Appunti di Meccanica Razionale

Osea

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Ada Pulvirenti

Testo di riferimento: *Meccanica Analitica* di Fasano Marmi, più lungo e preciso. Mentre il testo *Meccanica Classica* di Goldstein è il testo classico dei fisici.

1 Spazio-Tempo-Moto

1.1 Moto

Studiare il moto in meccanica significa studiare la funzione $I = [0, T) \to \mathcal{E}$, con $t \mapsto P(t)$, dove $\mathcal{E}$ e I sono rispettivamente lo spazio della meccanica classica e un intervallo incluso nell'asse dei tempi, e entrambi sono spazi affini euclidei.

Nella meccanica classica il **tempo** è **assoluto**, ovvero è indipendente dallo stato di moto dell'osservatore.

Definizione 1.1: Spazio affine

Uno spazio affine reale di dimensione n è un insieme $\mathbb{A}^n$ i cui elementi sono detti punti, dotato delle seguenti strutture:

1. Uno spazio vettoriale reale di dimensione n, V, detto spazio delle traslazioni (o dei vettori liberi)
2. Un'applicazione $\varphi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to V$; $P, Q \mapsto P - Q$ con le seguenti proprietà
   a. $\forall (P, v) \in A^n \times V$ esiste un unico punto Q tale che $Q - P = \mathbf{v}$
   b. $(P - Q) + (Q - R) = P - R$ per ogni $P, Q, R \in \mathbb{A}^n$

Definizione 1.2: Retta

Una **retta** in $\mathbb{A}^n$ passante per un dato punto P e con direzione $\mathbf{v}$ è il sottospazio affine $P + \langle \mathbf{v} \rangle$ ed è parametrizzata da $t \mapsto P + t\mathbf{v}$

Definizione 1.3: Vettore applicato

Una coppia ordinata $(P, \mathbf{u}) \in \mathbb{A}^n \times V$ si dice vettore applicato a P.

Definizione 1.4: Sistema di riferimento

Indicheremo con sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^n$ un insieme

$$\Sigma = \{O \in \mathbb{A}^n; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad ; \quad \{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,n} \text{ base di } V$$

Osservazione. Allora ogni punto P rispetto a Σ è individuato da
$P - O = x_1\mathbf{v}_1 + \ \cdots + x_n\mathbf{v}_n$

Definizione 1.5: Spazio euclideo

Uno spazio affine reale di dimensione n, **dotato di prodotto scalare** su V si dice spazio **affine euclideo**

Dal prodotto scalare possiamo definire la distanza tra due punti di $\mathbb{A}^n$ come

$$d(P,Q) = \|P-Q\| = \sqrt{\langle P-Q, P-Q\rangle} = \sqrt{(P-Q)\cdot(P-Q)}$$

e la nozione di angolo tra due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ come il valore $\alpha \in [0,\pi]$ tale che

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

(notare che per Schwarz risulta che effettivamente tale valore esiste)

Comunemente ci ricondurremo a utilizzare un sistema di riferimento **ortonormale**, ossia che ha come base una base ortonormale dello spazio. In particolare $\mathcal{E}$ è uno spazio affine reale euclideo di dimensione 3, e dunque useremo il sistema di riferimento

$$\Sigma = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad ; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \forall i,j = 1,2,3$$

Studiare il moto significherà studiare la relazione $t \mapsto P(t)$ funzione $[0,T) \to \mathcal{E}$. Introdotto Σ, possiamo scrivere allora che il problema è ricondotto a studiare la funzione $[0,T) \to \mathbb{R}^3$ tale che $t \mapsto (x_1,x_2,x_3)$ e tale che $P(t) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.

Definizione 1.6: Coordinate Curvilinee

Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo un'applicazione $\mathbf{x} : Q \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_1(q_1,\dots,q_n) \\ \vdots \\ x_n(q_1,\dots,q_n) \end{pmatrix}$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x} \in C^1(Q)$
2. La matrice Jacobiana $J\mathbf{x}$ abbia rango massimo

Allora $\mathbf{x}$ rappresenta un sistema di coordinate su D che sono dette *coordinate curvilinee*

I vettori colonna della matrice $J\mathbf{x}$, ossia

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1,\dots,n$$

sono una base per V che viene chiamata **base locale**.

La base locale è ortogonale se $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ per ogni $i \neq j$. Vogliamo ora operare Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}$ a partire da una base generica $\{\mathbf{u}_i\}$.

Osservazione. I vettori $\mathbf{u}_i$ della base locale sono in ogni punto P tangenti alla rispettiva linea coordinata $\mathbf{x}(q_i) = \mathbf{x}(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)$, dove tutte le coordinate sono fissate tranne q_i. Allora $\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ è tangente alla linea coordinata $\mathbf{x}(q_i)$.

Esempio 1.1 (Coordinate polari nel piano)**.** Prendiamo $Q = (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (r, \theta)$. Allora

$$\mathbf{x}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta) = r\cos\theta \\ x_1(r,\theta) = r\sin\theta \end{pmatrix} \in C^1$$

E la base locale è

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

ed evidentemente $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ dunque la base locale è ortogonale. Per ottenere una base ortonormale dunque prendiamo

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \mathbf{u}_1 \quad ; \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{r}\mathbf{u}_2$$

Osserviamo che effettivamente $\mathbf{e}_r$ è tangente alla linea coordinata corrispondente (fisso θ) e $\mathbf{e}_\theta$ è tangente alla linea coordinata corrispondente (fisso r).

Esempio 1.2 (Coordinate sferiche)**.**

$$Q = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_1(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta \end{pmatrix} : Q \to \mathcal{E} \smallsetminus \{\text{ asse } z\}$$

che è chiaramente di classe C^1 e ha Jacobiano di rango massimo. La base locale è

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

e dunque la base locale è ortogonale. Per ottenere una base ortonormale prendiamo, per ogni $\mathbf{u}_i$, il vettore $\mathbf{u}_i / \|\mathbf{u}_i\|$, ossia

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{u}_1 \quad ; \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{u}_2}{r\sin\theta} \quad ; \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{u}_3}{r}$$

Orientazione dello spazio Lo spazio vettoriale V soggiacente lo spazio affine $\mathcal{E}$ è orientabile.

Sia $\mathcal{B}$ l'insieme di tutte le basi di V. Date $A, B \in \mathcal{B}$, sia $\mathcal{M}_A^B$ la matrice di cambio base da A a B. Allora $\det \mathcal{M}_A^B \neq 0$. Allora la relazione

$$A \sim B \iff \det \mathcal{M}_A^B > 0$$

è una relazione di equivalenza su $\mathcal{B}$. Tale relazione partiziona $\mathcal{E}$ in due classi, dette **classi di orientazione**: la base destrorsa e la base sinistrorsa.

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale è un'operazione binaria

$$\begin{aligned} \times : V \times V &\longrightarrow V \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \end{aligned}$$

tale che, se l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ è α, allora

- $\mathbf{w}$ ha modulo pari a $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha$
- $\mathbf{w}$ ha direzione perpendicolare al piano di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$
- $\mathbf{w}$ ha verso tale che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ formano una base destrorsa

e ha le seguenti proprietà:

1. *antisimmetria*: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. *linearità*: $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ e $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
3. **non** è associativo

Prodotto misto Il prodotto misto tra $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è definito da $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

Doppio prodotto vettoriale Dati $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, si chiama doppio prodotto vettoriale il vettore $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ e vale la proprietà

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$$

Equazione vettoriale Dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, determinare i vettori $\mathbf{x}$ tali che

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{1.1}$$

Nel caso degenere in cui $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, l'equazione è un'identità. Se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ allora non esiste una soluzione. Infine se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

Proposizione 1.1. *Siano* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ *con* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *e* $b \neq \mathbf{0}$. *Allora l'equazione vettoriale* (1.1) *ha soluzione se e solo se* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia $\mathbf{x}$ soluzione di $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{a}$ ambo i membri otteniamo

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} * \mathbf{a}$$

$\Longleftarrow$ Sia $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Allora

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = a^2 \mathbf{b} - \cancel{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}\mathbf{a}$$

da cui otteniamo

$$\mathbf{b} = \frac{1}{a^2}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a})$$

ma allora

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \frac{1}{a^2}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \iff \left(\mathbf{x} - \frac{1}{a^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\right) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

che ha soluzione

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(a \times b) + \lambda \mathbf{a} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\square$

2 Cinematica del punto

Sia $\mathcal{E}$ uno spazio euclideo, P un punto in modo nello spazio $\mathcal{E}$. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e studiare il moto significa studiare la relazione $I \ni t \mapsto P(t)$ e in particolare fissando un sistema di riferimento $\Sigma = \{\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ studiamo la relazione $t \mapsto P(t) - \mathbf{O} =: \mathbf{x}(t) =: \mathbf{r}(t)$.

L'immagine in $\mathcal{E}$ dell'applicazione $t \mapsto P(t)$ si dice **traiettoria** del punto P.

Definizione 2.1: Velocità

Scelto $\mathbf{x}(t)$ il raggio descrivente il moto di un punto P nel sistema di riferimento Σ, la **velocità** del punto P è

$$\mathbf{v}(t)|_\Sigma := \dot{\mathbf{x}}(t)|_\Sigma = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)|_\Sigma = \dot{x_1}\mathbf{e}_1 + \dot{x_2}\mathbf{e}_2 + \dot{x_3}\mathbf{e}_3$$

Similmente si definisce l'accelerazione

$$\mathbf{a}|_\Sigma = \ddot{\mathbf{x}}|_\Sigma = \frac{d}{dt}\mathbf{v}|_\Sigma$$

Se si effettua il cambio di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}(t))$ allora il moto è descritto da

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}\dot{q}_i = \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Esempio 2.1 (Coordinate polari nel piano $\mathcal{E}_2$)**.** $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ e dunque

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r\right) + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\theta = \\
&= \ddot{r}\mathbf{e}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r = \\
&= \left(\ddot{r} - r\theta^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}$$

che è la scomposizione in accelerazione radiale e trasversa

Osservazione. Se $\mathbf{b}$ è un versore allora $\frac{d\mathbf{b}}{dt} \cdot \mathbf{b} = 0$ (perché $\mathbf{b}$ ha modulo costante, quindi come fa a cambiare in modulo? Deve cambiare solo in verso)

Esercizio 2.1

Calcolare la velocità e l'accelerazione in coordinate sferiche (esprimendola in base locale) e in coordinate cilindriche

2.1 Curve parametrizzate

Vogliamo studiare il moto del punto P su una curva assegnata. Sappiamo dunque la traiettoria del punto assegnato. Supponiamo di essere nello spazio affine euclideo $\mathcal{E}_3$. Supponiamo dunque di avere una curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ e dunque $\gamma(t) = \mathbf{x}(t)$

Definizione 2.2: Parametrizzazione in lunghezza d'arco

È possibile parametrizzare la curva γ nel modo

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\| d\tau$$

che descrive la posizione in una dimensione, descrivendo la lunghezza percorsa sulla curva. e dunque $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$

Osservazione. $|s'(t)| = |\mathbf{x}'(t)|$

Definizione 2.3: Versore tangente

Il versore tangente alla curva γ è

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}$$

dove ovviamente la prima uguaglianza vale se $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$

Definizione 2.4: Versore normale

Il versore normale alla curva γ è definito, nei punti in cui $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \neq 0$ come

$$\mathbf{n}(t) := \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}{\left\|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right\|} = \frac{\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}}{\left\|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds}\right\|}$$

Definizione 2.5: Curvatura

La quantità $\kappa(s) = \left\|\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right\|$ si dice *curvatura* e il suo inverso moltiplicativo R si dice *raggio di curvatura.*

Definizione 2.6: Piano Osculatore

Il piano individuato dai versori $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ si dice *piano osculatore*

Definizione 2.7: Versore binormale

Il versore $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ viene detto *versore della binomiale*

Definizione 2.8: Terna intrinseca

La terna $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ è detta terna intrinseca alla curva γ se

- $\mathbf{t}$ è il versore tangente
- $\mathbf{n}$ è il versore normale
- $\mathbf{b}$ è il versore binormale

e viene anche chiamato *riferimento di Frenet*

Possiamo osservare che $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ è normale a $\mathbf{b}(s)$ e inoltre

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \\ &= \frac{d\mathbf{n}}{ds}\end{aligned}$$

E dunque dato che è normale sia a $\mathbf{b}$ che a $\mathbf{t}$ allora deve essere proporzionale a $\mathbf{n}$ e in particolare la seguente è una buona definizione

Definizione 2.9: Torsione

La funzione $\tau = \tau(s)$ tale che

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = \tau(s)\mathbf{n}(s)$$

è detta *torsione* della curva γ

Riassumendo, le seguenti vengono dette *formule di Frenet*:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa\mathbf{n}\\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}\\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \tau\mathbf{n}\end{aligned}$$

dove la seconda è trovata dalle altre due e da $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$

Dal precedente marchingegno possiamo riscrivere la velocità e l'accelerazione nella terna intrinseca come, se $P = P(s(t))$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\mathbf{t} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\mathbf{t}) = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}^2\kappa\mathbf{n} \tag{2.2}$$

Esempio 2.2 (Curvatura rispetto a un parametro λ)**.** Supponiamo $P = P(\lambda)$. Dimostriamo che vale la seguente formula

$$\kappa = \frac{|P' \times P''|}{|P'|^3}$$

Dimostrazione. Ci vogliamo ricondurre all'ascissa curvilinea s. Se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ otteniamo

$$\left\|\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\| = \|\mathbf{t}(s) \times \kappa(s)\mathbf{n}(s)\| = |\kappa(s)| \tag{2.3}$$

se ora consideriamo $s = s(\lambda)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}\frac{1}{s'} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{s'}\\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{1}{s'}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{s'}\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}\right) = \frac{1}{s'}\left(\frac{1}{s'}\frac{d^2\mathbf{r}}{d\lambda^2} + \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}\frac{-s''}{(s')^2}\right) = \frac{s'\ddot{\mathbf{r}} - s''\dot{\mathbf{r}}}{s'^3}\end{aligned}$$

E dunque l'equazione (2.3) diventa

$$\begin{aligned}\kappa(s) = \left\|\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\| &= \left\|\frac{1}{s'^4}(\dot{\mathbf{r}} \times (s'\ddot{\mathbf{r}} - s''\dot{\mathbf{r}}))\right\| = \left\|\frac{1}{s'^4}(s'\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} - s''\cancel{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}})\right\| =\\ &= \left\|\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{s'^3}\right\|\end{aligned}$$

□

Esempio 2.3 (γ grafico di una funzione $y = f(x)$)**.** Risulta naturale parametrizzare la curva γ come

$$P - O = \mathbf{r}(x) = x\hat{\mathbf{i}} + f(x)\hat{\mathbf{j}}$$

e dunque

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(\sqrt{1+(f'(x))^2}\right)}$$

Esercizio 2.2

Sia P descrivente con velocità costante in modulo la curva che in un sistema di coordinate cilindriche ρ, θ, z ha equazione

$$\begin{cases} \rho = k\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

Determinare $|\mathbf{a}(p)|$

Suggerimento: usare la (2.1) osservando che $\ddot{s} = 0$.

Esercizio 2.3 Triedrio di Frenet per un'elica cilindrica

Sia γ l'elica cilindrica di equazione

$$\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\sin\varphi \\ z = a\varphi \end{cases}$$

Calcolare $s, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$. Similmente calcolare $s, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ per il grafico della curva $y = x^2$

2.2 Cinematica dei moti centrali

Definizione 2.10: Moto centrale

Un punto P si muove di moto centrale rspetto a un polo fisso O se durante il moto, risulta $\mathbf{a}(P(t))$ è parallelo a $P(t) - O$

Il moto centrale ha diverse proprietà, di seguito ne elencheremo alcune

1. Il moto centrale è un **moto piano**. Infatti se $\mathbf{a}$ è parallelo a $\mathbf{r}$ allora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \implies \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{r} + \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$$

   infatti $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$. La precedente condizione ha la forte condizione che $\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \mathbf{c}$. In particolare deduciamo che

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0$$

   e dunque il moto è piano. Se poi $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ il moto è rettilineo.

2. Il moto si svolge con **velocità areolare costante**. In particolare definiamo il vettore velocità areolare

$$\mathbf{A}(O) = \frac{1}{2}(P - O) \times \mathbf{v} \overset{\text{coord. polari}}{=} \frac{1}{2}\Big((r\mathbf{e}_r) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)\Big) = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$$

   la velocità areolare ha la seguente interpretazione geometrica. Considerando infatti l'area $A(\theta)$ spazzata dal raggio vettore

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\theta r^2\, d\theta \implies \dot{A}(\theta) = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

Se il moto è centrale allora $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r$ e dunque $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$. Infine

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = ra_\theta = 0$$

3. Vale la **formula di Binet**, che mostra la dipendenza di r solo da θ. Ricordando $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r$ e $r^2\dot{\theta} = c$ abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(-c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-c\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\frac{c}{r^2}\end{aligned}$$

da cui finalmente

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right) \tag{2.4}$$

3 Dinamica del punto materiale

Ogni cambiamento dello stato di moto di un punto P è dovuto all'interazione fra P e altri punti.

Definizione 3.1: Sistema inerziale

Si chiama **inerziale** un riferimento rispetto al quale un punto P isolato ha accelerazione nulla in ogni istante.