

Appunti di Algebra Superiore

GitHub Repository: [Oxke/appunti/AlgebraSuperiore](https://github.com/Oxke/appunti/AlgebraSuperiore)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)¹

¹edit: menzogne, è perché è più pesante.

Indice

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 1: Anello

Un **anello** $A, +, \cdot$ è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide A, \cdot (con 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + ac \quad ; \quad (b+c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione \cdot è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 3. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 4 (Anello Banale). L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 5 (Non comm.). A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dai l'anello banale non esiste davvero)

Esempio 6. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\text{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ e \cdot dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\text{Hom}(G', G)$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G .

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 7: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ($aa' = 1$).
 a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile \iff invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$\begin{aligned} (a'a)a'' &= a'(aa'') \\ 1a'' &= a'' = a' = a'1 \end{aligned}$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

Definizione 8: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \setminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 9: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \setminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ ($a'a = 0$)

Osservazione. Divisore di zero a sinistra: $aa' = 0$. Invertibile a sinistra: $a'a = 1$

Definizione 10: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 11. I campi, \mathbb{Z} , se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

Definizione 12: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 13. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 14. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 15: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I, +) < (A, +)$ e $ab \in I$ ($ba \in I$), $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.

Un **ideale bilatero** è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 16. Gli ideali in \mathbb{Z} sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \emptyset$$

quindi A con divisione \implies gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 17: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op} , con $(A^{op}, +) := (A, +)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 18 (Anello Quoziente). *Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I, +$ è un anello con prodotto $\bar{a}\bar{b} := \overline{ab}$, dove $\bar{a} := a + I \in A/I$*

Definizione 19: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \rightarrow B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

- i) $f(a + a') = f(a) + f(a')$
- ii) $f(aa') = f(a)f(a')$
- iii) $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \rightarrow A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ f' = \text{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 20. *Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo allora*

1. $A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.
2. $B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello
3. $J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\text{Ker } f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale
4. f suriettivo e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale

Osservazione. $f : A \rightarrow B$ è iniettivo $\iff \text{Ker } f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \text{Im } f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 21: Omomorfismo

$f : A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \text{Ker } f$. Allora

$$\exists! \bar{f} : A/I \rightarrow B \text{ omomorfismo tale che } \bar{f}(\bar{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

Inoltre $\text{im } \bar{f} = \text{im } f$ e $\text{Ker } \bar{f} = \text{Ker } f/I$

Proposizione 22. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 23: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli, allora $\text{im } f \cong A/\text{Ker } f$

Definizione 24: Ideale massimale (sinistro / destro)

Un ideale J (sinistro/destro) di A è massimale se $\forall I$ ideale (sinistro/destro) tale che $J \subseteq I \subseteq A$, allora $I = J$ o $I = A$

Osservazione. Esiste sempre un ideale (sinistro/destro) massimale (*lemma di Zorn*)

Definizione 25

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i u_i b_i : n \in N, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 26: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è principale.

Esempio 27. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 28. \mathbb{Z} (con ideali $n\mathbb{Z} = (n)$)

Esempio 29. $K[X]$ con K campo

1.2 Richiami sui Moduli

Definizione 30: A -modulo

Un A -modulo (di default sinistro) M è un gruppo abeliano $(M, +)$ con una moltiplicazione per scalare definita da

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \in M \end{aligned}$$

e tale che, $\forall a, b \in A$ e $\forall x, y \in M$:

- 1) $a(x + y) = ax + ay$
- 2) $(a + b)x = ax + bx$
- 3) $(ab)x = a(bx)$
- 4) $1x = x$

Osservazione. Se \mathbb{K} è un campo, allora un \mathbb{K} -modulo è uno spazio vettoriale.

Osservazione. Se $(M, +)$ è un gruppo abeliano, data $f : A \times M \rightarrow M$ posso definire $\alpha : A \rightarrow M^M$ come $\alpha(a) = (x \mapsto ax)$, e quindi le proprietà precedenti si traducono in

1. $\alpha(a)(x+y) = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$ e dunque $\alpha(a)$ è omomorfismo di gruppi, dunque $\alpha(A) \subseteq \text{End}(M)$
2. $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ dunque $\alpha : A \rightarrow \text{End}(M)$ è omomorfismo di gruppi
3. $\alpha(a) \circ \alpha(b) = \alpha(ab)$
4. $\alpha(1) = \text{id}_M$

Dalla 2,3,4 $\alpha : A \rightarrow \text{End}(M)$ è omomorfismo di anelli.

Teorema 31: Secondo teorema di isomorfismo

Sia M un modulo, con $M', M'' \subseteq M$ sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

Dimostrazione. Si prenda $f : M' \rightarrow (M' + M'')/M''$ composizione dell'inclusione di M' in $M' + M''$ e della proiezione a quoziante, dunque è un omomorfismo.

Allora $\text{Ker}f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$.

Preso $y \in (M' + M'')/M''$, $y = x' + x'' + M'' = x' + M'' = f(x')$ dunque f è suriettiva. Dal primo teorema di isomorfismo segue la tesi. \square

Teorema 32: Terzo teorema di isomorfismo

Dati $M'' \subseteq M' \subseteq M$ sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M''$$

Dimostrazione. Sia f la composizione delle due proiezioni a quoziante, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \text{Ker}f \iff \pi(x) \in \text{Ker}\pi' = M'/M''$$

dunque $\text{Ker}f = M'$ da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo. \square

Proposizione 33.

1. Sia A un anello, allora un A -modulo M è ciclico se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro tale che $M \cong A/I$

2. M è semplice se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro massimale tale che $M \cong A/I$

Dimostrazione. 1. (\Leftarrow) A/I è ciclico (generato da $\bar{1}$). Viceversa per (\Rightarrow) so che $M = Ax$ per un qualche $x \in M$. Considerata $f :_A A \rightarrow M$ data da $a \mapsto ax$, $\text{Ker}f$ è sottomodulo di A , ovvero ideale sinistro. Concludo per il primo teorema di isomorfismo.

2. Se M è semplice allora $\forall 0 \neq x \in M$, $M = Ax$, dunque M è ciclico e per il punto 1. esiste I ideale sinistro tale che $M \cong A/I$. La proposizione si riduce a dire che A/I è semplice se e solo se I è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $I \subseteq J \subseteq A$ ideale sinistro. Allora $A/I \neq 0 \iff I \neq A$ e gli unici sottomoduli di A/I sono I/I e A/I , ossia gli unici ideali sinistri J tali che $I \subseteq J \subseteq A$ sono I e A .

\square

Osservazione. Con il lemma di Zorn si dimostra che $A \neq 0 \implies$ esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

1.2.1 Prodotti

Definizione 34: Prodotto

Supponiamo di avere M_λ A -moduli, per $\lambda \in \Lambda$. Allora

$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ è un A -modulo detto **prodotto** degli M_λ

con $(x+y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$ e $(ax)_\lambda = ax_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $x, y \in M$.
 $\forall \mu \in \Lambda$ esiste $p_\mu : M \rightarrow M_\mu$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ che è A -lineare e suriettivo.

Proposizione 35 (Proprietà universale del prodotto).

Dati $f_\mu : N \rightarrow M_\mu$ A -lineari $\forall \mu \in \Lambda$, allora esiste unico $f : N \rightarrow M$ A -lineare tale che $f_\mu = p_\mu \circ f$

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ f_\mu \downarrow & \searrow \exists! f & \\ M_\mu & \xleftarrow[p_\mu]{} & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \end{array}$$

Esercizio 36

Dimostrare la proprietà universale del prodotto

Definizione 37: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli M_λ è

$$M' := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda > 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste

$$\begin{aligned} i_\mu : M_\mu &\longrightarrow M' \\ x &\longmapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

che è A -lineare e iniettivo.

Proposizione 38 (Proprietà universale somma diretta).

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ \uparrow f_\mu & \nearrow \exists! f & \\ M_\mu & \xrightarrow[i_\mu]{} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \end{array}$$

Osservazione. Se $\#\Lambda < +\infty$ allora

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

Nota (zione). Se $M_\lambda = M$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si denota

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M =: M^\Lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M =: M^{(\Lambda)}$$

Dati $M_\lambda \subseteq M$ sottomoduli, con $\lambda \in \Lambda$, sia

$$f : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow M$$

l'omomorfismo indotto dalle inclusioni $M_\lambda \xrightarrow{i_\lambda} M$, allora

$$\text{im } f =: \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \subseteq M \text{ è sottomodulo}$$

Inoltre f è iniettiva se e solo se $M_\mu \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} = 0$ per ogni $\mu \in \Lambda$ e in tal caso f induce un isomorfismo tra $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ e $\sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ e si può scrivere $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ per indicare il sottomodulo di M

Definizione 39: Linearmente indipendente, base, modulo libero

Sia $U \subseteq M$ un insieme, con M A -modulo. Si dice che U è A -linearmente indipendente se dati $x_1, \dots, x_n \subseteq U$ distinti

$$a_1, \dots, a_n \in A \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

U è detta **base** di M se è linearmente indipendente e genera M , ossia $M = AU$. Si dice che M è **libero** se ammette una base

Esempio 40. Per ogni Λ , $A^{(\Lambda)}$ è libero con base $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dove, per ogni $\lambda \in \Lambda$,

$$(e_\lambda)_i = \begin{cases} 1 & \lambda = i \\ 0 & \lambda \neq i \end{cases}$$

Proposizione 41. Siano L, M A -moduli, con L libero con base $\{l_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tale che $l_\lambda \neq l_\mu$ se $\lambda \neq \mu$, allora

$$\forall \lambda \in \Lambda \exists! f : L \rightarrow M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(l_\lambda) = x_\lambda$$

Corollario 42. Un A -modulo è libero se e solo se è isomorfo a $A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ
Dimostrazione.

$\implies M$ libero con base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ con $x_\lambda \neq x_\mu$ se $\lambda \neq \mu$. Allora per la proposizione

$$\exists! f : A^\Lambda \rightarrow M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(e_\lambda) = x_\lambda$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\text{im } f = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle_A = M$ e f è iniettivo perché gli x_λ sono linearmente indipendenti.

\Leftarrow ovvio

□

Corollario 43. Ogni A -modulo è insomorfo a un quoziente di un modulo libero ($A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ).

Inoltre un A -modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n , $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Sia $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un insieme di generatori di un modulo M . Per la proposizione $\exists! f : A^{(\Lambda)} \rightarrow M$ A -lineare tale che $f l_\lambda = x_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\text{Im } f = M$ e dunque per il primo teorema di isomorfismo $M \neq A^{(\Lambda)}/\ker f$.

Per la seconda parte se M è finitamente generato posso scegliere Λ finito e viceversa $M \neq A^n/N$ è finitamente generato perché A^n lo è e $\pi : A^n \rightarrow A^n/N$ è un omomorfismo suriettivo.

□

Proposizione 44. *A è con divisione se e solo se ogni suo A-modulo è libero*

Dimostrazione.

\implies (complementi di algebra)

\Leftarrow Sia M un A -modulo semplice. Per ipotesi è libero, allora $M \cong A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ . Ma se $\#\Lambda > 1$ allora $A^{(\Lambda)}$ non è semplice ($A \subseteq A^{(\Lambda)}$ è un sottomodulo non banale). Inoltre $\Lambda \neq \emptyset$ ($A^{(\emptyset)} = \{0\}$ non è semplice).

Ne consegue che $M \cong A$ e dunque A è con divisione

□

Esempio 45. Con $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non è libero

Si può dimostrare che se A è con divisione, allora tutte le basi di un A -modulo (libero) M hanno la stessa cardinalità, che viene detta rango e indicata con $\text{rk}_A M$.

In generale non tutte le basi di un A -modulo libero hanno la stessa cardinalità, esistono infatti anelli A non banali tali che $\overset{A}{\cong} A^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 46. Sia $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ con \mathbb{K} campo e $\dim_{\mathbb{K}}(V) = +\infty$

Si dimostra che se $A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli e il rango dei B -moduli liberi è ben definito allora anche il rango degli A -moduli liberi è ben definito. Di conseguenza se $A \neq 0$ è commutativo allora il rango degli A -moduli liberi è ben definito ($\exists I \subseteq A$ ideale massimale e $\pi : A \rightarrow A/I$ omomorfismo con A/I campo)

1.2.2 restrizione degli scalari

Siano A, B anelli, con $f : A \rightarrow B$ omomorfismo di anelli. Allora se M è un B -modulo allora M è anche un A -modulo con $ax := f(a)x$. Si dice allora che $_A M$ è ottenuto da $_B M$ per **restrizione degli scalari** attraverso f .

Inoltre se $M' \subseteq M$ è B -sottomodulo allora è anche un A -sottomodulo e se $g : M \rightarrow N$ è B -lineare allora g è anche A -lineare.

Prima della prossima definizione ricordiamo che il **centro** di un anello è sottoanello, con il centro l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri elementi e indicato con $Z(A)$,

$$Z(A) := \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$$

Definizione 47

Sia A commutativo. Allora una A -algebra è un omomorfismo di anelli $f : A \rightarrow B$ tale che $\text{im } f \subseteq Z(B)$

Se f è evidente si dice che B è una A -algebra

Esempio 48. $M_n(A)$ è una A -algebra con $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Esempio 49. Se $A = \mathbb{Z}$ per ogni B anello l'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \rightarrow B$ è una \mathbb{Z} -algebra. Infatti l'omomorfismo unico $\mathbb{Z} \rightarrow Z(B)$ deve essere lo stesso di $\mathbb{Z} \rightarrow B$

Definizione 50: Morfismo di A -algebre

Siano $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C$ A -algebre. Un (omo/iso/...)morfismo di A -algebre da f a g è $h : B \rightarrow C$ (omo/iso/...)morfismo di anelli tale che $h \circ f = g$

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \downarrow & \searrow g & \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

Esempio 51. Ogni omomorfismo di anelli è omomorfismo di \mathbb{Z} -algebra.

Esempio 52. Sia $f : A \rightarrow B$ una A -algebra. Allora $\forall I \subseteq B$ ideale B/I è A -algebra con $\pi \circ f$

Osservazione (motivazione della definizione). Se $f : A \rightarrow B$ A -algebra, allora B è un anello e A -modulo (per restrizione degli scalari) tale che

$$a(bb') = (ab)b' = b(ab')$$

Lemma 53. Sia $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ una successione esatta di A -moduli. Siano $f' : A^m \rightarrow M'$ e $f'' : A^n \rightarrow M''$ omomorfismi. Allora esiste un diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^m & \longrightarrow & A^{m+n} & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dimostrazione.

□

Proposizione 54. Sia $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ esatta di A -moduli. Allora

1. $Mf.g. \implies M''f.g.$
2. $M', M''f.g. \implies Mf.g.$
3. $M', M''f.p. \implies Mf.p.$
4. $Mf.g., M''f.p. \implies M'f.g.$
5. $M'f.g., Mf.p. \implies M''f.g.$

Dimostrazione.

1. già visto
2. In esercizio la dimostrazione diretta. In alternativa possiamo applicare il lemma ???. Infatti esistono $f' : A^m \rightarrow M'$ e $f'' : A^n \rightarrow M''$ omomorfismi suriettivi e per il lemma ??? il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^m & \longrightarrow & A^{m+n} & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

commuta. Applicando ora il lemma del serpente otteniamo la successione esatta

$$\text{coKer } f' = 0 \rightarrow \text{coKer } f \rightarrow 0 = \text{coKer } f'' \implies \text{coKer } f = 0 \implies Mf.g.$$

3. Si può fare una dimostrazione simile a quella precedente e applicando il lemma del serpente troviamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f' \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \rightarrow 0 = \text{coKer } f'$$

per il punto 1. M è finitamente generato e dunque M è finitamente presentato.

4. M'' f.p. $\implies \exists$ successione esatta $A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{h} M'' \rightarrow 0$. Esiste dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A^m & \xrightarrow{g} & A^n & \xrightarrow{h} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

infatti voglio f tale che $p \circ f = h$ e posso come prima (esercizio). allora per il lemma del serpente trovo che

$$0 \rightarrow \text{coKer } f' \rightarrow \text{coKer } f \rightarrow 0 = \text{coKer}_{\text{id}_{M''}}$$

è una successione esatta, e dunque $\text{coKer } f' \cong \text{coKer } f = M/\text{Im } f$ per cui

$$0 \rightarrow \text{Im } f' \rightarrow M' \rightarrow \text{coKer } f' \rightarrow 0$$

è esatta. Concludiamo che $\text{Im } f' \cong A^m/\text{Ker } f'$ e dunque è f.g., da cui anche M' è finitamente generato per il punto 1.

5. M è finitamente generato, dunque M'' è finitamente generato per il punto 0. Come prima $\exists A^m \rightarrow A^n, A^n \rightarrow M''$ omomorfismi suriettivi e trovo il diagramma del lemma ?? e applicando il lemma del serpente ottengo la successione esatta

$$\text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \rightarrow 0 = \text{coKer } f'$$

Sia ora $f : A^{m+n} \rightarrow M$ suriettiva, allora

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow A^{m+n} \rightarrow M \rightarrow 0$$

è esatta, A^{m+n} è finitamente generata, M è finitamente presentato, dunque $\text{Ker } f$ è f.g., quindi per il punto 3. $\text{Ker } f''$ è f.g. e per il punto 0. M è f.p.

□

Esercizio 55

Dimostrare il punto 1. della dimostrazione precedente direttamente.

Corollario 56. Sia $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Allora M è f.g. / f.p. se e solo se M_i è f.g. / f.p. per ogni i .

Dimostrazione. La successione $0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \rightarrow M \rightarrow M_n \rightarrow 0$ è esatta, dunque
 \implies usando induzione su n e i punti 1. e 2. della proposizione precedente
 $\iff M_n$ è f.g. per il punto 0., ed è f.p. per il punto 4.

□

Osservazione. per il punto 3., se M è f.p. allora ogni $A^n \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$ esatta si estende a

$$A^m \rightarrow A^n \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

Osservazione. Sia A non noetheriano. Allora $\exists M$ A -modulo f.g. non noetheriano, ad esempio $M = A$, ossia $\exists M' \subseteq M$ sottomodulo non f.g. e in tal caso anche quando M è finitamente presentato, ad esempio nel caso $M = A$, M/M' non è f.p. perché contraddirrebbe il punto 3.

Uno può chiedersi dato un modulo se i suoi sottomoduli finitamente generati siano anche moduli finitamente presentati. Questo non è in generale vero ma motiva la seguente definizione

Definizione 57: Modulo coerente

Uno modulo M è detto **coerente** se è finitamente generato e tutti i suoi sottomoduli finitamente generati sono finitamente presentati.

Osservazione. Chiaramente essendo $M \subseteq M$ un sottomodulo, se è coerente è anche f.p.

Definizione 58: Anello coerente

Un anello A è **coerente** (a sinistra) se ${}_A A$ è A -modulo coerente (ossia tutti gli ideali sinistri f.g. di A sono f.p.)

Osservazione. Se A è noetheriano e M è un A -modulo, allora

$$M \text{ coerente} \iff M \text{ f.p.} \iff M \text{ f.g.} \iff M \text{ noetheriano}$$

in particolare A è coerente.

Dimostrazione. Sappiamo già che M noetheriano se e solo se M f.g. Resta da dimostrare dunque che M noetheriano se e solo se M è coerente. So che $M' \subseteq M$ f.g. è noetheriano (perché M lo è). Allora esiste la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker}p \rightarrow A^n \xrightarrow{p} M' \rightarrow 0$$

Ora poiché A è noetheriano, anche A^n lo è, e dunque $\text{Ker}p$ è noetheriano, dunque $\text{Ker}p$ è f.g. e infine M' è f.p. \square

Osservazione. Sia A coerente non noetheriano, allora ${}_A A$ è coerente non noetheriano

Esempio 59. Sia A non noetheriano, $I \subseteq A$ ideale sinistro non f.g., allora A/I è f.g. non f.p. e A/I può anche essere noetheriano.

Un esempio è $A = \mathbb{K}[X_n | n \in \mathbb{N}]$, $I = (X_n | n \in \mathbb{N})$, $A/I = \mathbb{K}$

Osservazione. Sia $f : M \rightarrow N$ A -lineare, con M, N finitamente generati. Allora $\text{Im}f \cong M/\text{Ker}f$ e $\text{coKer}f \cong N/\text{Im}f$ sono finitamente generati (punto 0. della proposizione) ma non necessariamente anche $\text{Ker}f$ se A è non noetheriano.

Proposizione 60. Sia $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} m \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ esatta di A -moduli.

1. M' f.g. e M coerente, allora M'' è coerente
2. M', M'' coerenti, allora M è coerente
3. M è coerente, M'' è f.p., allora M' è coerente

in particolare M', M, M'' sono coerenti se due di essi lo sono.

Dimostrazione. 1. M'' è f.g. per il punto 0. della proposizione ???. $N'' \subseteq M''$ è f.g., allora c'è una successione esatta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow N := p^{-1}(N'') \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

Allora N è f.g. per 1. di ?? e dunque N è f.p. perché M è coerente, da cui N'' è f.p. per 4. di ??

2. M è f.g. per 1. di ??, se $N \subseteq M$ sottomodulo finitamente generato, allora esiste la successione esatta

$$0 \rightarrow N' := i^{-1}(N) \rightarrow N \rightarrow N'' := p(N) \rightarrow 0$$

Allora N'' è f.g. per 0. di ?? da cui N'' è f.p. per la coerenza di M , dunque N' è f.g. per 3. di ???. Segue dalla coerenza di M' che N' è f.p. e dunque N lo è per 2. di ???

3. M' è f.g. per 3. di ?? dunque M' è coerente perché $M' \cong i(M') \subseteq M$ sottomodulo è f.g. e M è coerente.

□

Esercizio 61

mostrare che

$$\bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ coerente} \iff M_i \text{ coerente } \forall i$$

Corollario 62. Sia $f : M \rightarrow N$ A-lineare, M, N coerenti, allora $\text{Ker } f, \text{Im } f, \text{coKer } f$ sono coerenti.

Dimostrazione. $\text{Im } f \cong M/\text{Ker } f$ è f.g. per 0. di ??

□

Corollario 63. Se A è coerente e M è un A -modulo f.p., allora M è coerente.

Dimostrazione. Basta osservare che per definizione esiste una successione esatta

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

e in particolare dunque $M \cong \text{coKer } f$ e poiché A^m e A^n sono coerenti, lo è pure M

□

Esempio 64. Sia A commutativo tale che $A[X_1, \dots, X_n]$ sia coerente $\forall n \in \mathbb{N}$ (ad esempio A noetheriano, per il teorema della base di Hilbert) Allora $A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda]$ è coerente $\forall \Lambda$, anche se non è noetheriano per $\#\Lambda = +\infty$ e $A \neq 0$.

Idea della dimostrazione. Sia $I \subseteq B$ ideale f.g., ossia $I = (f_1, \dots, f_n)$. Allora $\exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ finito tale che $f_1 \in B_0 := A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda_0]$

□

Esempio 65 (Anello non coerente). Presi A e B come prima, ma supponiamo che $A = \mathbb{K}$ campo. Prendiamo dunque $J := (X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, con $\#\Lambda = +\infty$. Allora preso

$$C = B/J^2$$

non è coerente. Preso infatti ad esempio

$$I = C\overline{X_\lambda} \text{ con } \lambda \in \Lambda$$

è f.g. ma non f.p. perché c'è la successione esatta

$$0 \rightarrow J/J^2 \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow 0$$

e J/J^2 è C -modulo annullato da J/J^2 e come $C/(J/J^2) \cong B/J \cong \mathbb{K}$ -modulo ha dimensione ∞ con base $\{\overline{x_\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$

Capitolo 2

Categorie

Definizione 66: Categoria

Una **categoria** \mathcal{C} è data da una classe di oggetti $\text{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ da un insieme di morfismi da X a Y indicato con $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ e da una azione composizione di morfismi, cioè $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ (anche scritto $X, Y, Z \in \mathcal{C}$) un'operazione

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)(f, g) \mapsto g \circ f$$

tale che

$$0. \quad \mathcal{C}(X, Y) \cap \mathcal{C}(X', Y') \neq \emptyset \implies X = X' \text{ e } Y = Y'$$

$$1. \quad \circ \text{ è associativa, cioè } \forall X, Y, Z, W \in \mathcal{C} \text{ e } \forall f \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ e } \forall g \in \mathcal{C}(Y, Z) \text{ e } \forall h \in \mathcal{C}(Z, W) \text{ allora}$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$2. \quad \forall X \in \mathcal{C} \text{ esiste } 1_X = \text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X) \text{ che è elemento neutro di } X \text{ cioè } \forall Y \in \mathcal{C} \text{ e } \forall f \in \mathcal{C}(X, Y),$$

$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

Esempio 67. La categoria degli insiemi **Set** che ha come oggetti tutti gli insiemi e $\forall X, Y \in \text{Set}$ i morfismi $\text{Set}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$ le funzioni e \circ la composizione di funzioni

Osservazione. Se ho \mathcal{C} tale che valgano solo 1. e 2. e non necessariamente 0. posso ottenere la categoria \mathcal{C}' che soddisfa anche 0. ponendo $\text{Ob}(\mathcal{C}') := \text{Ob}(\mathcal{C})$ e

$$\mathcal{C}'(X, Y) := \{X\} \times \mathcal{C}(X, Y) \times \{Y\}$$

Esempio 68. Le categorie concrete, in cui gli oggetti sono insiemi con qualche struttura e i morfismi sono funzioni tra insiemi che preservano la struttura (con \circ sempre la composizione di funzioni). In particolare:

- La categoria **Grp** dei gruppi, dove gli oggetti sono i gruppi e i morfismi gli omomorfismi di gruppi
- La categoria **Rng** degli anelli
- Dato un anello A , la categoria $\mathbf{A-Mod} / \mathbf{Mod-A}$ degli A -moduli sinistri / destri
- Dato un anello commutativo A , la categoria **A-Alg** delle A -algebre

- La categoria Top degli spazi topologici (con funzioni continue come morfismi)

Nota. Dato $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ si può indicare con $f : X \rightarrow Y$ “come fosse una funzione”

Esempio 69. Le categorie discrete, cioè tali che gli unici morfismi sono 1_X per ogni $X \in \mathcal{C}$.

Esempio 70. \mathcal{C} tale che $\forall X, Y \in \mathcal{C}, \#\mathcal{C}(X, Y) \leq 1$, ottengo una relazione \preccurlyeq su $\text{Ob}(\mathcal{C})$ in cui

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathcal{C}(X, Y) \neq \emptyset$$

e \preccurlyeq è riflessivo (perché $\exists 1_X \in \mathcal{C}(X, X) \forall X \in \mathcal{C}$) e transitivo, perché $\exists \circ$. Ne consegue che \preccurlyeq è un *preordine*

Viceversa, data una relazione di preordine \preccurlyeq su un insieme (o una classe) S , ottengo una categoria \mathcal{C} con $\text{Ob}(\mathcal{C}) := S$ e $\forall X, Y \in S$,

$$\mathcal{C}(X, Y) := \begin{cases} \{f_{X,Y}\} & \text{se } X \preccurlyeq Y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con l'unica composizione possibile

Esempio 71 (Categoria Vuota). Prendendo $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \emptyset$

Osservazione. $\forall X \in \mathcal{C}$ con \mathcal{C} una categoria, $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X, X)$ è un monoide con \circ , ne consegue il prossimo esempio

Esempio 72 (Monoide). Una categoria con un solo oggetto è un monoide. Viceversa ogni monoide può essere visto come categoria di un solo oggetto.

Esempio 73 (Diagrammi). Possiamo definire categorie date da diagrammi, in cui si rappresentano i morfismi (non l'identità). Ad esempio:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \quad \bullet \rightrightarrows \bullet \quad \bullet \longrightarrow \bullet \leftarrow \bullet$$

sono tre categorie diverse, rispettivamente con 2, 2, e 3 oggetti

Definizione 74: Categoria opposta

La **categoria opposta** di \mathcal{C} è denotata \mathcal{C}^{op} ed è definita da

$$\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad \mathcal{C}^{op}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

con composizione in \circ^{op} data da $f \circ^{op} g := g \circ f$

Osservazione.

$$(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$$

Esempio 75 (Categoria Prodotto). Siano \mathcal{C}_λ per $\lambda \in \Lambda$ delle categorie. Allora la categoria prodotto

$$\mathcal{C} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita da

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{C}) &:= \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ob}(\mathcal{C}_\lambda) \\ \mathcal{C}((X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) &:= \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda) \\ (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \circ (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &:= (g_\lambda \circ f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}$$

Esempio 76 (Cateogoria Coprodotto). La categoria coprodotto

$$\mathcal{C} := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita con $\text{Ob}(\mathcal{C}) := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$ l'unione disgiunta.

$$\forall X, Y \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C}(X, Y) := \begin{cases} \mathcal{C}_\lambda(X, Y) & \text{se } X, Y \in \mathcal{C}_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con \circ ovvia.

Definizione 77: Sottocategoria

Sia \mathcal{C} una categoria. Allora una sottocategoria \mathcal{C}' di \mathcal{C} è data da una sottoclasse $\text{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \mathcal{C}'$ da un sottoinsieme $\mathcal{C}'(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ tale che \circ si restringe a \mathcal{C}' e $1_X \in \mathcal{C}'(X, X)$ per ogni $X \in \mathcal{C}'$.

In particolare \mathcal{C}' è una categoria.

Esempio 78. Se \mathcal{C} è un monoide (cateogoria di un oggetto), allora le sottocategorie non vuote di \mathcal{C} sono i sottomonoidi.

Definizione 79: Sottocategoria Piena

Una sottocategoria \mathcal{C}' di \mathcal{C} si dice **piena** se $\mathcal{C}'(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{C}'$

Osservazione. Una sottocategoria piena di \mathcal{C} equivale a dare una sottoclasse di $\text{Ob}(\mathcal{C})$

Esempio 80 (Gruppi Abeliani). $\mathbf{Ab} \subseteq \mathbf{Grp}$ sottocategoria piena dei gruppi abeliani. Similmente anche $\mathbf{CRng} \subseteq \mathbf{Rng}$ sottocategoria piena degli anelli commutativi.

Oltre alle sotto-strutture sono anche importanti i quozienti, e anche qui possiamo dare una definizione astratta

Definizione 81: Congruenza

Una congruenza \sim su una categoria \mathcal{C} è data da una relazione di equivalenza \sim su $\mathcal{C}(X, Y) \forall X, Y \in \mathcal{C}$ tale che

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{C}, \forall f, f' \in \mathcal{C}(X, Y) \forall g, g' \in \mathcal{C}(Y, Z) \quad f \sim f', g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f'$$

$$\text{equivalentemente } g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f \text{ e } h \circ g \sim h \circ g'$$

Definizione 82: Quoziente

Sia \sim una congruenza su \mathcal{C} , allora possiamo definire la categoria quoziante \mathcal{C}/\sim definita da

$$\text{Ob}(\mathcal{C}/\sim) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad (\mathcal{C}/\sim)(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y)/\sim \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$$

e \circ è indotta da quella di \mathcal{C} , ossia

$$\bar{g} \circ \bar{f} := \overline{g \circ f}$$

Esempio 83 (Omotopia). Sia $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ e \sim_h l'omotopia, ossia $f, g : X \rightarrow Y$ sono omotope se $\exists H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tali che

$$f(x) = H(x, 0), \quad g(x) = H(x, 1) \quad \forall x \in X$$

e si ottiene $\text{Toph} := \text{Top}/\sim_h$

Esempio 84 (Gruppo quoziante). Sia G un gruppo (visto come monoide, ossia categoria di un oggetto) e sia $H \triangleleft G$ e \sim su G data da $a \sim b \iff aH = bH$. Allora G/N è la categoria quoziante G/\sim . Viceversa ogni \sim congruenza su G si può scrivere in tal modo prendendo $H = \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$ (esercizio).

Definizione 85: morfismo invertibile

Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo in una categoria \mathcal{C} . Allora esso è invertibile a sinistra (destra) se $\exists f' : Y \rightarrow X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$).

Osservazione. f è invertibile a sinistra (destra) in \mathcal{C} , allora f è invertibile a destra (sinistra) in \mathcal{C}^{op}

Definizione 86: Isomorfismo

$f : X \rightarrow Y$ è un **isomorfismo** se $\exists f' : Y \rightarrow X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f' = 1_Y$

Osservazione. f è isomorfismo se e solo se f è invertibile a destra e a sinistra.

Dimostrazione.

\implies ovvio

$\Leftarrow \exists f', f''$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f'' = 1_Y$, allora

$$f' \circ (f \circ f'') = f' = f'' = (f' \circ f) \circ f''$$

e dunque f è invertibile.

In particolare dunque la f' della definizione di isomorfismo è unica e viene denotata f^{-1} \square

Definizione 87

Siano $X, Y \in \mathcal{C}$. Allora X e Y sono isomorfe ($X \cong Y$) se esiste un $f : X \rightarrow Y$ isomorfismo.

Osservazione. 1_X è isomorfismo e $1_X^{-1} = 1_X$. Se f isomorfismo allora f^{-1} isomorfismo e $(f^{-1})^{-1} = f$. Se f, g isomorfismi componibili, allora $g \circ f$ è isomorfismo e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Ne segue che \cong è una relazione di equivalenza su $\text{Ob}(\mathcal{C})$

Definizione 88

Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} è detto **monomorfismo** se $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{C}(Z, X) &\longrightarrow \mathcal{C}(Z, Y) \\ g &\longmapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

è iniettiva

Definizione 89: Epimorfismo

f è un **epimorfismo** in \mathcal{C} se è monomorfismo in \mathcal{C}^{op} , ossia $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{C}(Y, Z) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

è iniettiva.

Proposizione 90. f è invertibile a sinistra (destra), allora f è monomorfismo (epimorfismo)

Dimostrazione. Basta dimostrare che se f è invertibile a sinistra, allora è mono.

Sappiamo che $\exists f' : Y \rightarrow X$ tale che $f' \circ f = 1_X$. Dobbiamo dimostrare che f_* è iniettiva. Siano $g, h \in \mathcal{C}(Z, X)$ tali che $f_*(g) = f_*(h)$. Allora $f \circ g = f \circ h$, da cui $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$ e dunque $g = h$ \square

Proposizione 91. Sia \mathcal{C} concreta. Allora

$$f \text{ invertibile a sinistra/destra} \implies f \text{ iniettiva/suriettiva} \implies f \text{ mono/epi}$$

Dimostrazione. Non possiamo usare il trick della categoria opposta, perché non è detto che \mathcal{C}^{op} sia ancora concreta.

Sia f' tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$), allora chiaramente f iniettiva (suriettiva) perché le composizioni 1_X e 1_Y sono biunivoche.

Se f è iniettiva, allora siano $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$. Dunque $\forall x \in X$

$$f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \xrightarrow{f \text{ inj.}} g_1(x) = g_2(x)$$

ossia f_* è iniettiva, ossia f è monomorfismo.

se f è suriettiva, allora siano $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$. Sappiamo che $\forall y \in Y$ esiste $x_y \in X$ tale che $f(x_y) = y$. Allora abbiamo che, assumendo che $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$g_1(y) = g_1(f(x_y)) = g_2(f(x_y)) = g_2(y) \quad \forall y \in Y$$

ossia f^* è iniettiva e dunque f è epimorfismo \square

In generale non vale nessuna delle \Leftarrow .

Esempio 92. In **Set** se $f : X \rightarrow Y$ è suriettiva, allora f è invertibile a sinistra. Infatti basta scegliere (AOC) $f'(y) \in f^{-1}\{y\}$ per ogni $y \in Y$. Inoltre se $X \neq \emptyset$ e $f : X \rightarrow Y$ è iniettiva, allora f è invertibile a sinistra.

Esercizio 93

In **A – Mod**, mostrare che $f : M \rightarrow N$ iniettiva è invertibile a sinistra se e solo se $\text{Im}(f) \subseteq N$ è addendo diretto.

Mostrare che $f : M \rightarrow N$ suriettiva è invertibile a destra se e solo se $\text{Ker}(f) \subseteq M$ è addendo diretto

Concludere che valgono sempre entrambe le implicazioni se e solo se A è semisemplice.

Esempio 94. In **Set**, se f è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti, poniamo per assurdo $f : X \rightarrow Y$ non iniettiva, dunque siano $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$. Allora preso $Z = \{z\}$ e $g, h : Z \rightarrow X$ tali che $g(z) = x$ e $h(z) = y$ abbiamo che $f \circ g = f \circ h$ da cui $g = h$ e dunque $x = y$

Supponiamo f non suriettiva, mostrare per esercizio $\exists g, h : Y \rightarrow Z$ tali che $g \neq h$ ma $g \circ f = h \circ f$

Esempio 95. In $\mathbf{A-Mod}$ $f : M \rightarrow N$ è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti $i : \text{Ker } f \rightarrow M$ inclusione tale che $f \circ i = 0$ e anche $0 : \text{Ker } f \rightarrow M$ è tale che $f \circ 0 = 0$. Concludiamo che $i = 0$ e dunque $\text{Ker } f = 0$.

Similmente $\pi : N \rightarrow \text{coker } f$ è tale che $\pi \circ f = 0$ e se f è epi allora $0 = \pi$ e dunque $\text{coker } f = 0$ e dunque f è suriettiva.

Esempio 96. In \mathbf{Grp} f mono (epi), allora f iniettiva (suriettiva)

Per mono \implies iniettiva si può usare la stessa dei moduli, mentre per l'altra è un po' più complicato, ma si dimostra che è vero lo stesso

Esempio 97. In \mathbf{Rng} $f : A \rightarrow B$ mono, allora f iniettiva.

Tuttavia f epi **non implica** f suriettiva. Ad esempio preso $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è epi, infatti $\forall A$ anello esiste al più un omomorfismo $\mathbb{Q} \rightarrow A$ ($f : \mathbb{Q} \rightarrow A$ sia omomorfismo, allora $f|_{\mathbb{Z}}$ è l'unico omomorfismo e $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$). Chiaramente però non è suriettiva.

Definizione 98: Funtore

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ tra 2 categorie è dato da una funzione $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$ e $\forall X, X' \in \mathcal{C}$ una funzione $F = F_{X, X'} : \mathcal{C}(X, X') \rightarrow D(F(X), F(X'))$ tale che

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(se f e g sono componibili in \mathcal{C}) e $F(1_X) = 1_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$

Proposizione 99. Sia F un funtore e f invertibile a sinistra (destra). Allora $F(f)$ è invertibile a sinistra (destra)

Dimostrazione. $\exists f'$ tale che $f' \circ f = 1_X$, allora $F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$. \square

Osservazione. Segue che f iso, allora $F(f)$ iso e $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$

Esempio 100. Sia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria. Allora $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, $X \mapsto X$ e $f \mapsto f$ è un funtore

Esempio 101. Se \sim è una congruenza, allora $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ è un funtore, con $X \mapsto X$ e $f \mapsto \bar{f}$

Esempio 102 (Funtore dimenticante). $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ con \mathcal{C} categoria discreta e $X \mapsto X$, $f \mapsto f$ è un funtore, che “dimentica” la struttura aggiunta.

Analogamente anche $\mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ab}$, con $(A, +, \cdot) \rightarrow (A, +)$ è un funtore dimenticante.

Osservazione. Notare che il secondo funtore dimenticante non preserva gli epimorfismi. Sarebbe infatti $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ l'inclusione è un'epimorfismo in \mathbf{Rng} ma non in \mathbf{Ab}

Esempio 103. Sia $A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Allora la restrizione degli scalare è un funtore $\mathbf{B-Mod} \rightarrow \mathbf{A-Mod}$

Esempio 104. Funtore tra 2 categorie discrete \mathcal{C} e D è una funzione $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$

Esempio 105. Un funtore tra 2 preordini \mathcal{C} e D è una funzione $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$ che preserva la relazione di preordine.

Esempio 106. Un funtore tra 2 monoidi è un omomorfismo di monoidi.

Più in generale dato G un monoide e una categoria \mathcal{C} , un funtore $G \rightarrow \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da un omomorfismo di monoidi $G \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$

Se G è un gruppo un funtore $G \rightarrow \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e un omomorfismo di gruppi $G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Ad esempio se $\mathcal{C} = \text{Set}$ il funtore dà un'azione di un gruppo su un insieme. Similmente se $\mathcal{C} = \mathbb{K}$ -spazi vettoriali ho una rappresentazione di G .

Esempio 107 (Funtore costante). Date \mathcal{C}, D categorie preso $Y \subseteq D$ si può considerare il funtore costante di valore $Y, \mathcal{C} \rightarrow D, X \mapsto Y$ e $f \mapsto 1_Y$

Esempio 108. Presa Top_* la categoria degli spazi topologici puntati, il gruppo fondamentale

$$\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$$

è un funtore

Esempio 109. $\forall n \in \mathbb{N}$ ci sono funtori di omologia (singolare)

$$H_n : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$$

Teorema 110: Omomorfismo

Sia \sim una congruenza su \mathcal{C} e $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un funtore tale che se $f \sim f'$ in \mathcal{C} allora $F(f) = F(f')$. Allora esiste un unico funtore $\overline{F} : \mathcal{C}/\sim \rightarrow D$ tale che $\overline{F}(\overline{f}) = F(f)$ per ogni f morfismo di \mathcal{C}

Esempio 111. Negli esempi precedenti se f e f' sono omotope, allora $\pi_1(f) = \pi_1(f')$ e $H_n(f) = H_n(f')$, dunque inducono funtori

$$\pi_1 : \text{Toph}_* \rightarrow \text{Grp} \quad H_n : \text{Toph} \rightarrow \text{Ab}$$

Nota. I funtori che abbiamo definito si dicono anche funtori covarianti

Definizione 112: funtore controvariante

Un funtore **controvariante** $\mathcal{C} \rightarrow D$ è un funtore (covariante) $\mathcal{C}^{op} \rightarrow D$.

Esempio 113. $\forall n \in \mathbb{N}$ i funtori di coomologia (singolare) sono funtori controvarianti $H^n : \text{Top}(h)^{op} \rightarrow \text{Ab}$

Esempio 114. Sia \mathcal{C} una categoria, $X \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y) \quad (f : Y \rightarrow Y') &\mapsto (f_* : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

è un funtore perché $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-, Y) : \mathcal{C}^{op} &\rightarrow \text{Set} \\ X \mapsto \mathcal{C}(X, Y) \quad (f : X \rightarrow X') &\mapsto (f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

è un funtore controvariante perché $(f' \circ f)^* = f^* \circ f'^*$

Osservazione. C'è anche un funtore

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-, =) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ (X, Y) &\mapsto \mathcal{C}(X, Y) \\ (f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y') &\mapsto g_* \circ f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y') \end{aligned}$$

Esempio 115. Per ogni gruppo G , preso il sottogruppo dei commutatori $[G, G]$, allora per ogni $f : G \rightarrow H$ omomorfismo di gruppi, $f([G, G]) \subseteq [H, H]$ quindi si ottiene un funtore

$$\begin{aligned} \mathbf{Grp} &\rightarrow \mathbf{Grp} \\ G &\mapsto [G, G] \\ (f : G \rightarrow H) &\mapsto (f|_{[G, G]} : [G, G] \rightarrow [H, H]) \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} \mathbf{Abel} &: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab} \\ G &\mapsto \frac{G}{[G, G]} \text{ (abelianizzato di } G \text{)} \\ (f : G \rightarrow H) &\mapsto \left(\bar{f} : \frac{G}{[G, G]} \rightarrow \frac{H}{[H, H]} \right) \\ \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ \frac{G}{[G, G]} & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{H}{[H, H]} \end{array} \end{aligned}$$

Esercizio 116

Indicando con $Z(X)$ il centro di X ,

- a. Mostrare che non esiste un funtore $F : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Rng}$ tale che $\forall A \in \mathbf{Rng} F(A) = Z(A)$.
- b. Mostrare che non esiste un funtore $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ tale che $\forall G \in \mathbf{Grp} F(G) = Z(G)$.

Supponiamo l'esistenza di F .

- a. Se prendo $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$, allora $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e $F(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. A tal punto però $F(i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ che non esiste perché altrimenti

$$-1 = F(i)(-1) = F(i)(i^2) = F(i)(i)^2$$

- b. Consideriamo

$$\{(1), (12)\} \xrightarrow{i} S_3 \xrightarrow{\varepsilon} \{\pm 1\}$$

Allora $\varepsilon \circ i = \text{Id}_{\mathcal{C}_2}$. Allora avremmo

$$0_{\text{End}(\mathcal{C}_2)} = F(\varepsilon) \circ F(i) = F(\varepsilon \circ i) = F(\text{id}_{\mathcal{C}_2}) = \text{id}_{\mathcal{C}_2}$$

L'identità

$$\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad X \mapsto X \quad f \mapsto f$$

è un funtore Si possono comporre i funtori. Dati ad esempio

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E$$

funtori, possiamo definire $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow E$ come $X \mapsto G(F(X))$ e $f \mapsto G(F(f))$ è un funtore.

La composizione è associativa e $F \circ \text{id}_{\mathcal{C}} = F = \text{id}_{\mathcal{C}} \circ F$

In tal modo otteniamo una categoria $\mathcal{C}\text{at}$ delle categorie (piccole¹)

Definizione 117

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ è un isomorfismo se lo è in $\mathcal{C}\text{at}$, cioè se $\exists G : D \rightarrow \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}} = F \circ G$

Definizione 118: iniettivo e suriettivo

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ è *iniettivo/suriettivo* se $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$ è *iniettivo/suriettivo*.

Nel caso in cui F sia sia iniettivo che suriettivo, è **biunivoco**.

Definizione 119: Fedele e pieno

F è detto **fedeale (pieno)** se $\forall X, Y \in \mathcal{C}, F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow D(F(X), F(Y))$ è iniettivo (suriettivo).

Nel caso in cui F sia sia fedeale che pieno, si dice che è **pienamente fedeale**

Esercizio 120

F funtore è isomorfismo se e solo se F è pienamente fedeale e biunivoco.

Esempio 121. Se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è una sottocategoria, allora il funtore di inclusione $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ è iniettivo e fedeale ed è pieno se e solo se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è piena.

Ad esempio se \sim è una congruenza in \mathcal{C} , allora il funtore quoziante $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ è biunivoco e pieno.

Esempio 122. Un omomorfismo di monoidi (categorie di un oggetto) è iniettivo (suriettivo) se e solo se come funtore è fedeale (pieno). In ogni caso è biunivoco.

Esempio 123. I funtori dimenticanti $\mathbb{Z}-\text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$ e $\mathbb{Z}-\text{Alg} \rightarrow \text{Rng}$ sono isomorfismi.

Esempio 124. Anche $\text{Mod}-\mathbf{A} \cong \mathbf{A}^{\text{op}}-\text{Mod}$ ed esiste un isomorfismo (anche se non sono categorie piccole).

Definizione 125

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ è **essenzialmente iniettivo/suriettivo** se la funzione ridotta

$$\text{Ob}(\mathcal{C})/\cong \rightarrow \text{Ob}(D)/\cong$$

è *iniettivo/suriettivo*

Osservazione. Se F è suriettivo allora F è essenzialmente suriettivo. L'altra implicazione non vale. Ad esempio

$$(\bullet) \longrightarrow (\bullet \xrightleftharpoons[]{} \bullet)$$

Nessuna delle implicazioni tra iniettiva e essenzialmente iniettiva è vera. Basti considerare

$$(\bullet) \longleftarrow (\bullet \xrightleftharpoons[]{} \bullet)$$

¹si potrebbe anche fare di tutte le categorie, ma per motivi insiemistici/logici dovremmo introdurre gli universi di Grothendieck e fare le cose per bene. Al fine di evitare questo inutile sforzo, ci limitiamo a considerare le categorie piccole.

per essenzialmente iniettiva \Rightarrow iniettiva e

$$(\bullet \quad \bullet) \longrightarrow (\bullet \xleftarrow{\quad} \bullet)$$

per iniettiva \Rightarrow essenzialmente iniettiva.

Proposizione 126. *Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un funtore pienamente fedele. Allora F è essenzialmente iniettivo*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathcal{C}$ tali che $F(X) \cong F(Y)$ in D . Devo dimostrare che $X \cong Y$ in \mathcal{C} .

Sappiamo che esiste $g : F(X) \rightarrow F(Y)$ isomorfismo in D . Poiché F è pieno esiste $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $F(f) = g$. Analogamente $\exists f' \in \mathcal{C}(Y, X)$ tale che $F(f') = g^{-1}$.

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) = g^{-1} \circ g = 1_{F(X)} = F(1_X)$$

Se F è fedele, allora $f' \circ f = 1_X$ e analogamente $f \circ f' = 1_Y$ da cui f è isomorfismo e dunque $X \cong Y$ \square

Definizione 127: Trasformazione naturale

Siano $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow D$ funtori.

Una **trasformazione naturale** $\alpha : F \Rightarrow F'$ (si può anche scrivere $\alpha : F \implies F'$) è il dato di un morfismo

$$\alpha_X : F(X) \rightarrow F'(X) \text{ in } D \quad \forall X \in \mathcal{C}$$

tale che $\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di \mathcal{C} il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \alpha_X & & \downarrow \alpha_Y \\ F'(X) & \xrightarrow{F'(f)} & F'(Y) \end{array}$$

commuta in D , cioè $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$

Esempio 128. Consideriamo i due funtori $\text{Abel} : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$ e $\text{id} : \text{Grp} \rightarrow \text{Grp}$. C'è una trasformazione naturale $\alpha : \text{id} \Rightarrow \text{Abel}$ definita per ogni $G \in \text{Grp}$ da

$$\begin{aligned} \alpha_G : G &\longrightarrow \frac{G}{[G, G]} \\ a &\longmapsto \alpha_G(a) = a[G, G] \end{aligned}$$

è naturale perché $\forall f : G \rightarrow H$ in Grp il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow \alpha_G & & \downarrow \alpha_H \\ \frac{G}{[G, G]} & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{H}{[H, H]} \end{array}$$

Esempio 129. Supponendo di avere $F, F' : G \rightarrow \text{Set}$ funtori (G gruppo visto come categoria con un oggetto), cioè G -insiemi (azioni di G su insiemi). Allora una trasformazione naturale $\alpha : F \Rightarrow F'$ è un morfismo di G -insiemi cioè una funzione $\alpha : F(G) \rightarrow F'(G)$ tale che $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in F(G)$.

Osservazione. $\forall F : \mathcal{C} \rightarrow D$, $\text{id}_F : F \rightarrow F$ data da $(\text{id}_F)_X = \text{id}_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$ è una trasformazione naturale.

Esercizio 130

Dati $F, F', F'' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtori, $\alpha : F \rightarrow F'$ e $\beta : F' \rightarrow F''$ trasformazioni naturali, allora la composizione $\beta \circ \alpha : F \rightarrow F''$ è definita da

$$\beta_X \circ \alpha_X =: (\beta \circ \alpha)_X : F(X) \rightarrow F''(X)$$

Mostrare che $\alpha \circ \beta$ è una trasformazione naturale

La composizione dell'esercizio precedente è anche detta *composizione verticale* di trasformazioni naturali, per via di questo disegno esplicativo:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \alpha & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \Downarrow \beta & \\ & F'' & \end{array}$$

Considerando funtori e trasformazioni naturali, si ottiene (assumiamo sempre \mathcal{C} piccola) la categoria $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ (anche denotata $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$) con oggetti i funtori $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, morfismi le trasformazioni naturali e composizione la composizione verticale.

Definizione 131

Data una categoria \mathcal{C} , la categoria dei morfismi di \mathcal{C} è

$$\text{Mor}(\mathcal{C}) := \text{Fun}(\cdot \rightarrow \cdot, \mathcal{C})$$

che ha come oggetti esattamente $\{f : X \rightarrow Y \text{ morfismo di } \mathcal{C}\}$ e trasformazioni naturali date da $(X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$ è data da $(g : X \rightarrow X', h : Y \rightarrow Y')$ tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

Definizione 132

Date $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtori, $\alpha : F \rightarrow G$ trasformazione naturale, allora α è *isomorfismo (naturale o di funtori)* se è isomorfismo in $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ cioè se $\exists \beta : G \rightarrow F$ trasformazione naturale tale che $\beta \circ \alpha = \text{id}_F$, $\alpha \circ \beta = \text{id}_G$.

In tal caso F e G si dicono *isomorfi* (denotato $F \cong G$).

Osservazione. \cong di funtori è una relazione di equivalenza

Esempio 133. Il primo gruppo di omologia si può vedere come l'abelianizzato del gruppo fondamentale. In linguaggio categorico abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Top}_* &\xrightarrow{\pi_1} \text{Grp} \xrightarrow{\text{Abel}} \text{Ab} \\ &\text{e} \\ \text{Top}_* &\rightarrow \text{Top} \xrightarrow{H_1} \text{Ab} \\ (X, x_0) &\mapsto \text{comp. c.p.a. che contiene } x_0 \end{aligned}$$

sono funtori isomorfi

Osservazione. $F \cong F'$ allora F e F' inducono la stessa funzione $\text{Ob}(\mathcal{C})/\cong \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})/\cong$ quindi F è essenzialmente *iniettiva / suriettiva* se e solo se F' lo è.

Esercizio 134

Mostrare che non necessariamente la precedente osservazione vale per le proprietà di iniettività e suriettività.

Proposizione 135. *Se $F \cong F'$ allora F è fedele/pieno se e solo se F' è fedele/pieno.*

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \rightarrow F'$ l'isomorfismo. Sia allora $\bar{\alpha} : \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \rightarrow \mathcal{D}(F'(X), F'(Y))$ definita da $\bar{\alpha}(g) := \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}$. Per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}(F(X), F(Y)) & \\ F \nearrow & & \downarrow \bar{\alpha} \\ \mathcal{C}(X, Y) & & \\ F' \searrow & & \downarrow \\ & \mathcal{D}(F'(X), F'(Y)) & \end{array}$$

commuta. Infatti preso $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, per la trasformazione naturale $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$ si ha che

$$(\bar{\alpha} \circ F)(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} = F'(f)$$

Inoltre $\bar{\alpha}$ è una biezione, infatti ha inversa $\bar{\alpha}^{-1}(h) = \alpha_Y^{-1} \circ h \circ \alpha_X$:

$$\bar{\alpha}(\bar{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha})(g) = \bar{\alpha}^{-1}(\alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}) = \alpha_Y^{-1} \circ \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X = g$$

e similmente l'altra composizione. Allora chiaramente se F è *fedele/pieno*, allora $F' = \bar{\alpha} \circ F$ è *iniettivo/suriettivo*.

□

Proposizione 136. *α, β trasformazioni naturali inducono una trasformazione naturale $\beta * \alpha : G \circ F \rightarrow G' \circ F'$*

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{G(\alpha_X)} & G(F'(X)) \\ \downarrow \beta_{F(X)} & & \downarrow \beta_{F'(X)} \\ G'(F(X)) & \xrightarrow{G'(\alpha_X)} & G'(F'(X)) \end{array}$$

dunque $(\beta * \alpha)_X := \beta_{F'(X)} \circ G(\alpha_X) = G'(\alpha_X) \circ \beta_{F(X)}$.

Dimostrazione che è una trasformazione naturale. Vogliamo mostrare che $b * a$ è naturale, cioè $\forall f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{G(F(f))} & G(F(X)) \\ \downarrow (\beta * \alpha)_X & & \downarrow (\beta * \alpha)_Y \\ G'(F'(X)) & \xrightarrow{G'(F'(f))} & G'(F'(X)) \end{array}$$

commuta. Ma questo è vero perché

$$\begin{aligned} G'(F'(f)) \circ (\beta * \alpha)_X &= G'(F'(f)) \circ G'(\alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = G'(F'(f) \circ \alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\stackrel{\alpha \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y \circ F(f)) \circ \beta_{F(X)} = G'(\alpha_Y) \circ G'(F(f)) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\stackrel{\beta \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y) \circ \beta_{F(Y)} \circ G(F(f)) = (\beta * \alpha)_Y \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

□

Ovviamente è chiaro che si potrebbe definire allora la categoria delle trasformazioni naturali eccetera e andare avanti all'infinito. Per assiomatizzare queste cose in realtà bisognerebbe esplicitare che abbiamo definito le “2-frecce” e che quindi siamo in una *2 categoria*

Nota (zione). Se $\beta = \text{id}_G$ invece di $\text{id}_G * \alpha$ si scrive $G \circ \alpha$ (dunque con $(G \circ \alpha)_X = G(\alpha_X)$). Se $\alpha = \text{id}_F$ invece di $\beta * \text{id}_F$ si scrive $\beta \circ F$ (con $(\beta \circ F)_X = \beta_{F(X)}$). In generale

$$\beta * \alpha = (\beta \circ F') \circ (G \circ \alpha) = (G' \circ \alpha) \circ (\beta \circ F)$$

Osservazione. Se α, β sono isomorfismi, allora $\beta * \alpha$ è isomorfismo. Questo significa che se

$$F \cong F', \quad G \cong G' \implies G \circ F \cong G' \circ F'$$

cioè l'isomorfismo di funtori è una congruenza su $\mathcal{C}\mathbf{at}$ e quindi si ottiene la categoria $\mathcal{C}\mathbf{at}/\cong$

Definizione 137: Equivalenza

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ è un'equivalenza se $\exists G : D \rightarrow \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F \cong \text{id}_G$ e $F \circ G \cong \text{id}_D$.

Un tale G si dice un *quasi-inverso* di F .

Osservazione. F è un'equivalenza se e solo se \overline{F} in $\mathcal{C}\mathbf{at}/\cong$ è un isomorfismo.

Segue che se $F \cong F'$, allora F è un'equivalenza se e solo se F' è un'equivalenza e un quasi-inverso di F è unico a meno di isomorfismo e l'equivalente di categorie è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}\mathbf{at}$

Definizione 138: Scheletro

Una sottocategoria piena $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è detta *scheletro* se $\forall X \in \mathcal{C}, \exists ! X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$

Lemma 139. *Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un funtore, e si supponga che $\forall X \in \mathcal{C}, \alpha_X : F(X) \rightarrow F'(X)$ sia un isomorfismo in D . Allora $F' : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(D)$ Si estende in modo unico a un funtore $F' : \mathcal{C} \rightarrow D$ tale che $\alpha : F \rightarrow F'$ è isomorfismo.*

Teorema 140: Finalmente un teorema

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ è un'equivalenza se e solo se F è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo

Osservazione. Non è necessario aggiungere l'ipotesi che F sia essenzialmente iniettivo perché come mostrato prima pienamente fedele implica essenzialmente iniettivo (ma non essenzialmente suriettivo).

Esempio 141. Supponiamo che $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sia una sottocategoria piena. Allora il funtore di inclusione $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ è pienamente fedele ed è essenzialmente suriettivo (quindi è un'equivalenza) se e solo se $\forall X \in \mathcal{C}$ esiste $X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$.

Dimostrazione.

\implies Sia $G : D \rightarrow \mathcal{C}$ un quasi-inverso di F . Allora $F \circ G \cong \text{id}_G$ che è essenzialmente suriettivo, e dunque F è essenzialmente suriettivo. D'altra parte lo stesso $F \circ G$ è fedele, e dunque G è fedele.

Ora, per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{F_X, Y} D(F(X), F(Y)) \xrightarrow{G_{F(X)}, F(Y)} \text{inj } \mathcal{C}(G(F(X)), G(F(Y)))$$

poiché la composizione è biunivoca e G è fedele, allora entrambi devono essere biunivoci, ossia in particolare F è pienamente fedele.

- \Leftarrow Consideriamo prima il caso di un'inclusione $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria piena tale che $\forall X \in \mathcal{C}$ esista $X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$. Sia $I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ il funtore di inclusione (pienamente fedele e essenzialmente suriettivo).

Allora $\forall X \in \mathcal{C}$ scelto (AoC) un isomorfismo $\alpha_X : X \rightarrow \tilde{P}(X) \in \mathcal{C}'$ e se $X \in \mathcal{C}'$ in particolare prendiamo $\alpha_X = 1_X$. Applico ora il lemma ?? con $F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ e dunque $\exists!$ estensione di \tilde{P} a un funtore $\tilde{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tale che $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{P}$ è isomorfismo. Allora $\exists! P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ funtore tale che $\tilde{P} = I \circ P$ e P è un quasi-inverso di I poiché $I \circ P = \tilde{P} \cong \text{id}_{\mathcal{C}'}$ e $P \circ I = \text{id}_{\mathcal{C}'}$.

In generale, dato $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ pienamente fedele. Siano allora $I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ e $J : D' \rightarrow D$ due scheletri. Per il caso qui fatto I, J sono equivalenze e siano $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ quasi-inverso di I e $Q : D \rightarrow D'$ quasi-inverso di J .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & D \\ P \uparrow I & & J \downarrow Q \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{F'} & D' \end{array}$$

Sia $F' := Q \circ F \circ I : \mathcal{C}' \rightarrow D'$ come nel diagramma. Allora I, F, Q sono pienamente fedeli e essenzialmente suriettivi (I per definizione, F per ipotesi e Q perché è un'equivalenza e vale il punto (\implies)) dunque F' è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

F' è essenzialmente biunivoco, \mathcal{C}' e D' sono scheletri, dunque F' è biunivoco, quindi isomorfismo e quindi equivalenza.

$$F = \text{id}_D \circ F \circ \text{id}_{\mathcal{C}} \cong J \circ Q \circ F \circ I \circ P = J \circ F' \circ P$$

equivalenza perché lo sono J, F' e P

□

Esempio 142. Sia \sim una relazione d'equivalenza su un insieme X che vedo come categoria \mathcal{C} con $\text{Ob}(\mathcal{C}) = X$ e $\mathcal{C}(x, y) \neq \emptyset \iff x \sim y$.

Il funtore $\mathcal{C} \rightarrow X/\sim$ (categoria discreta) definito da $x \mapsto \bar{x}$ è un'equivalenza poiché pienamente fedele e essenzialmente suriettiva.

Esercizio 143

Mostrare che ogni categoria equivalente a una categoria discreta è una relazione di equivalenza, ossia una categoria dove $\forall X, Y \in \mathcal{C}, \mathcal{C}(X, Y) \neq \emptyset \iff x \sim y$ per una qualche \sim relazione di equivalenza.

2.1 Categorie preadditive

Definizione 144: Categoria preadditiva

Una categoria *preadditiva* è una categoria \mathcal{A} con una struttura di gruppo abeliano (notazione: additivo) su $\mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ ed è tale che la composizione di morfismi sia \mathbb{Z} -bilineare, ossia

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{e} \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$ e $g, g' \in \mathcal{A}(Y, Z)$.

Osservazione. Si dice anche che \mathcal{A} è una **Ab-Categoria**. Si può studiare quando si può generare una categoria simile partendo da altre categorie invece di **Ab** ma non è argomento di questo corso.

Si può anche dire che \mathcal{A} è \mathbb{Z} -lineare. Più in generale \forall^2 anello commutativo A una categoria A -lineare è una categoria \mathcal{A} con una struttura di A -modulo su $\mathcal{A}(X, Y)$ tale che la composizione sia A -bilineare.

Proposizione 145. *Se A è non commutativo, allora $\forall a, b \in A$ e $\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di \mathcal{A} ,*

$$(ab)f = (ba)f$$

Dimostrazione.

$$(ab)f = a(bf) = a((bf) \circ 1_X) = (bf) \circ (a1_X) = f \circ (b(a1_X)) = f \circ (ba)1_X = (ba)f$$

□

Esempio 146. Sia A un anello, allora $A\text{-Mod}$ è preadditiva. Infatti per ogni $M, N \in (A\text{-Mod})$, $A\text{-Mod}(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)$ è un gruppo abeliano e \circ è \mathbb{Z} -bilineare. Se A è commutativo, allora $A\text{-Mod}$ è anche A -lineare. Più in generale se B è una A -algebra allora $B\text{-Mod}$ è A -lineare.

Osservazione. Sia $X \in \mathcal{A}$ categoria A -lineare (quindi A commutativo). Allora $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è una A -algebra. Infatti $(\text{End}_{\mathcal{A}}(X), \circ)$ è un monoide e $\text{End}_{\mathcal{A}}$ è A -modulo e \circ è A -lineare.

Quindi le categorie A -lineari con un solo oggetto sono A -algebre. In particolare le categorie preadditive con un solo oggetto sono anelli.

Osservazione. Sia \mathcal{A} preadditiva, allora \mathcal{A}^{op} è preadditiva con la stessa struttura di gruppo abeliano su $\mathcal{A}^{op}(X, Y) = \mathcal{A}(Y, X)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$.

Osservazione. Se \mathcal{A} è preadditiva, allora $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}'$, allora \mathcal{A}' è preadditiva. In particolare la condizione è sempre verificata per le categorie piene.

Sia \mathcal{A} preadditiva, \sim una congruenza tale che $\forall X, Y \in \mathcal{A}, \forall f, f', g \in \mathcal{A}(X, Y)$ allora $f \sim f' \implies f+g \sim f'+g$. In tale ipotesi \mathcal{A}/\sim è preadditiva con $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.

Data una tale congruenza, sia $\forall X, Y \in \mathcal{A}$

$$\mathfrak{I}(X, Y) = \{f \in \mathcal{A}(X, Y) : f \sim 0\}$$

e indichiamo con $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ la collezione di tutti gli $\mathfrak{I}(X, Y)$. Allora vale la proprietà di ideale, cioè dati f, g morfismi di \mathcal{A} componibili,

$$f \in \mathfrak{I} \circ g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

Se per esempio $f \in \mathfrak{I}$ ossia $f \sim 0$, allora $g \circ f \sim g \circ 0 = 0$ e dunque $g \circ f \in \mathfrak{I}$.

Arriviamo dunque alla seguente definizione

Definizione 147

Definiamo un ideale \mathfrak{I} in una categoria preadditiva \mathcal{A} come $\mathfrak{I}(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ tale che

$$f \in \mathfrak{I} \circ g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

²normalmente in mezzo alla frase così avrei scritto esplicitamente “per ogni” ma trovavo diversamente la quantità di \mathcal{A} e di A nella frase quindi ho valutato simpatico aggiungere anche un \forall

Viceversa, dato $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, si ottiene una congruenza \sim su \mathcal{A} definito da

$$f \sim f' \iff f' - f \in \mathfrak{I}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{A} \quad \forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$$

ed è tale che $f \sim f' \implies f + g \sim f' + g$.

In tali ipotesi si può anche denotare \mathcal{A}/\mathfrak{I} invece di \mathcal{A}/\sim .

Una categoria \mathcal{C} può non avere nessuna struttura di categoria preadditiva (ad esempio se $\exists X, Y \in \mathcal{C}$ tale che $\mathcal{C}(X, Y) = \emptyset$ o averne più di una).

Esempio 148. G Possiamo pensare ad anelli A e B tali che $(A, \cdot) \cong (B, \cdot)$ e $(A, +) \not\cong (B, +)$.

Ad esempio possiamo prendere $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2)$. Allora evidentemente

$$(A, +) \cong \mathcal{C}_4 \not\cong \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \cong B$$

ma gli elementi diversi da 0 e 1 di A sono $\bar{2}$ e $\bar{3}$ e sono tali che $\bar{2}^2 = \bar{0}$, $\bar{3}^2 = \bar{1}$ e $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2}$. Similmente in B abbiamo che $\bar{X}^2 = \bar{0}$, $\bar{1+X}^2 = \bar{1}$ e $\bar{X} \cdot \bar{1+X} = \bar{X}$

Definizione 149

Un funtore $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tra categorie preadditive è additivo se

$$F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(F(X), F(Y))$$

è omomorfismo di gruppi $\forall X, Y \in \mathcal{A}$.

Più in generale $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tra categorie A -lineari è detto A -lineare se $F_{X,Y}$ è A -lineare $\forall X, Y \in \mathcal{A}$.

Esempio 150. Sia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}'$. Allora l'inclusione $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ è additivo.

Esempio 151. Se \mathcal{A} è preadditiva e $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, allora il funtore $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{I}$ definito da $X \mapsto X$ e $f \mapsto \bar{f}$ è additivo.

Esercizio 152

Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ additivo tale che “ $\mathfrak{I} = \ker F$ ” cioè $F(f) = 0$, $\forall f \in \mathfrak{I}$, allora mostrare che esiste un unico $\bar{F} : \mathcal{A}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathcal{B}$ funtore additivo tale che $F = \bar{F} \circ P$

Esempio 153. Siano A, B anelli (categorie preadditive con un solo oggetto), allora un funtore additivo $A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli.

Più in generale per ogni anello A e per ogni \mathcal{A} categoria preadditiva un funtore additivo $A \rightarrow \mathcal{A}$ è dato da un oggetto $X \in \mathcal{A}$ e un omomorfismo di anelli $A \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}}(X)$. Quindi un A -modulo è un funtore additivo $A \rightarrow \mathbf{Ab}$

Esempio 154. Sia $A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ è additivo.

Esempio 155. Se \mathcal{A} preadditiva, allora $\forall X \in \mathcal{A}$ ci sono funtori additivi

$$\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab} \quad , \quad \mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

e in generale se \mathcal{A} è A -lineare, allora i due funtori hanno codominio $A\text{-Mod}$ e sono A -lineari

Notare che se $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ sono funtori additivi, allora $G \circ F$ è additivo. Inoltre $\text{id}_{\mathcal{A}}$ è additivo. Dunque si ottiene una categoria contenente le **categorie preadditive** (piccole) e morfismi i funtori additivi.

Sia \mathcal{C} una categoria (piccola) e \mathcal{A} una categoria preadditiva. Allora $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è preadditiva (in modo naturale) con la seguente struttura

$\forall F, G \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ e $\forall \alpha, \beta : F \rightarrow G$ trasformazioni naturali allora $\alpha + \beta : F \rightarrow G$ trasformazione naturale definita $\forall X \in \mathcal{C}$ da

$$(\alpha + \beta)_X := \alpha_X + \beta_X : F(X) \rightarrow G(X) \text{ in } \mathcal{A}$$

è naturale perché $\forall f : X \rightarrow \mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \alpha_X + \beta_X & & \downarrow \alpha_Y + \beta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

commuta

Se anche \mathcal{C} è preadditiva sia

$$\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

la sottocategoria piena di $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ con oggetti i funtori additivi. Allora tale categoria è preadditiva.

Esempio 156. Se A è anello, allora gli A -moduli sono gli oggetti di $\text{AddFun}(A, \text{Ab})$ (già visto) e in effetti $A\text{-Mod} \cong \text{AddFun}(A, \text{Ab})$, poiché dati $M, N : A \rightarrow \text{Ab}$ funtori (cioè $A \rightarrow \text{End}(M)$ e $A \rightarrow \text{End}(N)$ omomorfismi di anelli) la trasformazione naturale $\alpha : M \rightarrow N$ è data da $\alpha : M \rightarrow N$ in Ab tale che $\forall a \in A$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{a} & N \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ N & \xrightarrow{-a} & N \end{array}$$

commuta, cioè $a\alpha(x) = \alpha(ax)$ per ogni $x \in M$, ossia α è omomorfismo di A -moduli.

Osservazione. $\forall \mathcal{A}$ preadditiva (piccola) si può definire la categoria (preadditiva) $\mathcal{A}\text{-Mod} := \text{AddFun}(\mathcal{A}, \text{Ab})$.

Proposizione 157. Siano \mathcal{A}, \mathcal{B} preadditive, $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtori tali che $F \cong G$ e F additivo. Allora G è additivo

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \rightarrow G$ isomorfismo. Allora $\forall f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} , $G(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1}$. Inoltre $\forall f, f' : X \rightarrow Y$,

$$\begin{aligned} G(f + f') &= \alpha_Y \circ F(f + f') \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ (F(f) + F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = \\ &= \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} + \alpha_Y \circ F(f') \circ \alpha_X^{-1} = G(f) + G(f') \end{aligned}$$

□

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore pienamente fedele con \mathcal{B} preadditiva. Allora esiste un'unica struttura preadditiva su \mathcal{A} tale che F sia additivo

Dimostrazione. $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ voglio che $F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(F(X), F(Y))$ sia isomorfismo di gruppi (già è biettiva), che è vero se e solo se $\forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$

$$f + f' = F^{-1}(F(f) + F(f'))$$

Infatti è ovvio che se $+$ è così definita, allora F sia omomorfismo di gruppi. Viceversa, se F è omomorfismo di gruppi, allora anche F^{-1} è omomorfismo di gruppi, e dunque $F^{-1}(F(f) + F(f')) = F^{-1}(F(f)) + F^{-1}(F(f')) = f + f'$.

□

2.1.1 Prodotti, coprodotti, proprietà universali

Definizione 158: Prodotto

Sia \mathcal{C} una categoria, siano $X_\lambda \in \mathcal{C}$ con $\lambda \in \Lambda$ insieme. Un prodotto degli X_λ è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi morfismi $p_\lambda \in \mathcal{C}(X, X_\lambda)$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ tale che vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda, \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(Y, X_\lambda) \quad \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) : f_\lambda = p_\lambda \circ f$$

o equivalentemente i seguenti diagramma commutano :

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ f_\lambda \downarrow & \searrow \exists! f & \text{al variare di } \lambda \in \Lambda \\ X_\lambda & \xleftarrow{p_\lambda} & X \end{array}$$

Proposizione 159. Siano $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ e $(X', \{p'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$. due prodotti in \mathcal{C} degli X_λ . Allora $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$ tale che $p'_\lambda = p_\lambda \circ f$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e f è isomorfismo.

Viceversa se $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli X_λ e $f : X' \rightarrow X$ è isomorfismo, anche $(X', \{p_\lambda \circ f\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli X_λ

Osservazione. Si dice che il prodotto è *unico a meno di unico isomorfismo*

Dimostrazione. (Prima parte) Esiste unico f per la proprietà universale, analogamente $\exists! f' \in \mathcal{C}(X, X')$ tale che $p_\lambda = p'_\lambda \circ f$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Dunque $p_\lambda = p'_\lambda \circ f' = p_\lambda \circ f \circ f' = p_\lambda \circ 1_X$. Ne consegue che $1_X = f \circ f'$ per la proprietà universale e analogamente $1_Y = f' \circ f$.

(Seconda parte) Dati $Y \in \mathcal{C}$ e $g_\lambda : Y \rightarrow X'_\lambda$ devo dimostrare che $\exists! g : Y \rightarrow X$ tale che $g_\lambda = f_\lambda \circ f \circ g$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ora per la proposizione universale di X $\exists! g : Y \rightarrow X$ tale che $g_\lambda = p_\lambda \circ g$. Voglio $g = f \circ g'$ cioè $g' = f^{-1} \circ g$ \square

Nota (zione). L'oggetto prodotto X si indica con

$$X =: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Esempio 160. In **Set** il prodotto di insiemi X_λ per $\lambda \in \Lambda$ è dato dall'usuale prodotto cartesiano con le proiezioni.

In categorie concrete come **Grp**, **Rng**, A -Mod un prodotto si ottiene dal prodotto in **Set** mettendo la struttura disgiuntiva componenti per componenti.

Esempio 161. In **FinSet** (la sottocategoria piena di **Set**) con oggetti insiemi finiti, non esiste $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ se $\#\Lambda = \infty$ e $\#X_\lambda > 1$ per ogni $\lambda \in \Lambda$

Infatti se per assurdo supponiamo il prodotto essere X per la proprietà universale $\forall Y \in \mathbf{FinSet}, \infty > \#\mathbf{Set}(Y, X) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \#\mathbf{Set}(Y, X_\lambda) = \infty$

Osservazione. Se $\#\Lambda = 1$ allora un prodotto di X_1 è $p_1 : X \rightarrow X_1$ in \mathcal{C} tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall f_1 : Y \rightarrow X_1 \exists! f : Y \rightarrow X$ tale che $f_1 = p_1 \circ f$

Questo è vero se p_1 è isomorfismo ($f = p_1^{-1} \circ f_1$). D'altra parte se p_1 non è isomorfismo non fattorizza unicamente ogni altro morfismo. Quindi un prodotto di $X \in \mathcal{C}$ è qualunque isomorfismo $X' \rightarrow X$ (in particolare 1_X).

Definizione 162: Oggetto terminale

Un oggetto terminale di una categoria \mathcal{C} è un prodotto vuoto in \mathcal{C} , cioè $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ esiste un unico $Y \rightarrow X$ morfismo di \mathcal{C} , cioè $\#\mathcal{C}(Y, X) = 1$

Esempio 163. In Set X è terminale se e solo se $\#X = 1$. Analogamente in $\text{Grp}, \text{Rng}, A\text{-Mod}$ è ogni gruppo anello o $A\text{-Mod}$ banale.

Esempio 164. Se G è un monoide non banale, allora G (come categoria con un solo oggetto) non ha oggetto terminale.

Proposizione 165. Una categoria \mathcal{C} ha tutti i prodotti finiti se e solo se ha oggetto terminale e i prodotti di coppie di oggetti.

Dimostrazione. Dimostro solo per induzione l'implicazione non ovvia.

Il passo base è dato dalla presenza dell'oggetto terminale. Per induzione supponiamo che esista il prodotto di $n - 1$ oggetti $X' = \prod_{i=1}^{n-1} X_i$ con $p'_i : X' \rightarrow X_i$ per ogni i . Sia ora un elemento X_n e per ipotesi esiste $X = X' \times X_n$ con $p_n : X \rightarrow X_n, p' : X \rightarrow X'$. Allora X è prodotto di tutti gli $\{X_i\}_{i=1}^n$ con $p_i := p'_i \circ p'$ per ogni $i < n$. \square

Definizione 166: Coprodotto

Un coprodotto di X_λ ($\lambda \in \Lambda$) in una categoria \mathcal{C} è un prodotto degli X_λ in \mathcal{C}^{op} , cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da morfismi $i_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, X)$ tali che vale la proprietà universale (duale di quella del prodotto)

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda, \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, Y), \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y) : f_\lambda = f \circ i_\lambda$$

e viene denotato

$$X =: \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Diagrammaticamente, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \uparrow f_\lambda & \nwarrow \exists! f & \\ X_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \end{array}$$

commuta

Nelle categorie preadditive si può parlare di **somma diretta** invece di coprodotto e usare \bigoplus invece di \coprod .

Esempio 167. In Set il coprodotto è l'unione disgiunta. In $A\text{-Mod}$ è la somma diretta usuale. In Grp i coprodotti sono i **prodotti liberi**.

Definizione 168: Oggetto iniziale

Un *oggetto iniziale* di \mathcal{C} è un coprodotto vuoto in \mathcal{C} , ossia $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}, \#\mathcal{C}(X, Y) = 1$

Può succedere che uno stesso oggetto sia terminale che iniziale. In tal caso per entrambe le definizioni esiste un solo morfismo da uno all'altro. Se tale morfismo è un isomorfismo allora l'oggetto è sia iniziale che terminale.

Definizione 169: Oggetto nullo

Un oggetto sia iniziale che terminale si dice *nullo*

Esempio 170. In Set , \emptyset è iniziale (non nullo). In $\text{Grp}/A\text{-Mod}$ ogni *gruppo/modulo* banale è nullo. In Rng , \mathbb{Z} è iniziale (non nullo)

Se $X \in \mathcal{C}$ è nullo allora $\forall Y, Z \in \mathcal{C}$ esiste il morfismo $0 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dato dalla composizione $Y \xrightarrow{\exists!} X \xrightarrow{\exists!} Z$. In tal caso abbiamo che effettivamente $f \circ 0 = 0$ e $0 \circ g = 0$ per ogni f, g componibili con 0.

Esempio 171. In \mathcal{A} preadditiva (in cui esiste un oggetto nullo) il morfismo 0 di cui sopra coincide con 0 dello struttura preadditiva.

Definizione 172: Preservazione del prodotto

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ preserva un prodotto $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ di $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ se $(F(X), \{F(p_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli $F(X_\lambda)$ in \mathcal{D} .

Diremo inoltre che F preserva i prodotti (o prodotti finiti) se preserva tutti i prodotti (o prodotti finiti) che esistono in \mathcal{C}

Osservazione. Se F preserva un prodotto degli X_λ , allora li preserva tutti.

Definizione 173: Preservazione del coprodotto

$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ preserva un coprodotto di \mathcal{C} se F^{op} preserva il corrispondente prodotto di \mathcal{C}^{op}

Esempio 174. I funtori dimenticanti $\mathbf{Grp}/\mathbf{Rng}/A-\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ preservano i prodotti ma non i coprodotti.

Ora vedremo in particolare cosa succede nelle categorie preadditive, in cui alcune valgono alcune simpatiche proprietà non ovvie.

Definizione 175: Biprodotto

Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva. Un biprodotto di $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$ è dato da $X \in \mathcal{A}$ e morfismi (in \mathcal{A}) $p_j : X \rightarrow X_j$ e $i_j : X_j \rightarrow X$, $\forall j = 1..n$. tali che

$$\begin{aligned} p_j \circ i_j &= 1_{X_j} \quad ; \quad p_k \circ i_j = 0 \quad \forall j, k = 1..n \text{ con } j \neq k \\ &\text{e } \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = 1_X \end{aligned}$$

Osservazione. $(X, i_1, \dots, i_n, p_1, \dots, p_n)$ è un biprodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} se e solo se $(X, p_1, \dots, p_n, i_1, \dots, i_n)$ è un biprodotto in \mathcal{A}^{op}

Se $n = 0$ la condizione diventa $1_X = 0$, dunque l'anello degli endomorfismi $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è banale.

Se $n = 1$ i_1 e p_1 sono isomorfismi e l'uno l'inverso dell'altro.

Osservazione. Basta verificare $p_k \circ i_j = 0$ per $j, k = 1..n - 1$ e $j \neq k$ (dunque per $n = 2$) non è necessario verificare quella parte della definizione

Dimostrazione. Sia $k < n$. Allora supponendo che $p_k \circ i_j = 0$ se $k \neq j < n$,

$$\begin{aligned} p_n \circ i_k &= p_n \circ 1_X \circ i_k = p_n \circ \left(\sum_{j=1}^n i_j \circ p_j \right) \circ i_k = \sum_{j=1}^n p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k = \\ &= p_n \circ i_n \circ p_n \circ i_k + \sum_{j=1}^{n-1} p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k = \\ &= 1_{X_n} \circ p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \circ 1_{X_k} = p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \\ \implies p_n \circ i_k &= 0 \end{aligned}$$

□

Proposizione 176. Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva e siano $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $X \in \mathcal{A}$ è biprodotto di X_1, \dots, X_n se e solo se X è un prodotto di X_1, \dots, X_n se e solo se X è un coprodotto di X_1, \dots, X_n .

Più precisamente (X, p_1, \dots, p_n) è un prodotto di X_1, \dots, X_n se e solo se esistono (unici) i_1, \dots, i_n tali che $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di X_1, \dots, X_n . Analogamente e dualmente per il coprodotto.

Dimostrazione.

\implies Per la proprietà universale del prodotto $\exists! i_j : X_j \rightarrow X$ per ogni $j = 1..n$ tali che

$$p_k \circ i_j = (f_j =) \begin{cases} 1_{X_j} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} X_j & & \\ \delta_{kj} 1_{X_j} \downarrow & \nearrow \exists! i_j & \\ X_k & \xleftarrow[p_k]{} & X \end{array}$$

Resta da dimostrare che

$$\sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = 1_X \iff \forall k, p_k \circ \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = p_k \text{ (proprietà universale)}$$

e effettivamente

$$p_k \circ \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = \sum_{j=1}^n p_k \circ i_j \circ p_j = \underbrace{p_k \circ i_k \circ p_k}_{1_{X_k}} = p_k$$

\iff Dati $f_j : Y \rightarrow X_j$ devo dimostrare che $\exists! f : Y \rightarrow X$ tale che $f_j = p_j \circ f$ per ogni $j = 1..n$. Allora posso definire

$$f := \sum_{k=1}^n i_k \circ f_k : Y \rightarrow X \text{ e allora } p_j \circ f = \sum_{k=1}^n p_j \circ i_k \circ f_k = f_j$$

essa è unica poiché se $f' : Y \rightarrow X$ è tale che $\forall j, f_j = p_j \circ f'$, allora

$$f' = 1_X \circ f' = \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j \circ f' = \sum_{j=1}^n i_j \circ f_j = f$$

□

Osservazione ($n = 0$). In una categoria preadditiva un oggetto è terminale \iff è iniziale \iff è nullo $\iff 1_X = 0$

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo e sia $X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n}$ un biprodotto di $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $(F(X), \{F(i_j)\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$ in \mathcal{B} .

Corollario 177. Un funtore $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ additivo preserva i prodotti e i coprodotti finiti.

Nota (zione matriciale nelle categorie preadditive). Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva. Siano X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_n in \mathcal{A} tali che $\exists(X, i_j^X, p_j^X)$ biprodotto di X_1, \dots, X_n e $\exists(Y, i_j^Y, p_j^Y)$ biprodotto di Y_1, \dots, Y_n . Dati $f_{j,k} : X_k \rightarrow Y_j$ morfismi di \mathcal{A} indico con la matrice $m \times n$ ($f_{j,k}$) il morfismo $f : X \rightarrow Y$ definito da

$$f = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n i_j^Y \circ f_{j,k} \circ p_k^X$$

Definizione 178: Categoria additiva

Una *categoria additiva* è una categoria preadditiva in cui esistono tutti i biprodotti.

Esempio 179. $A\text{-Mod}$ è additiva per ogni anello A .

Esempio 180. A anello come categoria preadditiva con un solo oggetto è additiva se e solo se $A = 0$

Osservazione. Se \mathcal{A} è additiva, allora anche \mathcal{A}^{op} lo è.

Esempio 181. Le sottocategorie piene di $A\text{-Mod}$ con oggetti i moduli *f.g. / f.p. / coerenti / noetheriani / artiniani / liberi* sono additive. Non vale per esempio per ciclici.

Proposizione 182. *Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo essenzialmente suriettivo. Allora se \mathcal{A} è additiva, anche \mathcal{B} è additiva. In particolare \mathcal{A}/\mathfrak{I} è additivo per ogni $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale.*

Dimostrazione. $\forall Y_1, \dots, Y_n$, se F è ess. suriettivo, allora $\exists X_j \in \mathcal{A}$ tale che $F(X_j) \cong Y_j$. A meno di cambiare F con $F' \cong F$ posso supporre $F(X_j) = Y_j$.

Allora se $\exists X$ biprodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} , $F(X)$ è biprodotto di Y_1, \dots, Y_n \square

Osservazione. Sia \mathcal{C} una categoria (piccola) e \mathcal{A} additiva. Allora $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva.

Dimostrazione. Dati $F_1, \dots, F_n \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ devo dimostrare che esiste il loro biprodotto. Per ogni $X \in \mathcal{C}$ esiste $F(X)$ biprodotto di $F_1(X), \dots, F_n(X)$ in \mathcal{A} .

$\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di C definisco $F(f)$ come il morfismo definito con la notazione matriciale da

$$F(X) = \bigoplus_{i=1}^n F_i(X) \begin{pmatrix} F_1(f) & & 0 \\ 0 & \cdots & F_n(X) \end{pmatrix} F(Y) = \bigoplus_{i=1}^n F_i(Y)$$

Allora $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ è un funtore e ci sono trasformazioni naturali $i_j : F_j \rightarrow F$ e $p_j : F \rightarrow F_j$ le cui componenti sono

$$(i_j)_X := i_j^X : F_j(X) \rightarrow F(X) ; \quad (p_j)_X := p_j^X : F(X) \rightarrow F_j(X)$$

Poiché \mathcal{C} è preadditiva, $\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva. Poiché $F_1, \dots, F_n \in \text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, allora $F = \bigoplus_{i=1}^n$ è additivo, infatti

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \begin{pmatrix} F_1(f+g) & & 0 \\ 0 & \cdots & F_n(f+g) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_1(f) + F_1(g) & & 0 \\ 0 & \cdots & F_n(f) + F_n(g) \end{pmatrix} = F(f) + F(g) \end{aligned}$$

\square

Esempio 183. Se \mathcal{A} è preadditiva (piccola), allora $\mathcal{A}\text{-Mod} := \text{AddFun}(\mathcal{A}, \text{Ab})$ è additiva.

Proposizione 184. *Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore con \mathcal{A} additiva, \mathcal{B} preadditiva, F che preserva i prodotti (o coprodotti) finiti. Allora F è additivo*

Dimostrazione (idea). Sia $0 \in \mathcal{A}$ oggetto nullo, allora $F(0)$ è termianle, dunque $F(0)$ è nullo (perché B è preadditiva), ossia $F(0) = 0$.

Allora segue che F preserva i biprodotti. Infatti se $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} , allora (X, p_1, \dots, p_n) è un prodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} e dunque $F(X), \{F(p_j)\}_{j=1..n}$ è un prodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$ in \mathcal{B} . Allora $\exists! i'_j : F(X_j) \rightarrow F(X)$ tali che $(F(X), \{i'_j\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$. Ma allora deve essere $i'_j = F(i_j)$ poiché

$$F(p_k \circ i_j) = F(p_k) \circ F(i_j) = F(p_k) \circ i'_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

$$F(0 : Y \rightarrow Z) = 0 : F(Y) \rightarrow F(Z)$$

E allora se $f, g : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} , allora $f + g$ è la composizione

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{(1 \quad 1)} Y$$

Allora $F(f + g)$ è la composizione

$$F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} F(X) \oplus F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & F(g) \end{pmatrix}} F(Y) \oplus F(Y) \xrightarrow{(1 \quad 1)} F(Y)$$

che è $F(f) + F(g)$ □

Corollario 185. Se \mathcal{A} è additiva, allora \mathcal{A} ha un'unica struttura preadditiva.

Dimostrazione. Considero $\mathcal{B} := \mathcal{A}$ come categoria con una qualunque struttura preadditiva e $F = \text{id}$. Allora per la proposizione ??, F è additivo. Poiché F è pienamente fedele, esiste un'unica struttura preadditiva su \mathcal{A} tale che $F = \text{id}$ è additivo, dunque la struttura di \mathcal{B} coincide con quella di \mathcal{A} □

Osservazione. Sia \mathcal{A} un anello commutativo, \mathcal{A} una categoria A -lineare e additiva. Allora non necessariamente la struttura A -lineare è unica. Data infatti una struttura A -lineare posso cambiarla su $\mathcal{A}(X, Y), \forall X, Y \in \mathcal{A}$. Se è data da omomorfismi di anelli $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \text{End}(\mathcal{A}(X, Y))$ considero $A \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \text{End}(\mathcal{A}(X, Y))$ con α omomorfismo di anelli non banale.

Corollario 186. Se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono categorie equivalenti e \mathcal{A} è additiva, allora \mathcal{B} è additiva.

Dimostrazione. So già che \mathcal{B} è preadditiva. Allora $\exists F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ equivalenza, additivo per la proposizione ???. F è essenzialmente suriettivo, dunque \mathcal{B} è additivo. □

2.2 Limiti e colimiti

L'obiettivo nostro è riuscire a generalizzare il concetto di ker e coker che era definito sui moduli. Vedremo che il giusto contesto sarà quello delle categorie *abeliane*. (probabilmente) A scopo di definire tale struttura, introduciamo i seguenti nuovi concetti

Definizione 187

Sia \mathcal{C} una categoria, $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtore (con \mathcal{L} piccola).

Un *limite* di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : K_X \rightarrow I$ dove

$$K_X : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C} \text{ è il funtore costante di valore } X, \text{ ossia } \mathcal{L} \xrightarrow[\substack{K_X \\ I}]{} \mathcal{C}.$$

In altri termini, $\forall L \in \mathcal{L}, \alpha_L : X \rightarrow I(L)$ è tale che $\forall l : L \rightarrow L'$ in \mathcal{L} , il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \alpha_L & \searrow \alpha_{L'} & \\ I(L) & \xrightarrow[I(l)]{} & I(L') \end{array}$$

Inoltre, vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \beta : K_Y \rightarrow I \text{ trasformazione naturale, } \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) \text{ t.c. } \beta = \alpha \circ K_f$$

dove $K_f : K_Y \rightarrow K_X$ è la trasformazione naturale definita da $(K_f)_L := f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$. In altre parole $\beta_L = \alpha_L \circ f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$, ossia il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \nearrow \alpha_L & \searrow \alpha_{L'} & \\ \exists! f & I(L) & I(L') \\ \uparrow \beta_L & \xrightarrow[I(l)]{} & \uparrow \beta_{L'} \\ Y & & \end{array}$$

Esempio 188 (Prodotto). Se $\mathcal{L} = \Lambda$ insieme (categoria discreta), allora I è dato dagli $I(\lambda) =: X_\lambda \in \mathcal{C}$ ($\lambda \in \Lambda$), e un limite di I è un prodotto degli $I(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) perché un limite è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ (qualunque, perché l può essere solo 1_λ) tali che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall \beta_\lambda : Y \rightarrow X_\lambda$,

$$\begin{array}{c} \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) : \beta_\lambda = \alpha_\lambda \circ f \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ \begin{array}{ccc} X & & \\ \nearrow \alpha_\lambda & \searrow \alpha_\lambda & \\ \exists! f & X_\lambda & X_\lambda \\ \uparrow \beta_\lambda & \xrightarrow[1_\lambda]{} & \uparrow \beta_\lambda \\ Y & & \end{array} \end{array}$$

Esempio 189. Sia $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Allora I è dato da $I(\mathcal{L}) = Y \xrightarrow[g]{f} Z$ in \mathcal{C} . Un limite di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_1 : X \rightarrow Y$ e $\alpha_2 : X \rightarrow Z$ tali che $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_1$ o equivalentemente $h : X \rightarrow Y$ tale che $f \circ h = g \circ h$.

La proprietà universale diventa:

$$\forall X' \in \mathcal{C}, \forall h' : X' \rightarrow Y : f \circ h' = g \circ \exists! k : X' \rightarrow X : h' = h \circ k$$

$$\begin{array}{c} \text{ossia il diagramma} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y & \xrightarrow[g]{f} & Z \\ \uparrow \exists! k & \nearrow h' & & & \\ X' & & & & \end{array} \quad \text{commuta} \end{array}$$

tale h si dice *equalizzatore* di f e g .

In **Set** si può prendere $X := \{y \in Y : f(y) = g(y)\} \xrightarrow{i} Y$. Analogamente in **Grp**, **Rng** e $A\text{-Mod}$ e sarà sottogruppo, sottoanello e sottomodulo come diagramma

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{f} & Z \\ \exists! k \uparrow & \nearrow h' & & & \\ X' & & & & \end{array}$$

Esempio 190 (Prodotto fibrato o *pullback*). Sia $\mathcal{L} = (\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet)$. Allora I è

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & & \\ \downarrow g_2 & & \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z \end{array}$$

dato da $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z$ in \mathcal{C} . Un limite di I è $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $f_1 : X \rightarrow Y_1$ e $f_2 : X \rightarrow Y_2$ (e $h : X \rightarrow Z$) tale che

$$(h =)g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$$

e la proprietà universale diventa: dati $f'_i : X' \rightarrow Y_i$ tali che $g_1 \circ f'_1 = g_2 \circ f'_2$, allora $\exists! f : X' \rightarrow X$ tale che $f'_1 = f_1 \circ f$. Equivalentemente si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X' & & & & \\ \nearrow \exists! f & \swarrow f'_2 & & & \\ & X & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \\ \downarrow f'_1 & & \downarrow f_1 & \downarrow g_2 & \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z & & \end{array}$$

In tal caso (X, f_1, f_2) si dice *prodotto fibrato* di g_1, g_2 (o *pullback*)

Esempio 191 (Prodotto fibrato su **Set**). **Set** (o altre categorie concrete) si può prendere $X := \{y_1, y_2 \in Y_1 \times Y_2 : g_1(y_1) = g_2(y_2)\}$

Esempio 192. Se prendiamo $\mathcal{L} = \emptyset$ e I il funtore vuoto, allora la definizione di limite diventa (notare l'assenza di α e β che sono funzioni vuote)

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$$

ossia X è oggetto terminale

Definizione 193: Colimite

Un *colimite* di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ è un limite di $I^{op} : \mathcal{L}^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$, cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : I \rightarrow K_X$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \beta : I \rightarrow K_Y$ trasformazione naturale, $\exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $\beta = K_f \circ \alpha$ (cioè $\beta_L = f \circ \alpha_L$ per ogni $L \in \mathcal{L}$).

Equivalentemente, $L, L' \in \mathcal{L}, Y \in \mathcal{C}, \beta_L : I(L) \rightarrow Y$ e $b_{L'} : I(L') \rightarrow Y$, esiste unico $f : X \rightarrow Y$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ \alpha_L \uparrow & & \alpha_{L'} \swarrow & & \\ \exists! f & I(L) & \xrightarrow{I(l)} & I(L') & \\ \beta_L \downarrow & & & \swarrow \beta_{L'} & \\ Y & & & & \end{array}$$

Esempio 194. Se $\mathcal{L} = (\bullet \Rightarrow \bullet)$, allora un colimite di I (dato da $Y \xrightarrow[g]{f} Z$) è dato da $h : Z \rightarrow X$ tale che $h \circ f = h \circ g$ tale che $\forall h' : Z \rightarrow X'$ tale che $h' \circ f = h' \circ g$, $\exists! k : X \rightarrow X'$ tale che $h' = k \circ h$. Equivalentemente il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow[g]{f} & Z & \xrightarrow{h} & X \\ & \searrow h' & \downarrow \exists! k & & \\ & & X' & & \end{array}$$

commuta e h si dice *coequalizzatore* di f e g .

Esercizio 195 Coprodotto fibrato o *pushout*

Definire il coprodotto fibrato, che è il duale del prodotto fibrato.

Sia $\mathcal{L} = (\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ (duale di quella del prodotto fibrato). Allora una colimite

$$\begin{array}{c} Y_2 \\ \uparrow g_2 \end{array}$$

di I (la cui immagine in \mathcal{C} è $Y_1 \xleftarrow[g_1]{ } Z$) è dato da $X \in \mathcal{C}$, $f_1 : Y_1 \rightarrow X$, $f_2 : Y_2 \rightarrow X$, $h : Z \rightarrow X$ morfismi tali che $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 (= h)$. Inoltre la proprietà universale dice che $\forall X' \in \mathcal{C}$, $f'_1 \in \mathcal{C}(Y_1, X')$ e $f'_2 \in \mathcal{C}(Y_2, X')$ tali che $f'_1 \circ g_1 = f'_2 \circ g_2$, allora $\exists! f : X \rightarrow X'$ tale che $f \circ f_i = f'_i$ per $i \in \{1, 2\}$.

Equivalentemente, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{\quad} & f'_2 & \xleftarrow{\quad} & Y_2 \\ \nearrow \exists! f & & \swarrow f_2 & & \uparrow g_2 \\ X & \xleftarrow{f_2} & Y_2 & \xleftarrow{f_1} & Y_1 \\ \uparrow f'_1 & & \uparrow g_1 & & \xleftarrow{g_1} Z \end{array}$$

In tal caso (X, f_1, f_2) si dice *prodotto cofibrato* di g_1, g_2 (o *pushout*)

Esempio 196. In **Set** un coequalizzatore di $Y \xrightarrow[g]{f} Z$ è dato dalla proiezione al quoziente $Z \rightarrow Z/\sim$ dove \sim è la più piccola relazione di equivalenza su Z che contiene $\{(f(y), g(y)) | y \in Y\} \subseteq Z \times Z$

Nota (zione). In alcuni casi invece di *limiti/colimiti* si può parlare di *limiti inversi/limiti diretti*.

Esempio 197. Similmente a prima, prendendo $\mathcal{L} = \emptyset$ e I il funtore vuoto, la definizione diventa

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \quad \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$$

ossia X è un oggetto iniziale.

Proposizione 198 (Unicità del limite). *Se (X, α) limite esiste, allora è unico a meno di isomorfismo. In altre parole dati (X, α) e (Y, β) limiti di I , allora $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$ tale che $\beta = \alpha \circ K_f$ e f è isomorfismo.*

Viceversa, se (X, α) è un limite di I e $f : Y \rightarrow X$ è isomorfismo, allora anche $(X', \alpha \circ K_f)$ è un limite di I

Esercizio 199 D

imostrare la proposizione ??

Nota (zione). Un limite di I si indica con $\lim I$ o $\varprojlim I$ e analogamente un colimite di I si indica con $\operatorname{colim} I$ o $\varinjlim I$.

Un (co)equalizzatore di $f, g : Y \rightarrow Z$ si indica con $(\text{co})\text{eq}(f, g)$

Un prodotto fibrato di $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \xleftarrow{g_2} Y_2$ si indica con $Y_1 \times_Z Y_2$. Similmente per i coprodotti fibrati si usa $Y_1 \coprod_Z Y_2$

Proposizione 200. *Sia $\gamma : I \rightarrow I'$ una trasformazione naturale tra funtori $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ e sia $(\lim I)$ un limite di I . Allora*

1. *Se $(\lim I', \alpha')$ è un limite di I' allora $\exists! \lim \gamma \in \mathcal{C}(\lim I, \lim I')$ tale che $\alpha' \circ K_{\lim \gamma} = \gamma \circ \alpha$, inoltre se γ è isomorfismo, allora anche $\lim \gamma$ è isomorfismo.*

$$\begin{array}{ccc} K_{\lim I} & \xrightarrow{K_{\lim \gamma}} & K_{\lim I'} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ I & \xrightarrow[\gamma]{} & I' \end{array}$$

2. *Se γ è isomorfismo, allora $(\lim I, \gamma \circ \alpha)$ è un limite di I'*

Dimostrazione. 1. Segue direttamente dal fatto che $(\lim I', \alpha')$ è un limite di I' e $\gamma \circ \alpha$ è una trasformazione naturale

2. Sia $Y \in \mathcal{C}$ e $\beta : K_Y \rightarrow I'$ trasformazione naturale. Allora $\gamma^{-1} \circ \beta : K_Y \rightarrow I$ è trasformazione naturale e dunque $\exists! f \in \mathcal{C}(Y, \lim I)$ tale che $\gamma^{-1} \circ \beta = \alpha \circ K_f$, da cui $\beta = \gamma \circ \alpha \circ K_f$

□

Teorema 201: Condizione sufficiente per l'esistenza dei limiti

Sia \mathcal{L} una categoria piccola. Allora esistono tutti i (co)limiti dei funtori $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ se in \mathcal{C} esistono tutti i (co)equalizzatori e tutti i (co)prodotti indicizzati dagli oggetti e dai morfismi di \mathcal{L} .

Più precisamente un (co)limite di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ è dato da (X, α) con

$$X = \text{eq} \left(\prod_{L \in \mathcal{L}} I(L) \xrightarrow[g]{h} \prod_{(l:L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})} I(L') \right)$$

dove $p_l \circ g := p_{L'}$, $p_l \circ h := I(l) \circ p_L \quad \forall (l : L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})$

Indicando con $i : X \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ il morfismo naturale,

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \alpha_L := p_L \circ i : X \rightarrow I(L)$$

idea di dimostrazione. α è naturale perché $g \circ i = h \circ i$. Più in generale, dato $j : Y \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ in \mathcal{C} , sia $\beta_L := p_L \circ j : Y \rightarrow I(L)$. Allora $\beta : K_Y \rightarrow I$ è una trasformazione naturale se e solo se $g \circ j = h \circ j$. Osservando questo, una qualunque trasformazione naturale $\beta : K_Y \rightarrow I$ è ottenuta da $j : Y \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ con $g \circ j = h \circ j$ ponendo $\beta_L = p_L \circ j$.

Per definizione di equalizzatore, $\exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$ tale che $j = i \circ f$ che è equivalente a $\beta_L = \alpha_L \circ f$ e $\beta = \alpha \circ K_f$.

β è naturale se e solo se $\forall l : L \rightarrow L'$ morfismo di \mathcal{L} , $I(l) \circ \beta_L = \beta_{L'}$ cioè $I(l) \circ p_L \circ j = p_{L'} \circ j \iff p_l \circ h \circ j = p_l \circ g \circ j \stackrel{\text{prop. univ. prodotto}}{\iff} h \circ j = g \circ j$ □

Definizione 202

Sia \mathcal{C} una categoria.

\mathcal{C} ha i (co)limiti di forma \mathcal{L} se esistono i (co)limiti di tutti i funtori $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$.

\mathcal{C} è (co)completa se ha i (co)limiti di forma \mathcal{L} per ogni categoria piccola \mathcal{L} .

\mathcal{C} è finitamente (co)completa se ha i (co)limiti di forma \mathcal{L} per ogni categoria finita \mathcal{L} (ossia se $\text{Mor}\mathcal{L}$ è finito)

Corollario 203. \mathcal{C} categoria è (finitamente) (co)completa se e solo se ha (co)equalizzatori e (co)prodotti (finiti).

Esempio 204. Set è completa e cocompleta (anche Grp , Rng e $A\text{-Mod}$)

Definizione 205

Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtore. F preserva un (co)limite (X, α) di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ se $(F(X), F \circ \alpha^a)$ è un (co)limite di $F \circ I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$

^aComposizione orizzontale: $\alpha : K_X \rightarrow I \implies F \circ \alpha : F \circ K_X = K_{F(X)} \rightarrow F \circ I$

Osservazione. Se F preserva un limite di I , allora F preserva tutti i limiti di I .

F preserva i (co)limiti (finiti) se preserva i (co)limiti di forma \mathcal{L} per ogni \mathcal{L} categoria piccola (finita)

Corollario 206. Sia \mathcal{C} una categoria (finitamente) (co)completa. Allora F preserva i (co)limiti (finiti) se e solo se F preserva i (co)prodotti (finiti) e i (co)equalizzatori.

Esempio 207. I funtori dimenticanti $\text{Grp}, \text{Rng}, A\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$ preservano i limiti ma non i colimiti.

Esempio 208. $\forall X \in \mathcal{C}$ i funtori $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ e $\mathcal{C}(-, X) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

Analogamente se \mathcal{A} è una categoria preadditiva, allora $\forall X \in \mathcal{A}$ i funtori $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ e $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

controesempio colimiti. Se $\mathcal{C} = \text{Set}$ e $\#X \geq 2$, allora $\mathcal{C}(X, -)$ non preserva i coprodotti. \square

$\mathcal{C}(X, -)$ preserva i limiti. Infatti sia $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ funtore con limite (Y, α) . Allora abbiamo che $\forall L \in \mathcal{L} \alpha_L \in \mathcal{C}(Y, I(L))$ tale che $\forall l : L \rightarrow L'$ morfismo di \mathcal{L} , $I(l) \circ \alpha_L = \alpha'_{L'}$. Ma allora

$$(\alpha_L)_{L \in \mathcal{L}} \in \text{eq} \left(\prod_{L \in \mathcal{L}} C(Y, I(L)) \xrightarrow[h]{g} \prod_{(l: L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})} C(Y, I(L')) \right)$$

\square

Osservazione. Sia $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ con $F \cong F'$. Se F preserva un limite (X, α) di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$, allora anche F' lo preserva.

Infatti $(F(X), F \circ \alpha)$ è un limite di $F \circ I$ e $\gamma : F \rightarrow F'$ è isomorfismo, dunque $\gamma \circ I : F \circ I \rightarrow F' \circ I$ è isomorfismo, dunque $(F(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha))$ è un limite di $F' \circ I$. Segue dunque che $(F'(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha) \circ K_{\gamma_X^{-1}} = F' \circ \alpha)$ dove l'ultima uguaglianza è perché α è naturale.

Osservazione. Vedremo che ogni equivalenza di categorie preserva sia i limiti che i colimiti.

Sgue che se \mathcal{C} e \mathcal{D} sono equivalenti e \mathcal{C} ha i limiti di forma \mathcal{L} , lo stesso vale per \mathcal{D} . Infatti sia $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$ funtore e sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ equivalenza con quasi-inverso G . Allora $G \circ I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ ha limite (X, α) e dunque anche $F \circ G \circ I \cong I$ ha limite

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} categorie (con \mathcal{C} piccola) e sia $X \in \mathcal{C}$. Allora c'è un funtore di valutazione in X

$$\begin{aligned} \text{ev}_X : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &\longrightarrow \mathcal{D} \\ F &\longmapsto \text{ev}_X(F) = F(X) \\ (\alpha : F \rightarrow G) &\longmapsto (\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)) \end{aligned}$$

E $\forall f : X \rightarrow Y$, ev induce una trasformazione naturale $\text{ev}_f : \text{ev}_X \rightarrow \text{ev}_Y$ definita da $(\text{ev}_f)_X : \text{ev}_X(F) = F(X) \xrightarrow{F(f)} \text{ev}_Y(F) = F(Y)$

Proposizione 209. Se in \mathcal{D} esistono i limiti di forma \mathcal{L} , allora esistono anche in $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ e si calcolano “puntualmente”, cioè, dato $I : \mathcal{L} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ si ha che

$$(\lim I)(X) = \lim (\text{ev}_X \circ I)$$

e $\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di \mathcal{C}

$$(\lim I)(f) = \lim (\text{ev}_f \circ I)$$

con trasformazioni naturali $\alpha(X) : K_{\lim(\text{ev}_X \circ I)} \rightarrow \text{ev}_X \circ I$ e $\forall L \in \mathcal{L} \alpha(X)_L : \lim(\text{ev}_X \circ I) \rightarrow (\text{ev}_X \circ I)(L) = I(L)(X)$.

La trasformazione naturale $\alpha : K_{\lim I} \rightarrow I$ è definita $\forall L \in \mathcal{L}$ da

$$a_L : \lim I \rightarrow I(L) \text{ morfismo in } \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

cioè una trasformazione naturale definita $\forall X \in \mathcal{C}$ da

$$\underbrace{(\alpha_L)_X}_{\alpha(X)_L} : \underbrace{(\lim I)(X)}_{\lim(\text{ev}_X \circ I)} \rightarrow I(L)(X)$$

2.2.1 Limiti in categorie preadditivive

Definizione 210: (co)Nucleo

Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva. Un (co)nucleo di $f : X \rightarrow Y$ morfismo di \mathcal{A} è un

(co)equalizzatore di $X \xrightarrow[f]{0} Y$

Osservazione. Il (co)equalizzatore di $X \xrightarrow[f]{g} Y$ è (co)nucleo di $f - g$

Un nucleo di $f : X \rightarrow Y$ è dunque $i : K \rightarrow X$ tale che $f \circ i = 0$ e $\forall i' : K' \rightarrow X$ tale che $f \circ i' = 0$, allora $\exists! g : K' \rightarrow K$ tale che $i' = i \circ g$. Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ K & \xrightarrow{i} & i' & \xrightarrow{f} & Y \\ \nearrow \exists! g & & \uparrow & & \nearrow 0 \\ K' & & & & \end{array}$$

Un conucleo di f è $p : Y \rightarrow C$ tale che $p \circ f = 0$ e $\forall p' : Y \rightarrow C'$ tale che $p' \circ f = 0$ allora $\exists! h : C \rightarrow C'$ tale che $p' = h \circ p$. Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p} C \\ & & \searrow 0 & \downarrow p' & \swarrow \exists! h \\ & & K' & & \end{array}$$

Esempio 211. In $A\text{-Mod}$ un nucleo di $f : M \rightarrow N$ è dato dall'inclusione $\text{Ker } f \hookrightarrow M$.

Un conucleo di f è dato invece dalla proiezione a quoziante

$$\pi : N \rightarrow \text{coker } f := \frac{N}{\text{Im } f}$$

effettivamente

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi} \frac{N}{\text{Im } f} \\ & & \searrow 0 & \downarrow g & \swarrow \exists! g' \\ & & P & & \end{array}$$

rappresenta il teorema di omomorfismo per moduli.

Osservazione. In quanto limiti, nuclei e conuclei sono unici a meno di unico isomorfismo

Definizione 212: Categoria preabeliana

Una categoria *preabeliana* è una categoria additiva in cui esistono nuclei e conuclei.

Osservazione. Una categoria è preabeliana se e solo se è preadditiva e finitamente completa e cocompleta.

Osservazione. Se \mathcal{A} è preabeliana, allora \mathcal{A}^{op} è preabeliana. $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria piena è preabeliana se è chiusa per prodotti e coprodotti finiti, per nuclei e per conuclei (cioè $f : X \rightarrow Y$ in $\mathcal{A}' \implies \exists i : K \rightarrow X$ nucleo di f in \mathcal{A} con $K \in \mathcal{A}'$).

Ad esempio, se $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$ e \mathcal{A}' con oggetti i moduli noetheriani/artiniani/coerenti, allora \mathcal{A}' è preabeliana.

Esempio 213. Sia \mathcal{A} una sottocategoria piena di $A\text{-Mod}$ con oggetti i moduli *finitamente generati/finitamente presentati* (è sempre additiva).

Allora \mathcal{A} è preabeliana se e solo se A è *noetheriano/coerente*.

Infatti M A -modulo è *f.g./f.p.* se e solo se M è *noeth./coerente*. Viceversa \mathcal{A} è in ogni caso chiusa per conuclei in $A\text{-Mod}$, ma in generale non per nuclei. Sia A non *noeth./coerente*. Allora in entrambi i casi $\exists f : M \rightarrow N$ in \mathcal{A} tale che $\text{Ker } f$ non è f.g. Infatti nel primo caso si può prendere $f = \pi : A \rightarrow A/\mathfrak{I}$ con \mathfrak{I} ideale sinistro non f.g., mentre nel secondo caso $\exists \mathfrak{J} \subseteq A$ ideale sinistro f.f.g. non f.p. se prendo $f : A^n \rightarrow A$ con $\text{im } f = \mathfrak{J}$.

Per assurdo sia ora $g : K \rightarrow M$ un nucleo di f in \mathcal{A} (dunque $f \circ g = 0$). In ogni caso K è f.g. e dunque img è f.g. $\implies x \in \text{Ker } f \setminus \text{img}$.

Sia $h : A \rightarrow M$, $a \mapsto ax$ in \mathcal{A} tale che $f \circ h = 0$, ma $\exists h' : A \rightarrow K$ tale che $h = g \circ h'$, e il che contraddice la proprietà universale.

Esempio 214. Sia A un dominio d'integrità, $\mathcal{A} \subseteq A\text{-Mod}$ sottocategoria piena con oggetti i moduli senza torsione, ossia tali che

$$T(M) := \{x \in M : \text{Ann}(x) \neq 0\} = 0 \quad (T(M) \subseteq M \text{ sottomodulo})$$

Allora \mathcal{A} è chiusa per nuclei ($M \in \mathcal{A}, M' \subseteq M$ sottomodulo, allora $M' \in \mathcal{A}$), ma non è chiusa per conuclei se A non è un campo (esiste infatti $0 \neq I \neq A$) ideale $I, A \in \mathcal{A}$ ma $\text{coker}(I \hookrightarrow A) = A/I \notin \mathcal{A}$.

\mathcal{A} è comunque preabeliana, infatti $\forall f : M \rightarrow N$ in \mathcal{A} , un conucleo di f in \mathcal{A} è

$$N \xrightarrow{\pi} \text{coker } f \xrightarrow{\pi'} C := \frac{\text{coker } f}{T(\text{coker } f)}$$

Allora $\pi' \circ \pi \circ f = 0$ evidentemente. Inoltre vale la proprietà universale, infatti

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\pi} & \text{coker } f & \xrightarrow{\pi'} & C \\ & \searrow 0 & \downarrow g & & \nearrow \exists! g' & & \\ & & P \in \mathcal{A} & & & \nearrow \exists! g'' & \end{array}$$

dove la freccia tratteggiata è dovuta alla proprietà universale del conucleo in $A\text{-Mod}$ mentre quella punita (ossia quella voluta in \mathcal{A}) è dovuta al fatto, più generale, che dato $g' : L \rightarrow P$ in $A\text{-Mod}$ con $P \in \mathcal{A}$ e $\pi' : L \rightarrow L/T(L)$

$$\exists! g'' : \frac{L}{T(L)} \rightarrow P \text{ t.c. } g' = g'' \circ \pi'$$

poiché $g'(T(L)) \subseteq T(P) = 0$ e dunque si può applicare il teorema di omomorfismo.

Nota. zione In una categoria preabeliana, $\forall f : X \rightarrow Y$, indico con

$$\begin{aligned} \ker f &: \text{Ker } f \rightarrow X \text{ un nucleo di } f \\ \text{coker } f &: Y \rightarrow \text{Coker } f \text{ un conucleo di } f \end{aligned}$$

Proposizione 215. Sia C una categoria piccola, \mathcal{A} una categoria preabeliana, allora $\text{Fun}(C, \mathcal{A})$ è preabeliana. Se C è preadditiva, allora $\text{AddFun}(C, \mathcal{A})$ (che è additiva) è chiusa per conuclei e nuclei in $\text{Fun}(C, \mathcal{A})$ e quindi è preabeliana.

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \rightarrow G$ un morfismo in $\text{AddFun}(C, \mathcal{A})$. Devo dimostrare che $\text{Ker}\alpha$, $\text{Coker}\alpha$ (in $\text{Fun}(C, \mathcal{A})$) sono additivi. Effettivamente

$$\forall X \in \mathcal{C} \quad \text{Ker}(\alpha)(X) = \text{Ker}(\alpha_X)$$

e $\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di C' , $\text{Ker}(\alpha)(f)$ è l'unico morfismo f' tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\alpha_X) & \xrightarrow{\text{ker}(\alpha_X)} & F(X) \xrightarrow{\alpha_X} G(X) \\ \downarrow f' & & \downarrow F(f) \quad \downarrow G(f) \\ \text{Ker}(\alpha_Y) & \xrightarrow{\text{ker}(\alpha_Y)} & F(Y) \xrightarrow{\alpha_Y} G(Y) \end{array}$$

Analogamente dato $g : X \rightarrow Y$, allora $\text{Ker}(\alpha)(g) = g'$ tale che l'analogo diagramma commuta. Dunque abbiamo

$$F(f + g) = F(f) + F(g), \quad G(f + g) = G(f) + G(g) \implies f' + g' = (f + g)'$$

□

Proposizione 216. Sia \mathcal{C} una categoria. Allora ogni equalizzatore/coequalizzatore in \mathcal{C} è un mono/epimorfismo in \mathcal{C} .

Dimostrazione. Sia $f : X \rightarrow Y$ un equalizzatore di $Y \xrightarrow[h]{g} Z$. Dati $l, l' : W \rightarrow X$ tali che $f \circ l = f \circ l'$. Devo dimostrare che $l = l'$. Effettivamente

$$g \circ (f \circ l) = h \circ (f \circ l) \implies \exists! \bar{l} : W \rightarrow X \text{ t.c. } f \circ l = f \circ \bar{l} \implies l = \bar{l} = l'$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow[h]{g} & Z \\ \uparrow \scriptstyle{\exists! \bar{l}} & \nearrow & & & \\ W & & f \circ l & & \end{array}$$

in particolare in una categoria preadditiva i **nuclei** sono **mono** e i **conuclei** sono **epi**. \square

Osservazione. In \mathcal{A} categoria preadditiva, $f : X \rightarrow Y$ è mono \iff dato $g : X' \rightarrow X$ t.c. $f \circ g = 0$, allora $g = 0$. Analogamente per gli epimorfismi.

Definizione 217: Categoria abeliana

Una categoria *abeliana* è una categoria preabeliana in cui ogni monomorfismo è un nucleo e ogni epimorfismo è un conucleo

Osservazione. Per la proposizione ?? il viceversa vale sempre.

Esempio 218. $A\text{-Mod}$ è abeliana $\forall A$ anello.

Infatti se $f : M \rightarrow N$ in $A\text{-Mod}$ è *mono/epi* se e solo se f è *iniettivo/suriettivo*.

Se f è iniettivo, allora $\text{im } f \cong M$ e l'inclusione $\text{im } f \xrightarrow{i} N$ è un nucleo di $\text{coker } f : N \rightarrow \text{Coker } f$. Dunque anche f è un nucleo di $\text{coker } f$ poiché $f = i \circ f'$ con $f' : M \rightarrow \text{im } f$ isomorfismo.

Se f è suriettivo, per il primo teorema di isomorfismo $N \cong M/\text{Ker } f$ e sia \bar{f} l'isomorfismo. Allora

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{j := \text{ker } f} & M & \xrightarrow{f} & N \\ & & \searrow \text{coker } j & & \uparrow \exists! \bar{f} \\ & & & & \text{Coker}(j) \end{array}$$

commuta e dunque f è un conucleo di j .

Osservazione. Se \mathcal{A} è abeliana, anche \mathcal{A}^{op} è abeliana.

Proposizione 219. Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva con oggetto nullo 0. Allora un morfismo $f : X \rightarrow Y$ di \mathcal{A} è mono/epimorfismo $\iff \text{Ker } f = 0 / \text{Coker } f = 0$

Dimostrazione.

\implies Devo dimostrare che $0 \xrightarrow{0} X$ è un nucleo di f . Se $f \circ 0 = 0$, dato $g : Z \rightarrow X$ tale che $f \circ g = 0$, allora $g = 0$ (perché f è mono) e dunque fattorizza in modo unico attraverso 0.

\impliedby Se $\text{Ker } f = 0$ dato $g : Z \rightarrow X$ tale che $f \circ g = 0$, allora per definizione di nucleo, g fattorizza in modo unico attraverso $0 \rightarrow X$, dunque $g = 0$

\square

Definizione 220: Immagine e coimmagine

Un'immagine di $f : X \rightarrow Y$ in una categoria preabeliana è un nucleo di un conucleo di f . Una coimmagine di f è un conucleo di un nucleo di f . Diagrammaticamente abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{\text{coker } f} \text{Coker } f \\ & & \downarrow \text{coker}(\text{ker } f) = \text{coim } f & & \uparrow \text{im } f = \ker(\text{coker } f) \\ & & \text{Coim } f & & \text{Im } f \end{array}$$

Nota (zione). Se f è nucleo di g si scrive $f = \text{kerg}$

Proposizione 221. Sia f un (co)nucleo in una categoria preabeliana. Allora

$$f = (\text{co})\text{im}(f)$$

Dimostrazione. Sia $f : X \rightarrow Y$ un nucleo di $g : Y \rightarrow Z$. Voglio dimostrare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \exists! h' \searrow & \uparrow h & \swarrow \text{coker } f & \uparrow \exists! g' & \\ & Y' & \xrightarrow{0} & \text{Coker } f & \end{array}$$

Ossia f è nucleo di $\text{coker } f$. È sempre vero che $\text{coker } f \circ f = 0$. Dato $h : Y' \rightarrow Y$ tale che $\text{coker } f \circ h = 0$, devo dire che $\exists! h' : Y' \rightarrow X$ tale che $h = f \circ h'$.

□

Corollario 222. Sia f mono/epi in una categoria abeliana. Allora $f = (\text{co})\text{im}(f)$.

Proposizione 223. Sia \mathcal{A} una categoria abeliana. Sia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ una sottocategoria piena chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei. Allora \mathcal{A}' è abeliana.

Dimostrazione. \mathcal{A}' è già preabeliana.

$f : X \rightarrow Y$ mono di $\mathcal{A}' \iff \text{Ker } f = 0$ in \mathcal{A}' e quindi in \mathcal{A} , ossia f è mono in \mathcal{A} , ma allora $f = \text{im } f$ in \mathcal{A} e quindi in \mathcal{A}'

□

Esempio 224. In particolare le sottocategorie di $A\text{-Mod}$ con oggetti i moduli noeth./artin./coerenti sono abeline

Esempio 225. Sia \mathcal{C} piccola, \mathcal{A} categoria abeliana. Allora $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è abeliana.

Dimostrazione. Sappiamo già che $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è preabeliana.

ora $\alpha : F \rightarrow G$ è mono in $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \iff \text{Ker } \alpha = 0 \iff \text{Ker}(\alpha_X) = 0$ per ogni $X \in \mathcal{C}$, cioè α_X mono in \mathcal{A} abeliana e dunque $\alpha_X = \text{im}(\alpha_X) \implies \alpha = \text{im } \alpha$.

□

Se \mathcal{C} è preadditiva, allora $\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è chiusa per nuclei e conuclei in $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ e dunque $\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è abeliana. In particolare $\mathcal{A}\text{-Mod} = \text{AddFun}(\mathcal{A}, \text{Ab})$ è abeliana $\forall \mathcal{A}$ preadditiva piccola.

Proposizione 226. Sia $f : X \rightarrow Y$ monomorfismo e epimorfismo in una categoria abeliana. Allora f è isomorfismo.

Dimostrazione. f è mono, dunque $f = \text{im } f = \ker(\text{coker } f)$. Poiché f è epi, $\text{Coker } f = 0$, dunque un'immagine di f è 1_Y , e quindi f è isomorfismo.

□

Esempio 227. Sia \mathcal{A} sottocategoria piena di $A\text{-Mod}$ (A dominio d'integrità non campo) dei moduli senza torsione. Allora \mathcal{A} non è abeliana.

Dimostrazione. Sia $0 \neq I \neq A$ ideale. Allora l'inclusione $i : I \rightarrow A$ è mono ($\text{Ker } i = 0$), epi ($\text{Coker } i = (A/I)/(T(A/I)) = 0$) ma non è isomorfismo. \square

Proposizione 228. Se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono due categorie equivalenti, allora \mathcal{A} è abeliana se e solo se \mathcal{B} è abeliana.

Dimostrazione. So già che \mathcal{B} è preabeliana. Per dualità basta dimostrare che se $f : X \rightarrow Y$ è monomorfismo di \mathcal{B} , allora è nucleo.

Sia $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un'equivalenza (quindi preserva i (co)nuclei). Allora se f è mono $\text{Ker } f = 0$, dunque $\text{Ker}(F(f)) = F(0) = 0$ è dunque $F(f)$ è mono.

Inoltre $F(f) = \text{im}(F(f)) = \text{Ker}(\text{coker}(F(f)))$. Ma $\text{im}(F(f)) = F(\text{im}(f))$. A meno di isomorfismo, $F(f) = F(\text{im}(f))$ e dunque $f = \text{im}(f)$ poiché F è pienamente fedele. \square

Nota (zione). I mono si possono indicare con \rightarrow e gli epi con

Teorema 229

Sia \mathcal{A} una categoria preabeliana. Allora

1. $\forall f : X \rightarrow Y$ di \mathcal{A} , $\exists! s(f) : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ tale che $f = \text{im}(f) \circ s(f) \circ \text{coim}(f)$
2. \mathcal{A} è abeliana se e solo se $s(f)$ è isomorfismo per ogni morfismo f di \mathcal{A}

Dimostrazione.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{\text{ker } f} & X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{\text{coker } f} \text{Coker } f \\ & \text{coim } f \downarrow & \nearrow f' & & \uparrow \text{im } f \\ \text{Coim } f & \dashrightarrow_{s(f)} & \text{Im } f & & \end{array}$$

1. $f \circ \text{ker } f = 0$ e $\text{coim } f = \text{coker}(\text{ker } f)$. Dunque esiste unico $f' : \text{Coim } f \rightarrow Y$ tale che $f = f' \circ \text{coim } f$.

$$0 = \text{coker } f \circ f = \text{coker } f \circ f' \circ \text{coim } f \implies \text{coker } f \circ f' = 0$$

poiché $\text{coim } f$ è epi.

Inoltre

$$\text{im } f = \text{ker}(\text{coker } f) \implies \exists! s(f) : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f : f' = \text{im } f \circ s(f)$$

dove $s(f)$ è unico perché $\text{im } f$ è mono e $\text{coim } f$ è epi.

2. \implies Per dualità basta dimostrare che f mono $\implies f$ nucleo

$$\text{coim } f = \text{coker}(\text{ker } f) = \text{coker}(0 \rightarrow X) \implies \text{coim } f \text{ iso} \implies f = \text{im } f \circ \text{iso}$$

cioè f “=” $\text{im } f$ è un nucleo

\Leftarrow $s(f)$ è isomorfismo se e solo se $s(f)$ è mono e epi. Per dualità basta dimostrare che $s(f)$ è mono, che è vero se f' è mono. Dunque dimostreremo che f' è mono.

Sia $g : Z \rightarrow \text{Coim } f$ tale che $f' \circ g = 0$, devo dimostrare che $g = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Ker}f & \xrightarrow{\text{ker}f} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{coker}f} & \text{Coker}f \\
h' \uparrow & \nearrow h & \downarrow \text{coim}f & \nearrow f' & \nearrow \text{im}f & \nearrow f'' & \swarrow \\
W & & \text{Coim}f & \xrightarrow{s(f)} & \text{Im}f & & \\
g \nearrow & \uparrow q & \searrow \text{coker}g & & & & \\
Z & & \text{Coker}h & = & \text{Coker}g & &
\end{array}$$

ma $f' \circ g = 0$, quindi $\exists! f'' : \text{Coker}g \rightarrow Y$ tale che $f' = f'' \circ \text{coker}g$.

Inoltre $\text{coker}g \circ \text{coim}f : X \rightarrow \text{Coker}g$ epi e \mathcal{A} è abeliana, dunque

$$\exists h : W \rightarrow X : \text{coker}g \circ \text{coim}f = \text{coker}h$$

$$f \circ h = f' \circ \text{coim}f \circ h = f'' \circ \text{coker}g \circ \text{coim}f \circ h = f'' \circ \text{coker}h \circ h = 0$$

dunque $\exists! h' : W \rightarrow \text{Ker}f$ tale che $h = \text{Ker}f \circ h'$.

□

Corollario 230. Sia $f : X \rightarrow Y$ morfismo in una categoria abeliana. Allora f si fattorizza come $X \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} Y$ con e epi e m mono. Inoltre tale fattorizzazione è essenzialmente unica, cioè se $X \xrightarrow{e'} I' \rightarrow Y$ è un'altra fattorizzazione simile, allora $\exists! t : I \rightarrow I'$ (iso)morfismo tale che $e' = t \circ e$ e $m = m' \circ t$

dimostrazione unicità.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{e} & I & \xrightarrow{m} & Y \\
g \uparrow & \searrow e' & \uparrow t & \nearrow & \\
Z & & I' & & m' \\
& & \swarrow & & \\
& & & & m'
\end{array}$$

Poiché e è epi, allora $e = \text{coker}g$ con $g : Z \rightarrow X$. Allora $e \circ g = 0 \implies m \circ e \circ g = m' \circ e' \circ g = 0 \implies e' \circ g = 0$ perché m' è mono. Poiché $e = \text{coker}g$,

$$\exists! t : I \rightarrow I' : e' = t \circ e$$

Allora $m' \circ t \circ e = m' \circ e' = m \circ e$. Inoltre e è epi, dunque $m' \circ t = m$.

Verificare come esercizio che t è iso.

□

Definizione 231: Sottoggetto

Un *sottoggetto* di X è una classe di equivalenza di monomorfismi $Y \xrightarrow{i} X$, dove $(Y \xrightarrow{i} X) \sim (Y' \xrightarrow{i'} X)$ se $\exists t : Y \rightarrow Y'$ isomorfismo tale che $i = i' \circ t$, ossia

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{i} & X \\
t \downarrow & \nearrow i' & \\
Y' & &
\end{array}$$

Osservazione. Sia \mathcal{C}'_X la sottocategoria di $\text{Mor}(\mathcal{C})$ con oggetti i mono con codominio X . Sia ora

$$\mathcal{C}'_X((Y \xrightarrow{i} X), (Y' \xrightarrow{i'} X)) := \{t \in \mathcal{C}(Y, Y') : i' \circ t = i\}$$

Inoltre t è tale che $i' \circ t = i$ è mono, dunque t è mono. Inoltre t , se esiste, è unico, quindi \mathcal{C}'_X è un preordine.

Una relazione di preordine induce una relazione d'ordine sulle classi di isomorfismo degli oggetti. Quindi ottengo una relazione d'ordine sui sottoggetti di X (che indico con \subseteq), cioè se Y, Y' sottoggetti di X , si scrive $Y \subseteq Y'$ se $\exists t$ tale che. Dualmente si ottiene la nozione di quoziante di X considerando gli epi $X \twoheadrightarrow Y$.

Esempio 232. Sia $f : X \rightarrow Y$ un monomorfismo in una categoria abeliana. Allora $f = \text{im}(f)$ come sottoggetti di Y .

Definizione 233: Complesso

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in una categoria preadditiva è un *compleSSo* se $g \circ f = 0$

Proposizione 234. In \mathcal{A} abeliana,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \text{coim } f \downarrow & \nearrow \text{im } f & & \swarrow \text{kerg} & \\ \text{Im } f & \xrightarrow[t]{\quad} & \text{Kerg} & & \end{array}$$

$$g \circ f = 0 \iff \exists(!) t : \text{Im } f \rightarrow \text{Kerg} \text{ t.c. } \text{im } f = \text{kerg} \circ t$$

Dimostrazione.

\Leftarrow

$$g \circ f = g \circ \text{im } f \circ \text{coim } f = \underbrace{g \circ \text{kerg} \circ t \circ \text{coim } f}_{0} = 0$$

\Rightarrow

$$0 = g \circ f = g \circ \text{im } f \circ \text{coim } f, \text{coim } f \text{ epi} \implies g \circ \text{im } f = 0$$

da cui $\exists! t : \text{Im } f \rightarrow \text{Kerg}$ tale che $\text{im } f = \text{kerg} \circ t$ per la proprietà universale del nucleo.

□

Osservazione. In un complesso, esiste sempre tale t , ma non necessariamente è un isomorfismo

Definizione 235: Successione esatta

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ complesso in una categoria abeliana è detta successione *esatta* se $t : \text{Im } f \rightarrow \text{Kerg}$ tale che $\text{im } f = \text{kerg} \circ t$ è isomorfismo (ossia $\text{Im } f = \text{Kerg}$ come sottoggetti di Y)

Osservazione.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \text{coker } f \swarrow & & \text{coimg} \searrow & & \uparrow \text{img} \\ \text{Coker } f & \xrightarrow[t]{\quad} & \text{Coimg} & & \end{array}$$

$$g \circ f = 0 \iff \exists(!) t : \text{coimg} \circ t = \text{coker } f$$

e la successione è esatta se e solo se t è isomorfismo.

Proposizione 236.

1. $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ è esatta $\iff \text{Ker } f = 0 \iff f$ mono.

1^{op}. $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$ è esatta $\iff \text{Coker } f = 0 \iff f$ epi

2. $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ è esatta (in X e Y) $\iff f = \text{kerg}$

2^{op}. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ è esatta $\iff g = \text{coker } f$

3. $\forall f : X \rightarrow Y$ la successione $0 \rightarrow \text{Ker}f \xrightarrow{\text{ker}f} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{coker}f} \text{Coker}f \rightarrow 0$ è esatta.
In particolare se f è mono, allora $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{coker}f} \text{Coker}f \rightarrow 0$ è esatta e
 f epi, dunque $0 \rightarrow \text{Ker}f \xrightarrow{\text{ker}f} X \rightarrow Y \rightarrow 0$ è esatta

Dimostrazione. A quanto pare l'unica non ovvia è la 2.

- \Rightarrow Se la successione è esatta in X allora f è mono, dunque $f = \text{im}f$. Se la successione è esatta in Y allora $\text{im}f = \text{kerg} \Rightarrow f = \text{kerg}$
- \Leftarrow Se $f = \text{kerg}$, allora f è mono, dunque successione esatta in X . Ma quindi $(\text{ker}f) = f = \text{im}f$ e dunque esatta in Y

□

Definizione 237: Successione esatta corta

Le successioni esatte della forma $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ si dicono esatte corte.

Proposizione 238. Una successione esatta corta $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ in una categoria abeliana si spezza se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. f è invertibile a sinistra
2. g è invertibile a destra
3. $\exists r : Y \rightarrow X$ e $s : Z \rightarrow Y$ tale che (Y, f, s, r, g) è un biprodotto di X e Z

Buona definizione. Per dualità basta dimostrare che 1. \Leftrightarrow 3.. Inoltre 3. \Rightarrow 1. è ovvia, dunque dimostriamo solo 1. \Rightarrow 3..

Sia $h := 1_Y - f \circ r : Y \rightarrow Y$. Allora $h \circ f = f - f \circ \underbrace{r \circ f}_{1_X} = 0$. Allora

$$g = \text{coker}f \Rightarrow \exists! s : Z \rightarrow Y : h = s \circ g \Rightarrow 1_Y = s \circ g + f \circ r$$

Dunque resta da dimostrare che $g \circ s = 1_Z$. Infatti $g \circ s \circ g = g \circ h = g - g \circ f \circ r = g = 1_Z \circ g$ e g è epimorfismo, dunque $g \circ s = 1_Z$. □

Definizione 239: Categoria semisemplice

Una categoria abeliana \mathcal{A} è detta *semisemplice* se tutte le successioni esatte corte di \mathcal{A} si spezzano

Esempio 240. $A\text{-Mod}$ è semisemplice se e solo se A è semisemplice.

Definizione 241: Funtore esatto

Un funtore $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tra categorie abeliane si dice *esatto a sinistra/destra* se F è additivo e preserva le successioni esatte rispettivamente della forma $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ o della forma $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$.

Osservazione. F è esatto a sinistra/destra $\Leftrightarrow F$ è additivo e preserva i *nuclei/conuclei* $\Leftrightarrow F$ preserva i *limiti/colimiti* finiti.

Usando l'osservazione si potrebbe definire anche $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ esatto a sinistra/destra se \mathcal{C} è finitamente completa/cocompleta e F preserva i *limiti/colimiti*

Definizione 242

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tra categorie abeliane è detto *esatto* se lo è sia a sinistra che a destra.

Osservazione. F è esatto a sinistra/destra se F preserva i mono/epimorfismi. Infatti se $f : X \rightarrow Y$ è mono, allora esiste una successione esatta $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z$

Proposizione 243. *Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo tra categorie abeliane. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- i) F è esatto a sinistra/destra
- ii) $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ è esatta in $\mathcal{A} \implies$

$$0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \quad / \quad F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \rightarrow 0$$

è esatta in \mathcal{B} .

Dimostrazione. i) \implies ii) è ovvia. Si supponga ora che valga ii). Allora sia $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ esatta in \mathcal{A} . si decomponga $g = i \circ g'$ con i mono e g' epi, dunque $Y \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{i} Z$. Allora $\ker g' = \ker g$ perché i è mono e $\ker g = f$, dunque $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z'$ è esatta. Segue che per ipotesi $0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g')} F(Z')$ è esatta.

Poiché ora i è mono, allora $F(i)$ è mono e dunque

$$F(f) = \ker(F(g')) = \ker(F(i) \circ F(g')) = \ker(F(g))$$

Ne consegue che $0 \rightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ è esatta. \square

Proposizione 244. *Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo tra categoria abeliane. Allora le seguenti sono equivalenti:*

- i) F preserva le successioni esatte (della forma $X \rightarrow Y \rightarrow Z$).
- ii) F è esatto.
- iii) F è esatto a sinistra e preserva gli epimorfismi.
- iii') F è esatto a destra e preserva i monomorfismi.
- iv) F preserva le successioni esatte corte.

Dimostrazione. Molte implicazioni sono ovvie, in particolare è evidente che i) \implies ii) \implies iii) \implies iv) e ii) \implies iii' \implies iv). Inoltre iv) \implies ii) per la proposizione ???. Resta da dimostrare che ii) \implies i).

Sia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ esatta in \mathcal{A} .

Allora $f = f' \circ p$ con p epi e f' mono. Inoltre $\text{im } f = \ker g$ mma $\text{im } f = \ker(\text{coker}(f))$ e poiché p è epi, allora $\text{coker } f = \text{coker } f' \implies \text{im } f = \text{im } f'$. Poiché f' è mono, allora $\text{im } f' = f'$ e dunque $\ker g = f'$. Dunque $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g} Z$ è esatta e F è esatto (a sinistra). Segue che $0 \rightarrow F(X') \xrightarrow{F(f')} F(X) \rightarrow F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ è esatta. Ma $F(f) = F(f') \circ F(p)$ e $F(p)$ è epi, essendo F esatto a destra, dunque $\text{coker}(F(f)) = \text{coker}(F(f')) \implies \text{im}(F(f)) \implies \text{im}(F(f')) = \ker(F(g)) \implies$

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

è esatta. \square

Definizione 245

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtore tra categorie abeliane è esatto al centro se F è additivo e per ogni successione esatta $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ in \mathcal{A} , allora $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ è esatta in \mathcal{B} .

Corollario 246. F è esatto a sinistra/destra $\iff F$ è esatto al centro e preserva i mono/epimorfismi.

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo tra categorie abeliane. Allora F preserva le successioni esatte corte che si spezzano. Dunque se \mathcal{A} è semisemplice allora F è esatto.

Esempio 247. Sia $A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ è esatto.

Esempio 248. Se \mathcal{A} è abeliana e $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria piena è chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei (dunque \mathcal{A}' è additiva), allora il funtore di inclusione $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ è esatto.

Esempio 249. Sia \mathcal{C} una categoria (piccola) e \mathcal{A} una categoria abeliana (quindi $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è abeliana).

Allora $\forall X \in \mathcal{C}$ il funtore di valutazione in X

$$\begin{aligned} \text{ev}_X : \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{A} \\ F &\longmapsto \text{ev}_X(F) = F(X) \\ \alpha &\longmapsto \text{ev}_X(\alpha) = \alpha_X \end{aligned}$$

è esatto

Esempio 250. Sia \mathcal{A} una categoria abeliana e $X \in \mathcal{A}$. Allora i funtori $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ e $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ sono esatti a sinistra (e più in generale preservano i limiti).

Dim. $\mathcal{A}(X, -)$ esatto a sinistra (assumendo additivo). $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y'' (\rightarrow 0)$ è esatta in \mathcal{A} . Allora $0 \rightarrow \mathcal{A}(X, Y') \xrightarrow{f_*} \mathcal{A}(X, Y) \xrightarrow{g_*} \mathcal{A}(X, Y'')$ è esatta in Ab .

Infatti $g \circ f = 0 \implies g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0_* = 0$ e dato $h \in \mathcal{A}(X, Y)$ tale che $g_*(h) = 0$, devo dimostrare che $\exists! h' \in \mathcal{A}(X, Y')$ tale che $h = f_*(h')$. Questo è vero

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f=\ker g} & Y & \xrightarrow{g} & Y'' \\ \nearrow h' & \downarrow h & \nearrow & & \searrow 0 \\ X & & & & \end{array} \quad \text{perché } 0 = g_*(h) = g \circ h. \quad \text{E dunque} \quad \text{e per la proprietà}$$

universale del ker tale h' esiste unico. □

In generale $\mathcal{A}(X, -)$ e $\mathcal{A}(-, X)$ non sono esatti a destra (ma lo sono se \mathcal{A} è semisemplice). In particolare, se $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y'' \rightarrow 0$ non si spezza, allora $\mathcal{A}(Y'', -)$ non è esatto a destra, perché g epi in \mathcal{A} ma g_* non è epi (suriettivo) in Ab . Infatti $g_* : \mathcal{A}(Y'', Y) \rightarrow \mathcal{A}(Y'', Y'')$ è tale che $\text{id}_{Y''} \notin \text{im}(g_*)$. Analogamente $\mathcal{A}(-, Y')$ non è esatto a destra.

Esempio 251. Sia A un dominio d'integrità non campo. Consideriamo $F : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ dato da $F(M) = M/T(M)$ e $F(f : M \rightarrow N) = \bar{f} : M/T(M) \rightarrow N/T(N)$ omomorfismo indotto. Allora F è additivo (esercizio) e preserva mono e epi ma **non è esatto al centro** (e dunque neanche a sinistra o destra).

Infatti se f è suriettivo, allora anche \bar{f} è suriettivo e se f è iniettivo, allora \bar{f} è iniettivo poiché $\bar{x} \in \ker \bar{f} \implies f(x) \in T(N) \implies \exists 0 \neq a \in A : 0 = af(x) = f(ax) \implies ax = 0$ per iniettività di f . Segue che quindi $x \in T(M) \implies \bar{x} = \bar{0}$.

Tuttavia nono è esatto al centro, infatti se $0 \neq I \subsetneq A$ è ideale, allora $0 \rightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \rightarrow 0$ è esatta in $A\text{-Mod}$, ma $T(I) = T(A) = 0$ e $T(A/I) = A/I$, dunque $F(I) = I$, $F(A) = A$ e $F(A/I) = 0$, per cui si ottiene $I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{F(\pi)} 0$ che **non** è esatta.

Proposizione 252. *Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ esatto e fedele tra categorie abeliane. Sia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ una successione (qualunque) in \mathcal{A} tale che $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ è esatta in \mathcal{B} , allora $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ è esatta in \mathcal{A}*

Nota (zione). Sia $X' \subseteq X$ sottoggetto di X . Allora indico con X/X' un conucleo di $X' \rightarrowtail X$

Dimostrazione. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = 0 \stackrel{\text{additivo}}{=} F(0)$, quindi $g \circ f = 0$ poiché F è fedele, e dunque $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ è un complesso e quindi $\text{Im } f \subseteq \text{Kerg}$ come sottoggetti. Devo dimostrare quindi che $C := \text{Kerg}/\text{Im } f = 0$. Poiché F preserva i nuclei, $F(C) = F(\text{Kerg})/F(\text{Im } f) = \text{Ker}(F(g))/\text{Im}(F(f)) = 0$ perché la successione in \mathcal{B} è esatta. Segue dunque che $F(1_C) = 0 = F(0 : C \rightarrow C)$ e F è fedele, dunque $1_C = 0$, ossia $C = 0$ è l'oggetto nullo. \square

Teorema 253: Freyd - Mitchell

Sia \mathcal{A} una categoria abeliana (piccola). Allora esiste un anello A e un funtore esatto pienamente fedele $\mathcal{A} \rightarrow A\text{-Mod}$

Corollario 254. *Le dimostrazioni di caccia al diagramma in \mathcal{A} abeliana si possono fare in $A\text{-Mod}$*

In realtà il teorema precedente si può utilizzare anche se \mathcal{A} non è piccola, perché tanto il diagramma solitamente prende pochi oggetti

Lemma 255: del Serpente

Il seguente diagramma con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} (0 \longrightarrow)X' & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{p} & X'' & \longrightarrow 0 \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow Y' & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{q} & Y'' & (\longrightarrow 0) & \end{array}$$

induce una successione esatta

$$(0 \rightarrow) \text{Ker } f' \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \xrightarrow{d} \text{Coker } f' \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow \text{Coker } f'' (\rightarrow 0)$$

Dimostrazione. Corollario ???. Se invece volessimo dimostrarlo esplicitamente usando solo elementi categorici, si può dimostrare utilizzando prodotti fibrati difficili perché non si può usare la proprietà universale dei ker e coker banalmente (notare che d è dal lato sbagliato per poterlo fare) \square

Osservazione. Se \mathcal{A} è una categoria (pre)abeliana, allora ci sono i funtori Ker , $\text{Coker} : \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ definita nel modo ovvio per $\text{Ker}(f)$ e per ogni morfismo

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow f' & \quad \downarrow f & \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array} : f \rightarrow f' \text{ in } \text{Mor}(\mathcal{A}), \text{ allora } \text{Ker}((i,j)) := i' \text{ tale che } \text{Ker } f \circ i' =$$

$i \circ \text{Ker } f'$ o equivalentemente (includendo anche la definizione di Coker) il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ker}(f') & \xrightarrow{i'} & \text{Ker}(f) \\
\downarrow \text{ker } f' & & \downarrow \text{ker } f \\
X' & \xrightarrow{i} & X \\
\downarrow f' & & \downarrow f \\
Y' & \xrightarrow{j} & Y \\
\downarrow \text{coker } f' & & \downarrow \text{coker } f \\
\text{Coker } f' & \xrightarrow{j'} & \text{Coker } f
\end{array}$$

e per il lemma del serpente Ker è esatto a sinistra e Coker è esatto a destra. Non sono però esatti, perché se prendo $X' = Y'' = 0$, $p = f$, $j = 1_X$ e $X \neq 0$, allora ottengo la successione

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\cong} & X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \\
& & & & & \parallel & & \parallel & \\
& & & & & \text{Ker } f'' & & \text{Coker } f' &
\end{array}$$

Capitolo 3

Moduli (reprise)

Definizione 256: Bimodulo

Siano A, B anelli. Allora un (A, B) -bimodulo è un gruppo abeliano $(M, +)$ con struttura di A -modulo sinistro e di B -modulo destro tale che $(ax)b = a(xb)$ per ogni $a \in A, b \in B$ e $x \in M$.

Se $A = B$ allora si dice A -bimodulo invece che (A, A) -bimodulo.

Osservazione. Un (A, B) -bimodulo è anche un (B^{op}, A^{op}) -bimodulo. In particolare

$$A\text{-bimodulo} = A^{op}\text{-bimodulo}$$

Esempio 257. A come anello è un A -bimodulo

Esempio 258. Se A è commutativo, allora se M è A -modulo è un A -bimodulo, con la proprietà aggiuntiva che $ax = xa$ (più in generale se vale questa proprietà si dice che il bimodulo è *simmetrico*)

Esempio 259. Se B è una A -algebra e M un B -modulo *sinistro/destro*, allora M è un $(B, A)/(A, B)$ -bimodulo.

Di conseguenza, $\forall A$ anello e $\forall M$ A -modulo *sinistro/destro*, M è un $(A, \mathbb{Z})/(\mathbb{Z}, A)$ -bimodulo.

Definizione 260: Omomorfismo di bimoduli

Un omomorfismo di (A, B) -bimoduli è $f : M \rightarrow N$ omomorfismo sia di A -moduli sinistri che di B -moduli destri.

Si ottiene che la categoria $A\text{-Mod-}B$ degli (A, B) -bimoduli è una categoria abeliana.

Proposizione 261. Sia $M \in A\text{-Mod-}B$ e $N \in A\text{-Mod-}C$. Allora $\text{Hom}_A(M, N)$ è un (B, C) -bimodulo con

$$(bf)(x) := f(xb) \quad ; \quad (fc)(x) := f(cx) \quad \forall b \in B, c \in C, x \in M, f \in \text{Hom}_A(M, N)$$

Dimostrazione. bf è A -lineare, infatti $(bf)(ax) = a(bf)(x)$ per ogni $a \in A$ perché $(bf)(ax) = f((ax)b) = f(a(xb)) = af(xb) = a(bf)(x)$. Analogamente fc è A -lineare (lasciato per esercizio).

Devo dimostrare in particolare che $(bb')(f) = b(b'f)$ e $f(cc') = (fc)c'$. Sono entrambe vere perché, $\forall x \in M$

$$((bb')(f))(x) = f(x(bb')) = f((xb)b') = (b'f)(xb) = (b(b'f))(x)$$

e analogamente l'altra (lasciata per esercizio).

Resta da dimostrare che $(bf)c = b(fc)$. Infatti

$$(b(fc))(x) = (fc)(xb) = f(xb)(c) = (bf)(x)c = ((bf)c)(x)$$

□

Corollario 262. *Sia $M \in A\text{-Mod-}B$. Allora si ottengono funtori (additivi)*

$$\begin{aligned}\text{Hom}_A(M, -) &: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod} \\ \text{Hom}_A(-, M) &: (A\text{-Mod})^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod-}B\end{aligned}$$

Dimostrazione. resta da dimostrare che $\forall g : N \rightarrow N'$ in $A\text{-Mod}$, allora $g_* : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N')$ definita da $f \mapsto g \circ f$ e $g^* : \text{Hom}_A(N', M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M)$ definita da $f' \mapsto f' \circ g$ sono B -lineari.

Dunque vogliamo mostrare che $g_*(bf) = g \circ bf = b(g \circ f) = bg_*(f)$. Effettivamente $\forall x \in M$

$$(g \circ (bf))(x) = g((bf)(x)) = g(f(xb)) = (g \circ f)(xb) = (b(g \circ f))(x)$$

e analogamente g^* è B -lineare (lasciato per esercizio). □

Esempio 263. Il funtore $\text{Hom}_A(A, -) : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ è isomorfo a $\text{id}_{A\text{-Mod}}$ con isomorfismo naturale $\alpha : \text{Hom}_A(A, -) \rightarrow \text{id}_{A\text{-Mod}}$ definito $\forall M \in A\text{-Mod}$ da

$$\begin{aligned}\alpha_M : \text{Hom}_A(A, M) &\longrightarrow M \\ f &\longmapsto \alpha_M(f) = f(1)\end{aligned}$$

so già che α_M è biunivoca. Resta da dimostrare che è A -lineare. Questo è vero perché, $\forall a \in A$

$$\alpha_M(af) = (af)(1) = f(1a) = f(a1) = af(1) = a\alpha_M(f)$$

e inoltre se $g : M \rightarrow N$ è A -lineare, allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}\text{Hom}_A(A, M) & \xrightarrow{\alpha_M} & M \\ \downarrow g_* & & \downarrow g \\ \text{Hom}_A(A, N) & \xrightarrow{\alpha_N} & N\end{array}$$

commuta. Questo è vero perché $\forall f \in \text{Hom}_A(A, M)$, $g(\alpha_M(f)) = g(f(1))$ e $\alpha_N(g_*(f)) = a_N(g \circ f) = (g \circ f)(1)$

Esempio 264. Sia A commutativo, B una A -algebra, M, N B -moduli. Allora Poiché $M, N \in B\text{-Mod-}A$, $\text{Hom}_B(M, N)$ è A -bimodulo simmetrico (ossia tale che $\forall a \in A$ e $\forall f \in \text{Hom}_B(M, N)$, $(af)(x) = f(ax) = af(x)$).

In particolare se M, N sono A -moduli, allora $\text{Hom}_A(M, N)$ è un A -modulo in questo modo.

Definizione 265: Prodotto tensoriale

Un *prodotto tensoriale* di $M \in \text{Mod-}A$ e $N \in A\text{-Mod}$ è un gruppo abeliano T con una funzione $t : M \times N \rightarrow T$ che sia A -bilanciata, cioè t è \mathbb{Z} -bilineare e

$$t(xa, y) = t(x, ay) \quad \forall a \in A, \forall x \in M, \forall y \in N$$

universale per tale proprietà, ossia t è tale che $\forall G$ gruppo abeliano e $\forall f : M \times N \rightarrow G$ A -bilanciata $\exists ! f' : T \rightarrow G$ \mathbb{Z} -lineare tale che $f = f' \circ t$

Proposizione 266. Siano (T, t) e (T', t') due prodotti tensoriali di M e N . Allora $\exists! i : T \rightarrow T'$ \mathbb{Z} -lineare tale che $t' = i \circ t$ e i è isomorfismo.

Inoltre si può prendere $T := \mathbb{Z}^{(M \times N)} / H$. Con leggero abuso di notazione in $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$ indico con (x, y) l'elemento della base indicizzato da $(x, y) \in M \times N$. Con tale notazione, e $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ e $a \in A$

$$H = \left\langle \underbrace{(x + x', y) - (x, y) - (x', y)}_{\text{additività nel primo argomento}}, \underbrace{(x, y + y') - (x, y) - (x, y')}_{\text{add. nel secondo arg.}}, \underbrace{(xa, y) - (x, ay)}_{\text{bilanciataggine}} \right\rangle$$

e

$$t(x, y) = (x, y) + H$$

Dimostrazione unicità. Per la proprietà universale di T, t , $\exists! i$ tale che $t' = i \circ t$. Analogamente per $i' : T' \rightarrow T$ e come al solito $i \circ i' = \text{id}_{T'}$ e $i' \circ i = \text{id}_T$ \square

Dimostrazione. Dimostrazione esistenza t è A -bilanciata per definizione di T . Data $f : M \times N \rightarrow G$ A -bilanciata $\exists! \tilde{f} : \mathbb{Z}^{(M \times N)} \rightarrow G$ \mathbb{Z} -lineare tale che $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ per ogni $x \in M$ e $y \in N$.

Allora f è A -bilanciata implica che $\tilde{f}|_H = 0$ e per il teorema di omomorfismo per gruppi $\exists! f' : T \rightarrow G$ \mathbb{Z} -lineare tale che $\tilde{f} = f' \circ \pi$ (con $\pi : \mathbb{Z}^{(M \times N)} \rightarrow T$ la proiezione).

Abbiamo che $t = \pi \circ j$, con $j : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ definita da $(x, y) \mapsto (x, y)$.

Finalmente si conclude che

$$f = \tilde{f} \circ j = f' \circ \pi \circ j = f' \circ t$$

e f' è unica (esercizio). \square

Nota (zione). Si indica T con $M \otimes_A N$ e $t(x, y)$ con $x \otimes y$.

Osservazione. $M \otimes_A N = \langle x \otimes y : x \in M, y \in N \rangle = \langle x \otimes y : x \in U, y \in V \rangle$ con $M = \langle U \rangle$ e $N = \langle V \rangle$. Uno potrebbe pensare che basti prendere U e V generatori come *modulo* di M e N ma questo in generale non basta e U, V devono essere generatori di M e N come gruppo.

Proposizione 267. Sia $M \in \text{Mod-}A$ e $N \in A\text{-Mod}$. Allora la funzione

$$\begin{aligned} M \otimes_A N &\rightarrow N \otimes_{A^{\text{op}}} M \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x \end{aligned}$$

è ben definita ed è isomorfismo di gruppi

Dimostrazione. Bisogna controllare che

$$\begin{aligned} f : M \times N &\longrightarrow N \otimes_{A^{\text{op}}} M \\ (x, y) &\longmapsto f((x, y)) = y \otimes x \end{aligned}$$

sia A -bilanciata. Lo è perché

$$f(xa, y) = y \otimes (xa) = (ay) \otimes x = f(x, ay)$$

E dunque $\exists! f' : M \otimes_A N \rightarrow N \otimes_{A^{\text{op}}} M$ \mathbb{Z} -lineare tale che $f(x \otimes y) = y \otimes x$

Immagino che sia per la solita ragione che f' è \mathbb{Z} -lineare. \square

Proposizione 268. Sia $f : M \rightarrow M'$ in $\text{Mod-}A$ e $g : N \rightarrow N'$ in $A\text{-Mod}$. Allora $f \otimes g : M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N'$ data da $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$ è (ben definita) e isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $\varphi : M \times N \rightarrow M' \otimes_A N'$, $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$ è A -bilanciata (esercizio).

Allora $\exists! \varphi' : M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N'$ \mathbb{Z} -lineare tale che $\varphi'(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ \square

Corollario 269. *Esistono i funtori (additivi)*

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A - : A\text{-Mod} & \longrightarrow & Ab \\ N & \longmapsto & M \otimes_A N \\ (g : N \rightarrow N') & \longmapsto & \text{id}_M \otimes g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} - \otimes_A N : \text{Mod-}A & \longrightarrow & Ab \\ M & \longmapsto & M \otimes_A N \\ (f : M \rightarrow M') & \longmapsto & f \otimes \text{id}_N \end{array}$$

Proposizione 270. *Sia $M \in B\text{-Mod-}A$, $N \in A\text{-Mod-}C$. Allora $M \otimes_A N \in B\text{-Mod-}C$ con $b(x \otimes y) := (bx) \otimes y$ e $(x \otimes y)c := x \otimes (yc)$*

Dimostrazione. Fissato $b \in B$ devo vedere che la moltiplicazione a sinistra per b è ben definita. Infatti $\varphi_b : M \rightarrow M$ data da $x \mapsto bx$ è A -lineare e $\varphi_{b*} : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$ definita da $x \otimes y \mapsto (bx) \otimes y$ è \mathbb{Z} -lineare.

Va visto che $\forall z \in M \otimes_A N$ e $\forall b, b' \in B$ allora $(bb')z = b(b'z)$. Poiché basta verificarlo su un generatore allora basta verificarlo quando $z = x \otimes y$ e lì è chiaro.

Analogamente per $z(cc') = (zc)c'$ e $(bz)c = b(zc)$. \square

Corollario 271. *Sia $M \in B\text{-Mod-}A$. Allora esistono i funtori (additivi)*

$$M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod} \quad e \quad - \otimes_B M : \text{Mod-}B \rightarrow \text{Mod-}A$$

Dimostrazione. Per $M \otimes_A -$ resta da dimostrare che $\forall g : N \rightarrow N'$ in $A\text{-Mod}$, $g_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N'$ è B -lineare, cioè $g_*(bz) = bg_*(z)$ per ogni $z \in M \otimes_A N$. Posso supporre $z = x \otimes y$ da cui

$$g_*(bz) = g_*(b(x \otimes y)) = \underbrace{g_*}_{\text{id}_M \otimes g}((bx) \otimes y) = (bx) \otimes g(y) = b(x \otimes g(y)) = bg_*(z)$$

Per $- \otimes_B M$ il discorso è simile nelle categorie op. \square

Corollario 272. *Sia A commutativo, $M, N \in A\text{-Mod}$. Allora $M \otimes_A N \in A\text{-Mod}$*

Osservazione. Se A è commutativo, allora

$$\begin{aligned} t : M \times N &\rightarrow M \otimes_A N \\ (x, y) &\mapsto x \otimes y \end{aligned}$$

è A -bilineare (oltre che A -bilanciata ovviamente) perché $t(ax, y) = (ax) \otimes y = a(x \otimes y) = x \otimes (ay) = t(x, ay)$.

Inoltre, data $f : M \times N \rightarrow P$ A -bilineare (con $P \in A\text{-Mod}$, allora f è A -bilanciata e quindi $\exists! f' : M \otimes_A N \rightarrow P$ \mathbb{Z} -lineare tale che $f = f' \circ t$ e f' è A -lineare perché $f'(a(x \otimes y)) = f'((ax) \otimes y) = f'(t(ax, y)) = f(ax, y) = af(x, y) = \dots = af'(x \otimes y)$).

Una conseguenza è che su A commutativo si può definire $M \otimes_A N$ attraverso la proposizione universale per le funzioni A -bilineari $M \times N \rightarrow P$.

Osservazione. Sia $M \in B\text{-Mod-}A$ e $N \in A\text{-Mod-}C$. Allora $M \otimes_A N = B(U \otimes V)C$ se $M = BU$ e $N = VC$

Definizione 273: Funtore aggiunto

Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ funtori. Si dice che F è *aggiunto sinistro* di G (o che G è *aggiunto destro* di F) e si indica $F \dashv G$ se $\forall X \in \mathcal{C}$ e $\forall Y \in \mathcal{D}$

$$\exists \varphi = \varphi_{X,Y} : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$$

biunivoca e naturale in X e Y , cioè $\forall f : X' \rightarrow X$ in \mathcal{C} e $\forall g : Y \rightarrow Y'$ in \mathcal{D} il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}(F(X'), Y) & \xleftarrow{F(f)^*} & \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{g_*} & \mathcal{D}(F(X), Y') \\ \varphi_{X', Y} \downarrow & & \varphi_{X, Y} \downarrow & & \downarrow \varphi_{X, Y'} \\ \mathcal{C}(X', G(Y)) & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{C}(X, G(Y)) & \xrightarrow{G(g)_*} & \mathcal{C}(X, G(Y')) \end{array}$$

ossia $\forall h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$,

$$\varphi_{X, Y'}(g \circ h) = G(g) \circ \varphi_{X, Y}(h) \text{ e } \varphi_{X', Y}(h \circ F(f)) = \varphi_{X, Y}(h) \circ f$$

Osservazione. Una φ come sopra definisce una trasformazione naturale (isomorfismo) $\mathcal{D}(F(-), -) \Rightarrow \mathcal{C}(-, G(-))$ tra funtori $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ (o viceversa dato un tale isomorfismo naturale si ottiene un'aggiunzione tra F e G). Questo equivale a dire che, per ogni $X' \xrightarrow{f} X$ e $Y \xrightarrow{g} Y'$, il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{\varphi_{X, Y}} & \mathcal{C}(X, G(Y)) \\ g_* \circ F(f)^* \downarrow & & \downarrow G(g)_* \circ f^* \\ \mathcal{D}(F(X'), Y') & \xrightarrow{\varphi_{X', Y'}} & \mathcal{C}(X', G(Y')) \end{array}$$

ossia che $\forall h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$, si ha che $\varphi_{X', Y'} \circ g_* \circ F(f)^*(h) = G(g)_* \circ f^* \circ \varphi_{X, Y}(h)$, ossia $\varphi_{X', Y'}(g \circ h \circ F(f)) = G(g) \circ \varphi_{X, Y}(h) \circ f$

Osservazione. $F \dashv G \iff G^{op} \dashv F^{op}$

Esempio 274. Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è un'equivalenza e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ è un quasi-inverso di F , allora $F \dashv G$ e $G \dashv F$

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che $\forall X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}(F(X), Y) \xrightarrow[\sim]{G} \mathcal{C}(G(F(X)), G(Y)) \xrightarrow[\sim]{\alpha_X^*} \mathcal{C}(X, G(Y))$$

se $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ isomorfismo ($\implies \alpha_X : X \rightarrow G \circ F(X)$ isomorfismo in \mathcal{C}) \square

Esempio 275.

$$(\text{Abel} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}) \dashv (\mathbf{Ab} \xrightarrow{\text{inclusione}} \mathbf{Grp})$$

con $\text{Abel}(G) = G/[G, G]$. Allora questo è vero perché $\forall G \in \mathbf{Grp}$ e $\forall H \in \mathbf{Ab}$

$$\mathbf{Ab}\left(\frac{G}{[G, G]}, H\right) \longleftrightarrow \mathbf{Grp}(G, H)$$

Esempio 276. Sia A un dominio d'integrità e $\mathcal{A} \subseteq A\text{-Mod}$ la sottocategoria piena dei moduli senza torsione. Allora

$$\begin{aligned} (A\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{A}) &\dashv \left(\mathcal{A} \xrightarrow{\text{inclusione}} A\text{-Mod} \right) \\ M &\mapsto \frac{M}{T(M)} \end{aligned}$$

perché $\forall M, N \in A\text{-Mod}$ con $T(N) = 0$ allora

$$\text{Hom}_A(M/T(M), N) \cong \text{Hom}_A(M, N)$$

Proposizione 277. Se $F \dashv G$ e $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, allora $F' \dashv G \iff F' \cong F$

Dimostrazione.

\implies Cerco $\alpha_X \in \mathcal{D}(F(X), F'(X))$ e possiamo prendere

$$\alpha_X = \varphi_{X, F'(X)}^{-1} \left(\varphi'_{X, F'(X)}(1_{F'(X)}) \right)$$

\iff Sia $\alpha : F \rightarrow F'$ l'isomorfismo. Allora voglio definire $\varphi'_{X, Y} : \mathcal{D}(F'(X) \rightarrow Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$ per ogni $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$ e possiamo definirlo come $\varphi'_{X, Y} = \varphi_{X, Y} \circ \alpha_X^*$

□

Esempio 278. Dati $F : \mathbf{Set} \rightarrow A\text{-Mod}$ e $G : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ dati da $F : \Lambda \mapsto A^{(\Lambda)}$ e $G : M \mapsto M$ il funtore dimenticante, allora $F \dashv G$ poiché $\text{Hom}_A(A^{(\Lambda)}, M) \leftrightarrow \mathbf{Set}(\Lambda, M)$

Osservazione. Dato $(F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$ dato da $\varphi_{X, Y} : \mathcal{D}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, G(Y))$, ottengo una trasformazione naturale

$\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ (**unità** dell'aggiunto) e $\varepsilon : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ (**counità** dell'aggiunto)

definite da, $\forall X \in \mathcal{C}$, $\eta_X := \varphi_{X, F(X)}(1_{F(X)}) \in \mathcal{C}(X, G(F(X))) \cong \mathcal{D}(F(X), F(X)) \ni 1_{F(X)}$ e la ε $\forall Y \in \mathcal{D}$ data da $\varepsilon_Y := \varphi_{G(Y), Y}^{-1}(1_{G(Y)})$.

A questo punto, per ogni $h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$,

$$\varphi(h) = \varphi(h \circ 1_{F(X)}) \stackrel{\varphi \text{ nat.}}{=} G(h) \circ \varphi(1_{F(X)}) = G(h) \circ \eta_X$$

Quindi $\forall k \in \mathcal{C}(X, G(Y))$, esiste unico $h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$ tale che $k = \varphi(h) = G(h) \circ \eta_X$

Proposizione 279. Se \mathcal{C} e \mathcal{D} sono preadditive e G è additiva, allora F è additivo e $\varphi_{X, Y}$ è \mathbb{Z} -lineare per ogni $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$. In altre parole φ dà trasformazioni naturali $\mathcal{D}(F(-), =) \rightarrow \mathcal{C}(-, G(=))$ come funtori $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Ab}$

Dimostrazione. $\forall h, h' \in \mathcal{D}(F(X), Y)$, si ha che $\varphi_{X, Y}(h + h') = G(h + h') \circ \eta_X = G(h) \circ \eta_X + G(h') \circ \eta_X = \varphi(h) + \varphi(h')$. Inoltre $\forall f' : X \rightarrow X'$ in \mathcal{C} ,

$$\begin{aligned} G(F(f + f')) \circ \eta_{X'} &\stackrel{\eta \text{ nat.}}{=} \eta_{X'} \circ (f + f') = \eta_{X'} \circ f + \eta_{X'} \circ f' = \\ &= G(F(f)) \circ \eta_X + G(F(f')) \circ \eta_X = G(F(f) + F(f')) \circ \eta_X \\ \implies F(f + f') &= F(f) + F(f') \end{aligned}$$

□

Teorema 280

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} categorie qualunque e siano F, G funtori tali che

$$(F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$$

Allora F preserva i colimiti e G preserva i limiti.

Idea della dimostrazione. Sia $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtore (con \mathcal{L} piccola) con $\lim I = (Z \in \mathcal{D}, \alpha : K_Z \rightarrow I)$. Allora per definizione di limite si ha che, $\forall Y \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \delta_{Y, Z} : \mathcal{D}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_Y, I) \\ g &\longmapsto \delta_{Y, Z}(g) = \alpha \circ K_g \end{aligned}$$

è biunivoca. Vogliamo dimostrare che $\lim(G \circ I) = (G(Z), G \circ \alpha : K_{G(Z)} \rightarrow G \circ I)$, ossia che $\forall X \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\gamma_{X,Z} : \mathcal{C}(X, G(Z)) &\longrightarrow \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{C})(K_X, G \circ I) \\ f &\longmapsto \gamma_{X,Z}(f) = g \circ \alpha \circ K_f\end{aligned}$$

è biunivoca. A tale scopo notiamo che abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(X, G(Z)) & \xrightarrow{\gamma_{X,Z}} & \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{C})(K_X, G \circ I) \\ \varphi_{X,Z} \uparrow & & \uparrow \tilde{\varphi} \\ \mathcal{D}(F(X), Z) & \xleftarrow{\delta_{F(X),Z}} & \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_{F(X)}, I)\end{array}$$

dove $\tilde{\varphi}$ è definita nel seguente modo per ogni $\beta \in \text{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_{F(X)}, I)$, ossia per ogni trasformazione naturale $\beta : K_{F(X)} \rightarrow I$

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \tilde{\varphi}(\beta)_L := \varphi_{X,I(L)}(\beta_L) : X \rightarrow G(I(L))$$

si verifica che $\tilde{\varphi}$ è ben definita ed è biunivoca, il diagramma commuta e dunque $\gamma_{X,Z}$ è biunivoca. \square

Corollario 281. *Ogni equivalenza di categorie preserva limiti e colimiti.*

Corollario 282. *Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore tra categorie additive. Allora:*

1. *Se F è aggiunto sinistro/destro, F è additivo (preserva infatti i coprodotti/prodotti finiti)*
2. *Se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono abeliane e F è aggiunto sinistro/destro, allora F è esatto a destra/sinistra*

Esercizio 283

Sia \mathcal{A} una categoria abeliana. Dimostrare che Ker è esatto a sinistra e Coker è esatto a destra.

Suggerimento: (per Ker) considerare il funtore $\mathcal{A} \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{A})$ dato da $X \mapsto (X \mapsto 0)$

Teorema 284

Sia $M \in B\text{-Mod-}A$. Allora

$$(M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}) \dashv (\text{Hom}_B(M, -) : B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod})$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che, $\forall N \in A\text{-Mod}$ e $\forall P \in B\text{-Mod}$, $\text{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \cong \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(M, P))$. Questo è vero perché

$$\begin{array}{ccccc}\text{Hom}_B(M \otimes_A N, P) & \xrightarrow{\sim} & \text{Bal}_A^B(M \times N, P) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(M, P)) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \text{Hom}(M \otimes_A N, P) & \xrightarrow[\sim]{t^*} & \text{Bal}_A(M \times N, P) & \xleftarrow[\substack{f \mapsto \bar{f} \\ g \mapsto g}]{} & \text{Hom}_A(N, \text{Hom}(M, P))\end{array}$$

Dove:

- t^* è biunivoca perché sappiamo che $t : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ è A -bilanciata universale.

- le due funzioni tra Bal_A e Hom_A sono definite da $\tilde{g}(x, y) = g(y)(x)$ e $\tilde{f}(y)(x) = f(x, y)$. Sono chiaramente una l'inversa dell'altra, e l'unica verifica non ovvia da fare è che $\tilde{f}(ay) = a\tilde{f}(y)$ per ogni $a \in A$ e $\forall y \in N$, effettivamente abbiamo che, $\forall x \in M$,

$$\tilde{f}(ay)(x) = f(x)(ay) = f(xa, y) = \tilde{f}(y)(xa) = a\tilde{f}(y)(x)$$

e analogamente se g è A -lineare, allora \tilde{g} è A -bilanciata.

- $\text{Bal}_A^B(M \times N, P) = \{f \in \text{Bal}_A(M \times N, P) | f \text{ è } B\text{-lineare nel primo argomento}\}$

Le biezioni rimangono nei sottoinsiemi, perché conservano la B -linearità \square

Corollario 285. $M \otimes_A -$ è esatto a destra e preserva i coprodotti (e anche $\text{Hom}_B(M, -)$ è esatto a sinistra e preserva i prodotti)

Corollario 286. Se A è commutativo e $M \in A\text{-Mod}$, allora

$$(M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}) \dashv (\text{Hom}_A(M, -) : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod})$$

Osservazione. $A \in A\text{-Mod}-A$, dunque

$$(A \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}) \dashv (\text{Hom}_A(A, -) : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}) \cong \text{id}_{A\text{-Mod}}$$

da cui $A \otimes_A - \cong \text{id}_{A\text{-Mod}}$ e potevamo vederlo più direttamente in quanto $\forall M \in A\text{-Mod} A \otimes_A M \rightarrow M$ dato da $a \otimes x \mapsto ax$ è ben definito ed è un isomorfismo con inverso $M \rightarrow A \otimes_A M$ dato da $x \mapsto 1 \otimes x$.

Proposizione 287. Sia $M \in \text{Mod}-A$, $N \in A\text{-Mod}-B$ e $P \in B\text{-Mod}$. Allora

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

con isomorfismo tale che $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$

Dimostrazione. Fissato $z \in P$, sia

$$\begin{aligned} f_z : M \times N &\longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P) \\ (x, y) &\longmapsto f_z((x, y)) = x \otimes (y \otimes z) \end{aligned}$$

Allora f_z è A -bilanciata e dunque per la proprietà universale del prodotto tensoriale $\exists! f'_z : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P)$ \mathbb{Z} -lineare tale che $x \otimes y \mapsto x \otimes (y \otimes z)$. Sia ora

$$\begin{aligned} f : (M \otimes_A N) \times P &\longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P) \\ (w, z) &\longmapsto f((w, z)) = f'_z(w) \end{aligned}$$

Allora f è B -bilanciata. Infatti se $w = x \otimes y$ (basta verificare in questo caso)

$$\begin{aligned} f(wb, z) &= f'_z(wb) = f'_z((x \otimes y)b) = f'_z(x \otimes yb) = x \otimes ((yb) \otimes z) = \\ &= x \otimes (y \otimes bz) = f'_{bz}(x \otimes y) = f'_{bz}(w) = \\ &= f(w, bz) \end{aligned}$$

Ora di nuovo per la proprietà universale del prodotto tensoriale possiamo dire che $\exists! f' : (M \otimes_A N) \otimes_B P \rightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P)$ \mathbb{Z} -bilineare t.c. $f'((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ \square

Corollario 288. Se A è commutativo e $M, N, P \in A\text{-Mod}$, allora $(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P)$

Osservazione. Se $M \in B\text{-Mod}-A$, allora in generale $M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ non preserva i monomorfismi.

Ad esempio sia A un dominio d'integrità non campo e sia $0 \neq a \in A \setminus A^*$. Allora $f_a : A \rightarrow A$ dato da $b \mapsto ab$ è monomorfismo in $A\text{-Mod}$, ma preso $M = A/(a)$ abbiamo che $\varphi_{a*} : M \otimes_A A \rightarrow M \otimes_A A$ dato da $x \otimes b \mapsto x \otimes (ab)$ non è iniettivo

3.1 Funtori indotti da omomorfismi di anelli

A questo punto, dato un omomorfismo di anelli $f : A \rightarrow B$, esso induce i funtori

- $f^* : B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ (restrizione degli scalari)
- $f_! := B \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ (estensione degli scalari, considerando $B \in B\text{-Mod-A}$)
- $f_* := \text{Hom}_A(B, -) : A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ (coestensione degli scalari, considerando $B \in A\text{-Mod-B}$)

Come notazione si può usare f_* invece di f^* , f^* invece di $f_!$ e $f^!$ invece di f_*

Proposizione 289. *Sia $f : A \rightarrow B$ come sopra, ossia $f \in \text{Rng}(A, B)$, allora*

$$f_! \dashv f^* \dashv f_*$$

Dimostrazione. $\forall N \in A\text{-Mod}$ e $\forall P \in B\text{-Mod}$ devo dimostrare che

1. $\text{Hom}_B(f_!(N), P) \cong \text{Hom}_A(N, f^*(P))$
2. $\text{Hom}_A(f^*(P), N) \cong \text{Hom}_B(P, f_*(N))$

1. $\text{Hom}_B(f_!(N), P) = \text{Hom}_B(B \otimes_A N, P) \cong \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_B(B, P))$ per il corollario ?? ma ora $\text{Hom}_B(B, P) \cong P$ come A -modulo, dunque abbiamo che il precedente

$$\text{Hom}_B(f_!(N), P) \cong \text{Hom}_A(N, P) = \text{Hom}_A(N, f^*(P))$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato che effettivamente $\text{Hom}_A(N, P)$ è la restrizione degli scalari. \square

2.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(f^*(P), N) &\stackrel{P \text{ } A\text{-modulo}}{\cong} \text{Hom}_A(P, N) \cong \text{Hom}_A(B \otimes_B P, N) \cong \\ &\cong \text{Hom}_B(P, \text{Hom}_A(B, N)) = \text{Hom}_B(P, f_*(N)) \end{aligned}$$

\square

\square

Corollario 290. $f_!$ è esatto a destra e f_* è esatto a sinistra

Osservazione. $f_!(A) \cong B$

Proposizione 291. *Sia $M \in A\text{-Mod}$ f.g./f.p.. Allora $f_!(M) \in B\text{-Mod}$ è f.g./f.p..*

Dimostrazione. Se la successione $(A^m \rightarrow) A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ è esatta, allora anche

$$\underbrace{(f_!(A^m) \rightarrow)}_{B^m} \underbrace{f_!(A^n) \rightarrow}_{B^n} f_!(M) \rightarrow 0$$

è esatta, e dunque $f_!(M)$ è f.g./f.p.. \square

Corollario 292. *Sia $I \subseteq A$ un ideale e $\pi : A \rightarrow A/I$ il quoziente. Allora $\forall M \in A\text{-Mod}$, $\pi_!(M) \cong M/IM$ (in $A/I\text{-Mod}$, dunque equivalentemente in $A\text{-Mod}$)*

Dimostrazione. La successione $0 \rightarrow I \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A/I \rightarrow 0$ è esatta in $A\text{-Mod-}A$. So che $\pi_!(M) = (A/I) \otimes_A M$. A questo punto possiamo usare che $- \otimes_A M : A\text{-Mod-}A \rightarrow A\text{-Mod}$ è esatto a destra, dunque.

$$\begin{array}{ccccccc} I \otimes_A M & \longrightarrow & A \otimes_A M & \longrightarrow & A/I \otimes_A M & \longrightarrow & \bullet \longrightarrow 0 \\ & & \searrow_{a \otimes x \mapsto ax} & & \nearrow \parallel & & \\ & & & & M & & \end{array}$$

$$\text{Ma allora } A/I \otimes_A M \cong \text{Coker}\left(\begin{smallmatrix} I \otimes_A M \rightarrow M \\ a \otimes x \mapsto ax \end{smallmatrix}\right) = M/IM$$

□

Definizione 293: Proiettività e iniettività

Sia \mathcal{A} una categoria abeliana e $X \in \mathcal{A}$. Allora X si dice *proiettivo* se $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ è esatto (ossia equivalentemente se $\mathcal{A}(X, -)$ preserva gli epi, cioè $\forall f : Y \twoheadrightarrow Z$ epimorfismi di \mathcal{A} , allora $f_* : \mathcal{A}(X, Z) \rightarrow \mathcal{A}(X, Y)$ è suriettivo, ossia per ogni $g : X \rightarrow Z$ esiste $s : X \rightarrow Y$ tale che $f \circ s = g$)

X si dice *iniettivo* (in \mathcal{A}) se è proiettivo in \mathcal{A}^{op} , cioè se $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ è esatto. (Equivalentemente $\mathcal{A}(-, X)$ preserva gli epimorfismi, ossia $\forall f : Y \rightarrow Z$ monomorfismo di \mathcal{A} , $f^* : \mathcal{A}(Z, X) \rightarrow \mathcal{A}(Y, X)$ è suriettivo).

Osservazione. Se $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ è esatta, Z è proiettivo oppure X è iniettivo, allora la successione si spezza. Ad esempio se Z è proiettivo, allora $g : Y \rightarrow Z$ e esiste $\text{id}_Z : Z \rightarrow Z$, allora $\exists s : Z \rightarrow Y$ tale che $g \circ s = \text{id}_Z$.

Quindi otteniamo che \mathcal{A} è semisemplice se e solo se tutti gli oggetti di \mathcal{A} sono proiettivi se e solo se tutti gli oggetti di \mathcal{A} sono iniettivi.

Definizione 294: Moduli piatti

$M \in \mathbf{Mod}-A$ è *piatto* (su \mathcal{A}) se $M \otimes_A - : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ è esatto. Equivalentemente $M \otimes_A -$ preserva i monomorfismi, cioè se $f : N \rightarrow P$ iniettivo in $A\text{-Mod}$, allora $f_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A P$ è iniettivo in \mathbf{Ab} .

Proposizione 295.

1. Sia \mathcal{A} una categoria abeliana e $X_\lambda \in \mathcal{A}$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Supponiamo inoltre che esista $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ (resp. $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$). Allora X è proiettivo (resp. iniettivo) se e solo se tutti gli X_λ sono proiettivi (resp. iniettivi).
2. Sia A un anello, $M_\lambda \in \mathbf{Mod}-A$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è piatto} \iff M_\lambda \text{ è piatto } \forall \lambda \in \Lambda$$

Dimostrazione.

1. Basta dimostrare il caso $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. In tale caso sia $f : Y \rightarrow Z$ un epimorfismo in \mathcal{A} . Allora X è proiettivo se e solo se $f_* : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{A}(X, Z)$ è suriettivo. Ma

$$\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{A}\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, Y\right) \stackrel{\text{prop. univ.}}{\cong} \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Y)$$

quindi ora poiché il seguente diagramma commuta,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(X, Y) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{A}(X, Z) \\
\parallel & & \parallel \\
\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Y) & \xrightarrow[\substack{(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto (f \circ g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}]{\prod_{\lambda \in \Lambda} f_*} & \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Z)
\end{array}$$

La mappa f_* è suriettiva se e solo se $\prod_{\lambda \in \Lambda} f_*$ è suriettiva. Ma quest'ultima lo è se tutte le sue componenti lo sono, ossia se ogni X_λ è proiettivo.

2. M è piatto se e solo se $\forall f : N \rightarrow P$ iniettivo in $A\text{-Mod}$, $f_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A P$ è iniettivo in \mathbf{Ab} . Poiché $- \otimes_A N$ preserva i coprodotti, $M \otimes_A N \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes N$. Allora

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes_A N & \xrightarrow{f_*} & M \otimes_A P \\
\parallel & & \parallel \\
\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes_A N & \xrightarrow{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f_*} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \otimes_A P
\end{array}$$

ma ora f_* è iniettivo \iff se $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f_*$ è iniettivo \iff ogni componente di $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f_*$ è iniettiva \iff ogni M_λ è piatto.

□

Corollario 296.

1. Un A -modulo è proiettivo se e solo se è addendo diretto di un modulo libero.
2. Ogni modulo proiettivo è piatto.

Dimostrazione. $A \in A\text{-Mod}$ è proiettivo e piatto perché $\text{Hom}_A(A, -) : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ è isomorfo al funtore dimenticante, e dunque è esatto. Analogamente $- \otimes_A A : \text{Mod-}A \rightarrow \mathbf{Ab}$ è isomorfo al funtore dimenticante e dunque è esatto.

Sia \mathcal{P} una collezione di oggetti (chiusa per isomorfismi) di $A\text{-Mod}$ tale che $A \in \mathcal{P}$ e tali che se $M_\lambda \in A\text{-Mod}$ (con $\lambda \in \Lambda$), si ha che

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \in \mathcal{P} \iff M_\lambda \in \mathcal{P} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Allora ogni M addendo diretto di un modulo libero è tale che $M \in \mathcal{P}$. Infatti in tal caso $\exists N \in A\text{-Mod}$ tale che $M \oplus N$ è libero, dunque $M \oplus N \cong A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ , e dunque $A \in \mathcal{P} \implies A^{(\Lambda)} \in \mathcal{P} \implies M \oplus N \in \mathcal{P} \implies M \in \mathcal{P}$, quindi sia i proiettivi che i piatti contengono gli addendi diretti dei moduli liberi.

Per concludere basta dimostrare che se $M \in A\text{-Mod}$ è proiettivo, allora è addendo diretto di un modulo libero. Questo è vero perché $\exists L \in A\text{-Mod}$ libero, e $N \subseteq L$ sottomodulo tale che $M \cong L/M$, cioè esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$$

ma poiché M è proiettivo la successione si spezza, e dunque $L \cong M \oplus N$

□

Esempio 297. Sia $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (semisemplice), allora $\langle \bar{2} \rangle$ è un A -modulo proiettivo non libero.

Esempio 298. Sia A un dominio d'integrità che non sia un campo, sia $0 \neq a \in A \setminus A^*$. Allora $A/(a)$ come A -modulo non è piatto, infatti $A \rightarrow A; b \mapsto ab$ è omomorfismo iniettivo in $A\text{-Mod}$ tale che

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes_A A/(a) & \xrightarrow{\varphi_{a*}} & A \otimes -AA/(a) \\
\parallel & & \parallel \\
A/(a) & \xrightarrow{0} & A/(a)
\end{array}$$

dove chiaramente $0 : x \mapsto ax$ in $A/(a)$ non è iniettivo.

Proposizione 299. $M \in A\text{-Mod}$ è iniettivo se solo se per ogni $I \subseteq A$ ideale sinistro $\forall g : I \rightarrow M$ A -lineare, $\exists x \in M$ tale che $g(a) = ax$ per ogni $a \in I$.

Dimostrazione.

$$\implies \text{Poiché } M \text{ è iniettivo, } \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad} & A \\ g \downarrow & \swarrow g' & \text{commuta, ossia esiste } g' : A \rightarrow M \\ M & & \end{array}$$

A -lineare tale che $g'|_I = g$. Allora $x := g'(1)$ e abbiamo che $ax = g'(a) = g(a)$ per ogni $a \in I$.

\Leftarrow Dato $N_0 \subseteq N$ sottomodulo e $f_0 : N_0 \rightarrow M$ A -lineare, basta dimostrare che $\exists f : N \rightarrow M$ A -lineare tale che $f|_{N_0} = f_0$.

Sia ora

$$U := \{(N', f') | N_0 \subseteq N' \subseteq N \text{ sottomodulo e } f' : N' \rightarrow M \text{ è } A\text{-lineare ed è t.c. } f'|_{N_0} = f_0\}$$

Dove U è ordinato da $(N', f') \leq (N'', f'') \iff N' \subseteq N''$ e $f''|_{N'} = f'$. Inoltre $(N_0, f_0) \in U$ che dunque non è vuoto. Inoltre ogni catena (N_λ, f_λ) in U (per $\lambda \in \Lambda$) ha un maggiorante $N' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$, f' tale che $f'|_{N_\lambda} = f_\lambda$.

Allora ci sono le ipotesi del lemma di Zorn, per cui esiste un elemento massimale $(N_1, f_1) \in U$. Ora dobbiamo solo dimostrare che $N_1 = N$. Supponiamo per assurdo che $N_1 \subsetneq N$. Allora $\exists y \in N \setminus N_1$. Sia ora $I = \{a \in A : ay \in N_1\} \subseteq A$ ideale sinistro. $g : I \rightarrow M$ data da $a \mapsto f_1(ay)$ è A -lineare e per ipotesi $\exists x \in M$ tale che $f_1(ay) = g(a) = ax$ per ogni $a \in I$. Allora possiamo definire $N_2 := N_1 + Ay$ e $f_2 : N_2 \rightarrow M$ data da $y_1 + ay \mapsto f_1(y_1) + ax$ che è ben definita (lasciato per esercizio), A -lineare, e $(N_1, f_1) \not\leq (N_2, f_2)$, che è assurdo.

□

3.1.1 Moduli divisibili e senza torsione

Definizione 300: Modulo divisibile

Sia A un dominio d'integrità, $M \in A\text{-Mod}$. Allora M è *divisibile* se $\forall x \in M$ e $\forall 0 \neq a \in A$, allora $\exists y \in M$ tale che $x = ay$

Osservazione. Un modulo M è divisibile se e solo se $\forall 0 \neq a \in A$ la funzione $M \rightarrow M$ definita da $x \mapsto ax$ è suriettiva. Analogamente M è senza torsione se e solo se tale funzione è iniettiva.

Osservazione. Se M è divisibile e $M' \subseteq M$ sottomodulo, allora M/M' è ancora divisibile.

Esempio 301. Il campo dei quozienti $Q(A)$ è divisibile in $A\text{-Mod}$. Di conseguenza anche $Q(A)/A$ è divisibile.

Proposizione 302. Sia A un dominio d'integrità e $M \in A\text{-Mod}$. Allora se M è iniettivo, allora M è divisibile. Inoltre se A è PID vale anche l'altra implicazione.

Dimostrazione. M è iniettivo se e solo se $\forall I \subseteq A$ ideale e $\forall g : I \rightarrow M$ A -lineare, allora $\exists x \in M$ tale che $g(a) = ax$ per ogni $a \in I$.

M è d'altra parte divisibile se e solo se $\forall 0 \neq I \subseteq A$ ideale **principale** e $\forall g : I \rightarrow M$ A -lineare, allora $\exists x \in M$ tale che $g(a) = ax$ per ogni $a \in I$. Questa definizione

equivalente vale perché in tal modo $I = (b)$, con $0 \neq b \in A$, allora $I \cong A$ in $A\text{-Mod}$, quindi $g : I \rightarrow M$ A -lineare è determinata da $g(b) = y \in M$. Allora chiedere l'esistenza dell' x di cui sopra equivale a dire che $\exists x \in M$ tale che $g(ab) = abx$ per ogni $ab \in I$, ossia $y = bx$.

La proposizione segue ovviamente dalla similarità delle due caratterizzazioni. \square

Definizione 303: Avere abbastanza iniettivi o proiettivi

Una categoria abeliana \mathcal{A} ha abbastanza iniettivi se $\forall X \in \mathcal{A} \exists X \rightarrowtail Y$ mono con Y iniettivo.

Dualmente \mathcal{A} ha abbastanza proiettivi se \mathcal{A}^{op} ha abbastanza iniettivi, cioè se $\forall X \in \mathcal{A} \exists Y \twoheadrightarrow X$ epi (di \mathcal{A}) con Y proiettivo (in \mathcal{A}).

Esempio 304. $A\text{-Mod}$ ha abbastanza proiettivi perché ogni modulo è quoziante di un modulo libero, e i moduli liberi sono proiettivi.

Proposizione 305. Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Se $A\text{-Mod}$ ha abbastanza iniettivi, allora $B\text{-Mod}$ ha abbastanza iniettivi.

Dimostrazione. Sia $N \in B\text{-Mod}$. Per ipotesi $\exists i : f^*(N) \rightarrowtail M$ mono in $A\text{-Mod}$ con M iniettivo. Sappiamo che $f^* \dashv f_* = \text{Hom}_A(B, -)$. Allora f_* è esatto a sinistra e dunque $f_*(i)$ è mono. Sia $\eta : \text{id}_{B\text{-Mod}} \rightarrow f_* \circ f^*$ unità dell'aggiunzione. Allora $\eta_N : N \rightarrow f_*(f^*(N)) = \text{Hom}_A(B, N)$. Viene lasciato in esercizio mostrare che effettivamente tale mappa è $y \mapsto (b \mapsto by)$.

Se $y \in \text{Ker}(\eta_N)$ allora $\eta_N(y)(1) = 0$, quindi η_N è iniettiva, allora

$$N \xrightarrow{\eta_N} f_*(f^*(N)) \xrightarrow{f_*(i)} f_*(M)$$

dunque basta dimostrare che $f_*(M)$ è iniettivo, cioè $\text{Hom}_B(-, f_*(M)) \cong \text{Hom}_A(f^*(-), M)$ è esatto. Questo è vero poiché sono esatti sia f^* che $\text{Hom}_A(-, M)$. \square

Proposizione 306. $\text{Ab} \cong \mathbb{Z}\text{-Mod}$ ha abbastanza iniettivi.

Corollario 307. Per ogni anello A , $A\text{-Mod}$ ha abbastanza iniettivi.

Dimostrazione. Per la proposizione ??, G è iniettivo se e solo se è divisibile (perché \mathbb{Z} è PID). So che $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \in \text{Ab}$ è divisibile (e allora anche $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}^\Lambda$ lo è per ogni Λ) allora per ogni $0 \neq a \in G$, voglio trovare $f_a : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è omomorfismo tale che $f_a(a) \neq 0$. A questo punto si può definire

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{G \setminus \{0\}} \\ b &\longmapsto f(b) = (a \mapsto f_a(b)) \end{aligned}$$

omomorfismo iniettivo. Per trovare tale f_a considero $\langle a \rangle \hookrightarrow G$. Esiste $g_a : \langle a \rangle \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ omomorfismo tale che $g_a(a)(a) \neq 0$. Allora poiché \mathbb{Q}/\mathbb{Z} è iniettivo esiste $f_a : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tale che $f_a|_{\langle a \rangle} = g_a$. \square

Osservazione. $\text{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \text{Ab}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ è esatto (poiché \mathbb{Q}/\mathbb{Z} è iniettivo) e fedele.

Infatti, dato $f : G \rightarrow G'$ in Ab tale che $\widehat{f} = f^* : \widehat{G}' := \text{Hom}(G', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = G$, allora se $\widehat{f} = 0$, segue che $f = 0$. Infatti, $\forall h \in \widehat{G}'$, $f^*(h) = h \circ f = 0$. Allora se $\exists a \in G : f(a) = a' \neq 0$ allora posso prendere una $h \in \widehat{G}'$ (la $f_{a'}$ della dimostrazione sopra) tale che $h(a') = h(f(a)) \neq 0$. Allora necessariamente $f = 0$.

Proposizione 308. Le seguenti condizioni sono equivalenti

i) $M \in \text{Mod} - A$ è piatto

ii) $\widehat{M} \in A\text{-Mod}$ è iniettivo

iii) $\forall I \subseteq A$ ideale sinistro, $M \otimes_A I \rightarrow M$ dato da $x \otimes a \mapsto xa$ è iniettivo.

Dimostrazione. M è piatto se e solo se $\forall f : N \rightarrow P$ mono in $A\text{-Mod}$, $f_* : M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A P$ è iniettivo in Ab . Questo è equivalente a dire che $\widehat{f}_* : \widehat{M \otimes_A P} \rightarrow \widehat{M \otimes_A N}$ è suriettivo, dove $\widehat{M \otimes_A P} = \text{Hom}(M \otimes_A P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}_A(P, \widehat{M})$ e $\widehat{M \otimes_A N} \cong \text{Hom}_A(N, \widehat{M})$. Ma questo è equivalente a dire che \widehat{m} è iniettivo in $A\text{-Mod}$.

Per iii) basta considerare $f : I \rightarrow A$ inclusione, con I ideale sinistro. \square