

# Appunti di Geometria 2

Github Repository: [Oxke/appunti/Geo2](#)

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Lidia Stoppino e Leone Slavich

Il corso è diviso in due parti: geometria differenziale (tenuto da Slavich) e gruppo fondamentale (tenuto dalla Stoppino). Ci sono esercitazioni di geometria differenziale. Ci sono vari libri consigliati:

- Abate - Tovena, *Curve e superfici*, Springer
- M. D. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall
- E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri
- Dispense del prof. Ghigi (sulle quali è stato disegnato il corso, almeno per la parte di geometria differenziale)

# Capitolo 1

## Geometria Differenziale

Il corso di geometria differenziale studierà curve e superfici in  $\mathbb{R}^3$  definiti **analiticamente** tramite funzione  $C^\infty$  (*lisce*). Studiamo la **geometria locale** e infine (verso la fine del corso) la **geometria globale**, in particolare il teorema di Gauss-Bonnet.

### 1.1 Definizioni e proprietà iniziali

#### 1.1.1 Funzioni lisce

Sia  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto (anche possibilmente  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ ). Sia

$$C^0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è continua}^1 \text{ su } I\}$$

##### Definizione 1.1.1: Derivabile

Diciamo che  $f \in C^0(I)$  è derivabile se  $\forall x_0 \in I$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c =: f'(x_0) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ora procediamo definendo ricorsivamente le funzioni  $C^k(I)$ .

##### Definizione 1.1.2: Classe $C^k$

Per ogni  $k \geq 1$ , diciamo che  $f \in C^k(I)$  se  $f$  è derivabile e  $f' \in C^{k-1}(I)$

Dunque, ad esempio  $f \in C^1(I)$  se  $f$  è derivabile su  $I$  e la sua derivata  $f'$  è continua su  $I$ . Detto più colloquialmente, una funzione  $f \in C^k(I)$  è una funzione derivabile (almeno)  $k$  volte, e tale che la sua derivata  $i$ -esima  $f^{(i)}$  è continua per ogni  $i = 0, \dots, k$ .

*Osservazione.*

$$C_0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset C^i \supset C^{i+1} \supseteq \dots$$

##### Definizione 1.1.3: funzioni lisce

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I) = \text{insieme delle } \mathbf{funzioni lisce}$$

**Teorema 1.1: Proprietà delle classi  $C^k$** 

Sia  $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Se  $f, g \in C^k(I)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora

1.  $f + g \in C^k(I)$
2.  $\lambda f \in C^k(I)$
3.  $f \cdot g \in C^k(I)$

*Dimostrazione.* 1. e 2. sono semplici. Per 3. si procede per induzione su  $k$ .

Nel caso base  $k = 0$  il prodotto di due funzioni continue è anch'esso una funzione continua, che è vero.

Supponiamo ora che 3. valga per  $k - 1$ . Siano  $f, g \in C^k(I)$ . Allora  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$  che è somma di funzioni  $C^{k-1}$  per ipotesi induttiva e perché  $C^k \subset C^{k-1}$ , e dunque  $(f \cdot g)' \in C^{k-1}$  da cui segue che  $f \cdot g \in C^k$ .

Infine possiamo concludere per  $k = +\infty$  perché vale per tutti i  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Dal teorema 1.1 segue che  $C^k(I)$  è uno spazio vettoriale (con operazione di somma e moltiplicazione per scalare) e inoltre  $C^k(I)$  contiene le funzioni costanti e allora  $C^k(I)$  con operazioni di somma e moltiplicazione puntuale è un anello. Da queste due segue che  $C^k(I)$  è una  $\mathbb{R}$ -algebra.

**Esempio 1.1.** Esistono funzioni lisce che **non** sono **analitiche**. In particolare esistono funzioni lisce che sono nulle su un aperto ma non nulle dappertutto (differentemente da quanto succede sulle funzioni olomorfe). Un esempio di tale funzione è

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

Questa è una funzione  $C^\infty(\mathbb{R})$  che non può essere analitica perché contraddirebbe il teorema del prolungamento. Similmente si possono costruire funzioni costanti in aperti, raccordate in modo  $C^\infty$  e ovviamente non analitiche.

**Proposizione 1.2** (Composizione). *La composizione di funzioni  $C^\infty$  è  $C^\infty$ . Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora se  $f \in C^\infty(I)$  e  $g \in C^\infty(J)$  e  $f(I) \subseteq J$  (ossia si possono comporre), allora  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è ben definita e*

$$g \circ f \in C^\infty(I)$$

*Dimostrazione.* Lo dimostriamo per  $k \in \mathbb{N}$  invece che  $k = \infty$ , segue naturalmente il caso enunciato. Per  $k = 0$  è ovvio.

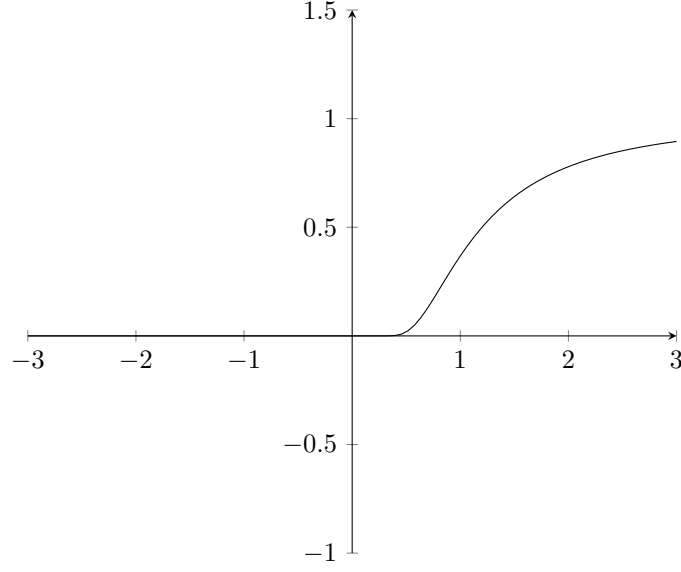
Supponiamo che valga per  $k - 1$ . Allora siano  $f, g \in C^k$  e tali che  $f(I) \subseteq J$ . Allora  $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$  che è prodotto di funzioni  $C^{k-1}$  per ipotesi induttiva e per il teorema 1.1 segue che  $g \circ f \in C^k(I)$ .  $\square$

### 1.1.2 Diffeomorfismi

#### Definizione 1.1.4: Diffeomorfismo

Un diffeomorfismo è un isomorfismo nella categoria delle funzioni lisce.

Informalmente, un diffeomorfismo è un omeomorfismo  $C^\infty$ .

Figura 1.1: Grafico della funzione  $f(x)$  dell'esempio 1.1**Definizione 1.1.5: Diffeomorfismo**

Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli aperti in  $\mathbb{R}$ . Allora  $f : I \rightarrow J$  è un **diffeomorfismo** se

1.  $f \in C^\infty(I)$
2.  $f$  è biettiva
3.  $f^{-1} \in C^\infty(J)$

*Osservazione.* La terza condizione **non** è ridondante. Infatti sia  $I = J = \mathbb{R}$  e  $f(x) = x^3$  che è chiaramente  $C^\infty$  e biunivoca. Tuttavia  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  non è derivabile in 0, poiché  $f'(0) = 0$  e  $f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)}$  se  $f(x) = y$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $f^{-1'}(y)$  sia ben definita.

*Osservazione.* Se  $I$  e  $J$  sono intervalli aperti di  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow J$  è diffeomorfismo, allora  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ . Infatti sappiamo che

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad f(x) = y \quad \forall x \in J \quad (1.1.1)$$

dunque  $f'(x)$  non può essere nullo, poiché significherebbe che  $f^{-1}$  non è derivabile in  $y = f^{-1}(x)$ .

**Lemma 1.3.** *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia e tale che  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ . Allora  $f(I) = J$  è un intervallo aperto e  $f : I \rightarrow J$  è un diffeomorfismo.*

*Dimostrazione.* Sia  $f$  come nell'enunciato. Allora  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  è continua su  $I$  e non si annulla mai. Segue che  $f'$  ha segno costante su  $I$  ( $f' > 0$  oppure  $f' < 0$ ).

Assumiamo  $f' > 0$  su  $I$ . Allora  $f$  è strettamente crescente e dunque iniettiva. Allora  $f : I \rightarrow f(I) =: J$  è biettiva. Inoltre  $J$  è un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ . Infatti è chiaramente intervallo (è connesso) in quanto immagine continua di un connesso (intervallo). Sia ora  $y_0 \in J$  e sia  $x_0 \in I$  tale che  $f(x_0) = y_0$ . Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$ . Poiché  $f$  è strettamente crescente, segue che

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$$

sapendo già che  $J$  è un intervallo, segue che

$$I \supseteq [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)] \text{ è un intorno di } y_0$$

Rimane solo da vedere che la funzione  $f^{-1} : J \rightarrow I$  è  $C^\infty$ . Notiamo intanto che  $f^{-1}$  è continua, poiché  $f$  è aperta. Inoltre sappiamo che  $f^{-1}$  è derivabile poiché è l'inversa di una funzione derivabile con derivata e vale l'equazione (1.1.1) per ogni  $y \in J$ .

Sia  $u : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definita da  $u(x) = 1/x$  è un diffeomorfismo e da 1.1.1 abbiamo che

$$f^{-1'} = u \circ f' \circ f^{-1}$$

e quindi se assumiamo induttivamente che se  $f^{-1} \in C^k$  allora ne consegue dalla proposizione 1.2 che  $f^{-1'} \in C^k$  e dunque  $f^{-1} \in C^{k+1}$

□

### 1.1.3 Curve

#### Definizione 1.1.6: Curva parametrica

Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione  $t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$  con  $I$  intervallo aperto.

Allora se  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sono funzioni lisce la funzione  $\alpha$  è detta **curva** parametrizzata in  $\mathbb{R}^3$