramente se è denso non è chiuso)

Alcuni sottospazi chiusi di V invece sono ad esempio

- i sottospazi di dimensione finita (e.g. polinomi di grado 10)
- $Z = \{f \in C^0[-1, 1] : f(0) = 0\}$ infatti se $f_n \to f$ in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ allora $f_n \to$ uniformemente e quindi puntualmente e quindi $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$
- $T = \{f \in C^0[-1, 1] : \int_{-1}^1 f(t)dt = 0\}$ è chiuso infatti se $f_n \to f$ uniformemente e $\int_{-1}^1 f_n(t)dt = 0 \to \int_{-1}^1 f(t)dt = 0$ perché c'è convergenza uniforme

2.2 Spazi L^p

Definizione 2.4: Spazio L^p

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Per $p \in [1, +\infty)$ definiamo lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ come lo spazio delle funzioni misurabili $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tali che

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty$$

Se $p = +\infty$ allora $L^{+\infty}(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è lo spazio delle funzioni misurabili $f : \Omega \to \mathbb{K}$ e **essenzialmente limitate**, ossia tali che

$$\exists M > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N, \quad \mu(N) = 0$$

ossia che f è limitata μ-q.o.

Nota. Se $p = 1$ allora $|f|$ è integrabile se e solo se f è integrabile, in altre parole $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$. Questo è un caso particolare

Nota. Vedremo che, per $1 \leq p \leq p' < +\infty$ si ha che che $f \in L^{p'} \implies f \in L^p$. Questo non vale evidentemente per $p' = \infty$. Infatti ad esempio per $f = 1$ su $\Omega = \mathbb{R}^N$ abbiamo che evidentemente f è limitata quindi $f \in L^{+\infty}$, ma $f \notin L^p$ per ogni $p \in [1, +\infty)$

Gli elementi degli spazi L^p non sono funzioni, ma classi di funzioni, equivalenti μ-q.o.

Osservazione. Ogni spazio L^p è uno spazio vettoriale. L'unica condizione che non è ovvia è verificare che se $f, g \in L^p$ allora $f + g \in L^p$. Infatti se $p = +\infty$ allora è ovvio che $f + g$ è limitata μ-q.o. Se $p < +\infty$ allora

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

Ne consegue che $f + g \in L^p$, infatti

$$\int_\Omega |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int_\Omega (|f|^p + |g|^p) d\mu < 2^p \left(\int_\Omega |f|^p d\mu + \int_\Omega |g|^p d\mu \right) < +\infty$$

Proposizione 2.5. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora per ogni $p \in [1, +\infty]$ lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio normato con norma*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } p \in [1, +\infty) \\ \inf\{M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} & \text{se } p = +\infty \end{cases}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione nel caso $p < +\infty$ e $p = +\infty$

Caso $p < +\infty$:

- La norma è ben definita perché se $f = g$ q.o. allora $|f|^p = |g|^p$ q.o. e quindi $\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Omega |g|^p d\mu$ e di conseguenza $\|f\|_p = \|g\|_p$
- *Definita positività* $\|f\|_p = 0 \iff \int_\Omega |f|^p d\mu = 0 \iff |f|^p = 0 \quad \mu$-q.o. $\iff |f| = 0 \quad \mu$-q.o. $\iff f = 0 \quad \mu$-q.o.
- *Omogeneità* $\|\lambda f\|_p = \left(\int_\Omega |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\lambda| |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$
- *Diseguaglianza triangolare* meno banale delle precedenti, dimostrata più avanti come diseguaglianza di Minkowski 2.8.

Caso $p = +\infty$:

- La norma è ben definita perché se $f = g$ q.o. allora ogniqualvolta M è maggiorante quasi ovunque di f lo è anche di g, e quindi $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ perché sono l'inf dello stesso insieme. Inoltre in realtà è evidentemente un min.
- *Definita positività* $\|f\|_\infty = 0 \iff \inf\{M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = 0 \iff |f| \leq 0 \quad \mu\text{-q.o.} \iff f = 0 \quad \mu\text{-q.o.}$
- *Omogeneità* $\|\lambda f\|_\infty = \inf\{M > 0 : |\lambda f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = \inf\{|\lambda| M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = |\lambda| \inf\{M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = |\lambda| \|f\|_\infty$
- *Diseguaglianza triangolare* Evidente, infatti ogni costante che maggiori $|f|+|g|$ necessariamente maggiora $|f + g|$ ed è almeno $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

$\square$

Proposizione 2.6 (Diseguaglianza di Young)**.** *Sia* $1 \leq p \leq \infty$ *e* p' *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*, con la convenzione che* $\frac{1}{\infty} = 0$*. Allora per ogni* $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *vale che* $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$*.*

Dimostrazione. Se $a = 0$ o $b = 0$ allora la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo quindi che $a, b > 0$. Osserviamo che il logaritmo è una funzione concava su $R_{>0}$ e quindi $\ln(tx+(1-t)y) \geq t \ln x + (1-t) \ln y$ per ogni $x, y > 0$ e $t \in [0, 1]$. Applichiamo questa disuguaglianza con $x = a^p$, $y = b^{p'}$, $t = \frac{1}{p}$, $(1 - t) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$. Otteniamo

$$\ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \right) \geq \ln a + \ln b \implies \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \geq ab$$

dove l'ultima uguaglianza è per la monotonia del logaritmo. $\square$

Definizione 2.5: Esponenti coniugati

Se $1 \leq p, p' \leq \infty$ verificano $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ anche in senso generalizzato, ossia se $p = 1$ e $p' = +\infty$ o $p = \infty$ e $p' = 1$, allora si dicono **esponenti coniugati**.

Teorema 2.7: Diseguaglianza di Hölder

Siano $p, p' \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Allora se $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ allora $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e vale

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

Dimostrazione. Se $p = 1$ o $p = +\infty$ allora è semplice. Supponiamo ad esempio $p = 1$,

$$|fg|(x) \leq |f|(x)|g|(x) \leq |f|(g)\|g\|_\infty \qquad \text{q.o.}$$

quindi fg è dominata da una funzione integrabile ed è dunque integrabile, inoltre

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

Sia ora $p \in (1, \infty)$. Se f o g è la funzione nulla allora la diseguaglianza è ovvia, quindi supponiamo $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_{p'}$. Ora dividiamo in due passi

1. u, v nelle stesse ipotesi di f e g ma con $\|u\|_p = 1 = \|v\|_{p'}$. Allora

$$|uv(x)| \leq \frac{1}{p}|u(x)|^p + \frac{1}{p'}|v(x)|^{p'} \quad \text{(Young 2.6)}$$

quindi $uv \in L^1(\Omega)$ in quanto dominata da funzione somma di funzioni integrabili. Allora abbiamo

$$\|uv\|_1 = \int_\Omega |uv| d\mu \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p d\mu + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

2. f, g generiche. Sia $M = \|f\|_p$ e $N = \|g\|_{p'}$. Allora $\frac{f}{M}, \frac{g}{N} \in L^p$ e $L^{p'}$ rispettivamente e $\left\|\frac{f}{M}\right\|_p = 1 = \left\|\frac{g}{N}\right\|_{p'}$. Applichiamo il punto precedente a $\frac{f}{M}$ e $\frac{g}{N}$ e otteniamo che $fg \in L^1$ e inoltre

$$\left\|\frac{f}{M} \cdot \frac{g}{N}\right\|_1 \leq 1 \implies \frac{1}{MN}\|fg\|_1 \leq 1 \implies \|fg\|_1 \leq MN = \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

□

Proposizione 2.8 (Minkowski o disuguaglianza triangolare)**.** *Se $f, g \in L^p(\Omega)$ allora $f + g \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dimostrazione. Già sappiamo che $f + g \in L^p(\Omega)$. Allora

$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu = \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f+g| d\mu \leq \int_\Omega \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{:=w} |f| d\mu + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g| d\mu$$

Affermiamo che $w \in L^{p'}(\Omega)$, infatti

$$\int_\Omega |w|^{p'} d\mu = \int_\Omega |f+g|^{(p-1)p'} d\mu = \int_\Omega |f+g|^p d\mu$$

dove si è usato che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \implies p' + p = pp'$. Troviamo quindi

$$\|w\|_{p'} = \left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1}$$

Ora possiamo applicare Hölder 2.7 e ottenere

$$\|f+g\|_p^p \leq \|w\|_{p'}\|f\|_p + \|w\|_{p'}\|g\|_p = \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

e infine dividendo per $\|f+g\|^{p-1}$ otteniamo la diseguaglianza triangolare □

Con la precedente proposizione abbiamo concluso la dimostrazione di 2.5, ossia che L^p è uno spazio normato.

Teorema 2.9: L^p è Banach

Per ogni $p \in [1, \infty]$, lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di Banach

Dimostrazione per $p = +\infty$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^\infty(\Omega)$ una successione di Cauchy. Quindi

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n, m \geq n_k \implies \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k} \tag{2.1}$$

cioè $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $x \in \Omega \smallsetminus N_{k,n,m}$, con $N_{k,n,m}$ trascurabile. Consideriamo ora l'insieme

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n,m \geq n_k} N_{k,n,m}$$

N è unione numerabile di trascurabili e quindi è trascurabile. Allora, per (2.1), si ha $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $x \in \Omega \smallsetminus N$. Questo significa che $\{f_n(x)\} \in \mathbb{R}$ è di Cauchy e quindi convergente per ogni $x \in \Omega \smallsetminus N$ e introduciamo la funzione

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N$$

che è misurabile perché limite di funzioni misurabili. Ora portando $m \to \infty$ nella diseguaglianza precedente otteniamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N \tag{2.2}$$

ci resta da dimostrare che $f \in L^\infty(\Omega)$ e che $f_n \to f$ in $L^\infty(\Omega)$. La prima è vera, perché ad esempio

$$|f(x)| \leq |f_{n_k}(x)| + |f(x) - f_{n_k}(x)| \leq \|f_{n_k}\|_\infty + \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N$$

e la seconda pure, infatti ora riprendendo la (2.2) e la (2.1) otteniamo

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_k \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N$$

□

Dimostrazione con $1 \leq p < +\infty$. Sia f_n una successione di Cauchy in L^p, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad m, n \geq n_\varepsilon \implies \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon \tag{2.3}$$

Vogliamo trovare un'estratta convergente. Consideriamo

$$\begin{aligned}
n_1 &:= n_{\varepsilon = \frac{1}{2}} && \rightsquigarrow f_{n_1}, \\
n_2 &:= \max\left\{n_{\varepsilon = \frac{1}{2^2}}, n_1 + 1\right\} && \rightsquigarrow f_{n_2}, \\
&\vdots \\
n_k &:= \max\left\{n_{\varepsilon = \frac{1}{2^k}}, n_{k-1} + 1\right\} && \rightsquigarrow f_{n_k}.
\end{aligned}$$

e abbiamo che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Definiamo ora

$$u_k := f_{n_k}$$

vogliamo mostrare che u_k converge in L^p a qualche elemento f. A tale scopo sia

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^{k} |u_{i+1}(x) - u_i(x)|$$

che è la ridotta di una serie a termini non negativi e inoltre ogni $g_k \in L^p(\Omega)$ per la struttura di spazio vettoriale. Inoltre

$$\|g_k\|_p = \sum_{i=1}^{k} \|u_{i+1} - u_i\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \leq 1 \implies \int_\Omega \underbrace{|g_k|^p}_{=:h_k} d\mu \leq 1$$

Allora $h_k := |g_k|^p$ è una successione monotona crescente a termini non negativi. Quindi per Beppo Levi (Teorema 1.30) possiamo concludere che esiste h misurabile e non negativa tale che

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x) \text{ e } \int_\Omega h d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega h_k d\mu \leq 1$$

Siccome $\int_\Omega |g(x)|^p d\mu \leq 1$,

$$\exists g \in L^p : \quad g_k \xrightarrow{\text{q.o.}} g$$

Abbiamo che, se $n > m$

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_m(x)| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| \\ &= g_{n-1}(x) - g_{m-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{m-1}(x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

per $x \in \Omega$ fissato $\{u_k(x)\}$ è una successione di Cauchy e dunque possiamo definire una funzione

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Infine vogliamo controllare che $f \in L^p(\Omega)$ e che $u_k \to f$ in $L^p(\Omega)$. Passando al limite per $n \to \infty$ in (2.4) otteniamo

$$|f(x) - u_m(x)| \leq g(x) - g_{m-1}(x) \leq g(x) \implies |f(x)| \leq |u_n(x)| + g(x)$$

e quindi $f \in L^p$ perché è dominata da una funzione L^p, in quanto somma di due tali funzioni. D'altra parte, sempre da (2.4), portando anche $m \to \infty$ otteniamo che il secondo membro tende a 0, e quindi $u_m \to f$ q.o. in Ω. Inoltre

$$|f(x) - u_m(x)|^p \leq |g(x)|^p \in L^1(\Omega)$$

e possiamo applicare il teorema 1.31 di convergenza dominata di Lebesgue per cui

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |f(x) - u_m(x)|^p d\mu = 0 \iff \|f - u_m\|_p^p \to 0 \iff u_m \xrightarrow{L^p} f$$

□

Corollario 2.9.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione convergente a $f \in L^p(\Omega)$. Allora esistono una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ e una funzione $w \in L^p(\Omega)$ tali che*

1. *$f_{n_k} \to f$ q.o. in Ω*
2. *$|f_{n_k}(x)| \leq w(x)$ q.o. per $x \in \Omega$*

Dimostrazione. Se $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ allora è di Cauchy in L^p e quindi, come si può evincere dalla dimostrazione del teorema, esiste un'estratta $u_k := f_{n_k}$ tale che u_k converge q.o. a una funzione $\tilde{f}$ e inoltre, per g definito come nella dimostrazione del teorema,

$$\left|\tilde{f}(x) - u_k(x)\right| \leq g(x) \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies |u_k(x)| \leq \left|\tilde{f}(x)\right| + g(x)$$

per cui possiamo prendere $w(x) = \left|\tilde{f}(x)\right| + g(x) \in L^p(\Omega)$. Ci rimane da controllare che $f \equiv \tilde{f}$ q.o. in Ω: questo è vero in quanto u_k converge in L^p sia a f (per ipotesi) che a $\tilde{f}$ (per quanto appena detto) dunque per l'unicità del limite f e $\tilde{f}$ devono appartenere alla stessa classe di funzioni in L^p.

Per $p = +\infty$ la tesi vale più banalmente. □

Osservazione. Convergenza in L^∞ implica convergenza quasi uniforme

Si può rafforzare il corollario 2.9.1 per dire che tutta la successione converge quasi ovunque? **No.** Consideriamo ad esempio la successione

$$\begin{aligned}
&f_1 = \chi_{[0,1]}, \quad f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \quad f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]} \\
&f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{3}]}, \quad f_5 = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, \quad f_6 = \chi_{[\frac{2}{3},1]} \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Questa successione converge a 0 in $L^p(0,1)$ per ogni $1 \leq p < \infty$, infatti

$$\int_0^1 |f_n - 0|^p dx = \int_0^1 |f_n|^p dx = \frac{1}{k_n} \to 0$$

tuttavia non converge quasi ovunque a 0, infatti per ogni $x \in (0,1)$ la successione $f_n(x)$ non ha limite perché non smette mai di assumere anche il valore 1.

Proposizione 2.10 (Convergenze)**.**

1. $$\text{Conv. in } L^\infty \implies \text{conv. q.u} \implies \begin{cases} \text{conv. q.o.} \\ \text{conv. in misura} \end{cases}$$

2. *Conv. in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty \implies$ conv. q.o. per un'estratta (come la convergenza in misura)*

3. *Conv. in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty \implies$ Conv. in misura*

4. *Se $\mu(\Omega) < +\infty$ e $1 \leq p < q \leq \infty$ allora $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ e si ha che esiste una costante $C > 0$ per cui*

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega)$$

Dimostrazione. 1. Dimostrato nei Teoremi 1.32 e 1.34

2. Dimostrato in corollario 2.9.1

3. Sia $f_n \to f$ in L^p. Definiamo

$$A_n := \{x \in \Omega : \quad |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

e quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\varepsilon^p \mu(A_n) &= \int_{A_n} \varepsilon^p \, d\mu \leq \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \\
&\leq \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu = \|f_n - f\|_p^p \to 0.
\end{aligned}$$

e quindi $\mu(A_n) \to 0$ e quindi c'è convergenza in misura.

4. Sia $f \in L^q(\Omega)$. Allora, usiamo la diseguaglianza di Hölder 2.7 con esponenti $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{q-p}$ (che chiaramente sono coniugati):

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu = \int_\Omega 1 \cdot |f|^p d\mu \leq \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}$$

Da cui troviamo

$$\|f\|_p^p \leq \mu(\Omega)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_q^p \implies \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Se $q = \infty$ invece abbiamo

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \int_\Omega \|f\|_\infty^p d\mu = \mu(\Omega)\|f\|_\infty^p \implies \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$$

□

Esempio 2.12. Nella 4. è importante richiedere $\mu(\Omega) < +\infty$. Ad esempio se $\Omega = \mathbb{R}$ e $f(x) = 1$ abbiamo che $f \in L^\infty$ ma $f \notin L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq p < \infty$

Esempio 2.13. L'altra inclusione è falsa. Ad esempio se $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}\chi_{[-1,1]}(x)$ per $\alpha < 1$ è integrabile ma non è limitata, quindi $f \in L^1$ ma $f \notin L^\infty$

Proposizione 2.11. *Se $\mu(\Omega) = +\infty$ e $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ allora $f \in L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ e*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_1^\theta \|f\|_\infty^{1-\theta}$$

per un certo $\theta \in (0,1)$.

Dimostrazione. Notiamo che $|f|^p = |f||f|^{p-1} \leq |f|\|f\|_\infty^{p-1}$. Ne consegue che $|f|^p$ è integrabile e inoltre

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^{p-1} \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_\infty^{p-1}\|f\|_1$$

ora elevando il tutto alla $1/p$ otteniamo

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{1-1/p}\|f\|_1^{1/p}$$

ossia $\theta = \dfrac{1}{p}$ e $1 - \theta = \dfrac{1}{p'}$ □

Corollario 2.11.1. *Se $\mu(\Omega) = +\infty$ e $f_n \to f$ in $L^1(\Omega)$ e in $L^\infty(\Omega)$ allora $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in (1, \infty)$.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f\|_1^{\frac{1}{p}} \|f_n - f\|_\infty^{1-\frac{1}{p}}$$

da qui la tesi. Notare che in realtà le ipotesi potrebbero essere alleggerite a chiedere solo una delle due convergenze, purché l'altra sia finita. □

Nota. Le convergenze q.o., q.u. e in misura non richiedono che le funzioni della successione o la funzione limite appartengano a un qualche spazio L^p.

2.3 Spazi di Hilbert

Per questo capitolo userò la notazione $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ quando non è importante specificare il campo su cui lavoriamo.

Definizione 2.6: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale H su $\mathbb{K}$ dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama **spazio prehilbertiano**. In particolare l'applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$$

verifica le seguenti proprietà:

i) *(positività)* $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

ii) *(definita positività)* $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

iii) *(linearità rispetto alla prima componente)* $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in H$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

iv) *(simmetria / coniugio)* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in H$

Osservazione. Da *iii*) e *iv*) otteniamo che, per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \overset{iii)}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z \rangle} \overset{iv)}{=} \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

Teorema 2.12: Diseguaglianza di Schwarz

Se H è uno spazio prehilbertiano allora per ogni $x, y \in H$ vale la diseguaglianza

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Dimostrazione. Considero l'elemento $x + \lambda \langle x, y \rangle y$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e calcolo il prodotto scalare con se stesso:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda \langle x, y \rangle y, x + \lambda \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 |\langle x, y \rangle|^2 \langle y, y \rangle = \\ &= \lambda^2 |\langle x, y \rangle|^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda |\langle x, y \rangle|^2 + \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

dove, se il coefficiente di λ^2 è diverso da 0, l'ultimo è un polinomio di secondo grado in λ, con tutti i coefficienti reali e non negativi, quindi il discriminante è non positivo, ossia

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0 \iff |\langle x, y \rangle|^4 \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle \leq 0$$

da cui $|\langle x, y \rangle| = 0$ oppure $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$. In entrambi i casi la tesi è vera.

Se invece il coefficiente di λ^2 è 0, allora $\langle x, y \rangle = 0$ e la tesi è vera, oppure $\langle y, y \rangle = 0$, allora $y = 0$ e la tesi è vera perché $\langle x, y \rangle = 0$. □

Proposizione 2.13. *Sia H uno spazio prehilbertiano con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora la funzione*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : H &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ v &\longmapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

è una norma.

In particolare uno spazio prehilbertiano è uno spazio normato, con tale norma.

Dimostrazione. La definita positività corrisponde alle proprietà *i)* e *ii)* del prodotto scalare. L'omogenità segue dalla linearità:

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle v, v\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha|\|v\|$$

La diseguaglianza triangolare segue dalla diseguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\Re\langle v, w\rangle \leq \\ \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

per cui $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$. □

Definizione 2.7: Spazio di Hilbert

Uno spazio prehilbertiano che sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare si chiama **spazio di Hilbert**.

Esempio 2.14. $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ sono spazi di Hilbert. Ad esempio in $\mathbb{C}^N$ il prodotto scalare standard è $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^N x_i\overline{y_i}$ e induce la norma euclidea su $\mathbb{C}^N$. I dettagli sono facili e lasciati come esercizio.

Su $\mathbb{R}^N$ si può mettere come prodotto scalare anche ad esempio

$$(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con A una matrice simmetrica definita positiva.

Esempio 2.15. $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert se prendiamo come prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu$$

dove il coniugio è rilevante solo nel caso complesso. La norma associata a questo prodotto scalare è proprio la norma 2.

Proposizione 2.14 (Regola del Parallelogramma)**.** *Se H è uno spazio prehilbertiano allora vale l'identità*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$$

che vista graficamente (figura 6) significa che la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati.

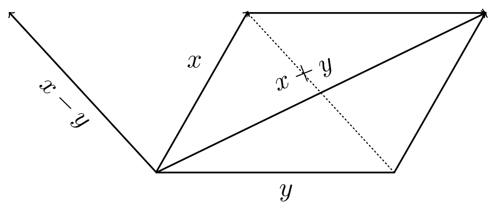


Figura 6: Regola del Parallelogramma

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \\ &+ \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\end{aligned}$$

□

Data una norma, se verifica l'identità del parallelogramma allora è una norma hilbertiana, cioè associata a un prodotto scalare

Proposizione 2.15. *Una norma* $\|\cdot\|$ *definita su uno spazio vettoriale* V *è hilbertiana se e solo se verifica l'identità del parallelogramma, ossia*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in V$$

in questo caso il prodotto scalare è definito da

$$\langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2 \quad \forall x, y \in V$$

dove gli ultimi due termini non sono presenti nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Esempio 2.16. Gli spazi $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ non sono Hilbertiani. Basta trovare una coppia di funzioni f, g tali che

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 \neq 2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2$$

Ad esempio prendiamo $\Omega = [-1, 1]$ e prendiamo $f = \chi_{(-1,0)}$ e $g = \chi_{(0,1)}$ allora $f + g = 1$ q.o. e quindi

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = 4 + 4 \neq 2 + 2 = 2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2$$

Ora con le stesse funzioni mostriamo che neanche $L^\infty[-1, 1]$ ha una norma hilbertiana, infatti

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 2 + 2 = 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2$$

Definizione 2.8: Ortogonalità

Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio prehilbertiano. Due vettori $x, y \in H$ si dicono **ortogonali** se $\langle x, y\rangle = 0$.

Esercizio 2.4

Mostrare che negli spazi prehilbertiani vale il teorema di Pitagora: per ogni coppia di vettori ortogonali $x, y \in H$ si ha

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2.4 Risultati di densità su $L^p(\Omega)$

In questa parte Ω sarà un aperto di $\mathbb{R}^N$ con la misura μ di Lebesgue. Inizieremo con il caso $\Omega = \mathbb{R}^N$

Proposizione 2.16. *Le funzioni semplici, misurabili e nulle al di fuori di un compatto sono dense in* $L^1(\mathbb{R}^N)$

Dimostrazione. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ osservo che $f^+, f^- \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e sono non negative. Allora per il Lemma 1.21 esistono 2 successioni s_n e t_n di funzioni semplici, misurabili, non negative e nulle fuori da un compatto che convergono q.o. rispettivamente a f^+ e f^- e queste successioni sono monotone crescenti. Ci rimane da controllare che $s_n \to f^+$ e $t_n \to f^-$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Sappiamo che $s_n \nearrow f^+$ e $t_n \nearrow f^-$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} |s_n - f^+| d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \left(f^+ - s_n\right) d\mu \to 0$$

dove si è usato BL 1.30 perché la successione integranda è monotona decrescente e gli integrali sono tutti maggiorati da quello di f^+ che è finito. Altrimenti si può anche usare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue perché tutte le funzioni sono dominate da f^+. Lo stesso vale per t_n e f^-.

Allora la successione $\{s_n - t_n\}$ converge a f in $L^1(\mathbb{R}^N)$ □

Per $C^0_C(\Omega) \subseteq C^0(\Omega)$ si intende lo spazio di funzioni continue a supporto compatto

Proposizione 2.17. *$C^0_C(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^N)$*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in C^0_C(\mathbb{R}^N) \quad \|f - g\|_1 < \varepsilon$$

Sappiamo già per 2.16 che esiste s semplice, misurabile e nulla al di fuori di un compatto tale che $\|f - s\|_1 < \varepsilon/2$. Scriviamo s come

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

dove possiamo prendere $\alpha_i \neq 0$ per ogni i e A_i insiemi limitati. Affermiamo che basta controllare che

$$\forall E \in \mathcal{M} \text{ limitato} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists u \in C^0_C(\mathbb{R}^N) \quad \|\chi_E - u\|_1 < \delta$$

poiché questo implica che s può essere approssimata in norma $\|\cdot\|_1$ da funzioni continue a supporto compatto, e quindi $\|s - s'\|_1 \leq \varepsilon/2$ dove s' è la combinazione con le funzioni continue a supporto compatto u al posto delle caratteristiche.
E è un misurabile limitato, quindi $\forall \delta$ esistono un chiuso F e un aperto limitato G tali che $F \subseteq E \subseteq G$ e $\mu(G \setminus F) < \delta$. Consideriamo allora la funzione

$$u(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^N \setminus G)}{d(x, F) + d(x, \mathbb{R}^N \setminus G)}$$

dove se C è un chiuso, $d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$ è la distanza tra un punto e un chiuso. Allora u è continua[3] e

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in F \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus G \\ 0 \leq u \leq 1 & x \in G \setminus F \end{cases}$$

e quindi $u \in C^0_C(\mathbb{R}^N)$. Inoltre

$$\|\chi_E - u\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_E - u| d\mu = \int_{G \setminus F} |\chi_E - u| d\mu \leq \int_{G \setminus F} d\mu = \mu(G \setminus F) < \delta$$

□

Proposizione 2.18. *$C^0_C(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $1 \leq p < \infty$*

Dimostrazione. Vogliamo provare che

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in C^0_C(\mathbb{R}^N) \quad \|f - g\|_p < \varepsilon$$

[3] Sia X, d spazio metrico, $A \subseteq X$ e $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ distanza punto-insieme. Allora la funzione d_A è continua rispetto alla topologia indotta da d. Da qualche parte sugli appunti di topologia c'è la dimostrazione.

1. Cominciamo ad approssimare f con una funzione $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo un operatore di troncamento $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$T_n(r) = \begin{cases} n & r > n \\ r & |r| \leq n \\ -n & r < -n \end{cases}$$

allora il troncamento di f è essenzialmente limitato, $T_n \circ f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Limitando il dominio ottengo una funzione sommabile $h_n(x) = T_n(f(x))\chi_{B_n}(x)$, con $B_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n\}$. Allora $h_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Succede che $h_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$, ossia

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - f\|_p = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \int |h_n - f|^p d\mu = 0$$

perché $h_n \to f$ q.o. per $n \to \infty$ e inoltre $|h_n - f|^p$ è dominata da $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Segue che

$$\exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \overline{n} \quad \|h_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Per ogni $\delta > 0$ esiste una funzione $u \in C^0_C(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|h_{\overline{n}} - u\|_1 \leq \delta$ (per 2.17). Considero $v = T_n(u)$ e dico che $\|v - h_{\overline{n}}\|_1 \leq \|u - h_{\overline{n}}\|_1 \leq \delta$. Infatti $v \in C^0_C(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |v - h_{\overline{n}}| d\mu &= \left(\int_{-\overline{n} \leq u \leq \overline{n}} + \int_{u > \overline{n}} + \int_{u < -\overline{n}} \right) |v - h_{\overline{n}}| d\mu = \\
&= \int_{-\overline{n} \leq u \leq \overline{n}} |u - h_{\overline{n}}| d\mu + \int_{u > \overline{n}} (\overline{n} - h_{\overline{n}}) d\mu + \int_{u < -\overline{n}} (h_{\overline{n}} + \overline{n}) d\mu \leq \\
&\leq \left(\int_{-\overline{n} \leq u \leq \overline{n}} + \int_{u > \overline{n}} + \int_{u < \overline{n}} \right) |u - h_{\overline{n}}| d\mu
\end{aligned}$$

Osservo che $v - h_n \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e inoltre $|v - h_{\overline{n}}| \leq 2\overline{n}$. Allora, per Hölder 2.7,

$$\begin{aligned}
\|v - h_{\overline{n}}\|_p &= \left(\int |v - h_{\overline{n}}|^{p-1} |v - h_{\overline{n}}| d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|v - h_{\overline{n}}\|_\infty^{p-1} \|v - h_{\overline{n}}\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \|v - h_{\overline{n}}\|_\infty^{1/p'} \|v - h_{\overline{n}}\|_1^{1/p} \leq (2\overline{n})^{1/p'} \delta^{1/p} \overset{?}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

dove al posto di ? intendiamo che $\delta^{1/p} = \dfrac{\varepsilon}{2(2\overline{n})^{1/p'}}$ dunque posso prendere $g = v$ e la tesi è dimostrata. □

Teorema 2.19: $\overline{C^0_C(\Omega)} = L^p(\Omega)$

Per $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $C^0_C(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$

Dimostrazione. Sia $f \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Prolunghiamo f a $\mathbb{R}^N$ con

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Allora $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e per 2.18 esiste $g \in C^0_C(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|\tilde{f} - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Prendiamo una successione di insiemi

$$A_n := \left\{ x \in \Omega : d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \frac{1}{n} \,;\, |x| < n \right\}$$

A_n sono sottoinsiemi aperti e limitati di Ω. Per ogni n possiamo considerare una funzione φ_n continua tale che

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{A_n} \\ 0 & x \in \Omega \setminus A_{n+1} \\ 0 \le \varphi_n \le 1 & x \in A_{n+1} \setminus \overline{A_n} \end{cases}$$

$$\text{e.g. } \varphi_n(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_{n+1})}{d(x, \overline{A_n}) + d(x, \mathbb{R}^N \setminus A_{n+1})}$$

allora $\{\varphi_n\}$ è una successione di funzioni in $C^0_C(\mathbb{R}^N)$ e hanno supporto compatto contenuto in Ω. Siamo interessati a trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|g\varphi_n - f\|_{p,\Omega} < \varepsilon \text{ (in } \Omega \text{, indico lo spazio in pedice)}$$

Intanto sappiamo che $\|g\varphi_n - g\|_{p,\Omega} \to 0$, infatti

$$\|g\varphi_n - g\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |g|^p (1 - \varphi_n)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

questo perché l'integranda è dominata da $|g|^p \in L^1(\Omega)$ e tende a 0 q.o. in $\mathbb{R}^N$, infatti se $x \in \Omega$, $\varphi_n(x) = 1$ definitivamente. Dunque esiste n_ε tale che $\|g\varphi_{n_\varepsilon} - g\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ e infine

$$\begin{aligned} \|g\varphi_{n_\varepsilon} - f\|_{p,\Omega} &\le \|g\varphi_{n_\varepsilon} - g\|_{p,\Omega} + \|g - f\|_{p,\Omega} \le \|g\varphi_{n_\varepsilon} - g\|_{p,\Omega} + \|g - \tilde{f}\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

2.5 Operatori lineari e continui tra spazi normati

Definizione 2.9: Operatore lineare

Siano X, Y spazi normati. Sia $T : X \to Y$ un operatore. Allora è lineare se

$$T(\alpha x + \beta x) = \alpha T(x) + \beta T(x) \quad \forall x, y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Esempio 2.17. Se $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, un'applicazione o operatore lineare viene tipicamente rappresentato da un sistema lineare

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{2.5}$$

Possiamo anche pensare a operatori lineari tra spazi a dimensione infinita di funzioni. Ad esempio tra funzioni continue possiamo considerare l'operatore

$$\begin{aligned} T : C^0([0,1]) &\longrightarrow C^0([0,1]) \\ f &\longmapsto T(f) = hf \end{aligned}$$

dove $h \in C^0([0,1])$ è una funzione fissata. Questo è un operatore lineare, infatti

$$T(\alpha f + \beta g) = h(\alpha f + \beta g) = \alpha hf + \beta hg = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

Definizione 2.10: Operatore continuo

Siano X, Y spazi normati. Sia $T : X \to Y$ un operatore. Allora è continuo se la funzione individuata da T è continua da X a Y

Definizione 2.11: Operatore limitato

Un operatore $T : X \to Y$ si dice **limitato** se esista una costante $C > 0$ tale che

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Osservazione. Niente a che vedere col concetto di *funzione* limitata.

Teorema 2.20

Siano X, Y spazi normati e $T : X \to Y$ un operatore lineare. Allora T è continuo se e solo se T è un operatore limitato.

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Supponiamo T continuo, dunque continuo in 0_X. Allora $T(0_X) = 0_Y$ per linearità e

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|x\|_X \leq \delta \implies \|Tx\|_Y \leq \varepsilon \tag{2.6}$$

Quindi fisso $\varepsilon > 0$ e ricavo il relativo δ. Preso ora $0_X \neq z \in X$ allora $\dfrac{\delta z}{\|z\|_X} =: x$ deve soddisfare 2.6, allora poiché

$$\|x\|_X = \left\| \frac{\delta z}{\|z\|_X} \right\|_X = \frac{\delta}{\|z\|_X}\|z\|_X = \delta$$

ne segue che $\|Tx\|_Y \leq \varepsilon$, in particolare

$$\|Tx\|_Y = \left\| \frac{\delta Tx}{\|z\|_X} \right\|_Y = \frac{\delta}{\|z\|_X}\|Tz\|_Y \leq \varepsilon$$

deduco allora che

$$\|Tz\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|z\|_X \quad \forall z \in X$$

infatti vale anche chiaramente per $z = 0_X$.

$\Longleftarrow$ Sia T limitato, dunque esiste $C > 0$ tale che

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

e dobbiamo provare che per ogni successione $\{x_n\}$ convergente a x in X si ha che $T(x_n) \to Tx$ in Y. Si ha che

$$\|T(x_n) - T(x)\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq C\|x_n - x\|_X \to 0$$

$\square$

Nota. Notare che abbiamo usato solo la continuità in 0_X per dimostrare $\Longrightarrow$

Esempio 2.18 (Operatore lineare non continuo)**.** Sia $X = C^\infty[0,1]$, con norma infinito, e $T(f) = f'(0)$. Si consideri la successione

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$$

Questa successione converge uniformemente a 0 poiché il modulo è limitato da $1/n$ sul dominio. Tuttavia

$$T(f_n) = \frac{n^2 \cos(n^2 \cdot 0)}{n} = n \to \infty$$

Ossia

$$T(f_n) \not\to T(0) = 0$$

È chiaro che l'operatore non è limitato. Un'osservazione rilevante è che il dominio non è uno spazio completo. Per esempi di operatori lineari con dominio completo non continui è necessario utilizzare l'assioma della scelta, si tratta di esempi non costruttivi.

Osserviamo dunque che l'insieme degli operatori lineari e continui tra X e Y costituisce uno spazio vettoriale. Infatti se $T, S : X \to Y$ e sono lineari e continui, e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ allora l'operatore $\alpha T + \beta S$ è ancora lineare e continuo (e anche limitato). Infatti se $\|Tx\|_Y \leq C_T \|x\|_X$ e $\|Sx\|_Y \leq C_S \|x\|_X$ allora

$$\|(\alpha T + \beta S)(x)\|_Y \leq \alpha \|Tx\|_Y + \beta \|Sx\|_Y \leq (\alpha C_T + \beta C_S)\|x\|_X$$

Indichiamo ora con $\mathcal{L}(X,Y)$ lo spazio vettoriale degli operatori lineari e limitati (o lineari e continui) tra X e Y munito della norma

$$\|T\| = \inf\{C \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X\} \tag{2.7}$$

tale norma ha senso e utilizza la limitatezza dell'operatore, assomiglia inoltre alla norma L^∞.

Se ora considero

$$S_T = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{0_X\}\right\}$$

ottengo una definizione equivalente di norma. Succede infatti che $\|T\| = S_T$. Infatti rinominati A e B rispettivamente gli insiemi usati nella definizione di $\|T\|$ e di S_T abbiamo che $b \leq a$ per ogni $b \in B$ e $a \in A$, infatti presa una costante dell'insieme A, sicuramente maggiora il rapporto $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ proprio perché tale costante è in A. Passando al sup in $b \leq a$ otteniamo $S_T \leq a$, $\forall a \in A$ e passando ora all'inf sugli a otteniamo $S_T \leq \|T\|$. Sappiamo ora che S_T è il sup di B, quindi

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq S_T \quad \forall x \in X \setminus \{0_X\} \implies S_T \in A$$

infatti chiaramente $\|Tx\|_Y \leq S_T\|x\|_X$ anche per $x = 0_X$. Ma allora necessariamente $\|T\| \leq S_T$ poiché ne è l'inf.

Da questo deduciamo che $\|T\| = S_T$ e che $\|T\| = \min A$ tale norma è una norma, infatti

1. $\|T\| \geq 0$ per ogni $T \in \mathcal{L}(X,Y)$
2. $\|T\| = 0 \iff T \equiv 0$, infatti se $\|T\| = 0$ allora $\|Tx\|_Y \leq 0$
3. $\|\lambda T\| = \sup\limits_{X \setminus \{0_X\}} \dfrac{\|\lambda Tx\|_Y}{\|x\|_X} = |\lambda| \|T\|$

4. $\|T+S\| = \sup\limits_{X\setminus\{0_X\}} \dfrac{\|(T+S)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup\limits_{X\setminus\{0_X\}} \left(\dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} + \dfrac{\|Sx\|_Y}{\|x\|_X}\right) \leq$
$\leq \|T\| + \|S\|$

Osservazione. $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y, x \in X : \|x\| = 1\}$ infatti se $z \in X\setminus\{0_X\}$ allora $\dfrac{\|Tz\|_Y}{\|z\|_X} = \left\|T\left(\dfrac{z}{\|z\|_X}\right)\right\|_Y$ dove l'argomento è un vettore di norma unitaria

Esercizio 2.5

Mostrare che

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \{\|Tx\|_Y\}$$

Esempio 2.19. I sistemi lineari da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$ del tipo (2.5), anche scritto $\vec{y} = A\vec{x}$, con $\vec{x} = (x1, \ldots, x_N)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_M)$ e $A = (a_{ij})$ sono operatori lineari $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (y_1, \ldots, y_M)$.

La ricerca della norma di questo problema è un bel problema di massimo sulla palla chiusa di raggio 1 di $\mathbb{R}^N$.

Esempio 2.20. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$. Allora l'inclusione $i : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < q \leq \infty$ è un operatore lineare. Sappiamo che

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega)$$

e quindi necessariamente $\|i\| \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. Vogliamo capire se c'è l'uguaglianza o meno. Per l'uguaglianza dobbiamo trovare un elemento $0 \not\equiv f \in L^p(\Omega)$. Sia $f = 1$, allora

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega 1^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|f\|_q = \begin{cases} \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} & \text{se } q < \infty \\ 1 & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

e quindi effettivamente

$$\|f\|_p = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \begin{cases} \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} & \text{se } q < \infty \\ 1 & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

Esempio 2.21. Sia $T : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$, $f \mapsto \chi_{[-1,1]} f$. Allora

$$\|Tf\|_1 = \int_{[-1,1]} |f| d\mu \leq 2\|f\|_\infty$$

e quindi $\|T\| \leq 2$

Esempio 2.22. $T : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ con $T(f) = \int_\mathbb{R} f d\mu$. Allora

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1 \implies \|T\| \leq 1$$

Similmente possiamo prendere $g \in L^\infty(\Omega)$ e considerare l'operatore

$$Tf(x) = \int_{(-\infty,x)} f(t)g(t)dt$$

e allora

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \implies \|T\| \leq \|g\|_\infty$$

Importante! Se lo spazio di arrivo è $\mathbb{K}$, allora si parla di funzionali lineari e continui su X, e lo spazio $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ viene detto **spazio duale** e viene denotato con X' oppure X^*

Teorema 2.21

Se X è normato e Y è Banach, allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach

Dimostrazione. Sia T_n una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \overline{n} \quad \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$$

che a sua volta significa

$$\|(T_n - T_m)(x)\|_Y = \|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Fissiamo ora $x \in X$, allora $T_n(x)$ è una successione di Cauchy in Y. Poiché Y è Banach, tale successione converge, quindi esiste un elemento $y \in Y$ tale che $T_n(x) \to y$ in Y.

Definiamo ora l'applicazione $T : X \to Y$ tale che $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, che vogliamo mostrare essere lineare e continua. Allora $\forall u, v \in X$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$T(\alpha u + \beta v) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha u + \beta v) \stackrel{\star}{=} \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(u) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

dove in $\star$ si è usata contemporaneamente la linearità di T_n e la linearità del limite. Quindi T è lineare. Dalla diseguaglianza della successione di Cauchy abbiamo

$$\|T_{\overline{n}}x - T_m x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \|T_{\overline{n}}x - Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X$$

e quindi

$$\|Tx\|_Y \leq \|Tx - T_{\overline{n}}x\| + \|T_{\overline{n}}x\| \leq \varepsilon \|x\|_X + \|T_{\overline{n}}\| \|x\|_X \leq (\varepsilon + \|T_{\overline{n}}\|) \|x_X\|$$

da cui T è limitata e $\|T\| < \varepsilon + \|T_{\overline{n}}\|$, per cui $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Ci rimane solo da controllare che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X, Y)$. Sappiamo che

$$\|T_n x - Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X, \ \forall n \geq \overline{n}$$

ma allora

$$\|(T_n - T)(x)\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \implies \|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \overline{n}$$

□

Corollario 2.21.1. *Se X è normato, X' è sempre Banach*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{R}$ che $\mathbb{C}$ sono completi □

Esempio 2.23 (Prodotto di convoluzione)**.** Fissiamo una funzione $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e consideriamo l'operatore

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) g(y) dy$$

Sappiamo già dalla proposizione 1.40 che $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $Tf \in L^1(\mathbb{R})$ e inoltre

$$\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

Se invece $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ allora $Tf \in L^\infty(\mathbb{R})$? Sì, infatti

$$|(Tf)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| \|g\|_\infty dy = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

quindi $Tf \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ e quindi $\|T\| \leq \|g\|_\infty$

Esempio 2.24 (Spazio Duale)**.** Lo spazio duale di $\mathbb{K}^n$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Ma come è fatto lo spazio duale di $L^1(\Omega)$? Ad esempio per $\Omega = \mathbb{R}$ necessariamente contenere funzionali del tipo $L : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Ad esempio

$$Lf = \int_\Omega f d\mu$$

è un tale funzionale. Ma anche fissata $g \in L^\infty(\Omega)$, il funzionale

$$L_g(f) = \int_\Omega fg d\mu$$

è lineare ed è limitato in quanto

$$|L_g(f)| \overset{\text{Hölder 2.7}}{\leq} \|f\|_1 \|g\|_\infty \implies \|f\|_{(L^1(\Omega))'} \leq \|g\|_\infty$$

allora per ogni $g \in L^\infty(\Omega)$ esiste un funzionale lineare e continuo L_g. Risulta (spoiler di analisi funzionale) che non ve ne sono altri, quindi in particolare $\left(L^1(\Omega)\right)' \cong L^\infty(\Omega)$.

2.6 Spazi di successioni ℓ^p

Definizione 2.12: Spazi ℓ^p

Gli spazi di successioni ℓ^p sono definiti come

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\} \text{ se } 1 \leq p < \infty$$
$$\ell^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

con $x_n \in \mathbb{K}$, e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Altrimenti detto,

$$\ell^p := L^p\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#\right)$$

Sono tutti spazi di Banach, in quanto spazi L^p. La norma, se $1 \leq p < \infty$, è

$$\|x\|_p = \left(\int_\Omega |x|^p d\# \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e se $p = \infty$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

Proposizione 2.22 (Inclusioni fra spazi ℓ^p)**.** *Se $1 \leq p < q \leq \infty$, allora $\ell^p \subseteq \ell^q$ e inoltre $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, $\forall x \in \ell^p$*

Dimostrazione. Chiaramente

$$|x_n|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \implies |x_n| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

Se $q = \infty$ allora

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq \|x\|_p$$

Per $q < \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}\|x\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{q-p} |x_n|^p \leq \\ \overset{\ell^q \subseteq \ell^\infty}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_\infty^{q-p} \|x_n\|^p = \|x\|_\infty^{q-p} \|x\|_p^p \leq \\ \overset{\ell^p \subseteq \ell^\infty}{\leq} \|x\|_p^{q-p} \|x\|_p^p = \|x\|_p^q\end{aligned}$$

da cui la tesi □

Esempio 2.25. Consideriamo la successione $x_n = \frac{1}{n}$. Allora $\{x_n\} \in \ell^p$, $\forall p \in (1, \infty]$, ma $p \notin \ell^1$.

Esempio 2.26. $i : \ell^p \to \ell^q$ inclusione è lineare e limitato con norma $\|i\| \leq 1$. È proprio $\|i\| = 1$: Consideriamo la successione canonica

$$e^k = (0, 0, 0, \dots, \overset{(k)}{1}, 0, \dots)$$

allora la successione $\{e^k\}_k$ è detta successione canonica, $\{e^k\} \in \ell^p$ per ogni $p \in [1, \infty]$ e inoltre

$$\|e^k\|_p = 1 \quad \forall p \in [1, \infty]$$

dunque $\|e^k\|_p = \|e^k\|_q$ per $1 \leq p < q \leq \infty$ e allora

$$\|i\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|i(x)\|_q}{\|x\|_p} = 1$$

Consideriamo i seguenti spazi

$$\begin{aligned} c &= \{x = (x_n) : \text{ la successione } x_n \text{ è convergente } \} \\ c_0 &= \{x = (x_n) : \text{ la successione } x_n \text{ è infinitesima } \} \\ c_{00} &= \{x = (x_n) : \exists k \in \mathbb{N} : x_n = 0 \forall n > k\} \end{aligned}$$

quindi se $p < \infty$ e $x \in \ell^p$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge e quindi $\lim_{n\to\infty} |x_n|^p = 0$ e allora $x = (x_n) \in c_0$. Ne consegue che

$$c_{00} \subseteq \ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$

- c_{00} è un sottospazio di ℓ^1 **denso**: infatti se $x = (x_n) \in \ell^1$ allora posso costruire la successione
$$x^k = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \in c_{00} \tag{2.8}$$
e chiaramente
$$\|x^k - x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n| = \sum_{n=k+1}^{\infty} |0 - x_n| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
in quanto resto $k+1$-esimo di serie convergente. Se ora $1 < p < \infty$, con analoga dimostrazione provo anche che c_{00} è denso in ℓ^p.

- c_{00} è **denso** in c_0. Infatti preso un elemento $x = (x_n) \in c_0$ allora $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Esiste una successione $x^k = (x_n^k)$ tale che $x^k \in c_{00}$ per ogni k e $\|x^k - x\|_\infty \to 0$, ed è di nuovo definita come in (2.8). Allora
$$\|x^k - x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^k - x_n| = \sup_{n>k} |x_n| \to 0 \qquad \text{per } k \to \infty$$

- ℓ^p è **denso** in ℓ^q per $p \leq q < \infty$. Segue dal fatto che c_{00} è denso in ℓ^p e in ℓ^q e poi dall'inclusione dei due.
- c_0 è **chiuso** in ℓ^∞. Sia $x^k = (x_n^k)$ una successione di elementi $x^k \in c_0 \, \forall k$ tale che $\exists x \in \ell^\infty$ con
$$\lim_{k \to \infty} \|x^k - x\|_\infty = 0$$
Ora dobbiamo mostrare che $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, ossia
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n| \leq \varepsilon$$
ma noi sappiamo che
$$|x_n| \leq |x_n^k| + |x_n - x_n^k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
questo perché ogni x^k è una successione infinitesima e per la convergenza uniforme di x_n^k a x_n. Si può dire lo stesso osservando che l'operatore
$$L : c \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.9}$$
$$x = (x_n) \longmapsto L(x) = \lim_{n \to \infty} x_n \tag{2.10}$$
è un funzionale lineare e continuo perché il limite è lineare e inoltre
$$|Lx| \leq \sup_n |x_n| = \|x\|_\infty$$
e in particolare $\|L\|_{c'} = 1$ (basti prendere una successione con limite uguale al sup). Allora
$$|L(x^k) - L(x)| \leq \|x^k - x\|_\infty \to 0$$
ma poiché $L(x^k)$ è sempre uguale a 0 allora lo è anche $L(x)$. Infine si può anche osservare che c_0 è la controimmagine di $\{0\}$ tramite l'operatore continuo L e quindi è chiuso in c.
- c è **chiuso** in ℓ^∞ in quanto se $x(k) \to x$ in ℓ^∞ allora $L(x^k) \to L(x)$ in quanto L è continuo, quindi in particolare $L(x)$ esiste ed è finito.

Proposizione 2.23. *Ricapitolando quanto mostrato finora abbiamo la seguente catena di inclusioni e chiusure*
$$c_{00} \subset \overline{c_{00}}^{\ell^1} = \ell^1 \subset \overline{c_{00}}^{\ell^p} = \ell^p \subset \overline{c_{00}}^{c_0} = c_0 = \overline{c_0}^{c,\ell^\infty} \subset c = \overline{c}^{\ell^\infty} \subset \ell^\infty$$

Osservazione. L non è ben definito in ℓ^∞

Possiamo adattare agli ℓ^p la diseguaglianza di Hölder 2.7 ottenendo che se abbiamo $x \in \ell^p, y \in \ell^{p'}$ con p, p' coniugati, allora
$$xy = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, \dots) \in \ell^1$$
e inoltre
$$\|xy\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_ny_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_ny_n| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

Definizione 2.13: Spazio normato separabile

Uno spazio normato X si dice **separabile** se esiste un sottoinsieme denso e numerabile di X

Gli spazi ℓ^p con $1 \leq p < \infty$ sono spazi **separabili**, ossia ammettono un sottospazio denso numerabile. Sappiamo infatti che c_{00} è denso in ℓ^p se $p < \infty$ e consideriamo ora q_{00} il sottoinsieme di c_{00} delle successioni a componenti (oppure a parti reali e immaginarie delle componenti) razionali. Allora q_{00} è numerabile ed è denso in ℓ^p poiché è denso in c_{00}.

Proposizione 2.24. ℓ^∞ ***non*** *è separabile*

Dimostrazione. (Riproposizione dell'argomento diagonale di Cantor) Esista, per assurdo, una successione di successioni x^k densa in ℓ^∞. Allora consideriamo la seguente successione

$$z = (z_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_k^k| \geq 1 \\ 1 + x_k^k & \text{se } |x_k^k| < 1 \end{cases}$$

che appartiene a ℓ^∞ in quanto è limitata da 2, ma è staccata dalle altre successioni considerate:

$$\|z - x^k\|_\infty = \sup_n |z_n - x_n^k| \geq |z_k - x_k^k| \geq 1$$

Si ha una contraddizione e quindi la successione $x = (x^k)$ non è densa in ℓ^∞, segue la non separabilità di ℓ^∞. □

Teorema 2.25: Spazi duali di ℓ^p

Sia $1 \leq p < \infty$. Allora per ogni $\varphi \in (\ell^p)'$ esiste unico $u \in \ell^{p'}$ tale che

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n \quad \forall x \in \ell^p$$

Inoltre si ha che $\|\varphi\|_{(\ell^p)'} = \|u\|_{p'}$

Osservazione. In soldoni ne consegue che $(\ell^p)' \cong \ell^{p'}$. È un risultato valido anche per spazi L^p ma è un risultato più avanzato che non è stato visto in questo corso.

Dimostrazione. Consideriamo la successione $e^k = (0, \dots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0, \dots)$, ossia la successione canonica. Consideriamo

$$u_k := \varphi(e^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e consideriamo la successione $u = (u_k)$. Vorremmo ora provare che $u \in \ell^{p'}$ e $\|u\|_{p'} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'}$. A tal scopo cominciamo da $p = 1 \rightsquigarrow p' = \infty$, utilizzando la definizione di norma di un operatore:

$$|u_k| = |\varphi(e^k)| \leq \|\varphi\|_{(\ell^1)'} \|e^k\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(\ell^1)'} \implies \|u\|_\infty = \sup_k |u_k| \leq \|\varphi\|_{(\ell^1)'}$$

Consideriamo ora $1 < p < \infty$ e consideriamo $x \in c_{00}$ tale che $x_n = 0$ per ogni $n > k$ allora

$$|\varphi(x)| = \left|\varphi\left(\sum_{i=1}^k x_i e^i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^k x_i \varphi(e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^k x_i u_i\right| \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \|x\|_p \tag{2.11}$$

Scegliamo ora $x_i = \overline{u_i}|u_i|^{p'-2}$ e $x_i = 0$ se $u_i = 0$. Allora nella (2.11) abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |u_i|^{p'} &\leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{i=1}^k \left(|u_i|^{p'-1}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^{p'p-p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|u_i|^{p'}\right)^{(1-\frac{1}{p})=\frac{1}{p'}} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'}$$

che vale per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi in particolare tutte le ridotte sono dominate da $\|\varphi\|_{(\ell^p)'}$ e quindi anche la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty}|u_i|^{p'} < +\infty \implies u \in \ell^{p'} \text{ e } \|u\|_{p'} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \tag{2.12}$$

Ci resta da provare che $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ per ogni $x \in \ell^p$ e sappiamo che vale per ogni $x \in c_{00}$. Usiamo la densità di c_{00} in ℓ^p, da cui per ogni $x \in \ell^p$ esiste una successione $x^k \in c_{00}$ tale che $x^k \to x$ in ℓ^p. Allora

$$\varphi(x^k) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$$

dove il secondo termine ha tale limite per la diseguaglianza di Hölder, infatti

$$\varphi(x^k) = \left|\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i^k\right| < \|u\|_{p'}\|x^k\|_p \implies \varphi(x) = \left|\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i\right| \leq \|u\|_{p'}\|x\|_p \tag{2.13}$$

e ne consegue che

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i^k - \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i\right| \leq \|u\|_{p'}\|x^k - x\|_p \to 0$$

Ora dalla (2.13) otteniamo che $\|\varphi\|_{(\ell^p)'} \leq \|u\|_{p'}$ che insieme a (2.12) ci dà l'ultima parte della tesi $\|\varphi\|_{(\ell^p)'} = \|u\|_{p'}$. □

Teorema 2.26

Se $\varphi \in (c_0)'$ allora esiste un $u = (u_k) \in \ell^1$ tale che

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i \quad \forall x \in c_0$$

e inoltre $\|\varphi\|_{(c_0)'} = \|u\|_1$

Osservazione. Il precedente significa che $(c_0)' \cong \ell^1$

Teorema 2.27

Se $\varphi \in c'$ allora esiste unica una coppia $(u, \lambda) \in \ell^1 \times \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i + \lambda \lim_{n\to\infty} x_n \quad \forall x \in c$$

e inoltre $\|\varphi\|_{c'} = \|u\|_1 + |\lambda|$

2.7 Funzioni a variazione limitata e assolutamente continue

Ci interessiamo ora a funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. L'obiettivo di questa sottosezione è descrivere una classe di funzioni su cui valga un'estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Definizione 2.14: funzione a variazione limitata

Si consideri funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e una suddivisione

$$S = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

dell'intervallo $[a, b]$. Si definisca

$$v_s = \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

(somma delle variazioni relative ai punti di suddivisione). La funzione f si dice **a variazione limitata** se l'insieme dei valori v_s così ottenuti ammette un estremo superiore finito, cioè

$$V_f([a, b]) := \sup\{v_s : S \text{ sudd. di } [a, b] \text{ in un numero finito di punti }\} \in \mathbb{R}$$

La quantità $V_f([a, b])$ viene detta **variazione totale** di f in $[a, b]$.

Esempio 2.27 (Funzioni monotone)**.** Tutte le funzioni monotone sono a variazione limitata e inoltre

$$v_s = V_f([a, b]) = |f(b) - f(a)|$$

Esempio 2.28 (Funzioni continue?)**.** In generale no. Ad esempio la funzione $f : [0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ci interessa considerare i punti del tipo $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ quindi $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = \frac{2}{\pi + 2k\pi}$ per $k = 0, \ldots, n$ e la suddivisione è

$$S_n = \left\{0, \frac{2}{\pi + 2\pi}, \frac{2}{\pi + 4\pi}, \ldots, \frac{2}{\pi + 2(n-1)\pi}, \frac{2}{\pi}\right\}$$

e quindi

$$\begin{aligned} v_{S_n} &= \sum_{k=0}^{n} |f(x_k) - f(x_{k+1})| + \left| f\left(\frac{2}{\pi + 2n\pi}\right) - 0 \right| = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{2}{\pi + 2k\pi}(-1)^k - \frac{2}{\pi + 2(k+1)\pi}(-1)^{k+1} \right| + \frac{2}{\pi + 2n\pi} = \\ &= \left(\frac{2}{\pi + 2k\pi} + \frac{2}{\pi + 2(k+1)\pi} \right) + \frac{2}{\pi + 2n\pi} = \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\pi + 2k\pi} \to \infty \end{aligned}$$

quindi l'estremo superiore non può essere finito.

Proposizione 2.28 (Le funzioni lipschitziane sono a variazione limitata)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *lipschitziana, ossia esiste una costante* $L \in \mathbb{R}$ *tale per cui*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

allora f è a variazione limitata e inoltre

$$V_f([a,b]) \leq L(b-a)$$

Dimostrazione. $v_s = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n L|x_i - x_{i-1}| \leq L(b-a)$ □

Teorema 2.29: Caratterizzazione delle funzioni a variazione limitata

Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata se e solo se può essere rappresentata come differenza di funzioni monotone non decrescenti

Osservazione. Non decrescenti può essere ovviamente sostituito da non crescenti cambiando i segni.

Dimostrazione. Il fatto che la differenza di due funzioni monotone non decrescenti sia una funzione a variazione limitata è banale per la disuguaglianza triangolare. Per il viceversa, sia f a variazione limitata, definiamo

$$g_1 := V_f[a,x]$$

che è ben definita per ipotesi su f. Sia $y > x$, quindi

$$g_1(y) - g_1(x) = V_f[a,y] - V_f[a,x] = V_f[x,y] \geq 0$$

ossia g_1 è monotona non decrescente. Si ha, per definizione di variazione,

$$g_1(y) - g_1(x) \geq |f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x)$$

Possiamo dunque definire

$$g_2 := g_1 - f \rightsquigarrow f = g_1 - g_2$$

che si verifica banalmente essere non decrescente. □

Osservazione. Segue che le funzioni a variazione limitata possono avere un'infinità numerabile di discontinuità.

Teorema 2.30: (ennesimo) Teorema di Lebesgue

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata, allora f è derivabile quasi ovunque in $[a,b]$ e la derivata q.o. f' è sommabile in $[a,b]$

Osservazione. Sommabile significa integrabile, in altre parole $f' \in L^1([a,b])$

Dimostrazione. Si riconduce a dimostrare che una funzione monotona su un intervallo è derivabile quasi ovunque a derivata sommabile. La dimostrazione è leggermente laboriosa e viene qui omessa. □

Negli esempi precedenti in effetti ad esempio le funzioni lipschitziane sono derivabili ovunque e pure le funzioni costanti. Siamo interessati all'estensione della formula fondamentale del calcolo

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(t)dt \quad \forall x \in [a,b] \tag{2.14}$$

dove l'integrale possa essere inteso come integrale di Lebesgue.

Nota. La formula (2.14) è valida per funzioni C^1, ma vogliamo vedere se possiamo alleggerire tale ipotesi.

Dunque le funzioni a variazione limitata potrebbero essere esattamente quelle che stiamo cercando. In realtà no. Ad esempio la funzione di Heaviside (l'indicatrice dei positivi) considerata in $[-1,1]$ è a variazione limitata, H' esiste e vale 0 q.o. ma chiaramente non vale la formula (2.14), perché

$$H(1) - H(-1) = 1 \neq 0 = \int_{[-1,1]} H'(t)dt$$

Consideriamo ora la **funzione di Vitali** che è continua e a variazione limitata, ma non verifica la formula (2.14). Ricordiamo l'insieme di Cantor definito come nell'esempio 1.11 e sia χ_n la funzione caratteristica di C_n, ora sia

$$f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \chi_n(t)dt$$

Abbiamo quindi che la funzione f_n assume valori costanti sul complementare di

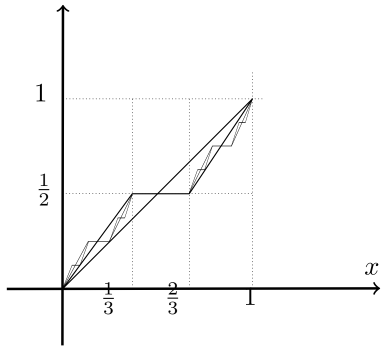


Figura 7: Funzione di Vitali

C_n. Se I è uno degli intervalli chiusi la cui unione è C_n allora

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \chi_n(t)dt &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n} = \\ = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \chi_{n+1}(t)dt &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot 2\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

perché allora I viene suddiviso in 3 intervalli di cui il primo e il terzo vanno a comporre C_{n+1}. Abbiamo inoltre che $f_{n+1} = f_n(x)$ $\forall x \notin C_n$ e che

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_I \left| \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_n(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{n+1}(t) \right| dt \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ora vediamo che

$$f_{n+1}(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{n+1} (f_k(x) - f_{k-1}(x))$$

e poiché gli elementi di ogni ridotta sono maggiorati di $\frac{1}{2^{k-2}}$ allora la serie f_n converge uniformemente a una funzione limite $f(x)$, definita funzione di Vitali.

Tale f limite è costante su ogni componente connessa del complementare di C l'insieme di Cantor. Inoltre f di Vitali è sicuramente continua in quanto limite uniforme di funzioni continue, non decrescente perché tutte le f_n lo sono, dunque f è a variazione limitata. f ammette derivata prima $f' = 0$ quasi ovunque (vale 0 sui punti del complementare di C). Viene anche detta "scala del diavolo". Una funzione di questo tipo ($f' = 0$ q.o. ma f continua e non costante) viene detta **singolare**.

Nota. Anche la funzione di Vitali non verifica la formula $f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(t)dt$

La classe di funzioni che invece soddisfa le proprietà volute è quella delle funzioni *assolutamente continue.*

Definizione 2.15: Assoluta continuità

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice **assolutamente continua** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni sequenza finita di intervalli $(a_i, b_i) \subseteq [a, b]$ per $i = 1, \ldots, n$ disgiunti e tali che $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leq \delta$, allora

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$$

È evidentemente una richiesta più forte dell'uniforme continuità, infatti su un compatto uniforme continuità e continuità sono equivalenti. Vale infatti chiaramente che se f è assolutamente continua allora è uniformemente continua, ma non il viceversa, infatti

Proposizione 2.31 (Assoluta continuità $\implies$ variazione limitata)**.** *Se f è assolutamente continua allora è a variazione limitata*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon = 1$ e otteniamo un $\delta > 0$. Se prendiamo l'intervallino $[a, a + \delta]$ allora f è a variazione limitata in $[a, a + \delta]$. Infatti presa una suddivisione S qualunque di $[a, a + \delta]$ e considero gli intervallini (a_i, b_i) di questa suddivisione osservo allora

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \delta \implies \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < 1$$

Con questa idea in mente possiamo semplicemente dividere $[a, b]$ in intervalli di misura al più δ e in ognuno di questi intervalli la funzione è a variazione limitata. Bisogna solo avere l'accortezza di avere delle sovrapposizioni degli intervallini per evitare la perdita di arbitrarietà delle suddivisioni (che comunque posso restringere sufficientemente senza perdita di generalità). □

Proposizione 2.32 (Assoluta continuità $\implies$ esistenza derivata prima q.o.)**.** *Se f è assolutamente continua, allora esiste la derivata prima f' di f e inoltre $f' \in L^1(a, b)$*

Proposizione 2.33 (Lipschitziana $\implies$ Assolutamente continua)**.**

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} L|b_i - a_i|$$

prendendo $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ allora abbiamo la condizione richiesta □

Ricordando che una funzione è Hölderiana di esponente $\alpha \in (0, 1)$ se esiste una costante $H > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^{\alpha}$$

Allora se f è Hölderiana non necessariamente è assolutamente continua. Un esempio è la stessa funzione di Vitali, che non è assolutamente continua (come vedremo a breve) è hölderiana di esponente $\alpha = \log_3 2 \approx 0,631$

Osservazione. Le funzioni hölderiane non sono necessariamente lipschitziane, infatti ad esempio $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ in $[-1,1]$ è hölderiana di esponente $\frac{1}{3}$ ma non è lipschitziana.

Teorema 2.34: Caratterizzazione funzioni assolutamente continue

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è assolutamente continua se e solo se è a variazione limitata e verifica la formula fondamentale del calcolo.

ne consegue che la funzione di Vitali non è assolutamente continua.

Osservazione. La caratterizzazione ha un parallelo con la caratterizzazione delle misure relative assolutamente continua, ossia che esiste una derivata di Radon-Nikodym e vale la "formula fondamentale del calcolo".

In effetti se gli insiemi E del teorema di Radon-Nikodym sono intervalli ne esce proprio la formula fondamentale del calcolo.

Teorema 2.35: Decomposizione (tipo Radon-Nikodym-Lebesgue)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a variazione limitata, allora f si può scomporre nella somma di 3 funzioni

$$f(x) = g(x) + h(x) + s(x)$$

dove g è assolutamente continua in $[a,b]$, h è singolare oppure nulla, s è la funzione dei salti (cioè costante a tratti oppure nulla).

Osservazione. $g' = f'$ quasi ovunque in $[a,b]$, perché le altre hanno $h' = s' = 0$ q.o. Inoltre possiamo richiedere $f(a) = g(a)$

Nota. Sia h che s possono essere nulle, ad esempio $s = 0$ se f è continua in $[a,b]$

D'ora in poi chiameremo $AC(\Omega)$ lo spazio di funzioni assolutamente continue a dominio in Ω

2.8 Estensione di altre formule di integrazione

- **Integrazione per parti** La formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

  è vera se $f, g \in AC([a,b])$

- **Integrazione per sostituzione** La formula di sostituzione

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

  è vera se (ad esempio) f è misurabile e limitata in $[a,b]$ e $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ è assolutamente continua

2.9 Spazi di Sobolev

Considereremo gli spazi di Sobolev in dimensione 1 usando le funzioni di $AC([a,b])$ (non è l'approccio canonico) su un intervallo limitato $[a,b]$. Consideriamo lo spazio

$$W^{1,p}(a,b) = \{f \in AC([a,b]) : f' \in L^p(a,b)\}$$

chiaramente quindi $W^{1,1}(a,b) = AC([a,b])$ e succede che se $1 \le p < q \le \infty$ allora $W^{1,q}(a,b) \subseteq W^{1,p}(a,b)$ per le inclusioni tra spazi L^p quando $\mu(\Omega) < \infty$. Ne segue che il più piccolo è $W^{1,\infty}$.

Gli spazi $W^{1,p}$ sono tutti spazi vettoriali. Inoltre ci possiamo mettere una norma sopra, di solito si prende

$$\|f\|_{W^{1,p}(a,b)} = \|f\|_p + \|f'\|_p$$

in generale questa norma è presa negli spazi $W^{1,p}(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ (con aggiustamenti dovuti al caso N-dimensionale). Un'altra norma comune è

$$|||f|||_{W^{1,p}(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx + \int_a^b |f'(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|f\|_p^p + \|f'\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Esercizio 2.6

Verificare che entrambe le norme presentate sono effettivamente delle norme. Inoltre mostrare che se $1 \le p < \infty$ le norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}(a,b)}$ e $|||\cdot|||_{W^{1,p}(a,b)}$ sono equivalenti.

Sono spazi di Banach? È vero che $W^{1,2}(a,b)$ è uno spazio di Hilbert? Chiaramente quello che guessiamo essere il prodotto scalare su $W^{1,2}(a,b)$ sarebbe

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f'(x)g'(x)dx \tag{2.15}$$

che avrebbe come norma associata la norma $|||\cdot|||_{W^{1,2}(a,b)}$.

Proposizione 2.36. *Per ogni $p \in [1,\infty]$ esiste una costante $C_p > 0$ tale che*

$$\underbrace{\|f\|_{C^0([a,b])}}_{(\|f\|_\infty)} \le C_p \|f\|_{W^{1,p}(a,b)}$$

per ogni $f \in W^{1,p}(a,b)$

Nota. Questo significa che l'operatore di immersione $i : W^{1,p}(a,b) \to C^0([a,b])$ è limitato dunque continuo

Dimostrazione. Per $p = \infty$ il risultato è banale: basta prendere $C_\infty = 1$.

Consideriamo ora il caso $1 \le p < \infty$ Usiamo l'assoluta continuità della $f \in W^{1,p}(a,b)$ per scrivere la formula

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt \quad \forall x,y \in [a,b] \tag{2.16}$$

allora $f(x) = f(y) + \int_y^x f'(t)dt$ e quindi

$$|f(x)| \le |f(y)| + \int_y^x |f'(t)|dt$$

ora integriamo rispetto a y entrambi i termini ottenendo

$$(b-a)|f(x)| \leq \int_a^b |f(y)|dy + (b-a)\int_a^b |f'(t)|dt$$

Ora usiamo la disuguaglianza di Hölder 2.7

$$(b-a)|f(x)| \leq \|f\|_p \|1\|_{p'} + (b-a)\|f'\|_p \|1\|_{p'}$$

e poiché $\|1\|_p = \left(\int_a^b dt\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}}$ abbiamo

$$|f(x)| \leq \underbrace{(b-a)^{\frac{1}{p'}-1}}_{=\frac{1}{(b-a)^{1/p}}} \|f\|_p + (b-a)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p$$

Ora prendendo

$$C_p = \max\left\{ \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}, (b-a)^{\frac{1}{p'}} \right\}$$

abbiamo che finalmente

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq C_p(\|f\|_p + \|f'\|_p)$$

□

Teorema 2.37: Completezza di $W^{1,p}(a,b)$

$W^{1,p}(a,b)$ è uno spazio di Banach. In particolare $W^{1,2}(a,b)$ è uno spazio di Hilbert, con il prodotto scalare (2.15) e la norma $|||\cdot|||_{W^{1,2}(a,b)}$.

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ di Cauchy in $W^{1,p}(a,b)$, dunque $\|f_n - f_m\|_{W^{1,p}(a,b)} \to 0$ per $n, m \to \infty$. Ma allora abbiamo

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_p &\to 0 \\ \|f_n' - f_m'\|_p &\to 0 \\ \|f_n - f_m\|_{C^0(a,b)} &\to 0 \end{aligned}$$

per $n, m \to \infty$ dove per la terza si è usata la proposizione (2.36). Ne consegue che f_n e f_n' sono di Cauchy in $L^p(a,b)$, essendo L^p completo allora esistono $f, g \in L^p(a,b)$ tali che $f_n \to f$ e $f_n' \to g$ in $L^p(a,b)$. Inoltre f_n è di Cauchy in $C^0(a,b)$ e quindi esiste $h \in C^0([a,b])$ tale che $f_n \to h$ in $C^0([a,b])$. Siccome la convergenza in C^0 è uniforme allora implica la convergenza in $L^p(a,b)$ e allora $h = f$ q.o. e vogliamo mostrare che vale anche $f' = g$ q.o.

Sappiamo che

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

per ogni $x \in [a,b]$. Passando al limite per $n \to \infty$ abbiamo

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b] \tag{2.17}$$

dove le prime due sono per la convergenza in C^0 e l'ultima poiché $\int_a^b f_n'(t)dt = \int_{[a,b]} \chi_{[a,x]} f_n'$ e poiché $f_n' \to g$ in L^p e chiaramente $\chi_{[a,x]} \to \chi_{[a,x]}$ in $L^{p'}$. Da (2.17) otteniamo che necessariamente $f' = g$. Quindi poiché vale la formula fondamentale del calcolo, f è assolutamente continua, e abbiamo già detto $f' \in L^1([a,b])$, quindi $f \in W^{1,p}(a,b)$ □

Proposizione 2.38 ($f \in W^{1,p}(a,b)$, allora f hölderiana)**.** *Se $f \in W^{1,p}(a,b)$, dove $1 < p \leq \infty$, allora f è Hölderiana di esponente $\alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$*

Dimostrazione. Da (2.16) e dalla proposizione 1.23 otteniamo che, supponendo senza perdita di generalità $x > y$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t)dt \right| \leq \int_y^x |f'(t)|dt = \|f'\|_1$$

Allora per la diseguaglianza di Hölder 2.7 otteniamo

$$|f(x) - f(y)| \leq \|1 \cdot f'\|_1 \leq \|1\|_{p'} \|f'\|_p = |x-y|^{\frac{1}{p'}} \|f'\|_p$$

per ogni $x, y \in [a,b]$ $\square$

Osservazione. Per $p = 1$ la proposizione non vale, e in effetti nella dimostrazione si avrebbe $\|1\|_{p'} = \|1\|_\infty = 1$. In effetti possiamo vedere il controesempio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x} & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è assolutamente continua, quindi $f \in W^{1,1}(0,1)$ ma non è Hölderiana in 0, infatti per ogni $\alpha > 0$ si ha che

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha \log x} = \frac{x^{-\alpha}}{\log x} \underset{x \to 0}{\overset{L'H}{\sim}} \frac{-\alpha x^{-\alpha-1}}{x^{-1}} = -\frac{\alpha}{x^\alpha} \to \infty \text{ per } x \to 0$$

eppure è assolutamente continua in quanto C^1 in ogni intervallo $[\delta, 1/2]$ con $\delta > 0$.

Nota. Per $p = \infty$ si ottiene che f è 1-Hölderiana, cioè lipschitziana.

Lo spazio $C^{0,1}([a,b])$ delle funzioni lipschitziane su $[a,b]$ coincide con lo spazio $W^{1,\infty}(a,b)$ cioè la derivata quasi ovunque di una funzione lipschitziana non solo è integrabile ma è anche essenzialmente limitata, cioè è in $L^\infty([a,b])$.

Per $N > 1$ le cose sono più complicate, bisogna guardare come si comportano i gradienti invece che le derivate, ad esempio.

2.10 Proiezioni in spazi di Hilbert

Sul piano euclideo $H = \mathbb{R}^2$ è intuitivo il concetto di proiezione $P_K : \mathbb{R}^2 \to K$ che manda un punto $z \in \mathbb{R}^2$ in un punto di un insieme convesso e chiuso K che minimizza la distanza da z, come in figura 8. Nel caso in cui $z \in K$ la proiezione

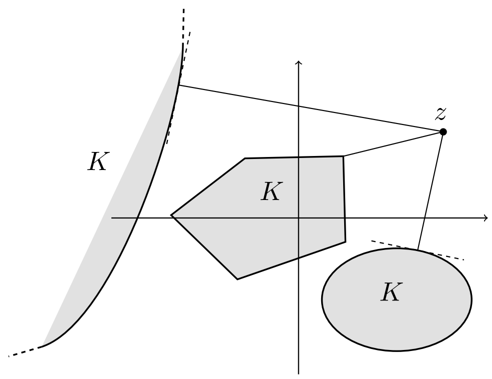


Figura 8: Proiezioni su spazi K convessi e chiusi

manda banalmente $z \mapsto z \quad \forall z \in K$.

Teorema 2.39: delle Proiezioni

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $K \subseteq H$ un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso di H. Allora per ogni $f \in H$ esiste unico un punto $u \in K$ tale che

$$\|u - f\| = \min_{v \in K} \|v - f\| \tag{2.18}$$

inoltre tale u è anche l'unica soluzione della disuguaglianza variazionale

$$\Re(\langle u - f, u - v\rangle) \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{2.19}$$

Definizione 2.16: Proiezione

Il punto u del teorema 2.39 è detto proiezione di f su K e si indica con $P_K(f)$

Osservazione. Una maniera per memorizzare la disuguaglianza variazionale è immaginare il caso di un convesso $K \subset \mathbb{R}^2$, in cui se ci si muove da f alla proiezione u (quindi lungo il vettore $u - f$) e poi da u a un generico v in K (ossia $v - u$), l'angolo non orientato che si forma è minore di $\pi/2$, e quindi il prodotto scalare è positivo, che diventa negativo scambiando il segno del secondo termine.

Per la dimostrazione, riassumiamo il teorema 2.39 come esistenza e unicità della soluzione di (2.18) e (2.19) e uguaglianza di tali soluzioni, e a tale scopo articoliamo la dimostrazione nei seguenti passaggi

1. Esistenza della soluzione di (2.18)
2. u soluzione di (2.18) risolve anche (2.19)
3. u soluzione di (2.19) risolve anche (2.18)
4. La soluzione di (2.19) è unica

Passo 1: Esistenza della soluzione di (2.18). Costruiamo una successione minimizzante.

$$\lambda = \inf_{v \in K} \|f - v\| \text{ esiste ed è } \geq 0$$

Ora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $v_n \in K$ tale che

$$\lambda \leq \|f - v_n\| \leq \lambda + \frac{1}{n}$$

e vogliamo provare che v_n è di Cauchy in H. Infatti prendendo $x = f - v_n$ e $y = f - v_m$ possiamo applicare la regola del parallelogramma 2.14 ottenendo

$$\begin{aligned}
\|2f - v_n - v_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 &= 2\|f - v_n\|^2 + 2\|f - v_m\|^2 \\
4\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 &= 2\|f - v_n\|^2 + 2\|f - v_m\|^2
\end{aligned}$$

dove $\frac{v_n+v_m}{2}$ è il punto medio del segmento di estremi v_n e v_m e poiché K è convesso, $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ e quindi $\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\| \geq \lambda$. Allora la precedente uguaglianza diventa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|v_n - v_m\|^2 &= \frac{1}{2}\|f - v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|f - v_m\|^2 - \left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{m}\right)^2 - \lambda^2 = \\
&= \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{m} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2m^2} \longrightarrow 0 \text{ per } n, m \to \infty
\end{aligned}$$

quindi v_n è di Cauchy, e siccome H è completo, v_n converge a $u \in H$ e siccome K è chiuso, $u \in K$. Abbiamo ora che $\|f - v_n\| \to \|f - u\|$ per continuità della norma e d'altra parte la norma di $\|f - v_n\| \to \lambda$ per costruzione, e per l'unicità del limite ne concludiamo che $\|f - u\| = \lambda$ che quindi è il minimo cercato. $\square$

Passo 2: u sol. (2.18) $\implies$ *u sol.* (2.19). Sappiamo per ipotesi che $\|u - f\| \leq \|w - f\|$ per ogni $w \in K$. Prendo

$$w := tv + (1-t)u \quad \forall t \in [0,1]$$

e $v \in K$, allora w è la combinazione convessa di u e v che siccome K è convesso sta in K. Allora

$$\begin{aligned}
\cancel{\|u - f\|^2} \leq \|w - f\|^2 &= \|tv + (1-t)u - f\|^2 = \|t(v-u) + u - f\|^2 \\
&= \langle t(v-u) + u - f, t(v-u) + u - f \rangle = \\
&= t^2\|v - u\|^2 + 2t\Re(\langle v - u, u - f \rangle) + \cancel{\|u - f\|^2} \\
\implies \; 0 \leq t^2\|v-u\|^2 &+ 2t\Re(\langle u - f, v - u\rangle) \quad \forall t \in (0,1]
\end{aligned}$$

dove abbiamo specificato che vale per $t \in (0,1]$ in modo da poter dividere per t ottenendo

$$0 \leq t\|v - u\|^2 + 2\Re(\langle u - f, v - u\rangle)$$

e passando al limite per $t \to 0^+$ otteniamo la diseguaglianza

$$0 \leq 2\Re(\langle u - f, v - u\rangle) \iff \Re(\langle u - f, u - v\rangle) \leq 0$$

che è esattamente la (2.19) $\square$

Passo 3: u sol. (2.19) $\implies$ *u sol.* (2.18). Vogliamo provare la seguente uguaglianza:

$$\|u - f\|^2 - \|v - f\|^2 = 2\Re(\langle f - u, v - u\rangle) - \|u - v\|^2 \quad \forall v \in K$$

e da qui concludiamo facilmente in quanto il secondo membro è sempre non positivo essendo u soluzione di (2.19). Allora anche il primo membro è ≤ 0 e dunque u risolve (2.18).

Abbiamo che

$$\|v - f\|^2 = \|(u - f) - (u - v)\|^2 = \|u - f\|^2 + \|u - v\|^2 - 2\Re(\langle u - f, u - v\rangle)$$

che è esattamente l'eguaglianza richiesta $\square$

Passo 4: unicità sol. (2.19). Siano u_1, u_2 due soluzioni di (2.19):

$$\Re(\langle u_1 - f, u_1 - v\rangle) \leq 0 \quad \text{e} \quad \Re(\langle u_2 - f, u_2 - v\rangle) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

Allora poniamo nella prima $v = u_2$ e nella seconda $v = u_1$ ottenendo

$$\Re(\langle u_1 - f, u_1 - u_2\rangle) \leq 0 \quad \text{e} \quad \Re(\langle f - u_2, u_1 - u_2\rangle) \leq 0$$

da cui, per linearità del prodotto scalare, nel primo termine otteniamo $\|u_1 - u_2\| \leq 0$ e quindi $u_1 = u_2$ $\square$

Osservazione. Se K non fosse chiuso, allora la proiezione potrebbe non esistere. Sia ad esempio $K = x^2 + y^2 < 1$ sul piano Oxy e un punto f al di fuori di K, allora qualunque u io prenda in K, esiste sempre $\overline{u} \in K$ tale che $\|\overline{u} - f\| < \|u - f\|$.

Se K non fosse convesso, allora la proiezione potrebbe non essere unica. Sempre in $\mathbb{R}^2$ prendiamo come $K = x^2 + y^2 = 1$ ossia la circonferenza unitaria. Allora se prendiamo $f = (0,0)$ abbiamo che ogni punto di K è proiezione.

Nello spazio H, con K chiuso e non vuoto, posso considerare l'operatore $P_K : f \mapsto P_K(f)$. Allora $P_K|_K = \mathrm{Id}$ e in generale $P_K(H) = K$. L'operatore P_K non è lineare, infatti se $K = \{z\}$, con $z \in H \smallsetminus \{0_H\}$ abbiamo che $P_K(f) = z$ è costante e diverso da 0_H quindi non è lineare. P_K è però continuo, infatti è lipschitziano di costante 1: siano $f_1, f_2 \in H$, sia $u_1 = P_K(f_1)$ e $u_2 = P_K(f_2)$. Allora, procedendo in modo simile al passo 4 della dimostrazione del teorema 2.39 otteniamo

$$\Re(\langle u_1 - f_1 + f_2 - u_2, u_1 - u_2\rangle) \leq 0 \iff$$
$$\iff \Re(\langle u_1 - u_2, u_1, u_2\rangle) + \Re(\langle f_2 - f_1, u_1 - u_2\rangle) \leq 0 \iff$$
$$\iff \|u_1 - u_2\|^2 \leq |\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle| \overset{2.12}{\leq} \|f_1 - f_2\|\|u_1 - u_2\|$$

con l'ultima disuguaglianza dovuta a Schwarz, da cui otteniamo che, se $u_1 \neq u_2$, $\|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$ e quindi P_K è lipschitziano di costante 1.

Ne concludiamo che P_K è **non espansivo**, ossia o contrae oppure lascia inalterate le distanze. Non è una contrazione, si consideri l'esempio della figura 9

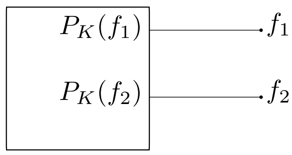


Figura 9: K è un quadrato chiuso nel piano H

Esercizio 2.7 Es. 2 del 10 marzo 2020

Posto $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = x$ per $x \in [0,1]$ andiamo a considerare

$$C = \left\{v \in L^2([0,1]) : \varphi(x) \leq v(x) \leq \psi(x) \quad \text{q.o. in } [0,1]\right\}$$

a. Mostrare che C è un convesso chiuso e non vuoto di L^2

C è non vuoto perché ad esempio $\varphi, \psi \in C$.

Siano $u, v \in C$ e $t \in [0,1]$ allora

$$\varphi = t\varphi + (1-t)\varphi \leq tu + (1-t)v \leq t\psi + (1-t)\psi = \psi$$

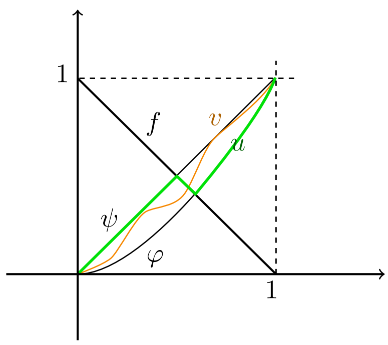
e quindi $tu + (1-t)v \in C$.

Inoltre C è chiuso in L^2 in quanto se $\{v_n\} \subseteq C$ è una successione convergente in L^2 a v allora esiste una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ che converge q.o. a v e quindi sapendo $\varphi \leq v_{n_k} \leq \psi$ q.o. otteniamo che $\varphi \leq v \leq \psi$ q.o. e quindi $v \in C$.

b. Se $f(x) = 1 - x$, con $x \in [0,1]$ allora determinare $P_C(f)$ e giustificare la risposta.

La proiezione $u = P_C(f)$ è l'elemento di C che realizza la minima distanza da f in norma L^2. In particolare verifica la disuguaglianza variazionale

$$\langle u - f, u - v\rangle =$$
$$= \int_0^1 (u-f)(u-v)dx \leq 0 \quad \forall v \in C$$



Volendo provare a fare un guess di possibile proiezione, notiamo che un tratto della funzione f è contenuto in C (detto malissimo), quindi un buon tentativo di soluzione è la funzione $u : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$u(x) = \begin{cases} \psi(x) & f(x) > \psi(x) \\ f(x) & \varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) \\ \varphi(x) & f(x) < \varphi(x) \end{cases} = \begin{cases} \psi(x) & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ f(x) & x \in [\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}] \\ \varphi(x) & x \in (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1) \end{cases}$$

poiché $f(x) = \varphi(x) \iff x = 1/2$ e $f(x) = \psi(x) \iff x = (-1+\sqrt{5})/2$. Vogliamo vedere se la funzione g soddisfa la disuguaglianza variazionale (2.19):

$$\int_0^1 (u-f)(u-v)dx = \int_0^{1/2} \underbrace{(\psi - f)}_{<0}\underbrace{(\psi - v)}_{\ge 0} dx +$$
$$+ \cancel{\int_{1/2}^{(-1+\sqrt{5})/2} \underbrace{(f-f)}_{=0}(f-v)dx} + \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \underbrace{(\varphi - f)}_{>0}\underbrace{(\varphi - v)}_{\le 0} dx$$

quindi tutti gli addendi sono non positivi e dunque la diseguaglianza è verificata e per unicità $P_C(f) = u$

In particolare fra i convessi vi sono anche i sottospazi, e possiamo in tal caso ottenere qualcosa in più

Teorema 2.40: Proiezioni per sottospazi

Sia H uno spazio di Hilbert e $K \subseteq H$ un sottospazio **chiuso**. Allora per ogni $f \in H$ esiste unica $u \in K$ tale che

$$\|f - u\| \le \|f - v\| \quad \forall v \in K$$

Inoltre tale u è anche l'unica soluzione dell'**uguaglianza** variazionale

$$\langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in K \tag{2.20}$$

Osservazione. La u è quell'elemento di K che replica tutti i prodotti scalari di f con gli elementi di K

Dimostrazione. Sappiamo già che vale (2.18) e (2.19), allora in (2.19) poniamo $w = u \pm v$, con $v \in K$ e sappiamo $w \in K$ poiché è un sottospazio. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} \Re(\langle u - f, u - (u \pm v)\rangle) = \Re(\langle u - f, \mp v\rangle) \le 0 \\ \iff \mp\Re(\langle u - f, v\rangle) \le 0 \\ \iff \Re(\langle u - f, v\rangle) = 0 \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

poiché la disuguaglianza vale con il $\mp$, nel complesso consideriamo anche $w = u \pm iv$, e abbiamo un risultato del tutto analogo:

$$\Re(\langle u - f, \mp iv\rangle) \le 0 \iff \Re(\pm i\langle u - f, v\rangle) = \mp\Im(\langle u - f, v\rangle) \le 0$$

e di nuovo quindi otteniamo $\Im(\langle u - f, v\rangle) = 0$ per ogni $v \in K$ e quindi anche la parte immaginaria è nulla. Ne consegue

$$\langle u - f, v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in K$$

□

Osservazione. Se $K \subseteq H$ è un sottospazio chiuso, allora l'operatore P_K di proiezione è **lineare**, infatti sappiamo che, date $f, g \in H$

$$\langle P_K(f), v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \langle P_K(g), v\rangle = \langle g, v\rangle \quad \forall v \in K$$

dalle quali otteniamo, per $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\langle \alpha P_K(f) + \beta P_K(g), v\rangle = \langle \alpha f + \beta g, v\rangle \quad \forall v \in K$$

ma poiché l'unico elemento di K che replica tutti i prodotti scalari di di $\alpha f + \beta g$ con gli elementi di K è $P_K(\alpha f + \beta g)$ otteniamo

$$P_K(\alpha f + \beta g) = \alpha P_K(f) + \beta P_K(g)$$

ossia P_K è lineare.

Osservazione. Se K è sottospazio chiuso allora $P_K \in \mathcal{L}(H, H)$ e inoltre $\|P_K\| = 1$ se K contiene almeno un elemento $z \neq 0$ (basta osservare che $P_K(z) = z$) $\|P_K\| = 0$ se $K = \{0_H\}$

Esercizio 2.8 Es. 4 del 13 gennaio 2020

$$C = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{(-1,1)} v d\mu = 0 \right\}$$

a) Mostrare che C è sottoinsieme di $L^1(0,1)$. Dimostrare che C è sottospazio chiuso di $L^2(0,1)$.

Siccome $(0,1)$ ha misura finita, allora $L^2(0,1) \subseteq L^1(0,1)$.

Presi $v, w \in C$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_{(0,1)} \alpha v + \beta w d\mu = \alpha \int_{(0,1)} v d\mu + \beta \int_{(0,1)} w d\mu = 0$$

e quindi $\alpha v + \beta w \in C$. Inoltre poiché $M : v \mapsto \int_{(0,1)} v d\mu$ è un operatore continuo (esempio 2.21) e $C = M^{-1}\{0\}$ è la controimmagine del chiuso $\{0\}$ e quindi è chiuso.

b) Con $f(x) = \ln \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$. Mostrare che $f \in L^2(0,1)$ e trovare $P_C(f)$.

$f(x) = -\ln x = |\ln x|$. Abbiamo che $|\ln(x)|^2 \leq c/\sqrt{x}$ infatti se $h(x) = \sqrt{x}\,|\ln x|^2$ allora $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ e $h(1) = 0$ quindi $|\ln x|^2 \leq \|h\|_\infty/\sqrt{x}$ che sta in $L^1(0,1)$ e quindi $f \in L^2(0,1)$. Per la proiezione $P_C(f)$ come nell'esercizio precedente ipotizziamo un risultato plausibile e poi la controlliamo con l'uguaglianza variazionale. In particolare quindi vogliamo trovare $u \in C$ tale che

$$\int_{(0,1)} uv\, d\mu = \int_{(0,1)} fv\, d\mu \quad \forall v \in C$$

notando che $\int_{(0,1)} -\ln x\, d\mu = 1$ possiamo provare a prendere $u(x) = f(x) - 1 = -\ln x - 1 \in C$ e otteniamo

$$\cancel{\int_{(0,1)} -\ln x \cdot v\, d\mu} - \int_{(0,1)} v\, d\mu = \cancel{\int_{(0,1)} -\ln x \cdot v\, d\mu}$$
$$\iff \int_{(0,1)} v\, d\mu = 0 \qquad \text{vero } \forall v \in C$$

quindi $P_C(f) = u$

2.11 Sottospazi ortogonali

Sia H uno spazio di Hilbert, $S \subseteq H$ un sottoinsieme non vuoto. Allora definiamo

$$S^{\perp} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in S\}$$

ovviamente $0_H \in S^{\perp}$ e inoltre $S^{\perp}$ è sottospazio di H, infatti presi $u, v \in S^{\perp}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ abbiamo che

$$\langle \alpha u + \beta v, y\rangle = \alpha\langle u, y\rangle + \beta\langle v, y\rangle = 0 + 0 = 0 \quad \forall y \in S$$

Inoltre $S^{\perp}$ è chiuso in H in quanto intersezione di chiusi (le controimmagini di 0 tramite $x \mapsto \langle x, y\rangle$ che è continuo al variare di $y \in S$).

Partendo da un sottoinsieme S qualunque di H abbiamo quindi che $S^{\perp}$ è un sottospazio chiuso.

Teorema 2.41: Decomposizione ortogonale

Sia H uno spazio di $Hilbert$ e sia $K \subseteq H$ un sottospazio chiuso. Allora per ogni $f \in H$ esistono $u \in K, v \in K^{\perp}$ tali che

$$f = u + v$$

Questa rappresentazione è unica.

Osservazione. Si scrive allora $H = K \oplus K^{\perp}$ e si dice che H è la **somma diretta** di K e $K^{\perp}$

Osservazione. Considerando $S \subseteq H$ qualsiasi, abbiamo che $S^{\perp} \ni 0_H$. Nel caso di K sottospazio chiuso, allora anche $0_H \in K$. L'intersezione è proprio $K \cap K^{\perp} = \{0\}$: se $z \in K \cap K^{\perp}$ allora $\langle z, z\rangle = 0$ e quindi $z = 0_H$

Dimostrazione. Dato $f \in H$ prendiamo $u = P_K(f) \in K$. Ora posto $v = f - u$ controlliamo che $v \in K^{\perp}$:

$$\langle v, y\rangle = \langle f - u, y\rangle = \langle f, y\rangle - \langle u, y\rangle = 0 \quad (2.20)$$

e quindi $v \in K^{\perp}$, da cui $H = K + K^{\perp}$.

Per l'unicità, supponiamo che esistano $u_1, u_2 \in K, v_1, v_2 \in K^{\perp}$ tali che

$$H \ni f = u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \implies \underbrace{u_1 - u_2}_{\in K} = \underbrace{v_2 - v_1}_{\in K^{\perp}}$$

ma allora $u_1 - u_2 = v_1 - v_2 = 0_H$ e quindi $u_1 = u_2, v_1 = v_2$ □

Osservazione. Data $f \in H$, abbiamo $f = P_K(f) + P_{K^{\perp}}(f)$ perché $K = (K^{\perp})^{\perp}$ (se e solo se K è **sottospazio chiuso**).

Esempio 2.29. In $\mathbb{R}^2$ i sottospazi chiusi sono $\{0\}, \mathbb{R}^2$ e le rette passanti per l'origine. Se ora $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$ allora $K^{\perp} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y = 0\}$ è la retta perpendicolare.

Esempio 2.30. Preso $H = L^2(0, 1)$ e $C = \{v \in L^2(0, 1) : \int_{(0,1)} v \, d\mu = 0\}$. Allora $C^{\perp}$ consiste di tutte le funzioni $u \in L^2(0, 1)$ tali che $\int_{(0,1)} u \cdot v \, d\mu = 0$ per ogni $v \in C$. Se u è una funzione costante, allora chiaramente $u \in C^{\perp}$. Allora $C^{\perp}$ è costituito solo dalle costanti? Sì perché presa una $f \in L^2(0, 1)$ la si può scomporre in $f_0 + k$, con $k = \int_{(0,1)} f \, d\mu$ ($L^2 \subseteq L^1$ perché $\mu(0, 1) < +\infty$) e $f_0 = f - k$. Allora k è costante e $f_0 \in C$ e quindi se K è il sottospazio delle costanti $L^2(0, 1)$ abbiamo che $H = C \oplus K$ e $K \subseteq C^{\perp}$, dunque $K = C^{\perp}$.

Lemma 2.42. *Se H è uno spazio prehilbertiano e fissiamo $y \in H$, allora l'applicazione*

$$L_y = H \ni x \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$$

è un funzionale lineare e continuo su H.

Inoltre $\|L_y\|_{H'} \leq \|y\|$

Dimostrazione. È lineare perché il prodotto scalare è lineare, ed è continuo per la diseguaglianza di Schwarz (Teorema 2.12). Diretta conseguenza è che la norma di L_y è minore o uguale a $\|y\|$ □

Quindi per ogni elemento $y \in H$ si costruisce un elemento $L_y \in H'$. Il seguente teorema ci dice che vale anche il viceversa.

Teorema 2.43: di Riesz

Sia H uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $L \in H'$ esiste unico un elemento $y \in H$ tale che $L(x) = \langle x, y \rangle$ per ogni $x \in H$. Inoltre vale l'uguaglianza

$$\|L\|_{H'} = \|y\|_H$$

Osservazione. Grazie a questo teorema possiamo dire che in uno spazio di Hilbert, abbiamo che $H \cong H'$

Nota. Abbiamo già incontrato un risultato simile negli spazi ℓ^p, trovando che $(\ell^p)' = (\ell^{p'})$ per $p < +\infty$. In particolare avevamo trovato che $(\ell^2)' \cong \ell^2$, che potrebbe essere provato anche con il teorema di Riesz, in quanto ℓ^2 è uno spazio di Hilbert. Un altro risultato, che invece non abbiamo dimostrato, è quello del caso di L^2.

Dimostrazione. Per l'**unicità**, supponiamo esistano $y_1, y_2 \in H$ tali che

$$L(x) = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle \quad \forall x \in H$$

e allora sottraendo troviamo $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ per ogni $x \in H$. Prendendo ora $x = y_1 - y_2$ otteniamo che $\|y_1 - y_2\| = 0$ e quindi $y_1 = y_2$.

Per l'**esistenza**, definiamo

$$N = \{x \in H : L(x) = 0\} = \ker L$$

che è non vuoto ($0_H \in N$), è un sottospazio (controimmagine di un operatore lineare) ed è chiuso in H (controimmagine del chiuso $\{0\}$ tramite un operatore continuo). Si distinguono due casi:

1. $N = H \implies L$ è il funzionale nullo e quindi $y = 0_H$
2. $N \neq H \implies$ esiste uno $z \in N^\perp$ tale che $\|z\| = 1$, che posso costruire esplicitamente: sia $g \in H \setminus N$, consideriamo la proiezione su N, $P_N(g) \neq g$, possiamo definire

   $$z := \frac{g - P_N(g)}{\|g - P_N(g)\|}$$

   È chiaramente vero che $z \in N^\perp$ per la dimostrazione del teorema 2.41 e inoltre $\|z\| = 1$. Ora mostriamo che $y = \overline{L(z)}z$ è l'elemento cercato, ossia vogliamo mostrare che

   $$L(x) = \langle x, y \rangle = \left\langle x, \overline{L(z)}z \right\rangle \quad \forall x \in H \tag{2.21}$$

   Se $x \in N$ allora (2.21) è banalmente vera in quanto $L(x) = 0 = \langle x, z \rangle$ perché $z \in N^\perp$.

Se invece $x = \lambda z$, con $\lambda \in \mathbb{K}$ allora

$$L(\lambda z) = \lambda L(z) = \lambda L(z)\|z\|^2 = \lambda L(z)\langle z, z\rangle = \left\langle \lambda z, \overline{L(z)} z \right\rangle$$

e quindi anche in questo caso vale (2.21). Ora mostriamo che $H = N \oplus \langle z \rangle$ e ne conseguirà la tesi per linearità. Infatti per ogni $x \in H$ abbiamo

$$x = \underbrace{\left(x - \frac{L(x)}{L(z)} z\right)}_{=:x_N} + \underbrace{\frac{L(x)}{L(z)}}_{=:\lambda} z$$

e $L(x_N) = L(x) - \frac{L(x)}{L(z)} L(z) = 0$, quindi $x_N \in N$. Poiché $\langle z \rangle \subseteq N^\perp$ allora $N^\perp = \langle z \rangle$ avendo la scrittura univoca del teorema 2.41 e quindi $H = N \oplus \langle z \rangle$.

Per l'**uguaglianza delle norme**, abbiamo, per definizioni e Schwarz:

$$\|L\|_{H'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|L(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_H \|y\|_H}{\|x\|_H} = \|y\|_H$$

per l'altra disuguaglianza, prendiamo $x = y$ ottenendo

$$\|y\|^2 = |\langle y, y\rangle| = |L(y)| \leq \|L\|_{H'} \|y\| \implies \|y\| \leq \|L\|_{H'}$$

□

2.12 Serie di Fourier

Definizione 2.17: Sistema ortonormale

Sia H uno spazio prehilbertiano. Una successione $\{e_n\}$ di elementi di H si dice sistema **ortonormale** (o successione ortonormale) se $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, con δ_{ij} la delta di Kronecker.

Essenzialmente in un sistema ortonormale gli e_n sono tutti di norma unitaria e sono ortogonali tra loro.

Esempio 2.31. In ℓ^2 gli elementi della base canonica

$$e^k = (0, \dots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \dots)$$

costituiscono un sistema ortonormale.

Osservazione. Nel caso in cui H ha dimensione finita i sistemi ortonormali sono formati da una lista di al più $\dim H$ elementi, e quando sono esattamente $\dim H$ formano una base di$H$. Nel caso in cui H ha dimensione infinita si possono invece prendere successioni ortonormali.

Definizione 2.18: Serie di Fourier

Dato un sistema ortonormale $\{e_n\} \subseteq H$ allora per ogni $x \in H$ si possono considerare i valori

$$\langle x, e_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N} \quad \textbf{coefficienti di Fourier}$$

e la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \quad \textbf{serie di Fourier di } x \in H$$

Vi sono almeno due problemi notevoli:

– convergenza della serie di Fourier;

– in caso di convergenza, valore a cui converge la serie.

In merito si forniranno alcuni risultati.

Proposizione 2.44 (Diseguaglianza di Bessel)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert, $\{e_n\} \subseteq H$ un sistema ortonormale. Allora*

1. *Per ogni $x \in H$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \tag{2.22}$$

2. *Per ogni $x \in H$ vale la diseguaglianza di Bessel*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \tag{2.23}$$

3. *Per ogni elemento $c = (c_k)$ successione di scalari vale*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \text{ converge in } H \iff c \in \ell^2 \tag{2.24}$$

Dimostrazione. La 2. discende in modo immediato da 1. in quanto tutte le ridotte della serie differiscono da $\|x\|^2$ per una quantità non negativa. Proviamo dunque 1.

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle = \\
= \langle x, x \rangle - \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle x, e_j \rangle &- \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle + \sum_{k,j=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_k, e_j \rangle = \\
= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 &- \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{(k=i)=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2
\end{aligned}$$

Rimane da provare 3. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ converge in H se e solo se la serie è di Cauchy in H cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \overline{k},\ j \geq 0 \text{ si ha} \qquad \underbrace{\left\| \sum_{k=n}^{n+j} c_k e_k \right\|^2}_{\text{differenza di due ridotte}} < \varepsilon$$

Allora, usando l'ortonormalità,

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+j} c_k e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n}^{n+j} c_k e_k, \sum_{i=n}^{n+j} c_i e_i \right\rangle = \sum_{k=n}^{n+j} |c_k|^2$$

ossia, per la condizione di Cauchy, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ converge se e solo $c \in \ell^2$. Sono tutte equivalenze e quindi si è stabilita l'equivalenza tra le due condizioni. $\square$

Osservazione. Questa proposizione ci dice già che la serie di Fourier 2.12 converge in H siccome la successione numerica data da $\langle x, e_k \rangle$ è in ℓ^2 (per la diseguaglianza di Bessel (2.23))

Proposizione 2.45. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale in H. Allora posto $V_n = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$ si ha che*

$$P_{V_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \quad \forall x \in H$$

Osservazione. Questa proposizione ci dice che la migliore approssimazione di $x \in V_n$ è proprio la ridotta n-esima della serie di Fourier.

Dimostrazione. Siano $c_1, c_2, \dots, c_n$ scalari arbitrari, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 &= \langle x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \underbrace{\langle e_k, x \rangle}_{=\overline{\langle x, e_k \rangle}} + \sum_{k,j=1}^{n} c_k \overline{c_j} \langle e_k, e_j \rangle \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \Re\left(\overline{c_k} \langle x, e_k \rangle\right) + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(|\langle x, e_k \rangle|^2 - 2\Re\left(\overline{c_k} \langle x, e_k \rangle\right) + |c_k|^2 \right) \\
&\overset{(2.22)}{=} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|\langle x, e_k \rangle - c_k|^2}_{>0} \\
&> \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Dunque la ridotta della serie di Fourier è proprio l'elemento di minima distanza da x in V_n e quindi è la proiezione di x su V_n □

Dimostrazione alternativa. Dobbiamo controllare, per il teorema 2.40 (V_n è un sottospazio chiuso), che

$$\langle v, x \rangle = \left\langle v, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle \quad \forall v \in V_n.$$

In particolare, controlliamo che valga per gli elementi della base $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ di V_n:

$$\begin{aligned}
\left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle &= \langle e_j, x \rangle \|e_j\|^2 \\
&= \langle e_j, x \rangle.
\end{aligned}$$

Siccome, a x fissato, il prodotto induce un operatore lineare, ottengo la tesi. □

Teorema 2.46: Caratterizzazione convergenza della serie di Fourier

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{e_k\}$ un sistema ortonormale. Allora sono equivalenti:

i) $\operatorname{span}\{e_k|\, k \in \mathbb{N}\}$ è denso in H;

ii) La serie di Fourier di x converge a x per ogni $x \in H$;

iii) $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ per ogni $x \in H$ (identità di Bessel-Parseval);

iv) Se $x \in H$ è tale che $\langle x, e_k\rangle = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $x = 0_H$.

Dimostrazione.

$(i) \implies (ii)$ Se $\operatorname{span}\{e_k|\, k \in \mathbb{N}\}$ è denso in H allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in H \quad \exists z \in \operatorname{span}\{e_k\} : \|x - z\| \le \varepsilon$$

e dunque esiste un $\overline{k}$ tale che $z \in V_{\overline{k}} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{\overline{k}}\}$ essendo $z \in \operatorname{span}\{e_k\}$. Per la proposizione 2.45

$$\sum_{j=1}^{\overline{k}} \langle x, e_j\rangle e_j$$

è la migliore approssimazione di x in $V_{\overline{k}}$, quindi

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{\overline{k}} \langle x, e_j\rangle e_j \right\|^2 \le \|x - z\|^2 \le \varepsilon^2$$

dove la disugaglianza vale applicando il teorema di Pitagora. Se prendiamo $n > \overline{k}$, diciamo che

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\overline{k}} |\langle x, e_k\rangle|^2 \iff$$
$$\iff \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right\|^2 \le \left\| x - \sum_{j=1}^{\overline{k}} \langle x, e_j\rangle e_j \right\|^2 \le \varepsilon^2$$

dove si è usata la (2.22) della proposizione 2.44. Ne viene fuori che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{k} \in \mathbb{N} : \forall n \ge \overline{k} \quad \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \right\|^2 \le \varepsilon^2$$

ossia, per arbitarietà di n, *(ii)*.

$(ii) \implies (i)$ Banale.

$(ii) \iff (iii)$ Usando la (2.22) abbiamo

$$\underbrace{\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2}_{\to 0 \iff (ii)} = \underbrace{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2}_{\to 0 \iff (iii)}$$

$(iii) \implies (iv)$ Se x ha i coefficienti di Fourier tutti nulli, allora per la *(iii)* abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 \implies x = 0_H$$

$(iv) \implies (ii)$ Sia $x \in H$ e $y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ la somma della serie di Fourier, che converge sempre in H. Allora succede che l'elemento $x - y$ ha tutti i coefficienti di Fourier nulli. Infatti

$$\langle x - y, e_j \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, e_j \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

dove si è usata la continuità del prodotto scalare e si è assunto $n > j$, cosa vera definitivamente. Ora dunque per *(iv)* abbiamo che $x - y = 0$ e dunque la serie di Fourier converge a x.

$\square$

Osservazione. Al teorema 2.46 si potrebbe inserire una **quinta** condizione equivalente, ossia

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle} \quad \forall x, y \in H$$

dunque il prodotto scalare di due elementi di H qualsiasi si può scrivere come prodotto scalare in ℓ^2 delle successioni date dai coefficienti di Fourier. Questa condizione è esattamente *(iii)* per $x = y$ e inoltre è implicata da *(ii)* poiché

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle}$$

e il limite per $n \to \infty$ è proprio l'identità che si cerca, infatti assumendo *(ii)* abbiamo che le serie di Fourier nel primo membro convergono rispettivamente a x e a y, e per la continuità del prodotto scalare si ha il risultato.

Definizione 2.19: Sistema ortonormale completo

Un sistema ortonormale $\{e_k\} \subseteq H$ si dice **completo** se vale la condizione *(iv)* del teorema 2.46, cioè se l'unico elemento $x \in H$ ortogonale a tutti gli e_k è l'elemento nullo di H

Ovviamente basta che valga una qualunque delle condizioni, ma la definizione è associata alla *(iv)* per qualche motivo, probabilmente legato all'intuizione che si ha di un sistema ortonormale completo. Un sistema ortonormale completo viene anche detto **base ortonormale** di H.

Proposizione 2.47. *Se lo spazio di Hilbert H possiede una base ortonormale allora H è* ***separabile***

Dimostrazione. Ricordando la definizione 2.6 di spazio separabile, ossia avente un sottoinsieme denso e numerabile, se H è reale posso considerare l'insieme delle combinazioni lineari finite di $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ a coefficienti razionali. Se H è complesso posso considerare le combinazioni lineari finite a coefficienti con parte reale e parte immaginaria razionali. Tale insieme è denso in H e numerabile, dunque H è separabile anche nella vecchia definizione. $\square$

Proposizione 2.48. *Ogni spazio di Hilbert di dimensione infinita che possieda una base ortonormale è isomorfo a ℓ^2.*

Dimostrazione. Ogni elemento dello spazio risulta identificato alla successione dei suoi coefficienti di Fourier. C'è una corrispondenza biunivoca tra $x \in H$ e $\{\langle x, e_k \rangle\} \in \ell^2$ che conserva le norme. $\square$

Ci chiediamo se vale il viceversa della proposizione 2.47, ossia se uno spazio di Hilbert separabile ammette sempre una base ortonormale. La risposta è sì, alla grande.

Lemma 2.49 (Procedura di Gram-Schmidt)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{x_n\}$ una successione di elementi linearmente indipendenti. Allora esiste una successione $\{e_n\}$ di elementi ortonormali tali che* $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ *per ogni $n \in \mathbb{N}$*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo e_n come

$$e_n = \frac{x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k}{\|x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k\|}$$

e si può verificare che $\{e_n\}$ è una successione ortonormale che soddisfa la tesi. □

Teorema 2.50: Separabile $\iff$ base ortonormale

Sia H uno spazio di Hilbert a dimensione infinita. Allora H è separabile se e solo se H possiede una base ortonormale.

Dimostrazione. Un'implicazione è data dalla proposizione 2.47.

Se H è separabile, allora esiste una successione $\{y_k\}$ densa in H. Allora possiamo costruire un'altra successione $\{x_n\}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$ sono linearmente indipendenti e inoltre $\operatorname{span}\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ è denso in H. A tal scopo prendiamo infatti y_1 e se $y_1 \neq 0$ pongo $x_1 = y_1$, altrimenti procedo su y_2 allo stesso modo (butto y_1). Poi (assumendo $y_1 \neq 0$) guardo y_2 e se è combinazione lineare di x_1 allora lo butto, altrimenti lo prendo come x_2, e così via. Costruisco dunque $\{x_n\}$ come sottosuccessione di elementi di $\{y_n\}$. Abbiamo quindi che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n \leq k$ tale che

$$\operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_k\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

e quindi $\operatorname{span}\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ e dunque anche $\{x_n\}$ ha span denso in H. Da $\{x_n\}$ possiamo costruire una base ortonormale con la procedura di Gram-Schmidt. □

In ℓ^2 la successione canonica $\{e^k\}$ è una base ortonormale, e infatti se $x = (x_k) \in \ell^2$ è tale che $\langle x, e^k \rangle = x_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora necessariamente x è la successione nulla.

Esercizio 2.9 ⋆ **base ortonormale di $L^2(-\pi, \pi)$**

Consideriamo ora $L^2(-\pi, \pi)$ e lavoriamo su funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabili e periodiche di periodo 2π tali che $f|_{(-\pi,\pi)} \in L^2(-\pi, \pi)$. Mostrare che le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

formano una base ortonormale di $L^2(-\pi, \pi)$.

Osservazione. Chiaramente non c'è nulla di particolare nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ eccetto che è particolarmente facile definire le funzioni f. Questo esercizio mostra che esiste (e la presenta) una base ortonormale su uno spazio di funzioni periodiche. Basta infatti stretchare le funzioni e traslarle e trovi il periodo che vuoi, dove vuoi.

Osservazione. In ambito complesso si possono anche prendere le funzioni $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ con $n \in \mathbb{Z}$ che formano una base ortonormale.

Definizione 2.20: Polinomio trigonometrico

Una funzione del tipo

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad \text{con } a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

viene detta **polinomio trigonometrico** di grado n in ambito reale. In modo analogo

$$q(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \quad \text{con } c_k \in \mathbb{C}$$

è un **polinomio trigonometrico** di grado n in ambito complesso.

Teorema 2.51: Weierstrass

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo 2π. Allora esiste una successione di polinomi trigonometrici $\{p_n\}$ tale che $\|f - p_n\|_\infty \to 0$ per $n \to 0$, ossia p_n converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$.

Lemma 2.52. *Esiste una successione di polinomi trigonometrici q_n tali che*

a. $q_n(t) \geq 0$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

b. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)\,dt = 1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$

c. Per ogni $\delta \in (0, \pi)$ *si ha*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} q_n(t)\right) = 0$$

Dimostrazione. Definiamo

$$q_n(t) = c_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

dove i coefficienti c_n sono fissati in modo che valga la condizione *b.*, ossia tali che

$$\frac{c_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n}_{\text{sempre non negativa e si annulla in } -\pi \text{ e } \pi} dt = 1$$

Notiamo che $c_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi vale a.

Perché q_n è un polinomio trigonometrico?

$$q_n(t) = \frac{c_n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k t \tag{2.25}$$

notiamo però la seguente:

$$\cos(mt)\cos t = \frac{1}{2}(\cos((m+1)t) + \cos((m-1)t)), \quad m \in \mathbb{N}$$

e per l'equazione 2.25 possiamo scrivere ad esempio $\cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$, se ho $\cos^3 t = \cos^2 t \cos t$ dove si può sostituire $\cos^2 t$ con la formula appena data eccetera. Per induzione si può mostrare che q_n è effettivamente un polinomio trigonometrico.

Ora, per *c.*:

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{c_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^2 dt &= \cancel{2}\frac{c_n}{\cancel{2}\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^2 dt \geq \\
\geq \frac{c_n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n \sin t\, dt &= -2\frac{c_n}{\pi}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^{n+1}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2c_n}{\pi(n+1)}
\end{aligned}
$$

da cui ne scende che

$$
c_n \leq \frac{\pi}{2}(n+1)
$$

e se ora prendiamo $\delta \in (0,\pi)$ abbiamo che

$$
\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} q_n \overset{pari}{=} \sup_{t\in[\delta,\pi]} q_n = q_n(\delta) = c_n\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \leq \frac{\pi}{2}(n+1)\underbrace{\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)}_{<1}^n \to 0
$$

dove la seconda eguaglianza è data da come è definita q_n, che è decrescente in $[0,\pi]$ □

Dimostrazione di Weierstrass. Si scriva il polinomio trigonometrico $q_n(t)$ definito nel lemma come

$$
q_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))
$$

per opportuni coefficienti. La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π. Si ricorda la definizione del prodotto di convoluzione:

$$
p_n(t) = (f \star q_n)(t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)q_n(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)q_n(t-s)\,ds =
$$

ossia vi è commutatività (si mostra con un cambio di variabile e ricordando la periodicità di f). In generale si mostra che il prodotto di convoluzione tra una funzione in $L^2(-\pi,\pi)$ e un polinomio trigonometrico è anch'esso un polinomio trigonometrico, ad esempio con l'identità di Eulero. Nel nostro caso particolare si vede che

$$
\begin{aligned}
p_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)q_n(t-s)\,ds &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 f(s)\,ds + \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\Bigg[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\big(a_k\cos(ks) - b_k\sin(ks)\big)\,ds\right)\cos(kt) + \\
&\quad + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\big(a_k\sin(ks) + b_k\cos(ks)\big)\,ds\right)\sin(kt)\Bigg]
\end{aligned}
$$

Si ha:

$$
\begin{aligned}
|f(t) - p_n(t)| &\overset{(b)}{=} \left|f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_n(s)\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)q_n(s)\,ds\right| = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - f(t-s))q_n(s)\,ds\right|
\end{aligned}
$$

Usando la continuità su $\mathbb{R}$ e la periodicità ci si può ricondurre alla continuità su un compatto e quindi f è continua uniformemente. Per concludere, fissato ε positivo:

$$\begin{aligned}|f(t) - p_n(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{(-\delta,\delta)} & |f(t) - f(t-s)| q_n(s)\, ds \\ & + \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} |f(t) - f(t-s)| q_n(s)\, ds + \\ & \leq \varepsilon \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi,\pi)} q_n(s)\, ds}_{=1} + 2\|f\|_\infty \sup_{\delta\leq|s|\leq\pi} \{q_n(s)\}.\end{aligned}$$

dove

$$\sup_{\delta\leq|s|\leq\pi} \{q_n(s)\} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi è chiaro che $p_n \to f$ uniformemente.

□

Sia $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ una successione di funzioni definita come segue:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \varphi_{2k-1}(t) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \\ \varphi_{2k}(t) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) \end{cases}$$

per $k \in \mathbb{N}$. Si ha il seguente risultato.

Proposizione 2.53. *Il sistema ortonormale $\{\varphi_n\}$ è completo in $L^2(-\pi,\pi)$.*

Osservazione. Per il teorema 2.46 equivale ad affermare che $\{\varphi_n\}$ è denso in $L^2(-\pi,\pi)$.

Dimostrazione. Si ricorda che l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto $C^0_C(\pi,\pi)$ è denso in $L^p(-\pi,\pi)$ per ogni p intero positivo (si veda 2.19). Nel caso di $p = 2$:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists g \in C^0_C(-\pi,\pi) : \quad \|f - g\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leq \varepsilon$$

Possiamo prolungare g per periodicità 2π a tutto $\mathbb{R}$, e la chiamiamo ancora g per semplicità. La funzione g, siccome è a supporto compatto in $(-\pi,\pi)$, si attacca bene e quindi abbiamo continuità in $\mathbb{R}$. Per il teorema di Weierstrass (2.51) esiste un polinomio trigonometrico p_ε:

$$\|g - p_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

Si ha la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}\|g - p_\varepsilon\|_{L^2(-\pi,\pi)} &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(t) - p_\varepsilon|^2\, dt} \\ &\leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \|g(t) - p_\varepsilon\|^2_\infty\, dt} \\ &= \|g - p_\varepsilon\|_\infty \sqrt{2\pi} \\ &\leq \sqrt{2\pi}\varepsilon.\end{aligned}$$

e per la disugaglianza triangolare

$$\|f - p_\varepsilon\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leq \varepsilon(1 + \sqrt{2\pi})$$

che dimostra la tesi, in virtù dell'osservazione. □

I seguenti corollari sono semplici calcoli/conseguenze del teorema sulle quattro condizioni equivalenti (2.46).

Corollario 2.53.1. *Data $f \in L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier associata:*

$$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) + \frac{b_k}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \right)$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle f, \varphi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\pi,\pi)} f(t)dt \\ a_k &= \langle f, \varphi_{2k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(-\pi,\pi)} f(t)\cos(kt)dt \\ b_k &= \langle f, \varphi_{2k-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(-\pi,\pi)} f(t)\sin(kt)dt \end{aligned}$$

converge a f in $L^2(-\pi, \pi)$.

Corollario 2.53.2. *Se $f \in L^2$ è pari allora i coefficienti b_k sono nulli, se invece è dispari i coefficienti a_k sono nulli.*

Corollario 2.53.3. *Vale l'identità di Bessel-Parseval:*

$$\|f\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} = |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

Teorema 2.54: Stone-Weierstrass

I polinomi intesi nel senso classico sono densi in $C^0([a, b])$, ossia, comunque presa $f \in C^0([a, b])$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p_\varepsilon \in \mathbb{R}[x] : \quad \|f - p_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$$

Dimostrazione. La funzione $f \in C^0[a, b]$ può essere prolungata per parità e ridefinita su $[a, 2b - a]$ e poi prolungata per periodicità con periodo di lunghezza $2(b - a)$. Siamo nelle condizioni del teorema di Weierstrass (2.51), anche se con un periodo diverso. Sia π_ε il polinomio tale che

$$\|f - \pi_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e, usando la convergenza uniforme dei polinomi di Taylor ai seni e ai coseni, possiamo trovare un polinomio classico p_ε tale che

$$\|\pi_\varepsilon - p_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Per la disuguaglianza triangolare la tesi è dimostrata.

□

Si è detto che, presa f in $L^2(-\pi, \pi)$, la serie di Fourier relativa converge a f in $L^2(-\pi, \pi)$. Per la proposizione 2.10 la serie ammette un'estratta di ridotte che converge quasi ovunque a f. Per il teorema di **Carleson** (1966) si può dire di più: c'è convergenza quasi ovunque dell'intera successione delle ridotte. Tale risultato era stato congetturato da Lusin nel 1915.

Se si aggiunge l'ipotesi di regolarità a tratti si può affermare la convergenza della serie di Fourier a f eccetto nei punti di discontinuità (di tipo salto), dove f converge alla media tra il limite destro e quello sinistro (che esistono).

Se invece si ipotizza f solo continua e non si introducono ipotesi sulla continuità della derivata, non è detto che la serie di Fourier converga in ogni punto. Un controesempio è dovuto a **du Bois-Reymond** (1873), che costruì una funzione continua la cui serie di Fourier diverge in un insieme denso. Tale risultato viene poi rafforzato con un controesempio di **Kolmogorov** (1923) che trovò una funzione L^1 la cui serie di Fourier diverge quasi ovunque, e nel 1926 ovunque.

Per quel che riguarda la convergenza uniforme si possono trovare delle condizioni sufficienti sui coefficienti di f. Una condizione, per il criterio di Weierstrass (sulla convergenza totale, detto M-test) è la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$. Si possono anche trovare condizioni più interessanti, come ad esempio $f_{|[-\pi,\pi]} \in W^{1,2}(-\pi,\pi)$, ricordando la notazione degli spazi di Sobolev. La dimostrazione si riconduce alla convergenza totale poc'anzi citata:

Proposizione 2.55 (Condizione sufficiente convergenza serie di Fourier)**.** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo 2π e $f_{|[-\pi,\pi]} \in W^{1,2}(-\pi,\pi)$ allora la serie di Fourier converge uniformemente a f.*

Dimostrazione. Scriviamo i coefficienti di Fourier e usiamo l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \\
a_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(-\pi,\pi)} f(t)\cos(kt) dt = -\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(kt)\, dt = -\frac{1}{k} b'_k \\
b_k &= (\dots) = \frac{1}{k} a'_k
\end{aligned}$$

Siccome siamo in $W^{1,2}(-\pi,\pi)$, abbiamo che $f' \in L^2(-\pi,\pi)$ e quindi $\{a'_k\}, \{b'_k\} \in \ell^2$. Per la diseguaglianza di Young 2.6 si ha che

$$\begin{aligned}
|a_k| &\leq \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2}|b'_k|^2 \\
|b_k| &\leq \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2}|a'_k|^2
\end{aligned}$$

E quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$$

converge uniformemente, dunque la serie di Fourier converge uniformemente a f. $\square$

3 Esercizi

Alcuni sono risolti, alcuni parzialmente e alcuni no. (Questa frase è inutile perché basterebbe guardare gli esercizi, ma era bello aggiungere una frase qui)

Esercizio 3.1

a. Sia $K = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : f \text{ ha una rappresentazione pari } \}$. Mostrare che K è un sottospazio chiuso di $L^2(-\pi, \pi)$

b. Mostrare che $P_K(\omega) = \frac{w(x)+w(-x)}{2}$, per ogni $\omega \in L^2(-\pi, \pi)$ Mostrare che $K^\perp$ è costituito dalle funzioni dispari. Inoltre

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos{(kx)} \right\} \subseteq K, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin{(kx)} \right\} \subseteq K^\perp$$

e che quindi $w(x) = P_K(w) + P_{K^\perp}(w)$ è una decomposizione unica

c. Sia $J : L^2(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definito come

$$J(v) = \int_{(-\pi,\pi)} \left((v(x) - \sin x)^2 + \cos x \right) dx$$

dire se J ammette minimo in K e ricavarlo esplicitamente

Abbiamo che

$$J(v) = \|v - \sin\|_2 + \int_{\{-\pi,\pi\}} \cos x \, dx$$

e per il teorema delle proiezioni sui sottospazi la soluzione del problema di minimo è la proiezione di sin su K, ossia 0, poiché $\sin \in K^\perp$.

Esercizio 3.2 Es. 3 del 4-12-2020

Sia $f \in L^2(0, 2\pi)$

a. Dato $\varepsilon > 0$, è possibile approssimare f con una funzione $g_\varepsilon \in C^0([0, 2\pi])$ tale che

$$\|f - g_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$$

Sì, e in particolare possiamo usare la densità di $C^0_C(0, 2\pi)$ in $L^2(0, 2\pi)$ e scegliere dunque $g_\varepsilon \in C^0_C(0, 2\pi)$.

b. Calcolare il valore del limite per $n \to \infty$ della successione integrale di $f(x) \sin{(nx)}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,2\pi)} f(x) \sin{(nx)} \, dx = 0$$

(Fourier)

c. e se $f \in L^1(0, 2\pi)$?

Abbiamo che $C^0_C(0, 2\pi)$ è denso anche in $L^1(0, 2\pi)$ dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_\varepsilon \in C^0_C(0, 2\pi)$ tale che $\|f - h_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$. Ci piacerebbe provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \overline{n} \qquad \left| \int_{(0,2\pi)} f(x) \sin nx \, dx \right| \leq 2\varepsilon$$

e abbiamo che

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx\right| \le \left|\int_0^{2\pi} (f(x)-h_\varepsilon(x))\sin nx\,dx\right| + \left|\int_0^{2\pi} h_\varepsilon(x)\sin nx\,dx\right|$$
$$\le \|f-h_\varepsilon\|_1\|\sin nx\|_\infty + \left|\int_0^{2\pi} h_\varepsilon(x)\sin nx\,dx\right| \le 2\varepsilon$$

e poiché $h_\varepsilon \in L^2(0,2\pi)$ allora per il punto precedente esiste un $\overline{n}$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}$ il secondo addendo è $\le \varepsilon$.

Esercizio 3.3 Es. 3 del 23-01-2019

Sia X lo spazio di tutte le $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$ misurabili e tali che

$$N(u) = \int_{(-1,1)} \sqrt{|u(x)|}\,dx < +\infty$$

a. Provare che X è uno spazio vettoriale e che N **non** definisce una norma in X

   Facile vedere che X è uno spazio vettoriale. $N(\cdot)$ non è una norma perché **non** soddisfa l'omogeneità, infatti $N(\lambda u) = \sqrt{|\lambda|}N(u)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in X$.

b. Posto $d(u,v) = N(u-v)$ per ogni $u,v \in X$ provare che d è una distanza in X.

   - $d(u,v) \ge 0$ alla grande
   - $d(u,v) = 0$ allora

$$\int_{(-1,1)} \sqrt{|u(x)-v(x)|}\,dx = 0 \implies \sqrt{|(u-v)(x)|} = 0 \quad q.o.$$
$$\implies u = v \quad q.o.$$

   - $d(u,v) = d(v,u)$ alla grande
   - $d(u,v) \le d(u,z) + d(z,v)$, $\forall u,v,z \in X$ vero perché

$$\sqrt{|(u-v)(x)|} \le \sqrt{|(u-z)(x)|} + \sqrt{|(z-v)(x)}$$

c. Provare che $L^p(-1,1) \subseteq X$ per ogni $p \in [1,\infty]$

   Se $1 \le p < \infty$ allora

$$\sqrt{|u(x)|} = |u(x)|^{\frac{1}{2}} \overset{2.6}{\le} \frac{1}{2p}|u(x)|^p + \frac{2p-1}{2p}1^{\frac{2p}{2p-1}} \in L^{1(-1,1)}$$

   Se invece $p = \infty$ allora

$$\sqrt{|u(x)|} \le \sqrt{\|u\|_\infty} \in L^{1(-1,1)}$$

d. Se $u_n \to u$ in $L^1(-1,1)$ allora $d(u_n,u) \to 0$ per $n \to \infty$

$$d(u_n,n) = \int_{(-1,1)} \sqrt{|(u_n-u)|}\,dx \overset{2.7}{\le} \left(\int_{(-1,1)} |(u_n-u)(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{(-1,1)} 1^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\|u_n-u\|_1^{\frac{1}{2}} \to 0$$

Esercizio 3.4 Es. 3 del 15-01-2024

Consideriamo ℓ^1, ℓ^∞ e c_0. Consideriamo l'operatore $T : \ell^{1 \to \ell^\infty}$ definito come

$$(Ta)_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \ell^1$$

a. Mostrare che T è ben definito, ossia $Ta \in \ell^\infty$ per ogni $a \in \ell^1$.

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \|a\|_1$$

b. Mostrare che T è lineare. (ovvio)

c. Mostrare che T è continuo. (Basta notare che è limitato)

d. Calcolare la norma $\|T\|$.

Sappiamo già dal punto a. che $\|Ta\|_\infty \leq 1\|a\|_1$. Per dire che la norma è proprio 1 dobbiamo trovare un a tale che $\|Ta\|_\infty = \|a\|_1$. Possiamo prendere un elemento qualsiasi della successione canonica, ad esempio $a = e^1 = (1, 0, 0, \ldots)$.

e. Mostrare che T è iniettivo.

Sia $Ta = b$. Sia $b = 0$ allora $b_n - b_n + 1 = a_n$ per ogni n, e dunque $a = 0$

f. Mostrare che $l_1 \subsetneq T(l^1) \subsetneq c_0$

Chiaramente Ta è una successione infinitesima per ogni $a \in \ell^1$ perché successione dei resti k-esimi di una serie convergente.

Come elemento di c_0 che non sta in $T(\ell^1)$ possiamo prendere $b = (1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots)$

Esercizio 3.5 Es. 1 del 27 - 11 - 2018

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{2} e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

a. Studiare la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura di $\{f_n\}$ in $\mathbb{R}$

Converge puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ quindi converge q.o. a 0. Inoltre converge uniformemente in ogni $\mathbb{R} \setminus B_\varepsilon(0)$ quindi converge anche q.u. (altrimenti si può spezzare in $\mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup [-1, 1] \cup (1, \infty)$). Di conseguenza converge anche in misura.

b. Discutere l'integrabilità delle funzioni f_n in $\mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, rispetto alla misura μ di Lebesgue su $\mathbb{R}$

L'esponenziale è integrabile, si può anche calcolare l'integrale (inoltre ne^{-nx} è la pdf di una variabile casuale esponenziale continua, quindi integra 1).

c. Indicata con f la funzione limite delle f_n, si chiede se

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \text{ esiste e vale } \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

No: il limite fa 1, l'integrale di f fa 0.

Esercizio 3.6 Es. 1 del 10 - 07 - 2018

Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad \text{con } f_n(x) := \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)} \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

a. Discuterne la convergenza quasi ovunque, quasi uniforme e in misura della serie di funzioni in $\mathbb{R}$

Per $x \neq 0$ fissato, la serie converge assolutamente, infatti

$$\frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)} \leq \frac{1}{xn^{\frac{3}{2}}}$$

che ha somma finita, mentre per $x = 0$ fa 0 banalmente.

Sia $E = \mathbb{R} \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ che ha complementare di misura ε. Allora denotando gon $g_n$la successione delle somme parziali e con g il limite

$$|g_k - g| = \left| \sum_{n=1}^{k} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)} \right|$$

che è resto di serie convergente quindi converge (non è difficile mostrare che si può maggiorare in modo da non dipendere da x)

b. Discutere l'integrabilità delle funzioni f_n rispetto alla misura μ di Lebesgue per $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{\sqrt{n}(1+nx^2)}\, d\mu \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{(1,+\infty)} \frac{x}{1+nx^2}\, d\mu \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{(1,\infty)} \frac{x}{x^2(1+n)}\, d\mu$$

che è divergente, quindi $f_n \notin L^1(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c. Indicata con s la somma della serie laddove è definita, studiare l'integrabilità secondo Lebesgue anche per queste funzioni

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, d\mu \geq \int_{(1,\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu \geq \int_{(1,\infty)} f_1(x)\, d\mu = +\infty$$

Altrimenti si può fare con Beppo Levi per serie 1.30.1

Esercizio 3.7 Es. 1 del 17 - 01 - 2018

Se $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile e non negativa, consideriamo la successione di funzioni $f_n(x)$