Appunti di Algebra Superiore

GitHub Repository: `0xke/appunti/AlgebraSuperiore`

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)[1]

[1] edit: menzogne, è perché è più pesante.

Indice

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 1: Anello

Un **anello** $A, +, \cdot$ è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide $A, \cdot$ (cn 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + ac \quad ; \quad (b+c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione $\cdot$ è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 3. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 4 (Anello Banale)**.** L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 5 (Non comm.)**.** A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dai l'anello banale non esiste davvero)

Esempio 6. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\mathrm{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ e $\cdot$ dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\mathrm{Hom(G', G)}$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G.

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 7: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ $(aa' = 1)$.
a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile $\iff$ invertibile a destra e sinistra)*.* solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$(a'a)a'' = a'(aa'')$$
$$1a'' = a'' = a' = a'1$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili)*.* L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

Definizione 8: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \setminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 9: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \setminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ $(a'a = 0)$

Osservazione. Divisore di zero a sinistra: $aa' = 0$. Invertibile a sinistra: $a'a = 1$

Definizione 10: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 11. I campi, $\mathbb{Z}$, se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall\, 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

$\square$

Definizione 12: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 13. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 14. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 15: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I, +) < (A, +)$ e $ab \in I$ $(ba \in I)$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.
Un **ideale** bilatero è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 16. Gli ideali in $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \varnothing$$

quindi A con divisione $\implies$ gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 17: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op}, con $(A^{op}, +) := (A, +)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 18 (Anello Quoziente)**.** *Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I, +$ è un anello con prodotto $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$, dove $\overline{a} := a + I \in A/I$*

Definizione 19: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \to B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

i) $f(a + a') = f(a) + f(a')$

ii) $f(aa') = f(a)f(a')$

iii) $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \to A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f' = \mathrm{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 20. *Se $f : A \to B$ è un omomorfismo allora*

1. *$A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.*
2. *$B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello*
3. *$J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\mathrm{Ker} f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale*
4. *f **suriettivo** e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale*

Osservazione. $f : A \to B$ è iniettivo $\iff \mathrm{Ker} f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \mathrm{Im} f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 21: Omomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \mathrm{Ker} f$. Allora

$$\exists! \overline{f} : A/I \to B \text{ omomorfismo tale che } \overline{f}(\overline{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
A/I \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Inoltre $\mathrm{im} \overline{f} = \mathrm{im} f$ e $\mathrm{Ker} \overline{f} = \mathrm{Ker} f / I$

Proposizione 22. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 23: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, allora $\text{im}f \cong A/\text{Ker}f$

Definizione 24: Ideale massimale (sinistro / destro)

Un ideale J (sinistro/destro) di A è massimale se $\forall I$ ideale (sinistro/destro) tale che $J \subseteq I \subseteq A$, allora $I = J$ o $I = A$

Osservazione. Esiste sempre un ideale (sinistro/destro) massimale (*lemma di Zorn*)

Definizione 25

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i b_i : n \in N, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 26: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è principale.

Esempio 27. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 28. $\mathbb{Z}$ (con ideali $nZ = (n)$)

Esempio 29. $K[X]$ con K campo

1.2 Richiami sui Moduli

Definizione 30: A-modulo

Un A-modulo (di default sinistro) M è un gruppo abeliano $(M, +)$ con una moltiplicazione per scalare definita da

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \in M \end{aligned}$$

e tale che, $\forall a, b \in A$ e $\forall x, y \in M$:

1) $a(x + y) = ax + ay$
2) $(a + b)x = ax + bx$
3) $(ab)x = a(bx)$
4) $1x = x$

Osservazione. Se $\mathbb{K}$ è un campo, allora un $\mathbb{K}$-modulo è uno spazio vettoriale.

Osservazione. Se $(M, +)$ è un gruppo abeliano, data $f : A \times M \to M$ posso definire $\alpha : A \to M^M$ come $\alpha(a) = (x \mapsto ax)$, e quindi le proprietà precedenti si traducono in

1. $\alpha(a)(x+y) = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$ e dunque $\alpha(a)$ è omomorfismo di gruppi, dunque $\alpha(A) \subseteq \mathrm{End}(M)$
2. $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ dunque $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di gruppi
3. $\alpha(a) \circ \alpha(b) = \alpha(ab)$
4. $\alpha(1) = \mathrm{id}_M$

Dalla 2,3,4 $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di anelli.

Teorema 31: Secondo teorema di isomorfismo

Sia M un modulo, con $M', M'' \subseteq M$ sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

Dimostrazione. Si prenda $f : M' \to (M' + M'')/M''$ composizione dell'inclusione di M' in $M' + M''$ e della proiezione a quoziente, dunque è un omomorfismo.

Allora $\mathrm{Ker} f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$.

Preso $y \in (M' + M'')/M''$, $y = x' + x'' + M'' = x' + M'' = f(x')$ dunque f è suriettiva. Dal primo teorema di isomorfismo segue la tesi. $\square$

Teorema 32: Terzo teorema di isomorfismo

Dati $M'' \subseteq M' \subseteq M$ sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M'$$

Dimostrazione. Sia f la composizione delle due proiezioni a quoziente, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \mathrm{Ker} f \iff \pi(x) \in \mathrm{Ker}\pi' = M'/M''$$

dunque $\mathrm{Ker} f = M'$ da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo. $\square$

Proposizione 33.

1. *Sia A un anello, allora un A-modulo M è ciclico se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro tale che $M \cong A/I$*
2. *M è semplice se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro massimale tale che $M \cong A/I$*

Dimostrazione.

1. ($\Longleftarrow$) A/I è ciclico (generato da $\bar{1}$). Viceversa per ($\Longrightarrow$) so che $M = Ax$ per un qualche $x \in M$. Considerata $f :_A A \to M$ data da $a \mapsto ax$, $\mathrm{Ker} f$ è sottomodulo di A, ovvero ideale sinistro. Concludo per il primo teorema di isomorfismo.
2. Se M è semplice allora $\forall 0 \neq x \in M$, $M = Ax$, dunque M è ciclico e per il punto 1. esiste I ideale sinistro tale che $M \cong A/I$. La proposizione si riduce a dire che A/I è semplice se e solo se I è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $I \subseteq J \subseteq A$ ideale sinistro. Allora $A/I \neq 0 \iff I \neq A$ e gli unici sottomoduli di A/I sono I/I e A/I, ossia gli unici ideali sinistri J tali che $I \subseteq J \subseteq A$ sono I e A.

$\square$

Osservazione. Con il lemma di Zorn si dimostra che $A \neq 0 \implies$ esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

1.2.1 Prodotti

Definizione 34: Prodotto

Supponiamo di avere M_λ A-moduli, per $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è un } A\text{-modulo detto } \textbf{prodotto} \text{ degli } M_\lambda$$

con $(x+y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$ e $(ax)_\lambda = ax_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $x, y \in M$.
$\forall \mu \in \Lambda$ esiste $p_\mu : M \to M_\mu$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ che è A-lineare e suriettivo.

Proposizione 35 (Proprietà universale del prodotto)**.**
Dati $f_\mu : N \to M_\mu$ A-lineari $\forall \mu \in \Lambda$, allora esiste unico $f : N \to M$ A-lineare tale che $f_\mu = p_\mu \circ f$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "f_\mu"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
M_\mu & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[l, "p_\mu"]
\end{tikzcd}$$

Esercizio 36

Dimostrare la proprietà universale del prodotto

Definizione 37: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli M_λ è

$$M' := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda > 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste

$$\begin{aligned} i_\mu : M_\mu &\longrightarrow M' \\ x &\longmapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

che è A-lineare e iniettivo.

Proposizione 38 (Proprietà universale somma diretta)**.**

$$\begin{tikzcd}
N & \\
M_\mu \arrow[u, "f_\mu"] \arrow[r, "i_\mu"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ul, dashed, "\exists! f"']
\end{tikzcd}$$

Osservazione. Se $\#\Lambda < +\infty$ allora

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

Nota (zione)*.* Se $M_\lambda = M$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si denota

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M =: M^\Lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M =: M^{(\Lambda)}$$

Dati $M_\lambda \subseteq M$ sottomoduli, con $\lambda \in \Lambda$, sia

$$f : \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$$

l'omomorfismo indotto dalle inclusioni $M_\lambda \overset{i_\lambda}{\hookrightarrow} M$, allora

$$\mathrm{im} f =: \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \subseteq M \text{ è sottomodulo}$$

Inoltre f è iniettiva se e solo se $M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\mu\}} = 0$ per ogni $\mu \in \Lambda$ e in tal caso f induce un isomorfismo tra $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e si può scrivere $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ per indicare il sottomodulo di M

Definizione 39: Linearmente indipendente, base, modulo libero

Sia $U \subseteq M$ un insieme, con M A-modulo. Si dice che U è A-linearmente indipendente se dati $x_1, \dots, x_n \subseteq U$ distinti

$$a_1, \dots, a_n \in A \text{ t.c. } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

U è detta **base** di M se è linearmente indipendente e genera M, ossia $M = AU$. Si dice che M è **libero** se ammette una base

Esempio 40. Per ogni Λ, $A^{(\Lambda)}$ è libero con base $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dove, per ogni $\lambda \in \Lambda$,

$$(e_\lambda)_i = \begin{cases} 1 & \lambda = i \\ 0 & \lambda \neq i \end{cases}$$

Proposizione 41. *Siano L, M A-moduli, con L libero con base $\{l_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tale che $l_\lambda \neq l_\mu$ se $\lambda \neq \mu$, allora*

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \exists! f : L \to M \ A\text{-lineare t.c. } f(l_\lambda) = x_\lambda$$

Corollario 42. *Un A-modulo è libero se e solo se è isomorfo a $A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ*

Dimostrazione.

$\implies$ M libero con base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ con $x_\lambda \neq x_\mu$ se $\lambda \neq \mu$. Allora per la proposizione

$$\exists! f : A^\Lambda \to M \ A\text{-lineare t.c. } f(e_\lambda) = x_\lambda$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\mathrm{im} f = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle_A = M$ e f è iniettivo perché gli x_λ sono linearmente indipendenti.

$\impliedby$ ovvio

□

Corollario 43. *Ogni A-modulo è insomorfo a un quoziente di un modulo libero ($A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ).*

Inoltre un A-modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n, $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Sia $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un insieme di generatori di un modulo M. Per la proposizione $\exists! f : A^{(\Lambda)} \to M$ A-lineare tale che $fl_\lambda = x_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\mathrm{Im} f = M$ e dunque per il primo teorema di isomorfismo $M \neq A^{(\Lambda)}/\mathrm{ker} f$.

Per la seconda parte se M è finitamente generato posso scegliere Λ finito e viceversa $M \neq A^n/N$ è finitamente generato perché A^n lo è e $\pi : A^n \to A^n/N$ è un omomorfismo suriettivo.

□

Proposizione 44. *A è con divisione se e solo se ogni suo A-modulo è libero*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ (complementi di algebra)

$\Longleftarrow$ Sia M un A-modulo semplice. Per ipotesi è libero, allora $M \cong A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ. Ma se $\#\Lambda > 1$ allora $A^{(\Lambda)}$ non è semplice ($A \subsetneq A^{(\Lambda)}$ è un sottomodulo non banale). Inoltre $\Lambda \neq \varnothing$ ($A^{(\varnothing)} = \{0\}$ non è semplice).

Ne consegue che $M \cong A$ e dunque A è con divisione

□

Esempio 45. Con $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non è libero

Si può dimostrare che se A è con divisione, allora tutte le basi di un A-modulo (libero) M hanno la stessa cardinalità, che viene detta rango e indicata con $\mathrm{rk}_A M$.
In generale non tutte le basi di un A-modulo libero hanno la stessa cardinalità, esistono infatti anelli A non banali tali che ${}_A^A \cong_A A^n$ per *ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 46. Sia $A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ con $\mathbb{K}$ campo e $\dim_{\mathbb{K}}(V) = +\infty$

Si dimostra che se $A \to B$ è omomorfismo di anelli e il rango dei B-modulli liberi è ben definito allora anche il rango degli A-moduli liberi è ben definito. Di conseguenza se $A \neq 0$ è commutativo allora il rango degli A-moduli liberi è ben definito ($\exists I \subsetneq A$ ideale massimale e $\pi : A \to A/I$ omomorfismo con A/I campo)

1.2.2 restrizione degli scalari

Siano A, B anelli, con $f : A \to B$ omomorfismo di anelli. Allora se M è un B-modulo allora M è anche un A-modulo con $ax := f(a)x$. Si dice allora che ${}_A M$ è ottenuto da ${}_B M$ per **restrizione degli scalari** attraverso f.
Inoltre se $M' \subseteq M$ è B-sottomodulo allora è anche un A-sottomodulo e se $g : M \to N$ è B-lineare allora g è anche A-lineare.
Prima della prossima definizione ricordiamo che il **centro** di un anello è sottoanello, con il centro l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri elementi e indicato con $Z(A)$,

$$Z(A) := \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$$

Definizione 47

Sia A commutativo. Allora una A-algebra è un omomorfismo di anelli $f : A \to B$ tale che $\mathrm{im} f \subseteq Z(B)$

Se f è evidente si dice che B è una A-algebra

Esempio 48. $M_n(A)$ è una A-algebra con $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Esempio 49. Se $A = \mathbb{Z}$ per ogni B anello l'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \to B$ è una $\mathbb{Z}$-algebra. Infatti l'omomorfismo unico $\mathbb{Z} \to Z(B)$ deve essere lo stesso di $\mathbb{Z} \to B$

Definizione 50: Morfismo di A-algebre

Siano $f : A \to B$, $g : A \to C$ A-algebre. Un (omo/iso/...)morfismo di A-algebre da f a g è $h : B \to C$ (omo/iso/...)morfismo di anelli tale che $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Esempio 51. Ogni omomorfismo di anelli è omomorfismo di $\mathbb{Z}$-algebre.

Esempio 52. Sia $f : A \to B$ una A-algebra. Allora $\forall I \subseteq B$ ideale B/I è A-algebra con $\pi \circ f$

Osservazione (**motivazione della definizione**). Se $f : A \to B$ A-algebra, allora B è un anello e A-modulo (per restrizione degli scalari) tale che

$$a(bb') = (ab)b' = b(ab')$$

Lemma 53. *Sia* $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *una successione esatta di* A*-moduli. Siano* $f' : A^m \to M'$ *e* $f'' : A^n \to M''$ *omomorfismi. Allora esiste un diagramma commutativo con righe esatte*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. □

Proposizione 54. *Sia* $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *esatta di* A*-moduli. Allora*

1. $M f.g. \implies M'' f.g.$
2. $M', M'' f.g. \implies M f.g.$
3. $M', M'' f.p. \implies M f.p.$
4. $M f.g., M'' f.p. \implies M' f.g.$
5. $M' f.g., M f.p. \implies M'' f.g.$

Dimostrazione.

1. già visto
2. In esercizio la dimostrazione diretta. In alternativa possiamo applicare il lemma 53. Infatti esistono $f' : A^m \to M'$ e $f'' : A^n \to M''$ omomorfismi suriettivi e per il lemma 53 il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   commuta. Applicando ora il lemma del serpente otteniamo la successione esatta

$$\text{coKer} f' = 0 \to \text{coKer} f \to 0 = \text{coKer} f'' \implies \text{coKer} f = 0 \implies M f.g.$$

3. Si può fare una dimostrazione simile a quella precedente e applicando il lemma del serpente troviamo la successione esatta

$$0 \to \text{Ker} f' \to \text{Ker} f \to \text{Ker} f'' \to 0 = \text{coKer} f'$$

   per il punto 1. M è finitamente generato e dunque M è finitamente presentato.

4. M'' *f.p.* $\implies \exists$ successione esatta $A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{h} M'' \to 0$. Esiste dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A^m & \xrightarrow{g} & A^n & \xrightarrow{h} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow[i]{} & M & \xrightarrow[p]{} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

infatti voglio f tale che $p \circ f = h$ e posso come prima (esercizio). allora per il lemma del serpente trovo che

$$0 \to \mathrm{coKer} f' \to \mathrm{coKer} f \to 0 = \mathrm{coKer}_{\mathrm{id}_{M''}}$$

è una successione esatta, e dunque $\mathrm{coKer} f' \cong \mathrm{coKer} f = M/\mathrm{Im} f$ per cui

$$0 \to \mathrm{Im} f' \to M' \to \mathrm{coKer} f' \to 0$$

è esatta. Concludiamo che $\mathrm{Im} f' \cong A^m/\mathrm{Ker} f'$ e dunque è *f.g.*, da cui anche M' è finitamente generato per il punto 1.

5. M è finitamente generato, dunque M'' è finitamente generato per il punto 0. Come prima $\exists\ A^m \to A^n, A^n \to M''$ omomorfismi suriettivi e trovo il diagramma del lemma 53 e applicando il lemma del serpente ottengo la successione esatta
$$\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Ker} f'' \to 0 = \mathrm{coKer} f'$$
Sia ora $f : A^{m+n} \to M$ suriettiva, allora
$$0 \to \mathrm{Ker} f \to A^{m+n} \to M \to 0$$
è esatta, A^{m+n} è finitamente generata, M è finitamente presentato, dunque $\mathrm{Ker} f$ è f.g., quindi per il punto 3. $\mathrm{Ker} f''$ è f.g. e per il punto 0. M è f.p.

□

Esercizio 55

Dimostrare il punto 1. della dimostrazione precedente direttamente.

Corollario 56. *Sia $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Allora M è f.g. / f.p. se e solo se M_i è f.g. / f.p. per ogni i.*

Dimostrazione. La successione $0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to M \to M_n \to 0$ è esatta, dunque

$\implies$ unsando induzione su n e i punti 1. e 2. della proposizione precedente

$\impliedby$ M_n è f.g. per il punto 0., ed è f.p. per il punto 4.

□

Osservazione. per il punto 3., se M è f.p. allora ogni $A^n \xrightarrow{p} M \to 0$ esatta si estende a
$$A^m \to A^n \xrightarrow{p} M \to 0$$

Osservazione. Sia A non noetheriano. Allora $\exists M$ A-modulo f.g. non noetheriamo, ad esempio $M = A$, ossia $\exists M' \subseteq M$ sottomodulo non f.g. e in tal caso anche quando M è finitamente presentato, ad esempio nel caso $M = A$, M/M' non è f.p. perché contraddirrebbe il punto 3.

Uno può chiedersi dato un modulo se i suoi sottomoduli finitamente generati siano anche moduli finitamente presentati. Quessto non è in generale vero ma motiva la seguente definizione

Definizione 57: Modulo coerente

Uno modulo M è detto **coerente** se è finitamente generato e tutti i suoi sottomoduli finitamente generati sono finitamente presentati.

Osservazione. Chiaramente essendo $M \subseteq M$ un sottomodulo, se è coerente è anche f.p.

Definizione 58: Anello coerente

Un anello A è **coerente** (a sinistra) se ${}_AA$ è A-modulo coerente (ossia tutti gli ideali sinistri f.g. di A sono f.p.)

Osservazione. Se A è noetheriano e M è un A-modulo, allora

$$M \text{ coerente } \iff M \text{ f.p. } \iff M \text{ f.g. } \iff M \text{ noetheriano}$$

in particolare A è coerente.

Dimostrazione. Sappiamo già che M noetheriano se e solo se M f.g. Resta da dimostrare dunque che M noetheriano se e solo se M è coerente. So che $M' \subseteq M$ f.g. è noetheriano (perché M lo è). Allora esiste la successione esatta

$$0 \to \mathrm{Ker}p \to A^n \xrightarrow{p} M' \to 0$$

Ora poiché A è noetheriano, anche A^n lo è, e dunque $\mathrm{Ker}p$ è noetheriano, dunque $\mathrm{Ker}p$ è f.g. e infine M' è f.p. □

Osservazione. Sia A coerente non noetheriano, allora ${}_AA$ è coerente non noetheriano

Esempio 59. Sia A non noetheriano, $I \subseteq A$ ideale sinistro non f.g., allora A/I è f.g. non f.p. e A/I può anche essere notheriano.

Un esempio è $A = \mathbb{K}[X_n | n \in \mathbb{N}]$, $I = (X_n | n \in \mathbb{N})$, $A/I = \mathbb{K}$

Osservazione. Sia $f : M \to N$ A-lineare, con M, N finitamente generati. Allora $\mathrm{Im}f \cong M/\mathrm{Ker}f$ e $\mathrm{coKer}f \cong N/\mathrm{Im}f$ sono finitamente generati (punto 0. della proposizione) ma non necessariamente anche $\mathrm{Ker}f$ se A è non noetheriano.

Proposizione 60. *Sia $0 \to M' \xrightarrow{i} m \xrightarrow{p} M'' \to 0$ esatta di A-moduli.*

1. *M' f.g. e M coerente, allora M'' è coerente*
2. *M', M'' coerenti, allora M è coerente*
3. *M è coerente, M'' è f.p., allora M' è coerente*

in particolare M', M, M'' sono coerenti se due di essi lo sono.

Dimostrazione.

1. M'' è f.g. per il punto 0. della proposizione 54. $N'' \subseteq M''$ è f.g., allora c'è una successione esatta

$$0 \to M' \to N := p^{-1}(N'') \to N'' \to 0$$

Allora N è f.g. per 1. di 54 e dunque N è f.p. perché M è coerente, da cui N'' è f.p. per 4. di 54

2. M è f.g. per 1. di 54, se $N \subseteq M$ sottomodulo finitamente generato, allora esiste la successione esatta

$$0 \to N' := i^{-1}(N) \to N \to N'' := p(N) \to 0$$

Allora N'' è f.g. per 0. di 54 da cui N'' è f.p. per la coerenza di M, dunque N' è f.g. per 3. di 54. Segue dalla oerenza di M' che N' è f.p. e dunque N lo è per 2. di 54

3. M' è f.g. per 3. di 54 dunque M' è coerente perché $M' \cong i(M') \subseteq M$ sottomodulo è f.g. e M è coerente.

$\square$

Esercizio 61

mostrare che

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \text{ coerente} \iff M_i \text{ coerente } \forall i$$

Corollario 62. *Sia $f : M \to N$ A-lineare, M, N coerenti, allora* $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f, \mathrm{coKer} f$ *sono coerenti.*

Dimostrazione. $\mathrm{Im} f \cong M/\mathrm{Ker} f$ è f.g. per 0. di 54 $\square$

Corollario 63. *Se A è coerente e M è un A-modulo f.p., allora M è coerente.*

Dimostrazione. Basta osservare che per definizione esiste una successione esatta

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \to M \to 0$$

e in particolare dunque $M \cong \mathrm{coKer} f$ e poiché A^m e A^n sono coerenti, lo è pure M $\square$

Esempio 64. Sia A commutativo tale che $A[X_1, \dots, X_n]$ sia coerente $\forall n \in \mathbb{N}$ (ad esempio A noetheriano, per il teorema della base di Hilbert) Allora $A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda]$ è coerente $\forall \Lambda$, anche se non è noetheriano per $\#\Lambda = +\infty$ e $A \neq 0$.

Idea della dimostrazione. Sia $I \subseteq B$ ideale f.g., ossia $I = (f_1, \dots, f_n)$. Allora $\exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ finito tale che $f_1 \in B_0 := A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda_0]$ $\square$

Esempio 65 (Anello non coerente)**.** Presi A e B come prima, ma supponiamo che $A = \mathbb{K}$ campo. Prendiamo dunque $J := (X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, con $\#\Lambda = +\infty$. Allora preso

$$C = B/J^2$$

non è coerente. Preso infatti ad esempio

$$I = C\overline{X_\lambda} \text{ con } \lambda \in \Lambda$$

è f.g. ma non f.p. perché c'è la successione esatta

$$0 \to J/J^2 \to C \to I \to 0$$

e J/J^2 è C-modulo annullato da J/J^2 e come $C/(J/J^2) \cong B/J \cong \mathbb{K}$-modulo ha dimensione ∞ con base $\{\overline{x_\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$

Capitolo 2

Categorie

Definizione 66: Categoria

Una **categoria** $\mathcal{C}$ è data da una classe di oggetti $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ da un insieme di morfismi da X a Y indicato con $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ e da una azione composizione di morfismi, cioè $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (anche scritto $X, Y, Z \in \mathcal{C}$) un'operazione

$$\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)(f,g) \qquad \mapsto g \circ f$$

tale che

0. $\mathcal{C}(X,Y) \cap \mathcal{C}(X',Y') \neq \varnothing \implies X = X'$ e $Y = Y'$

1. $\circ$ è associativa, cioè $\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$ e $\forall f \in \mathcal{C}(X,Y)$ e $\forall g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ e $\forall h \in \mathcal{C}(Z,W)$ allora
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. $\forall X \in \mathcal{C}$ esiste $1_X = \mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$ che è eleemento neutro di X cioè $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall f \in \mathcal{C}(X,Y)$,
$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

Esempio 67. La categoria degli insiemi `Set` che ha come oggetti tutti gli insiemi e $\forall X, Y \in \mathtt{Set}$ i morfismi $\mathtt{Set}(X,Y) = \{f : X \to Y\}$ le funzioni e $\circ$ la composizione di funzioni

Osservazione. Se ho $\mathcal{C}$ tale che valgano solo 1. e 2. e non necessariamente 0. posso ottenere la categoria $\mathcal{C}'$ che soddisfa anche 0. ponendo $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e

$$\mathcal{C}'(X,Y) := \{X\} \times \mathcal{C}(X,Y) \times \{Y\}$$

Esempio 68. Le categorie concrete, in cui gli oggetti sono insiemi con qualche struttura e i morfismi sono funzioni tra insiemi che preservano la struttura (con $\circ$ sempre la composizione di funzioni). In particolare:

- La categoria `Grp` dei gruppi, dove gli oggetti sono i gruppi e i morfismi gli omomorfismi di gruppi
- La categoria `Rng` degli anelli
- Dato un anello A, la categoria $\mathtt{A} - \mathtt{Mod}$ / $\mathtt{Mod} - \mathtt{A}$ degli A-moduli sinistri / destri
- Dato un anello commutativo A, la categoria $\mathtt{A} - \mathtt{Alg}$ delle A-algebre

- La categoria `Top` degli spazi topologici (con funzioni continue come morfismi)

Nota. Dato $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ si può indicare con $f : X \to Y$ "come fosse una funzione"

Esempio 69. Le categorie discrete, cioè tali che gli unici morfismi sono 1_X per ogni $X \in \mathcal{C}$.

Esempio 70. $\mathcal{C}$ tale che $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $\#\mathcal{C}(X,Y) \leq 1$, ottengo una relazione $\preccurlyeq$ su $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ in cui

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathcal{C}(X,Y) \neq \varnothing$$

e $\preccurlyeq$ è riflessivo (perché $\exists 1_X \in \mathcal{C}(X,X) \forall X \in \mathcal{C}$) e transitivo, perché $\exists \circ$. Ne consegue che $\preccurlyeq$ è un *preordine*

Viceversa, data una relazione di preordine $\preccurlyeq$ su un insieme (o una classe) S, ottengo una categoria $\mathcal{C}$ con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := S$ e $\forall X, Y \in S$,

$$\mathcal{C}(X,Y) := \begin{cases} \{f_{X,Y}\} & \text{se } X \preccurlyeq Y \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con l'unica composizione possibile

Esempio 71 (Categoria Vuota)**.** Prendendo $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \varnothing$

Osservazione. $\forall X \in \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ una categoria, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X,X)$ è un monoide con $\circ$, ne consegue il prossimo esempio

Esempio 72 (Monoide)**.** Una categoria con un solo oggetto è un monoide. Viceversa ogni monoide può essere visto come categoria di un solo oggetto.

Esempio 73 (Diagrammi)**.** Possiamo definire categorie date da diagrammi, in cui si rappresentano i morfismi (non l'identità). Ad esempio:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \qquad \bullet \rightrightarrows \bullet \qquad \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

sono tre categorie diverse, rispettivamente con 2, 2, e 3 oggetti

Definizione 74: Categoria opposta

La **categoria opposta** di $\mathcal{C}$ è denotata $\mathcal{C}^{op}$ ed è definita da

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \quad \mathcal{C}^{op}(X,Y) := \mathcal{C}(Y,X)$$

con composizione in $\circ^{op}$ data da $f \circ^{op} g := g \circ f$

Osservazione.

$$(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$$

Esempio 75 (Categoria Prodotto)**.** Siano $\mathcal{C}_\lambda$ per $\lambda \in \Lambda$ delle categorie. Allora la categoria prodotto

$$\mathcal{C} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita da

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$$

$$\mathcal{C}((X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda)$$

$$(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \circ (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (g_\lambda \circ f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

Esempio 76 (Cateogoria Coprodotto)**.** La categoria coprodotto

$$\mathcal{C} := \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$ l'unione disgiunta.

$$\forall X, Y \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C}(X,Y) := \begin{cases} \mathcal{C}_\lambda(X,Y) & \text{se } X, Y \in \mathcal{C}_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\circ$ ovvia.

Definizione 77: Sottocategoria

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Allora una sottocategoria $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ è data da una sottoclasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \mathcal{C}'$ da un sottoinsieme $\mathcal{C}'(X,Y) \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ tale che $\circ$ si restringe a $\mathcal{C}'$ e $1_X \in \mathcal{C}'(X,X)$ per ogni $X \in \mathcal{C}'$.
In particolare $\mathcal{C}'$ è una categoria.

Esempio 78. Se $\mathcal{C}$ è un monoide (cateogoria di un oggetto), allora le sottocategorie non vuote di $\mathcal{C}$ sono i sottomonoidi.

Definizione 79: Sottocategoria Piena

Una sottocategoria $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ si dice **piena** se $\mathcal{C}'(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{C}'$

Osservazione. Una sottocategoria piena di $\mathcal{C}$ equivale a dare una sottoclasse di $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

Esempio 80 (Gruppi Abeliani)**.** $\mathtt{Ab} \subseteq \mathtt{Grp}$ sottocategoria piena dei gruppi abeliani. Similmente anche $\mathcal{C}\mathtt{Rng} \subseteq \mathtt{Rng}$ sottocategoria piena degli anelli commutativi.

Oltre alle sotto-strutture sono anche importanti i quozienti, e anche qui possiamo dare una definizione astratta

Definizione 81: Congruenza

Una congruenza $\sim$ su una categoria $\mathcal{C}$ è data da una relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathcal{C}(X,Y)$ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ tale che

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{C},\ \forall f, f' \in \mathcal{C}(X,Y)\, \forall g, g' \in \mathcal{C}(Y,Z) \quad f \sim f', g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f'$$

equivalentemente $g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f$ e $h \circ g \sim h \circ g'$

Definizione 82: Quoziente

Sia $\sim$ una congruenza su $\mathcal{C}$, allora possiamo definire la categoria quoziente $\mathcal{C}/_\sim$ definita da

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/_\sim) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \quad (\mathcal{C}/_\sim)(X,Y) := \mathcal{C}(X,Y)/_\sim \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$$

e $\circ$ è indotta da quella di $\mathcal{C}$, ossia

$$\overline{g} \circ \overline{f} := \overline{g \circ f}$$

Esempio 83 (Omotopia)**.** Sia $\mathcal{C} = \mathtt{Top}$ e $\sim_h$ l'omotopia, ossia $f, g : X \to Y$ sono omotope se $\exists H : X \times [0,1] \to Y$ continue tali che

$$f(x) = H(x,0), \quad g(x) = H(x,1) \quad \forall x \in X$$

e si ottiene $\texttt{Toph} := \texttt{Top}/\sim_h$

Esempio 84 (Gruppo quoziente)**.** Sia G un gruppo (visto come monoide, ossia categoria di un oggetto) e sia $H \lhd G$ e $\sim$ su G data da $a \sim b \iff aH = bH$. Allora G/N è la categoria quoziente $G/\sim$. Viceversa ogni $\sim$ congruenza su G si può scrivere in tal modo prendendo $H = \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$ (esercizio).

Definizione 85: morfismo invertibile

Sia $f : X \to Y$ un morfismo in una categoria $\mathcal{C}$. Allora esso è invertibile a sinistra (destra) se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$).

Osservazione. f è invertibile a sinistra (destra) in $\mathcal{C}$, allora f è invertibile a destra (sinistra) in $\mathcal{C}^{op}$

Definizione 86: Isomorfismo

$f : X \to Y$ è un **isomorfismo** se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f' = 1_Y$

Osservazione. f è isomorfismo se e solo se f è invertibile a destra e a sinistra.

Dimostrazione.

$\implies$ ovvio

$\impliedby$ $\exists f', f''$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f'' = 1_Y$, allora

$$f' \circ (f \circ f'') = f' = f'' = (f' \circ f) \circ f''$$

e dunque f è invertibile.

In particolare dunque la f' della definizione di isomorfismo è unica e viene denotata f^{-1} □

Definizione 87

Siano $X, Y \in \mathcal{C}$. Allora X e Y sono isomorfe ($X \cong Y$) se esiste un $f : X \to Y$ isomorfismo.

Osservazione. 1_X è isomorfismo e $1_X^{-1} = 1_X$. Se f isomorfismo allora f^{-1} isomorfismo e $(f^{-1})^{-1} = f$. Se f, g isomorfismi componibili, allora $g \circ f$ è isomorfismo e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Ne segue che $\cong$ è una relazione di equivalenza su $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

Definizione 88

Un morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ è detto **monomorfismo** se $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{C}(Z, X) &\longrightarrow \mathcal{C}(Z, Y) \\ g &\longmapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

è iniettiva

Definizione 89: Epimorfismo

f è un **epimorfismo** in $\mathcal{C}$ se è monomorfismo in $\mathcal{C}^{op}$, ossia $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{C}(Y, Z) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

è iniettiva.

Proposizione 90. *f è invertibile a sinistra (destra), allora f è monomorfismo (epimorfismo)*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se f è invertibile a sinistra, allora è mono.

Sappiamo che $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$. Dobbiamo dimostrare che f_* è iniettiva. Siano $g, h \in \mathcal{C}(Z, X)$ tali che $f_*(g) = f_*(h)$. Allora $f \circ g = f \circ g$, da cui $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$ e dunque $g = h$ □

Proposizione 91. *Sia $\mathcal{C}$ concreta. Allora*

$$f \text{ invertibile a sinistra/destra} \implies f \text{ iniettiva/suriettiva} \implies f \text{ mono/epi}$$

Dimostrazione. Non possiamo usare il trick della categoria opposta, perché non è detto che $\mathcal{C}^{op}$ sia ancora concreta.

Sia f' tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$), allora chiaramente f iniettiva (suriettiva) perché le composizioni 1_X e 1_Y sono biunivoche.

Se f è iniettiva, allora siano $g_1, g_2 : Z \to X$. Dunque $\forall x \in X$

$$f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \overset{f \text{ inj.}}{\implies} g_1(x) = g_2(x)$$

ossia f_* è iniettiva, ossia f è monomorfismo.

se f è suriettiva, allora siano $g_1, g_2 : Y \to Z$. Sappiamo che $\forall y \in Y$ esiste $x_y \in X$ tale che $f(x_y) = y$. Allora abbiamo che, assumendo che $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$g_1(y) = g_1(f(x_y)) = g_2(f(x_y)) = g_2(y) \quad \forall y \in Y$$

ossia f^* è iniettiva e dunque f è epimorfismo □

In generale non vale nessuna delle $\Longleftarrow$.

Esempio 92. In `Set` se $f : X \to Y$ è suriettiva, allora f è invertibile a sinistra. Infatti basta scegliere (AOC) $f'(y) \in f^{-1}\{y\}$ per ogni $y \in Y$. Inoltre se $X \neq \varnothing$ e $f : X \to Y$ è iniettiva, allora f è invertibile a sinistra.

Esercizio 93

In $\mathtt{A} - \mathtt{Mod}$, mostrare che $f : M \to N$ iniettiva è invertibile a sinistra se e solo se $\operatorname{Im}(f) \subseteq N$ è addendo diretto.
Mostrare che $f : M \to N$ suriettiva è invertibile a destra se e solo se $\operatorname{Ker}(f) \subseteq M$ è addendo diretto
Concludere che valgono sempre entrambe le implicazioni se e solo se A è semisemplice.

Esempio 94. In `Set`, se f è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti, poniamo per assurdo $f : X \to Y$ non iniettiva, dunque siano $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$. Allora preso $Z = \{z\}$ e $g, h : Z \to X$ tali che $g(z) = x$ e $h(z) = y$ abbiamo che $f \circ g = f \circ h$ da cui $g = h$ e dunque $x = y$

Supponiamo f non suriettiva, mostrare *per esercizio* $\exists g, h : Y \to Z$ tali che $g \neq h$ ma $g \circ f = h \circ f$

Esempio 95. In $\mathtt{A-Mod}$ $f : M \to N$ è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti $i : \mathrm{Ker} f \to M$ inclusione tale che $f \circ i = 0$ e anche $0 : \mathrm{Ker} f \to M$ è tale che $f \circ 0 = 0$. Concludiamo che $i = 0$ e dunque $\mathrm{Ker} f = 0$.

Similmente $\pi : N \to \mathrm{coker} f$ è tale che $\pi \circ f = 0$ e se f è epi allora $0 = \pi$ e dunque $\mathrm{coker} f = 0$ e dunque f è suriettiva.

Esempio 96. In $\mathtt{Grp}$ f mono (epi), allora f iniettiva (suriettiva)

Per mono $\implies$ iniettiva si può usare la stessa dei moduli, mentre per l'altra è un po' più complicato, ma si dimostra che è vero lo stesso

Esempio 97. In $\mathtt{Rng}$ $f : A \to B$ mono, allora f iniettiva.

Tuttavia f epi **non implica** f suriettiva. Ad esempio preso $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è epi, infatti $\forall A$ anello esiste al più un omomorfismo $\mathbb{Q} \to A$ ($f : \mathbb{Q} \to A$ sia omomorfismo, allora $f|_{\mathbb{Z}}$ è l'unico omomorfismo e $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$). Chiaramente però non è suriettiva.

Definizione 98: Funtore

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ tra 2 categorie è dato da una funzione $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ e $\forall X, X' \in \mathcal{C}$ una funzione $F = F_{X,X'} : \mathcal{C}(X, X') \to D(F(X), F(X'))$ tale che

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(se f e g sono componibili in $\mathcal{C}$) e $F(1_X) = 1_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$

Proposizione 99. *Sia F un funtore e f invertibile a sinistra (destra). Allora $F(f)$ è invertibile a sinistra (destra)*

Dimostrazione. $\exists f'$ tale che $f' \circ f = 1_X$, allora $F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$. $\square$

Osservazione. Segue che f iso, allora $F(f)$ iso e $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$

Esempio 100. Sia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria. Allora $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, $X \mapsto X$ e $f \mapsto f$ è un funtore

Esempio 101. Se $\sim$ è una congruenza, allora $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ è un funtore, con $X \mapsto X$ e $f \mapsto \overline{f}$

Esempio 102 (Funtore dimenticante)**.** $\mathcal{C} \to \mathtt{Set}$ con $\mathcal{C}$ categoria discreta e $X \mapsto X$, $f \mapsto f$ è un funtore, che "dimentica" la struttura aggiunta.

Analogamente anche $\mathtt{Rng} \to \mathtt{Ab}$, con $(A, +, \cdot) \to (A, +)$ è un funtore dimenticante.

Osservazione. Notare che il secondo funtore dimenticante non preserva gli epimorfismi. Sarebbe infatti $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'inclusione è un'epimorfismo in $\mathtt{Rng}$ ma non in $\mathtt{Ab}$

Esempio 103. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora la restrizione degli scalare è un funtore $\mathtt{B-Mod} \to \mathtt{A-Mod}$

Esempio 104. Funtore tra 2 categorie discrete $\mathcal{C}$ e D è una funzione $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$

Esempio 105. Un funtore tra 2 preordini $\mathcal{C}$ e D è una funzione $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ che preserva la relazione di preordine.

Esempio 106. Un funtore tra 2 monoidi è un omomorfismo di monoidi.

Più in generale dato G un monoide e una categoria $\mathcal{C}$, un funtore $G \to \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da un omomorfismo di monoidi $G \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$

Se G è un gruppo un funtore $G \to \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e un omomorfismo di gruppi $G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Ad esempio se $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ il funtore dà un'azione di un gruppo su un insieme. Similmente se $\mathcal{C} = \mathbb{K}$-spazi vettoriali ho una rappresentazione di G.

Esempio 107 (Funtore costante)**.** Date $\mathcal{C}, D$ categorie preso $Y \subseteq D$ si può considerare il funtore costante di valore Y, $\mathcal{C} \to D$, $X \mapsto Y$ e $f \mapsto 1_Y$

Esempio 108. Presa $\mathtt{Top}_*$ la categoria degli spazi topologici puntati, il gruppo fondamentale

$$\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$$

è un funtore

Esempio 109. $\forall n \in \mathbb{N}$ ci sono funtori di omologia (singolare)

$$H_n : \mathtt{Top} \to \mathtt{Ab}$$

Teorema 110: Omomorfismo

Sia $\sim$ una congruenza su $\mathcal{C}$ e $F : \mathcal{C} \to D$ un funtore tale che se $f \sim f'$ in $\mathcal{C}$ allora $F(f) = F(f')$. Allora esiste un unico funtore $\overline{F} : \mathcal{C}/_{\sim} \to D$ tale che $\overline{F}(\overline{f}) = F(f)$ per ogni f morfismo di $\mathcal{C}$

Esempio 111. Negli esempi precedenti se f e f' sono omotope, allora $\pi_1(f) = \pi_1(f')$ e $H_n(f) = H_n(f')$, dunque inducono funtori

$$\pi_1 : \mathtt{Toph}_* \to \mathtt{Grp} \quad H_n : \mathtt{Toph} \to \mathtt{Ab}$$

Nota. I funtori che abbiamo definito si dicono anche funtori covarianti

Definizione 112: funtore controvariante

Un funtore **controvariante** $\mathcal{C} \to D$ è un funtore (covariante) $\mathcal{C}^{op} \to D$.

Esempio 113. $\forall n \in \mathbb{N}$ i funtori di coomologia (singolare) sono funtori controvarianti $H^n : \mathtt{Top(h)}^{op} \to \mathtt{Ab}$

Esempio 114. Sia $\mathcal{C}$ una categoria, $X \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathtt{Set} \\ Y \mapsto \mathcal{C}(X,Y) \quad &(f : Y \to Y') \mapsto (f_* : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y')) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g \mapsto f \circ g \end{aligned}$$

è un funtore perché $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$

Analogamente

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}(-,Y) : \mathcal{C}^{op} \to \mathtt{Set} \\ X \mapsto \mathcal{C}(X,Y) \quad &(f : X \to X') \mapsto (f^* : \mathcal{C}(X',Y) \to \mathcal{C}(X,Y)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g \mapsto g \circ f \end{aligned}$$

è un funtore controvariante perché $(f' \circ f)^* = f^* \circ f'^*$

Osservazione. C'è anche un funtore

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-,=) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\to \mathtt{Set} \\ (X,Y) &\mapsto \mathcal{C}(X,Y) \\ (f : X \to X', g : Y \to Y') &\mapsto g_* \circ f^* : \mathcal{C}(X',Y) \to \mathcal{C}(X,Y') \end{aligned}$$

Esempio 115. Per ogni gruppo G, preso il sottogruppo dei commutatori $[G, G]$, allora per ogni $f : G \to H$ omomorfismo di gruppi, $f([G, G]) \subseteq [H, H]$ quindi si ottiene un funtore

$$\begin{aligned} \texttt{Grp} &\to \texttt{Grp} \\ G &\mapsto [G, G] \\ (f : G \to H) &\to (f|_{[G,G]} : [G, G] \to [H, H]) \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} \text{Abel} : \texttt{Grp} &\to \texttt{Ab} \\ G &\mapsto \frac{G}{[G, G]} \text{ (abelianizzato di } G \text{)} \\ (f : G \to H) &\mapsto \left(\overline{f} : \frac{G}{[G, G]} \to \frac{H}{[H, H]}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & H \arrow[d, "q"] \\ \frac{G}{[G,G]} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{H}{[H,H]} \end{tikzcd}$$

Esercizio 116

Indicando con $Z(X)$ il centro di X,

a. Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Rng} \to \texttt{Rng}$ tale che $\forall A \in \texttt{Rng}$ $F(A) = Z(A)$.

b. Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Grp} \to \texttt{Ab}$ tale che $\forall G \in \texttt{Grp}$ $F(G) = Z(G)$.

Supponiamo l'esistenza di F.

a. Se prendo $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$, allora $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e $F(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. A tal punto però $F(i) : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ che non esiste perché altrimenti

$$-1 = F(i)(-1) = F(i)(i^2) = F(i)(i)^2$$

b. Consideriamo
$$\{(1), (12)\} \overset{i}{\hookrightarrow} S_3 \overset{\varepsilon}{\to} \{\pm 1\}$$
Allora $\varepsilon \circ i = \text{Id}_{\mathcal{C}_2}$. Allora avremmo

$$0_{\text{End}(\mathcal{C}_2)} = F(\varepsilon) \circ F(i) = F(\varepsilon \circ i) = F(\text{id}_{\mathcal{C}_2}) = \text{id}_{\mathcal{C}_2}$$

L'identità
$$\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \quad X \mapsto X \quad f \mapsto f$$
è un funtore Si possono comporre i funtori. Dati ad esempio

$$\mathcal{C} \overset{F}{\to} D \overset{G}{\to} E$$

funtori, possiamo definire $G \circ F : \mathcal{C} \to E$ come $X \mapsto G(F(X))$ e $f \mapsto G(F(f))$ è un funtore.

La composizione è associativa e $F \circ \text{id}_{\mathcal{C}} = F = \text{id}_{\mathcal{C}} \circ F$

In tal modo otteniamo una categoria $\mathcal{C}\mathtt{at}$ delle categorie (piccole[1])

Definizione 117

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è un isomorfismo se lo è in $\mathcal{C}\mathtt{at}$, cioè se $\exists G : D \to \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}} = F \circ G$

Definizione 118: iniettivo e suriettivo

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è *iniettivo/suriettivo* se $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ è *iniettivo/suriettivo*.
Nel caso in cui F sia sia iniettivo che suriettivo, è **biunivoco**.

Definizione 119: Fedele e pieno

F è detto **fedele** (**pieno**) se $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C}(X, Y) \to D(F(X), F(Y))$ è iniettivo (suriettivo).
Nel caso in cui F sia sia fedele che pieno, si dice che è **pienamente fedele**

Esercizio 120

F funtore è isomorfismo se e solo se F è pienamente fedele e biunivoco.

Esempio 121. Se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è una sottocategoria, allora il funtore di inclusione $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ è iniettivo e fedele ed è pieno se e solo se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è piena.

Ad esempio se $\sim$ è una congruenza in $\mathcal{C}$, allora il funtore quoziente $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ è biunivoco e pieno.

Esempio 122. Un omomorfismo di monoidi (categorie di un oggetto) è iniettivo (suriettivo) se e solo se come funtore è fedele (pieno). In ogni caso è biunivoco.

Esempio 123. I funtori dimenticanti $\mathbb{Z} - \mathtt{Mod} \to \mathtt{Ab}$ e $\mathbb{Z} - \mathtt{Alg} \to \mathtt{Rng}$ sono isomorfismi.

Esempio 124. Anche $\mathtt{Mod} - \mathtt{A} \cong \mathtt{A}^{\mathtt{op}} - \mathtt{Mod}$ ed esiste un isomorfismo (anche se non sono categorie piccole).

Definizione 125

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è **essenzialmente *iniettivo/suriettivo*** se la funzione ridotta

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})/_{\cong} \to \mathrm{Ob}(D)/_{\cong}$$

è *iniettivo/suriettivo*

Osservazione. Se F è suriettivo allora F è essenzialmente suriettivo. L'altra implicazione non vale. Ad esempio

$$(\bullet) \longrightarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

Nessuna delle implicazioni tra iniettiva e essenzialmente iniettiva è vera. Basti considerare

$$(\bullet) \longleftarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

[1] si potrebbe anche fare di tutte le categorie, ma per motivi insiemistici/logici dovremmo introdurre gli universi di Grothendieck e fare le cose per bene. Al fine di evitare questo inutile sforzo, ci limitiamo a considerare le categorie piccole.

per essenzialmente iniettiva $\not\Rightarrow$ iniettiva e

$$(\bullet \qquad \bullet) \longrightarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

per iniettiva $\not\Rightarrow$ essenzialmente iniettiva.

Proposizione 126. *Sia $F : \mathcal{C} \to D$ un funtore pienamente fedele. Allora F è essenzialmente iniettivo*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathcal{C}$ tali che $F(X) \cong F(Y)$ in D. Devo dimostrare che $X \cong Y$ in $\mathcal{C}$.

Sappiamo che esiste $g : F(X) \to F(Y)$ isomorfismo in D. Poiché F è pieno esiste $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $F(f) = g$. Analogamente $\exists f' \in \mathcal{C}(Y, X)$ tale che $F(f') = g^{-1}$.

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) = g^{-1} \circ g = 1_{F(X)} = F(1_X)$$

Se F è fedele, allora $f' \circ f = 1_X$ e analogamente $f \circ f' = 1_Y$ da cui f è isomorfismo e duque $X \cong Y$ $\square$

Definizione 127: Trasformazione naturale

Siano $F, F' : \mathcal{C} \to D$ funtori.
Una **trasformazione naturale** $\alpha : F \to F'$ (si può anche scrivere $\alpha : F \implies F'$) è il dato di un morfismo

$$\alpha_X : F(X) \to F'(X) \text{ in } D \ \forall X \in \mathcal{C}$$

tale che $\forall f : X \to Y$ morfismo di $\mathcal{C}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ F'(X) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(Y) \end{tikzcd}$$

commuta in D, cioè $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$

Esempio 128. Consideriamo i due funtori Abel : $\texttt{Grp} \to \texttt{Grp}$ e id : $\texttt{Grp} \to \texttt{Grp}$. C'è una trasformazione naturale $\alpha : \mathrm{id} \to \mathrm{Abel}$ definita per ogni $G \in \texttt{Grp}$ da

$$\alpha_G : G \longrightarrow \frac{G}{[G, G]}$$
$$a \longmapsto \alpha_G(a) = a[G, G]$$

è naturale perché $\forall f : G \to H$ in $\texttt{Grp}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_G"] & H \arrow[d, "\alpha_H"] \\ \frac{G}{[G,G]} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{H}{[H,H]} \end{tikzcd}$$

Esempio 129. Supponendo di avere $F, F' : G \to \texttt{Set}$ funtori (G gruppo visto come categoria con un oggetto), cioè G-insiemi (azioni di G su insiemi). Allora una trasformazione naturale $\alpha : F \to F'$ è un morfismo di G-insiemi cioè una funzione $\alpha : F(G) \to F'(G)$ tale che $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in F(G)$.

Osservazione. $\forall F : \mathcal{C} \to D$, $\mathrm{id}_F : F \to F$ data da $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$ è una trasformazione naturale.

Esercizio 130

Dati $F, F', F'' : \mathcal{C} \to D$ funtori, $\alpha : F \to F'$ e $\beta : F' \to F''$ trasformazioni naturali, allora la composizione $\beta \circ \alpha : F \to F''$ è definita da

$$\beta_X \circ \alpha_X =: (\beta \circ \alpha)_X : F(X) \to F''(X)$$

Mostrare che $\alpha \circ \beta$ è una trasformazione naturale

La composizione dell'esercizio precedente è anche detta *composizione verticale* di trasformazioni naturali, per via di questo disegno esplicativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U}] \arrow[r, "F"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "F''"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\beta"] \end{tikzcd}$$

Considerando funtori e trasformazioni naturali, si ottiene (assumiamo sempre $\mathcal{C}$ piccola) la categoria $\texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ (anche denotata $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$) con oggetti i funtori $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, morfismi le trasformazioni naturali e composizione la composizione verticale.

Definizione 131

Data una categoria $\mathcal{C}$, la categoria dei morfismi di $\mathcal{C}$ è

$$\texttt{Mor}(\mathcal{C}) := \texttt{Fun}(\cdot \to \cdot, \mathcal{C})$$

che ha come oggetti esattamente $\{f : X \to Y \text{ morfismo di } \mathcal{C}\}$ e trasformazioni naturali date da $(X \xrightarrow{f} Y) \to (X' \xrightarrow{f'} Y')$ è data da $(g : X \to X', h : Y \to Y')$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

Definizione 132

Date $F, G : \mathcal{C} \to D$ funtori, $\alpha : F \to G$ trasformazione naturale, allora α è *isomorfismo* (*naturale* o di funtori) se è isomorfismo in $\texttt{Fun}(\mathcal{C}, D)$ cioè se $\exists \beta : G \to F$ trasformazione naturale tale che $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$.
In tal caso F e G si dicono *isomorfi* (denotato $F \cong G$).

Osservazione. $\cong$ di funtori è una relazione di equivalenza

Esempio 133. Il primo gruppo di omologia si può vedere come l'abelianizzato del gruppo fondamentale. In linguaggio categorico abbiamo

$$\texttt{Top}_* \xrightarrow{\pi_1} \texttt{Grp} \xrightarrow{\text{Abel}} \texttt{Ab}$$

e

$$\text{Top}_* \to \text{Top} \xrightarrow{H_1} \texttt{Ab}$$
$$(X, x_0) \mapsto \text{comp. c.p.a. che contiene } x_0$$

sono funtori isomorfi

Osservazione. $F \cong F'$ allora F e F' inducono la stessa funzione $\text{Ob}(\mathcal{C})/_{\cong} \to \text{Ob}(D)/_{\cong}$ quindi F è essenzialmente *iniettiva* / *suriettiva* se e solo se F' lo è.

Esercizio 134

Mostrare che non necessariamente la precedente osservazione vale per le proprietà di iniettività e suriettività.

Proposizione 135. *Se* $F \cong F'$ *allora* F *è* fedele/pieno *se e solo se* F' *è* fedele/pieno.

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \to F'$ l'isomorfismo. Sia allora $\overline{\alpha} : \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \to \mathcal{D}(F'(X), F'(Y))$ definita da $\overline{\alpha}(g) := \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}$. Per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$, il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}(F(X),F(Y)) \arrow[dd, "\overline{\alpha}"] \\ \mathcal{C}(X,Y) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F'"'] & \\ & \mathcal{D}(F'(X),F'(Y)) \end{tikzcd}$$

commuta. Infatti preso $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, per la trasformazione naturale $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$ si ha che

$$(\overline{\alpha} \circ F)(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} = F'(f)$$

Inoltre $\overline{\alpha}$ è una biezione, infatti ha inversa $\overline{\alpha}^{-1}(h) = \alpha_Y^{-1} \circ h \circ \alpha_X$:

$$\overline{\alpha}(\overline{\alpha}^{-1} \circ \overline{\alpha})(g) = \overline{\alpha}^{-1}(\alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}) = \alpha_Y^{-1} \circ \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X = g$$

e similmente l'altra composizione. Allora chiaramente se F è *fedele/pieno*, allora $F' = \overline{\alpha} \circ F$ è *iniettivo/suriettivo.*

□

Proposizione 136. α, β *trasformazioni naturali inducono una trasformazione naturale* $\beta * \alpha : G \circ F \to G' \circ F'$

$$\begin{tikzcd} G(F(X)) \arrow[r, "G(\alpha_X)"] \arrow[d, "\beta_{F(X)}"] & G(F'(X)) \arrow[d, "\beta_{F'(X)}"] \\ G'(F(X)) \arrow[r, "G'(\alpha_X)"] & G'(F'(X)) \end{tikzcd}$$

dunque $(\beta * \alpha)_X := \beta_{F'(X)} \circ G(\alpha_X) = G'(\alpha_x) \circ \beta_{F(X)}$.

Dimostrazione che è una trasformazione naturale. Vogliamo mostrare che $b * a$ è naturale, cioè $\forall f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} G(F(X)) \arrow[r, "G(F(f))"] \arrow[d, "(\beta*\alpha)_X"] & G(F(X)) \arrow[d, "(\beta*\alpha)_Y"] \\ G'(F'(X)) \arrow[r, "G'(F'(f))"] & G'(F'(X)) \end{tikzcd}$$

commuta. Ma questo è vero perché

$$\begin{aligned} G'(F'(f)) \circ (\beta * \alpha)_X &= G'(F'(f)) \circ G'(\alpha_x) \circ \beta_{F(X)} = G'(F'(f) \circ \alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\overset{\alpha \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y \circ F(f)) \circ \beta_{F(X)} = G'(\alpha_Y) \circ G'(F(f) \circ \beta_{F(X)}) = \\ &\overset{\beta \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y) \circ \beta_{F(Y)} \circ G(F(f)) = (\beta * \alpha)_Y \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

□

Ovviamente è chiaro che si potrebbe definire allora la categoria delle trasformazioni naturali eccetera e andare avanti all'infinito. Per assiomatizzare queste cose in realtà bisognerebbe esplicitare che abbiamo definito le "2-frecce" e che quindi siamo in una *2-categoria*

Nota (zione). Se $\beta = \mathrm{id}_G$ invece di $\mathrm{id}_G * \alpha$ si scrive $G \circ \alpha$ (dunque con $(G \circ \alpha)_X = G(\alpha_X)$). Se $\alpha = \mathrm{id}_F$ invece di $\beta * \mathrm{id}_F$ si scrive $\beta \circ F$ (con $(\beta \circ F)_X = \beta_{F(X)}$). In generale

$$\beta * \alpha = (\beta \circ F') \circ (G \circ \alpha) = (G' \circ \alpha) \circ (\beta \circ F)$$

Osservazione. Se α, β sono isomorfismi, allora $\beta * \alpha$ è isomorfismo. Questo significa che se

$$F \cong F', \quad G \cong G' \implies G \circ F \cong G' \circ F'$$

cioè l'isomorfismo di funtori è una congruenza su $\mathcal{C}\mathtt{at}$ e quindi si ottiene la categoria $\mathcal{C}\mathtt{at}/_{\cong}$

Definizione 137: Equivalenza

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è un'equivalenza se $\exists G : D \to \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F \cong \mathrm{id}_G$ e $F \circ G \cong \mathrm{id}_D$.
Un tale G si dice un *quasi-inverso* di F.

Osservazione. F è un'equivalenza se e solo se $\overline{F}$ in $\mathcal{C}\mathtt{at}/_{\cong}$ è un isomorfismo.

Segue che se $F \cong F'$, allora F è un'equivalenza se e solo se F' è un'equivalenza e un quasi-inverso di F è unico a meno di isomorfismo e l'equivalente di categorie è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}\mathtt{at}$

Definizione 138: Scheletro

Una sottocategoria piena $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è detta *scheletro* se $\forall X \in \mathcal{C}$, $\exists! X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$

Lemma 139. *Sia $F : \mathcal{C} \to D$ un funtore, e si supponga che $\forall X \in \mathcal{C}$, $\alpha_X : F(X) \to F'(X)$ sia un isomorfismo in D. Allora $F' : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ Si estende in modo unico a un funtore $F' : \mathcal{C} \to D$ tale che $\alpha : F \to F'$ è isomorfismo.*

Teorema 140: Finalmente un teorema

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è un'*equivalenza* se e solo se F è *pienamente fedele* e *essenzialmente suriettivo*

Osservazione. Non è necessario aggiungere l'ipotesi che F sia essenzialmente iniettivo perché come mostrato prima pienamente fedele implica essenzialmente iniettivo (ma non essenzialmente suriettivo).

Esempio 141. Supponiamo che $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sia una sottocategoria piena. Allora il funtore di inclusione $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ è pienamente fedele ed è essenzialmente suriettivo (quindi è un'equivalenza) se e solo se $\forall X \in \mathcal{C}$ esiste $X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$.

Dimostrazione.

$\implies$ Sia $G : D \to \mathcal{C}$ un quasi-inverso di F. Allora $F \circ G \cong \mathrm{id}_G$ che è essenzialmente suriettivo, e dunque F è essenzialmente suriettivo. D'altra parte lo stesso $F \circ G$ è fedele, e dunque G è fedele.

Ora, per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}(X,Y) \overset{F_{X,Y}}{\to} D(F(X), F(Y)) \overset{G_{F(X),F(Y)}}{\to} {}^{\text{inj}}\ \mathcal{C}(G(F(X)), G(F(Y)))$$

poiché la composizione è biunivoca e G è fedele, allora entrambi devono essere biunivoci, ossia in particolare F è pienamente fedele.

$\Longleftarrow$ Consideriamo prima il caso di un'inclusione $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria piena tale che $\forall X \in \mathcal{C}$ esista $X' \in \mathcal{C}$ tale che $X \cong X'$. Sia $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ il funtore di inclusione (pienamente fedele e essenzialmente suriettivo).

Allora $\forall X \in \mathcal{C}$ scelto (AoC) un isomorfismo $\alpha_X : X \to \tilde{P}(X) \in \mathcal{C}'$ e se $X \in \mathcal{C}'$ in particolare prendiamo $\alpha_X = 1_X$. Applico ora il lemma 139 con $F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ e dunque $\exists!$ estensione di $\tilde{P}$ a un funtore $\tilde{P} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tale che $\alpha : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \tilde{P}$ è isomorfismo. Allora $\exists! P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funtore tale che $\tilde{P} = I \circ P$ e P è un quasi-inverso di I poiché $I \circ P = \tilde{P} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ e $P \circ I = \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$.

In generale, dato $F : \mathcal{C} \to D$ pienamente fedele. Siano allora $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ e $J : D' \to D$ due scheletri. Per il caso qui fatto I, J sono equivalenze e siano $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ quasi-inverso di I e $Q : D \to D'$ quasi-inverso di J.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "P"'] & D \arrow[d, shift left, "Q"] \\
\mathcal{C}' \arrow[r, "F'"] \arrow[u, shift right, "I"'] & D' \arrow[u, shift left, "J"]
\end{tikzcd}$$

Sia $F' := Q \circ F \circ I : \mathcal{C}' \to D'$ come nel diagramma. Allora I, F, Q sono pienamente fedeli e essenzialmente suriettivi (I per definizione, F per ipotesi e Q perché è un'equivalenza e vale il punto ($\Longrightarrow$)) dunque F' è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

F' è essenzialmente biunivoco, $\mathcal{C}'$ e D' sono scheletri, dunque F' è biunivoco, quindi isomorfismo e quindi equivalenza.

$$F = \mathrm{id}_D \circ F \circ \mathrm{id}_c \cong J \circ Q \circ F \circ I \circ P = J \circ F' \circ P$$

equivalenza perché lo sono J, F' e P

□

Esempio 142. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme X che vedo come categoria $\mathcal{C}$ con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = X$ e $\mathcal{C}(x, y) \neq \varnothing \iff x \sim y$.

Il funtore $\mathcal{C} \to X/_{\sim}$ (categoria discreta) definito da $x \mapsto \overline{x}$ è un'equivalenza poiché pienamente fedele e essenzialmente suriettiva.

Esercizio 143

Mostrare che ogni categoria equivalente a una categoria discreta è una relazione di equivalenza, ossia una categoria dove $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(X, Y) \neq O \iff x \sim y$ per una qualche $\sim$ relazione di equivalenza.

2.1 Categorie preadditive

Definizione 144: Categoria preadditiva

Una categoria *preadditiva* è una categoria $\mathcal{A}$ con una struttura di gruppo abeliano (notazione: additivo) su $\mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ ed è tale che la composizione di morfismi sia $\mathbb{Z}$-bilineare, ossia

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{e} \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$ e $g, g' \in \mathcal{A}(Y, Z)$.

Osservazione. Si dice anche che $\mathcal{A}$ è una $\mathtt{Ab}$-Categoria. Si può studiare quando si può generare una categoria simile partendo da altre categorie invece di $\mathtt{Ab}$ ma non è argomento di questo corso.

Si può anche dire che $\mathcal{A}$ è $\mathbb{Z}$-lineare. Più in generale $\forall$[2] anello commutativo A una categoria A-lineare è una categoria $\mathcal{A}$ con una struttura di A-modulo su $\mathcal{A}(X,Y)$ tale che la composizione sia A-bilineare.

Proposizione 145. *Se A è non commutativo, allora $\forall a, b \in A$ e $\forall f : X \to Y$ morfismo di $\mathcal{A}$,*

$$(ab)f = (ba)f$$

Dimostrazione.

$$(ab)f = a(bf) = a((bf) \circ 1_X) = (bf) \circ (a1_x) = f \circ (b(a1_X)) = f \circ (ba)1_X = (ba)f$$

□

Esempio 146. Sia A un anello, allora $A-\mathtt{Mod}$ è preadditiva. Infatti per ogni $M, N \in (A-\mathtt{Mod})$, $A-\mathtt{Mod}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$ è un gruppo abeliano e $\circ$ è $\mathbb{Z}$-bilineare. Se A è commutativo, allora $A-\mathtt{Mod}$ è anche A-lineare. Più in generale se B è una A-algebra allora $B-\mathtt{Mod}$ è A-lineare.

Osservazione. Sia $X \in \mathcal{A}$ categoria A-lineare (quindi A commutativo). Allora $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è una A-algebra. Infatti $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X), \circ)$ è un monoide e $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}$ è A-modulo e $\circ$ è A-lineare.

Quindi le categorie A-lineari con un solo oggetto sono A-algebre. In particolare le categorie preadditive con un solo oggetto sono anelli.

Osservazione. Sia $\mathcal{A}$ preadditiva, allora $\mathcal{A}^{op}$ è preadditiva con la stessa struttura di gruppo abeliano su $\mathcal{A}^{op}(X,Y) = \mathcal{A}(Y,X)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$.

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva, allora $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}'$, allora $\mathcal{A}'$ è preadditiva. In particolare la condizione è sempre verificata per le categorie piene.

Sia $\mathcal{A}$ preadditiva, $\sim$ una congruenza tale che $\forall X, Y \in \mathcal{A}$, $\forall f, f', g \in \mathcal{A}(X,Y)$ allora $f \sim f' \implies f+g \sim f'+g$. In tale ipotesi $\mathcal{A}/_\sim$ è preadditiva con $\overline{f}+\overline{g} = \overline{f+g}$.

Data una tale congruenza, sia $\forall X, Y \in \mathcal{A}$

$$\mathfrak{I}(X,Y) = \{f \in \mathcal{A}(X,Y) : f \sim 0\}$$

e indichiamo con $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ la collezione di tutti gli $\mathfrak{I}(X,Y)$. Allora vale la proprietà di ideale, cioè dati f, g morfismi di $\mathcal{A}$ componibili,

$$f \in \mathfrak{I} \text{ o } g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

Se per esempio $f \in \mathfrak{I}$ ossia $f \sim 0$, allora $g \circ f \sim g \circ 0 = 0$ e dunque $g \circ f \in \mathfrak{I}$.

Arriviamo dunque alla seguente definizione

Definizione 147

Definiamo un ideale $\mathfrak{I}$ in una categoria preadditiva $\mathcal{A}$ come $\mathfrak{I}(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ tale che

$$f \in \mathfrak{I} \text{ o } g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

[2] normalmente in mezzo alla frase così avrei scritto esplicitamente "per ogni" ma trovavo divertente la quantità di $\mathcal{A}$ e di A nella frase quindi ho valutato simpatico aggiungere anche un $\forall$

Viceversa, dato $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, si ottiene una congruenza $\sim$ su $\mathcal{A}$ definito da

$$f \sim f' \iff f' - f \in \mathfrak{I}(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathcal{A} \quad \forall f,f' \in \mathcal{A}(X,Y)$$

ed è tale che $f \sim f' \implies f+g \sim f'+g$.

In tali ipotesi si può anche denotare $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ invece di $\mathcal{A}/_{\sim}$.

Una categoria $\mathcal{C}$ può non avere nessuna struttura di categoria preadditiva (ad esempio se $\exists X,Y \in \mathcal{C}$) tale che $\mathcal{C}(X,Y) = \varnothing$ o averne più di una.

Esempio 148. G Possiamo pensare ad anelli A e B tali che $(A,\cdot) \cong (B,\cdot)$ e $(A,+) \ncong (B,+)$.

Ad esempio possiamo prendere $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}[X]/(X^2)$. Allora evidentemente

$$(A,+) \cong \mathcal{C}_4 \ncong \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \cong B$$

ma gli elementi diversi da 0 e 1 di A sono $\overline{2}$ e $\overline{3}$ e sono tali che $\overline{2}^2 = \overline{0}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$ e $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2}$. Similmente in B abbiamo che $\overline{X}^2 = \overline{0}$, $\overline{1+X}^2 = \overline{1}$ e $\overline{X} \cdot \overline{1+X} = \overline{X}$

Definizione 149

Un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie preadditive è additivo se

$$F_{X,Y} : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(F(X),F(Y))$$

è omomorfismo di gruppi $\forall X,Y \in \mathcal{A}$.
Più in generale $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie A-lineari è detto A-lineare se $F_{X,Y}$ è A-lineare $\forall X,Y \in \mathcal{A}$.

Esempio 150. Sia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X,Y \in \mathcal{A}'$. Allora l'inclusione $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ è addditivo.

Esempio 151. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva e $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, allora il funtore $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{I}$ definito da $X \mapsto X$ e $f \mapsto \overline{f}$ è additivo.

Esercizio 152

Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additivo tale che "$\mathfrak{I} = \ker F$" cioè $F(f) = 0$, $\forall f \in \mathfrak{I}$, allora mostrare che esiste un unico $\overline{F} : \mathcal{A}/\mathfrak{I} \to \mathcal{B}$ funtore additivo tale che $F = \overline{F} \circ P$

Esempio 153. Siano A,B anelli (categorie preadditive con un solo oggetto), allora un funtore additivo $A \to B$ è un omomorfismo di anelli.

Più in generale per ogni anello A e per ogni $\mathcal{A}$ categoria preadditiva un funtore additivo $A \to \mathcal{A}$ è dato da un oggetto $X \in \mathcal{A}$ e un omomorfismo di anelli $A \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$. Quindi un A-modulo è un funtore additivo $A \to \mathtt{Ab}$

Esempio 154. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari $B{-}\mathtt{Mod} \to A{-}\mathtt{Mod}$ è additivo.

Esempio 155. Se $\mathcal{A}$ preadditiva, allora $\forall X \in \mathcal{A}$ ci sono funtori additivi

$$\mathcal{A}(X,-) : \mathcal{A} \to \mathtt{Ab} \quad , \quad \mathcal{A}(-,X) : \mathcal{A}^{op} \to \mathtt{Ab}$$

e in generale se $\mathcal{A}$ è A-lineare, allora i due funtori hanno codominio $A{-}\mathtt{Mod}$ e sono A-lineari

Notare che se $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ sono funtori additivi, allora $G \circ F$ è additivo. Inoltre $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ è additivo. Dunque si ottiene una categoria contenente le **categorie preadditive** (piccole) e morfismi i funtori additivi.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria (piccola) e $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva. Allora $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è preadditiva (in modo naturale) con la seguente struttura

$\forall F, G \in \mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ e $\forall \alpha, \beta : F \to G$ trasformazioni naturali allora $\alpha + \beta : F \to G$ trasformazione naturale definita $\forall X \in \mathcal{C}$ da

$$(\alpha + \beta)_X := \alpha_X + \beta_X : F(X) \to G(X) \text{ in } \mathcal{A}$$

è naturale perché $\forall f : X \to \mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X+\beta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y+\beta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

commuta

Se anche $\mathcal{C}$ è preadditiva sia

$$\mathtt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

la sottocategoria piena di $\mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ con oggetti i funtori additivi. Allora tale categoria è preadditiva.

Esempio 156. Se A è anello, allora gli A-moduli sono gli oggetti di $\mathtt{AddFun}(A, \mathtt{Ab})$ (già visto) e in effetti $A{-}\mathtt{Mod} \cong \mathtt{AddFun}(A, \mathtt{Ab})$, poiché dati $M, N : A \to \mathtt{Ab}$ funtori (cioè $A \to \mathrm{End}(M)$ e $A \to \mathrm{End}(N)$ omomorfismi di anelli) la trasformazione naturale $\alpha : M \to N$ è data da $\alpha : M \to N$ in $\mathtt{Ab}$ tale che $\forall a \in A$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[d, "\alpha"] \\ N \arrow[r, "a"'] & N \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $a\alpha(x) = \alpha(ax)$ per ogni $x \in M$, ossia α è omomorfismo di A-moduli.

Osservazione. $\forall \mathcal{A}$ preadditiva (piccola) si può definire la categoria (preadditiva) $\mathcal{A}{-}\mathtt{Mod} := \mathtt{AddFun}(\mathcal{A}, \mathtt{Ab})$.

Proposizione 157. *Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ preadditive, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtori tali che $F \cong G$ e F additivo. Allora G è additivo*

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \to G$ isomorfismo. Allora $\forall f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$, $G(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1}$. Inoltre $\forall f, f' : X \to Y$,

$$\begin{aligned} G(f + f') &= \alpha_Y \circ F(f + f') \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ (F(f) + F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = \\ &= \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} + \alpha_Y \circ F(f') \circ \alpha_X^{-1} = G(f) + G(f') \end{aligned}$$

□

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore pienamente fedele con $\mathcal{B}$ preadditiva. Allora esiste un'unica struttura preadditiva su $\mathcal{A}$ tale che F sia additivo

Dimostrazione. $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ voglio che $F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{B}(F(X), F(Y))$ sia isomorfismo di gruppi (già è biettiva), che è vero se e solo se $\forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$

$$f + f' = F^{-1}(F(f) + F(f'))$$

Infatti è ovvio che se $+$ è così definita, allora F sia omomorfismo di gruppi. Viceversa, se F è omomorfismo di gruppi, allora anche F^{-1} è omomorfismo di gruppi, e dunque $F^{-1}(F(f) + F(f')) = F^{-1}(F(f)) + F^{-1}(F(f')) = f + f'$.

□

2.1.1 Prodotti, coprodotti, proprietà universali

Definizione 158: Prodotto

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, siano $X_\lambda \in \mathcal{C}$ con $\lambda \in \Lambda$ insieme. Un prodotto degli X_λ è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi morfismi $p_\lambda \in \mathcal{C}(X, X_\lambda)$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ tale che vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C},\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(Y, X_\lambda) \quad \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y) : f_\lambda = p_\lambda \circ f$$

o equivalentemente i seguenti diagramma commutano :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f_\lambda"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
X_\lambda & X \arrow[l, "p_\lambda"]
\end{tikzcd} \qquad \text{al variare di } \lambda \in \Lambda$$

Proposizione 159. *Siano* $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *e* $(X', \{p'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$*. due prodotti in* $\mathcal{C}$ *degli* X_λ*. Allora* $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$ *tale che* $p'_\lambda = p_\lambda \circ f$ *per ogni* λ *e* f *è isomorfismo.*

Viceversa se $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *è un prodotto degli* X_λ *e* $f : X' \to X$ *è isomorfismo, anche* $(X', \{p_\lambda \circ f\}_{\lambda\in\Lambda})$ *è un prodotto degli* X_λ

Osservazione. Si dice che il prodotto è *unico a meno di unico isomorfismo*

Dimostrazione. (Prima parte) Esiste unico f per la proprietà universale, analogamente $\exists! f' \in \mathcal{C}(X, X')$ tale che $p_\lambda = p'_\lambda \circ f$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Dunque $p_\lambda = p'_\lambda \circ f' = p_\lambda \circ f \circ f' = p_\lambda \circ 1_X$. Ne consegue che $1_X = f \circ f'$ per la proprietà universale e analogamente $1_Y = f' \circ f$.

(Seconda parte) Dati $Y \in \mathcal{C}$ e $g_\lambda : Y \to X'_\lambda$ devo dimostrare che $\exists! g : Y \to X$ tale che $g_\lambda = f_\lambda \circ f \circ g$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ora per la proposizione universale di X $\exists! g : Y \to X$ tale che $g_\lambda = p_\lambda \circ g$. Voglio $g = f \circ g'$ cioè $g' = f^{-1} \circ g$ □

Nota (zione). L'oggetto prodotto X si indica con

$$X =: \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Esempio 160. In `Set` il prodotto di insiemi X_λ per $\lambda \in \Lambda$ è dato dall'usuale prodotto cartesiano con le proiezioni.

In categorie concrete come `Grp`, `Rng`, A−`Mod` un prodotto si ottiene dal prodotto in `Set` mettendo la struttura disgiuntiva componente per componente.

Esempio 161. In `FinSet` (la sottocategoria piena di `Set`) con oggetti insiemi finiti, non esiste $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ se $\#\Lambda = \infty$ e $\#X_\lambda > 1$ per ogni $\lambda \in \Lambda$

Infatti se per assurdo supponiamo il prodotto essere X per la proprietà universale $\forall Y \in \texttt{FinSet}$, $\infty > \#\texttt{Set}(Y, X) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \#\texttt{Set}(Y, X_\lambda) = \infty$

Osservazione. Se $\#\Lambda = 1$ allora un prodotto di X_1 è $p_1 : X \to X_1$ in $\mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall f_1 : Y \to X_1$ $\exists! f : Y \to X$ tale che $f_1 = p_1 \circ f$

Questo è vero se p_1 è isomorfismo ($f = p_1^{-1} \circ f_1$). D'altra parte se p_1 non è isomorfismo non fattorizza unicamente ogni altro morfismo. Quindi un prodotto di $X \in \mathcal{C}$ è qualunque isomorfismo $X' \to X$ (in particolare 1_X).

Definizione 162: Oggetto terminale

Un oggetto terminale di una categoria $\mathcal{C}$ è un prodotto vuoto in $\mathcal{C}$, cioè $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ esiste un unico $Y \to X$ morfismo di $\mathcal{C}$, cioè $\#\mathcal{C}(Y, X) = 1$

Esempio 163. In `Set` X è terminale se e solo se $\#X = 1$. Analogamente in `Grp`, `Rng`, $A-$`Mod` è ogni gruppo anello o $A-$`Mod` banale.

Esempio 164. Se G è un monoide non banale, allora G (come categoria con un solo oggetto) non ha oggetto terminale.

Proposizione 165. *Una categoria $\mathcal{C}$ ha tutti i prodotti finiti se e solo se ha oggetto terminale e i prodotti di coppie di oggetti.*

Dimostrazione. Dimostro solo per induzione l'implicazione non ovvia.

Il passo base è dato dalla presenza dell'oggetto terminale. Per induzione supponiamo che esista il prodotto di $n-1$ oggetti $X' = \prod_{i=1}^{n-1} X_i$ con $p'_i : X' \to X_i$ per ogni i. Sia ora un elemento X_n e per ipotesi esiste $X = X' \times X_n$ con $p_n : X \to X_n, p' : X \to X'$. Allora X è prodotto di tutti gli $\{X_i\}_{i=1}^n$ con $p_i := p'_i \circ p'$ per ogni $i < n$. □

Definizione 166: Coprodotto

Un coprodotto di X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ in una categoria $\mathcal{C}$ è un prodotto degli X_λ in $\mathcal{C}^{op}$, cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da morfismi $i_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, X)$ tali che vale la proprietà universale (duale di quella del prodotto)

$$\forall Y \in \mathcal{C},\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, Y), \quad \exists!\, f \in \mathcal{C}(X, Y) : f_\lambda = f \circ i_\lambda$$

e viene denotato

$$X =: \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Diagrammaticamente, il diagramma

$$\begin{tikzcd} Y & \\ X_\lambda \arrow[u, "f_\lambda"] \arrow[r, "i_\lambda"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[ul, dashed, "\exists! f"'] \end{tikzcd}$$

commuta

Nelle categorie preadditive si può parlare di **somma diretta** invece di coprodotto e usare $\bigoplus$ invece di $\coprod$.

Esempio 167. In `Set` il coprodotto è l'unione disgiunta. In $A-$`Mod` è la somma diretta usuale. In `Grp` i coprodotti sono i **prodotti liberi**.

Definizione 168: Oggetto iniziale

Un *oggetto iniziale* di $\mathcal{C}$ è un coprodotto vuoto in $\mathcal{C}$, ossia $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$, $\#\mathcal{C}(X, Y) = 1$

Può succedere che uno stesso oggetto sia terminale che iniziale. In tal caso per entrambe le definizioni esiste un solo morfismo da uno all'altro. Se tale morfismo è un isomorfismo allora l'oggetto è sia iniziale che terminale.

Definizione 169: Oggetto nullo

Un oggetto sia iniziale che terminale si dice *nullo*

Esempio 170. In `Set`, $\varnothing$ è iniziale (non nullo). In `Grp`/$A-$`Mod` ogni *gruppo/modulo* banale è nullo. In `Rng`, $\mathbb{Z}$ è iniziale (non nullo)

Se $X \in \mathcal{C}$ è nullo allora $\forall Y, Z \in \mathcal{C}$ esiste il morfismo $0 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dato dalla composizione $Y \overset{\exists!}{\to} X \overset{\exists!}{\to} Z$. In tal caso abbiamo che effettivamente $f \circ 0 = 0$ e $0 \circ g = 0$ per ogni f, g componibili con 0.

Esempio 171. In $\mathcal{A}$ preadditiva (in cui esiste un oggetto nullo) il morfismo 0 di cui sopra coincide con 0 dello struttura preadditiva.

Definizione 172: Preservazione del prodotto

Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *preserva un prodotto* $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ di $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ se $(F(X), \{F(p_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli $F(X_\lambda)$ in $\mathcal{D}$.
Diremo inoltre che F *preserva i prodotti (o prodotti finiti)* se preserva tutti i prodotti (o prodotti finiti) che esistono in $\mathcal{C}$

Osservazione. Se F preserva un prodotto degli X_λ, allora li preserva tutti.

Definizione 173: Preservazione del coprodotto

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva un coprodotto di $\mathcal{C}$ se F^{op} preserva il corrispondente prodotto di $\mathcal{C}^{op}$

Esempio 174. I funtori dimenticanti $\texttt{Grp}/\texttt{Rng}/A{-}\texttt{Mod} \to \texttt{Set}$ preservano i prodotti ma non i coprodotti.

Ora vedremo in particolare cosa succede nelle categorie preadditive, in cui alcune valgono alcune simpatiche proprietà non ovvie.

Definizione 175: Biprodotto

Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva. Un *biprodotto* di $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$ è dato da $X \in \mathcal{A}$ e morfismi (in $\mathcal{A}$) $p_j : X \to X_j$ e $i_j : X_j \to X$, $\forall j = 1..n.$ tali che

$$p_j \circ i_j = 1_{X_j} \quad ; \quad p_k \circ i_j = 0 \quad \forall j,k = 1..n \ \text{ con } j \neq k$$
$$\text{e } \sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j = 1_X$$

Osservazione. $(X, i_1, \dots, i_n, p_1, \dots, p_n)$ è un biprodotto di $X_1, \dots, X_n$ in $\mathcal{A}$ se e solo se $(X, p_1, \dots, p_n, i_1, \dots, i_n)$ è un biprodotto in $\mathcal{A}^{op}$

Se $n = 0$ la condizione diventa $1_X = 0$, dunque l'anello degli endomorfismi $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è banale.

Se $n = 1$ i_1 e p_1 sono isomorfismi e l'uno l'inverso dell'altro.

Osservazione. Basta verificare $p_k \circ i_j = 0$ per $j, k = 1..n-1$ e $j \neq k$ (dunque per $n = 2$) non è necessario verificare quella parte della definizione

Dimostrazione. Sia $k < n$. Allora supponendo che $p_k \circ i_j = 0$ se $k \neq j < n$,

$$p_n \circ i_k = p_n \circ 1_X \circ i_k = p_n \circ \left(\sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j \right) \circ i_k = \sum_{j=1}^{n} p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k =$$
$$= p_n \circ i_n \circ p_n \circ i_k + \sum_{j=1}^{n-1} p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k =$$
$$= 1_{X_n} \circ p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \circ 1_{X_k} = p_n \circ i_k + p_n \circ i_k$$

$\implies p_n \circ i_k = 0$ ∎

Proposizione 176. *Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva e siano $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $X \in \mathcal{A}$ è biprodotto di $X_1, \dots, X_n$* se e solo se *X è un prodotto di $X_1, \dots, X_n$* se e solo se *X è un coprodotto di $X_1, \dots, X_n$.*

Più precisamente $(X, p_1, \dots, p_n)$ è un prodotto di $X_1, \dots, X_n$ se e solo se esistono (unici) $i_1, \dots, i_n$ tali che $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $X_1, \dots, X_n$. Analogamente e dualmente per il coprodotto.

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Per la proprietà universale del prodotto $\exists! i_j : X_j \to X$ per ogni $j = 1..n$ tali che

$$p_k \circ i_j = (f_j =) \begin{cases} 1_{X_j} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \qquad \begin{tikzcd} X_j \arrow[d, "\delta_{kj} 1_{X_j}"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! i_j"] & \\ X_k & X \arrow[l, "p_k"] \end{tikzcd}$$

Resta da dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j = 1_X \iff \forall k,\ p_k \circ \sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j = p_k \text{ (proprietà universale)}$$

e effettivamente

$$p_k \circ \sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j = \sum_{j=1}^{n} p_k \circ i_j \circ p_j = \underbrace{p_k \circ i_k}_{1_{X_k}} \circ p_k = p_k$$

$\Longleftarrow$ Dati $f_j : Y \to X_j$ devo dimostrare che $\exists!\, f : Y \to X$ tale che $f_j = p_j \circ f$ per ogni $j = 1..n$. Allora posso definire

$$f := \sum_{k=1}^{n} i_k \circ f_k : Y \to X \text{ e allora } p_j \circ f = \sum_{k=1}^{n} p_j \circ i_k \circ f_k = f_j$$

essa è unica poiché se $f' : Y \to X$ è tale che $\forall j,\ f_j = p_j \circ f'$, allora

$$f' = 1_X \circ f' = \sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j \circ f' = \sum_{j=1}^{n} i_j \circ f_j = f$$

□

Osservazione ($n = 0$). In una categoria preadditiva un oggetto
è terminale $\iff$ è iniziale $\iff$ è nullo $\iff$ $1_X = 0$

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore additivo e sia $X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n}$ un biprodotto di $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $(F(X), \{F(i_j)\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodtto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$ in $\mathcal{B}$

Corollario 177. *Un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additivo preserva i prodotti e i coprodotti finiti.*

Nota (zione matriciale nelle categorie preadditive). Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva. Siano $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_n$ in $\mathcal{A}$ tali che $\exists (X, i_j^X, p_j^X)$ biprodotto di $X_1, \dots, X_n$ e Y, i_j^Y, p_j^Y biprodotto di $Y_1, \dots, Y_n$. Dati $f_{j,k} : X_k \to Y_j$ morfismi di $\mathcal{A}$ indico con la matrice $m \times n$ $(f_{j,k})$ il morfismo $f : X \to Y$ definito da

$$f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} i_j^Y \circ f_{j,k} \circ p_k^X$$

Definizione 178: Categoria additiva

Una *categoria additiva* è una categoria preadditiva in cui esistono tutti i biprodotti.

Esempio 179. $A-\texttt{Mod}$ è additiva per ogni anello A.

Esempio 180. A anello come categoria preadditiva con un solo oggetto è additiva se e solo se $A = 0$

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è additiva, allora anche $\mathcal{A}^{op}$ lo è.

Esempio 181. Le sottocategorie piene di $A-\texttt{Mod}$ con oggetti i moduli *f.g.* / *f.p.* / *coerenti* / *noetheriani* / *artiniani* / *liberi* sono additive. Non vale per esempio per ciclici.

Proposizione 182. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore additivo essenzialmente suriettivo. Allora se $\mathcal{A}$ è additiva, anche $\mathcal{B}$ è additiva. In particolare $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ è additivo per ogni $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale.*

Dimostrazione. $\forall Y_1, \ldots, Y_n$, se F è ess. suriettivo, allora $\exists X_j \in \mathcal{A}$ tale che $F(X_j) \cong Y_j$. A meno di cambiare F con $F' \cong F$ posso supporre $F(X_j) = Y_j$.

Allora se $\exists X$ biprodotto di $X_1, \ldots, X_n$ in $\mathcal{A}$, $F(X)$ è biprodotto di $Y_1, \ldots, Y_n$ □

Osservazione. Sia $\mathcal{C}$ una categoria (piccola) e $\mathcal{A}$ additiva. Allora $\texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva.

Dimostrazione. Dati $F_1, \ldots, F_n \in \texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ devo dimostrare che esiste il loro biprodotto. Per ogni $X \in \mathcal{C}$ esiste $F(X)$ biprodotto di $F_1(X), \ldots, F_n(X)$ in $\mathcal{A}$.

$\forall f : X \to Y$ morfismo di C definisco $F(f)$ come il morfismo definito con la notazione matriciale da

$$F(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} F_1(f) & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & F_n(X) \end{pmatrix}} F(Y) = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(Y)$$

Allora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ è un funtore e ci sono trasformazioni naturali $i_j : F_j \to F$ e $p_j : F \to F_j$ le cui componenti sono

$$(i_j)_X := i_j^X : F_j(X) \to F(X) \quad ; \quad (p_j)_X := p_j^X : F(X) \to F_j(X)$$

Poiché $\mathcal{C}$ è preadditiva, $\texttt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva. Poiché $F_1, \ldots, F_n \in \texttt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, allora $F = \bigoplus_{i=1}^{n}$ è additivo, infatti

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \begin{pmatrix} F_1(f+g) & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & F_n(f+g) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_1(f) + F_1(g) & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & F_n(f) + F_n(g) \end{pmatrix} = F(f) + F(g) \end{aligned}$$

□

Esempio 183. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva (piccola), allora $\mathcal{A}-\texttt{Mod} := \texttt{AddFun}(\mathcal{A}, \texttt{Ab})$ è additiva.

Proposizione 184. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore con $\mathcal{A}$ additiva, $\mathcal{B}$ preadditiva, F che preserva i prodotti (o coprodotti) finiti. Allora F è additivo*

Dimostrazione (idea). Sia $0 \in \mathcal{A}$ oggetto nullo, allora $F(0)$ è termianle, dunque $F(0)$ è nullo (perché B è preadditiva), ossia $F(0) = 0$.

Allora segue che F preserva i biprodotti. Infatti se $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $X_1, \ldots, X_n$ in $\mathcal{A}$, allora $(X, p_1, \ldots, p_n)$ è un prodotto di $X_1, \ldots, X_n$ in $\mathcal{A}$ e dunque $F(X), \{F(p_j)\}_{j=1..n}$ è un prodotto di $F(X_1), \ldots, F(X_n)$ in $\mathcal{B}$. Allora $\exists! i'_j : F(X_j) \to F(X)$ tali che $(F(X), \{i'_j\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $F(X_1), \ldots, F(X_n)$. Ma allora deve essere $i'_j = F(i_j)$ poiché

$$F(p_k \circ i_j) = F(p_k) \circ F(i_j) = F(p_k) \circ i'_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$
$$F(0 : Y \to Z) = 0 : F(Y) \to F(Z)$$

E allora se $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{A}$, allora $f + g$ è la composizione

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} Y$$

Allora $F(f + g)$ è la composizione

$$F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} F(X) \oplus F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & F(g) \end{pmatrix}} F(Y) \oplus F(Y) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} F(Y)$$

che è $F(f) + F(g)$ $\square$

Corollario 185. *Se $\mathcal{A}$ è additiva, allora $\mathcal{A}$ ha un'unica struttura preadditiva.*

Dimostrazione. Considero $\mathcal{B} := \mathcal{A}$ come categoria con una qualunque struttura preadditiva e $F = \mathrm{id}$. Allora per la proposizione 184, F è additivo. Poiché F è pienamente fedele, esiste un'unica struttura preadditiva su $\mathcal{A}$ tale che $F = \mathrm{id}$ è additivo, dunque la struttura di $\mathcal{B}$ coincide con quella di $\mathcal{A}$ $\square$

Osservazione. Sia $\mathcal{A}$ un anello commutativo, $\mathcal{A}$ una categoria A-lineare e additiva. Allora *non necessariamente* la struttura A-lineare è unica. Data infatti una struttura A-lineare posso cambiarla su $\mathcal{A}(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{A}$. Se è data da omomorfismi di anelli $\mathcal{A} \overset{\varphi_{X,Y}}{\to} \mathrm{End}(\mathcal{A}(X, Y))$ considero $A \overset{\alpha}{\to} A \overset{\varphi_{X,Y}}{\to} \mathrm{End}(\mathcal{A}(X, Y))$ con α omomorfismo di anelli non banale.

Corollario 186. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono categorie equivalenti e $\mathcal{A}$ è additiva, allora B è additiva.*

Dimostrazione. So già che $\mathcal{B}$ è preadditiva. Allora $\exists F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ equivalenza, additivo per la proposizione 184. F è essenzialmente suriettivo, dunque $\mathcal{B}$ è additivo. $\square$

2.2 Limiti e colimiti

L'obiettivo nostro è riuscire a generalizzare il concetto di ker e coker che era definito sui moduli. Vedremo che il giusto contesto sarà quello delle categorie *abeliane.* (probabilmente) A scopo di definire tale struttura, introduciamo i seguenti nuovi concetti

Definizione 187

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ un funtore (con $\mathcal{L}$ piccola).

Un *limite* di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : K_X \to I$ dove $K_X : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ è il funtore costante di valore X, ossia $\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, bend left, "K_X"] \arrow[r, bend right, "I"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$.

In altri termini, $\forall L \in \mathcal{L}$, $\alpha_L ; X \to I(L)$ è tale che $\forall l : L \to L'$ in $\mathcal{L}$, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\alpha_L"'] \arrow[dr, "\alpha_{L'}"] & \\ I(L) \arrow[r, "I(l)"'] & I(L') \end{tikzcd}$$

Inoltre, vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C},\ \forall \beta : K_Y \to I \text{ trasformazione naturale, } \exists!\, f \in \mathcal{C}(Y, X) \text{ t.c. } \beta = \alpha \circ K_f$$

dove $K_f : K_Y \to K_X$ è la trasformazione naturale definita da $(K_f)_L := f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$. In altre parole $\beta_L = \alpha_L \circ f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$, ossia il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\alpha_L"'] \arrow[dr, "\alpha_{L'}"] & \\ I(L) \arrow[r, "I(l)"'] & I(L') \\ Y \arrow[u, "\beta_L"] \arrow[ur, "\beta_{L'}"'] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "\exists! f"] & \end{tikzcd}$$

Esempio 188 (Prodotto)**.** Se $\mathcal{L} = \Lambda$ insieme (categoria discreta), allora I è dato dagli $I(\lambda) =: X_\lambda \in \mathcal{C}$ ($\lambda \in \Lambda$), e un limite di I è un prodotto degli $I(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) perché un limite è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_\lambda : X \to X_\lambda$ (qualunque, perché l può essere solo 1_λ) tali che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall \beta_\lambda : Y \to X_\lambda$,

$$\exists!\, f \in \mathcal{C}(Y, X) : \beta_\lambda = \alpha_\lambda \circ f \quad \forall \lambda \in \Lambda \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\alpha_\lambda"'] \arrow[dr, "\alpha_\lambda"] & \\ X_\lambda \arrow[r, "1_\lambda"'] & X_\lambda \\ Y \arrow[u, "\beta_\lambda"] \arrow[ur, "\beta_\lambda"'] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "\exists! f"] & \end{tikzcd}$$

Esempio 189. Sia $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Allora I è dato da $I(\mathcal{L}) = Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ in $\mathcal{C}$. Un limite di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_1 : X \to Y$ e $\alpha_2 : X \to Z$ tali che $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_1$ o equivalentemente $h : X \to Y$ tale che $f \circ h = g \circ h$.

La proprietà universale diventa:

$$\forall X' \in \mathcal{C}, \forall h' : X' \to Y : f \circ h' = g \circ\ \exists!\, k : X' \to X : h' = h \circ k$$

$$\text{ossia il diagramma } \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \\ X' \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "h'"'] & & \end{tikzcd} \text{ commuta}$$

tale h si dice *equalizzatore* di f e g.

In `Set` si può prendere $X := \{y \in Y : f(y) = g(y)\} \overset{i}{\hookrightarrow} Y$. Analogamente in `Grp`, `Rng` e $A-$`Mod` e sarà sottogruppo, sottoanello e sottomodulo come diagramma

abbiamo
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \\ X' \arrow[u, dashed, "\exists!\, k"] \arrow[ur, "h'"'] & & \end{tikzcd}$$

Esempio 190 (Prodotto fibrato o *pullback*)**.** Sia $\mathcal{L} = (\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet)$. Allora I è dato da
$$\begin{tikzcd} & Y_2 \arrow[d, "g_2"'] \\ Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Z \end{tikzcd}$$
in $\mathcal{C}$. Un limite di I è $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $f_1 : X \to Y_1$ e $f_2 : X \to Y_2$ (e $h : X \to Z$) tale che

$$(h =) g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$$

e la proprietà universale diventa: dati $f_i' : X' \to Y_i$ tali che $g_1 \circ f_1' = g_2 \circ f_2'$, allora $\exists! f : X' \to X$ tale che $f_1' = f_1 \circ f$. Equivalentemente si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, dashed, "\exists!\, f"'] \arrow[drr, bend left, "f_2'"] \arrow[ddr, bend right, "f_1'"'] & & \\ & X \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] & Y_2 \arrow[d, "g_2"] \\ & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Z \end{tikzcd}$$

In tal caso (X, f_1, f_2) si dice *prodotto fibrato* di g_1, g_2 (o *pullback*)

Esempio 191 (Prodotto fibrato su `Set`)**.** `Set` (o altre categorie concrete) si può prendere $X := \{y_1, y_2 \in Y_1 \times Y_2 : g_1(y_1) = g_2(y_2)\}$

Esempio 192. Se prendiamo $\mathcal{L} = \varnothing$ e I il funtore vuoto, allora la definizione di limite diventa (notare l'assenza di α e β che sono funzioni vuote)

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$$

ossia X è oggetto terminale

Definizione 193: Colimite

Un *colimite* di $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ è un limite di $I^{op} : \mathcal{L}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$, cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : I \to K_X$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$, $\forall \beta : I \to K_Y$ trasformazione naturale, $\exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $\beta = K_f \circ \alpha$ (cioè $\beta_L = f \circ \alpha_L$ per ogni $L \in \mathcal{L}$).
Equivalentemente, $L, L' \in \mathcal{L}, Y \in \mathcal{C}, \beta_L : I(L) \to Y$ e $b_{L'} : I(L') \to Y$, esiste unico $f : X \to Y$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, dashed, bend right=60, "\exists! f"'] & \\ I(L) \arrow[u, "\alpha_L"] \arrow[r, "I(l)"'] \arrow[d, "\beta_L"'] & I(L') \arrow[ul, "\alpha_{L'}"'] \arrow[dl, "\beta_{L'}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Esempio 194. Se $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$, allora un colimite di I (dato da $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$) è dato da $h : Z \to X$ tale che $h \circ f = h \circ g$ tale che $\forall h' : Z \to X'$ tale che $h' \circ f = h' \circ g$, $\exists!\, k : X \to X'$ tale che $h' = k \circ h$. Equivalentemente il diagramma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & X \arrow[d, dashed, "\exists!\, k"] \\ & & X' \end{tikzcd}$$

commuta e h si dice *coequalizzatore* di f e g.

Esercizio 195 Coprodotto fibrato o *pushout*

Definire il coprodotto fibrato, che è il duale del prodotto fibrato.

Sia $\mathcal{L} = (\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ (duale di quella del prodotto fibrato). Allora una colimite di I (la cui immagine in $\mathcal{C}$ è $\begin{tikzcd} & Y_2 \\ Y_1 & Z \arrow[l, "g_1"] \arrow[u, "g_2"'] \end{tikzcd}$) è dato da $X \in \mathcal{C}$, $f_1 : Y_1 \to X, f_2 : Y_2 \to X(, h : Z \to X)$ morfismi tali che $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 (= h)$. Inoltre la proprietà universale dice che $\forall X' \in \mathcal{C}$, $f_1' \in \mathcal{C}(Y_1, X)$ e $f_2' \in \mathcal{C}(Y_2, X)$ tali che $f_1' \circ g_1 = f_2' \circ g_2$, allora $\exists!\, f : X \to Y$ tale che $f \circ f_i = f_i'$ per $i \in \{1, 2\}$.
Equivalentemente, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X' & & \\ & X \arrow[ul, dashed, "\exists!\, f"'] & Y_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[ull, bend right, "f_2'"'] \\ & Y_1 \arrow[u, "f_1"] \arrow[uul, bend left, "f_1'"] & Z \arrow[l, "g_1"] \arrow[u, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

In tal caso (X, f_1, f_2) si dice *prodotto cofibrato* di g_1, g_2 (o *pushout*)

Esempio 196. In `Set` un coequalizzatore di $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ è dato dalla proiezione al quoziente $Z \to Z/_\sim$ dove $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza su Z che contiene $\{(f(y), g(y)) | y \in Y\} \subseteq Z \times Z$

Nota (zione). In alcuni casi invece di *limiti/colimiti* si può parlare di *limiti inversi/limiti diretti.*

Esempio 197. Similmente a prima, prendendo $\mathcal{L} = \varnothing$ e I il funtore vuoto, la definizione diventa

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \quad \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$$

ossia X è un oggetto iniziale.

Proposizione 198 (Unicità del limite)**.** *Se (X, α) limite esiste, allora è unico a meno di isomorfismo. In altre parole dati (X, α) e (Y, β) limiti di I, allora $\exists!\, f \in C(X', X)$ tale che $\beta = \alpha \circ K_f$ e f è isomorfismo.*

Viceversa, se (X, α) è un limite di I e $f : Y \to X$ è isomorfismo, allora anche $(X', \alpha \circ K_f)$ è un limite di I

Esercizio 199 D

imostrare la proposizione 198

Nota (zione). Un limite di I si indica con $\lim I$ o $\varprojlim I$ e analogamente un colimite di I si indica con $\operatorname{colim} I$ o $\varinjlim I$.

Un (co)equalizzatore d $f, g; Y \to Z$ si indica con $(\mathrm{co})\mathrm{eq}(f, g)$

Un prodotto fibrato di $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \xleftarrow{g_2} Y_2$ si indica con $Y_1 \times_Z Y_2$. Similmente per i coprodotti fibrati si usa $Y_1 \coprod_Z Y_2$

Proposizione 200. *Sia $\gamma : I \to I'$ una trasformazione naturale tra funtori $\mathcal{L} \to \mathcal{C}$ e sia $(\lim I)$ un limite di I. Allora*

1. *Se $(\lim I', \alpha')$ è un limite di I' allora $\exists! \lim \gamma \in \mathcal{C}(\lim I, \lim I')$ tale che $\alpha' \circ K_{\lim \gamma} = \gamma \circ \alpha$, inoltre se γ è isomorfismo, allora anche $\lim \gamma$ è isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} K_{\lim I} \arrow[r, "K_{\lim \gamma}"] \arrow[d, "\alpha"] & K_{\lim I'} \arrow[d, "\alpha'"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] & I' \end{tikzcd}$$

2. *Se γ è isomorfismo, allora $(\lim I, \gamma \circ \alpha)$ è un limite di I'*

Dimostrazione.

1. Segue direttamente dal fatto che $(\lim I', \alpha')$ è un limite di I' e $\gamma \circ \alpha$ è una trasformazione naturale

2. Sia $Y \in \mathcal{C}$ e $\beta : K_Y \to I'$ trasformazione naturale. Allora $\gamma^{-1} \circ \beta : K_Y \to I$ è trasformazione naturale e dunque $\exists!\, f \in C(Y, \lim I)$ tale che $\gamma^{-1} \circ \beta = \alpha \circ K_f$, da cui $\beta = \gamma \circ \alpha \circ K_f$

$\square$

Teorema 201: Condizione sufficiente per l'esistenza dei limiti

Sia $\mathcal{L}$ una categoria piccola. Allora esistono tutti i (co)limiti dei funtori $\mathcal{L} \to \mathcal{C}$ se in $\mathcal{C}$ esistono tutti i (co)equalizzatori e tutti i (co)prodotti indicizzati dagli oggetti e dai morfismi di $\mathcal{L}$.
Più precisamente un (co)limite di $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ è dato da (X, α) con

$$X = \mathrm{eq}\left(\prod_{L \in \mathcal{L}} I(L) \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} \prod_{(l : L \to L') \in \mathrm{Mor}(\mathcal{L})} I(L') \right)$$

$$\text{dove } p_l \circ g := p_{L'}, \quad p_l \circ h := I(l) \circ p_L \quad \forall (l : L \to L') \in \mathrm{Mor}(\mathcal{L})$$

Indicando con $i : X \to \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ il morfismo naturale,

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \alpha_L := p_L \circ i : X \to I(L)$$

idea di dimostrazione. α è naturale perché $g \circ i = h \circ i$. Più in generale, dato $j : Y \to \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ in $\mathcal{C}$, sia $\beta_L := p_L \circ j : Y \to I(L)$. Allora $\beta : K_Y \to I$ è una trasformazione naturale se e solo se $g \circ j = h \circ j$. Osservando questo, una qualunque trasformazione naturale $\beta : K_Y \to I$ è ottenuta da $j : Y \to \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ con $g \circ j = h \circ j$ ponendo $\beta_L = p_L \circ j$.

Per definizione di equalizzatore, $\exists!\, f \in \mathcal{C}(Y, X)$ tale che $j = i \circ f$ che è equivalente a $\beta_L = \alpha_L \circ f$ e $\beta = \alpha \circ K_f$.

β è naturale se e solo se $\forall l : L \to L'$ morfismo di $\mathcal{L}$, $I(l) \circ \beta_L = \beta_{L'}$ cioè $I(l) \circ p_L \circ j = p_{L'} \circ j \iff p_l \circ h \circ j = p_l \circ g \circ j \overset{\text{propr. univ. prodotto}}{\iff} h \circ j = g \circ j$ $\square$

Definizione 202

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.
$\mathcal{C}$ *ha i (co)limiti di forma* $\mathcal{L}$ se esistono i (co)limiti di tutti i funtori $\mathcal{L} \to \mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ è *(co)completa* se ha i *(co)limiti* di forma $\mathcal{L}$ per ogni categoria piccola $\mathcal{L}$.
$\mathcal{C}$ è *finitamente (co)completa* se ho i (co)limiti di forma $\mathcal{L}$ per ogni categoria finita $\mathcal{L}$ (ossia se Mor$\mathcal{L}$ è finito)

Corollario 203. *$\mathcal{C}$ categoria è (finitamente) (co)completa se e solo se ha (co)equalizzatori e (co)prodotti (finiti).*

Esempio 204. `Set` è completa e cocompleta (anche `Grp`, `Rng` e $A-$`Mod`)

Definizione 205

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtore. F preserva un (co)limite (X, α) di $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ se $(F(X), F \circ \alpha$[a]$)$ è un (co)limite di $F \circ I : \mathcal{L} \to \mathcal{D}$

[a] Composizione orizzontale: $\alpha : K_X \to I \implies F \circ \alpha : F \circ K_X = K_{F(X)} \to F \circ I$

Osservazione. Se F preserva un limite di I, allora F preserva tutti i limiti di I.

F preserva i (co)limiti (finiti) se preserva i (co)limiti di forma $\mathcal{L}$ per ogni $\mathcal{L}$ categoria piccola (finita)

Corollario 206. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria (finitamente) (co)completa. Allora F preserva i (co)limiti (finiti) se e solo se F preserva i (co)prodotti (finiti) e i (co)equalizzatori.*

Esempio 207. I funtori dimenticanti `Grp`, `Rng`, $A-$`Mod` $\to$ `Set` preservano i limiti ma non i colimiti.

Esempio 208. $\forall X \in \mathcal{C}$ i funtori $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \to$ `Set` e $\mathcal{C}(-, X) : C^{op} \to$ `Set` preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

Analogamente se $\mathcal{A}$ è una categoria preadditiva, allora $\forall X \in \mathcal{A}$ i funtori $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \to$ `Ab` e $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \to$ `Ab` preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

controesempio colimiti. Se $\mathcal{C} =$ `Set` e $\#X \geq 2$, allora $\mathcal{C}(X, -)$ non preserva i coprodotti. $\square$

$\mathcal{C}(X, -)$ preserva i limiti. Infatti sia $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ funtore con limite (Y, α). Allora abbiamo che $\forall L \in \mathcal{L}$ $\alpha_L \in \mathcal{C}(Y, I(L))$ tale che $\forall l : L \to L'$ morfismo di $\mathcal{L}$, $I(l) \circ \alpha_L = \alpha'_L$. Ma allora

$$(\alpha_L)_{L \in \mathcal{L}} \in \mathrm{eq}\left(\prod_{L \in \mathcal{L}} C(Y, I(L)) \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} \prod_{(l : L \to L') \in \mathrm{Mor}(\mathcal{L})} C(Y, I(L'))) \right)$$

$\square$

Osservazione. Sia $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ con $F \cong F'$. Se F preserva un limite (X, α) di $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$, allora anche F' lo preserva.

Infatti $(F(X), F \circ \alpha)$ è un limite di $F \circ I$ e $\gamma : F \to F'$ è isomorfismo, dunque $\gamma \circ I : F \circ I \to F' \circ I$ è isomorfismo, dunque $(F(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha))$ è un limite di $F' \circ I$. Segue dunque che $(F'(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha) \circ K_{\gamma_X^{-1}} = F' \circ \alpha)$ dove l'ultima uguaglianza è perché α è naturale.

Osservazione. Vedremo che ogni equivalenza di categorie preserva sia i limiti che i colimiti.

Sgue che se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono equivalenti e $\mathcal{C}$ ha i limiti di forma $\mathcal{L}$, lo stesso vale per $\mathcal{D}$. Infatti sia $I : \mathcal{L} \to \mathcal{D}$ funtore e sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ equivalenza con quasi-inverso G. Allora $G \circ I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ ha limite (X, α) e dunque anche $F \circ G \circ I \cong I$ ha limite

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorie (con $\mathcal{C}$ piccola) e sia $X \in \mathcal{C}$. Allora c'è un funtore di valutazione in X

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_X : \mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &\longrightarrow \mathcal{D} \\ F &\longmapsto \mathrm{ev}_X(F) = F(X) \\ (\alpha : F \to G) &\longmapsto (\alpha_X : F(X) \to G(X)) \end{aligned}$$

E $\forall f : X \to Y$, ev induce una trasformazione naturale $\mathrm{ev}_f : \mathrm{ev}_X \to \mathrm{ev}_Y$ definita da $(\mathrm{ev_f})_X : \mathrm{ev}_X(F) = F(X) \overset{F(f)}{\to} \mathrm{ev}_Y(F) = F(Y)$

Proposizione 209. *Se in $\mathcal{D}$ esistono i limiti di forma $\mathcal{L}$, allora esistono anche in $\mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ e si calcolano "puntualmente", cioè, dato $I : \mathcal{L} \to \mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ si ha che*

$$(\lim I)(X) = \lim\,(\mathrm{ev}_X \circ I)$$

e $\forall f : X \to Y$ morfismo di $\mathcal{C}$

$$(\lim I)(f) = \lim\,(\mathrm{ev}_f \circ I)$$

con trasformazioni naturali $\alpha(X) : K_{\lim\,(\mathrm{ev}_X \circ I)} \to \mathrm{ev}_X \circ I$ e $\forall L \in \mathcal{L}$ $\alpha(X)_L : \lim\,(\mathrm{ev}_X \circ I) \to (\mathrm{ev}_X \circ I)(L) = I(L)(X)$.

La trasformazione naturale $\alpha : K_{\lim I} \to I$ è definita $\forall L \in \mathcal{L}$ da

$$a_L : \lim I \to I(L) \textit{ morfismo in } \mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

cioè una trasformazione naturale definita $\forall X \in \mathcal{C}$ da

$$\underbrace{(\alpha_L)_X}_{\alpha(X)_L} : \underbrace{(\lim I)(X)}_{\lim\,(\mathrm{ev}_X \circ I)} \to I(L)(X)$$

2.2.1 Limiti in categorie preadditive

Definizione 210: (co)Nucleo

Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva. Un (co)nucleo di $f : X \to Y$ morfismo di $\mathcal{A}$ è un (co)equalizzatore di $X \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} Y$

Osservazione. Il (co)equalizzzatore di $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ è (co)nucleo di $f - g$

Un nucleo di $f : X \to Y$ è dunque $i : K \to X$ tale che $f \circ i = 0$ e $\forall i', K' \to X$ tale che $f \circ i' = 0$, allora $\exists!\, g : K' \to K$ tale che $i' = i \circ g$. Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "0"] & i' \arrow[r, "f"] & Y \\ & K' \arrow[ul, dashed, "\exists!\, g"] \arrow[u] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Un conucleo di f è $p : Y \to C$ tale che $p \circ f = 0$ e $\forall p' : Y \to C'$ tale che $p' \circ f = 0$ allora $\exists!\, h : C \to C'$ tale che $p' = h \circ p$. Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & C \arrow[dl, dashed, "\exists!\, h"] \\ & K' & \end{tikzcd}$$

Esempio 211. In $A-$`Mod` un nucleo di $f : M \to N$ è dato dall'inclusione $\mathrm{Ker} f \hookrightarrow M$.

Un conucleo di f è dato invece dalla proiezione a quoziente

$$\pi : N \to \mathrm{coker} f := \frac{N}{\mathrm{Im} f}$$

effettivamente

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"'] & \frac{N}{\mathrm{Im} f} \arrow[dl, dashed, "\exists!\, g'"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

rappresenta il teorema di omomorfismo per moduli.

Osservazione. In quanto limiti, nuclei e conuclei sono unici a meno di unico isomorfismo

Definizione 212: Categoria preabeliana

Una categoria *preabeliana* e una categoria additiva in cui esistono nuclei e conuclei.

Osservazione. Una categoria è preabeliana se e solo se è preadditiva e finitamente completa e cocompleta.

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è preabeliana, allora $\mathcal{A}^{op}$ è preabeliana. $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria piena è preabeliana se è chiusa per prodotti e coprodotti finiti, per nuclei e per conuclei (cioè $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}' \implies \exists i : K \to X$ nucleo di f in $\mathcal{A}$ con $K \in \mathcal{A}'$).

Ad esempio, se $\mathcal{A} = A-$`Mod` e $\mathcal{A}'$ con oggetti i moduli noeheriani/artiniani/coerenti, allora $\mathcal{A}'$ è preabeliana.

Esempio 213. Sia $\mathcal{A}$ una sottocategoria piena di $A-$`Mod` con oggetti i moduli *finitamente generati/finitamente presentati* (è sempre additiva).

Allora $\mathcal{A}$ è preabeliana se e solo se A è *noetheriano/coerente*.

Infatti M A-modulo è *f.g./f.p.* se e solo se M è *noeth./coerente*. Viceversa $\mathcal{A}$ è in ogni caso chiusa per conuclei in $A-$`Mod`, ma in generale non per nuclei. Sia A non *noeth./coerente*. Allora in entrambi i casi $\exists f : M \to N$ in $\mathcal{A}$ tale che $\mathrm{Ker} f$ non è f.g. Infatti nel primo caso si può prendere $f = \pi : A \to A/\mathfrak{I}$ con $\mathfrak{I}$ ideale sinistro non f.g., mentre nel secondo caso $\exists \mathfrak{I} \subseteq A$ ideale sinistro f.f.g. non f.p. se prendo $f : A^n \to A$ con $\mathrm{im} f = \mathfrak{I}$.

Per assurdo sia ora $g : K \to M$ un nucleo di f in $\mathcal{A}$ (dunque $f \circ g = 0$). In ogni caso K è f.g. e dunque $\mathrm{im} g$ è f.g. $\implies x \in \mathrm{Ker} f \setminus \mathrm{im} g$.

Sia $h : A \to M$, $a \mapsto ax$ in $\mathcal{A}$ tale che $f \circ h = 0$, ma $\nexists h' : A \to K$ tale che $h = g \circ h'$, e il che contraddice la proprietà universale.

Esempio 214. Sia A un dominio d'integrità, $\mathcal{A} \subseteq A-\texttt{Mod}$ sottocategoria piena con oggetti i moduli senza torsione, ossia tali che

$$T(M) := \{x \in M : \mathrm{Ann}(x) \neq 0\} = 0 \quad (T(M) \subseteq M \text{ sottomodulo})$$

Allora $\mathcal{A}$ è chiusa per nuclei ($M \in \mathcal{A}, M' \subseteq M$ sottomodulo, allora $M' \in \mathcal{A}$), ma non è chiusa per conuclei se A non è un campo (esiste infatti $0 \neq I \neq A$) ideale $I, A \in \mathcal{A}$ ma $\mathrm{coker}(I \hookrightarrow A) = A/I \notin A$.

$\mathcal{A}$ è comunque preabeliana, infatti $\forall f : M \to N$ in $\mathcal{A}$, un conucleo di f in $\mathcal{A}$ è

$$N \xrightarrow{\pi} \mathrm{coker} f \xrightarrow{\pi'} C := \frac{\mathrm{coker} f}{T(\mathrm{coker} f)}$$

Allora $\pi' \circ \pi \circ f = 0$ evidentemente. Inoltre vale la proprietà universale, infatti

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{coker} f \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dl, dashed, "\exists!\, g'"'] & C \arrow[dll, dotted, bend left, "\exists!\, g''"] \\
& P \in \mathcal{A} & &
\end{tikzcd}$$

dove la freccia tratteggiata è dovuta alla proprietà universale del conucleo in $A-\texttt{Mod}$ mentre quella puntinata (ossia quella voluta in $\mathcal{A}$) è dovuta al fatto, più generale, che dato $g' : L \to P$ in $A-\texttt{Mod}$ con $P \in \mathcal{A}$ e $\pi' : L \to L/T(L)$

$$\exists!\, g'' : \frac{L}{T(L)} \to P \text{ t.c. } g' = g'' \circ \pi'$$

poiché $g'(T(L)) \subseteq T(P) = 0$ e dunque si può applicare il teorema di omomorfismo.

Nota. zione In una categoria preabeliana, $\forall f : X \to Y$, indico con

$$\begin{aligned}
&\ker f : \mathrm{Ker} f \to X \text{ un nucleo di } f \\
&\mathrm{coker} f : Y \to \mathrm{Coker} f \text{ un conucleo di } f
\end{aligned}$$

Proposizione 215. *Sia C una categoria piccola, $\mathcal{A}$ una categoria preabeliana, allora $\texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è preabeliana. Se $\mathcal{C}$ è preadditiva, allora $\texttt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ (che è additiva) è chiusa per conuclei e nuclei in $\texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ e quindi è preabeliana.*

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \to G$ un morfismo in $\texttt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Devo dimostrare che $\mathrm{Ker}\alpha$, $\mathrm{Coker}\alpha$ (in $\texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$) sono additivi. Effettivamente

$$\forall X \in \mathcal{C} \quad \mathrm{Ker}(\alpha)(X) = \mathrm{Ker}(\alpha_X)$$

e $\forall f : X \to Y$ morfismo di C', $\mathrm{Ker}(\alpha)(f)$ è l'unico morfismo f' tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\alpha_X) \arrow[r, "\ker(\alpha_X)"] \arrow[d, dashed, "f'"] & F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
\mathrm{Ker}(\alpha_X) \arrow[r, "\ker(\alpha_Y)"'] & F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Analogamente dato $g : X \to Y$, allora $\mathrm{Ker}(\alpha)(g) = g'$ tale che l'analogo diagramma commuta. Dunque abbiamo

$$F(f+g) = F(f) + F(g) \ , \ G(f+g) = G(f) + G(g) \implies f' + g' = (f+g)'$$

□

Proposizione 216. *Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Allora ogni* equalizzatore/coequalizzatore *in $\mathcal{C}$ è un* mono/epi*morfismo in $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ un equalizzatore di $Y \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} Z$. Dati $l, l' : W \to X$ tali che $f \circ l = f \circ l'$. Devo dimostrare che $l = l'$. Effettivamente

$$g \circ (f \circ l) = h \circ (f \circ l) \implies \exists!\, \bar{l} : W \to X \text{ t.c. } f \circ l = f \circ \bar{l} \implies l = \bar{l} = l'$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \\
W \arrow[u, dashed, "\exists!\,\bar{l}"] \arrow[ur, "f \circ l"'] & &
\end{tikzcd}$$

in particolare in una categoria preadditiva i **nuclei** sono **mono** e i **conuclei** sono **epi**. □

Osservazione. In $\mathcal{A}$ categoria preadditiva, $f : X \to Y$ è mono $\iff$ dato $g : X' \to X$ t.c. $f \circ g = 0$, allora $g = 0$. Analogamente per gli epimorfismi.

Definizione 217: Categoria abeliana

Una categoria *abeliana* è una categoria preabeliana in cui ogni monomorfismo è un nucleo e ogni epimorfismo è un conucleo

Osservazione. Per la proposizione 216 il viceversa vale sempre.

Esempio 218. $A-$`Modl` è abeliana $\forall A$ anello.

Infatti se $f : M \to N$ in $A-$`Mod` è *mono/epi* se e solo se f è *iniettivo/suriettivo*.

Se f è iniettivo, allora $\mathrm{im} f \cong M$ e l'inclusione $\mathrm{im} f \overset{i}{\hookrightarrow} N$ è un nucleo di $\mathrm{coker} f : N \to \mathrm{Coker} f$. Dunque anche f è un nucleo di $\mathrm{coker} f$ poiché $f = i \circ f'$ con $f' : M \to \mathrm{im} f$ isomorfismo.

Se f è suriettivo, per il primo teorema di isomorfismo $N \cong M/\mathrm{Ker} f$ e sia $\overline{f}$ l'isomorfismo. Allora

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f \arrow[r, "j:=\ker f"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{coker} j"'] & N \\
& & \mathrm{Coker}(j) \arrow[u, dashed, "\exists!\,\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

commuta e dunque f è un conucleo di j.

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è abeliana, anche $\mathcal{A}^{op}$ è abeliana.

Proposizione 219. *Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva con oggetto nullo* 0. *Allora un morfismo $f : X \to Y$ di $\mathcal{A}$ è* mono/epi*morfismo* $\iff$ $\mathrm{Ker} f = 0/\mathrm{Coker} f = 0$

Dimostrazione.

$\implies$ Devo dimostrare che $0 \overset{0}{\hookrightarrow} X$ è un nucleo di f. Se $f \circ 0 = 0$, dato $g : Z \to X$ tale che $f \circ g = 0$, allora $g = 0$ (perché f è mono) e dunque fattorizza in modo unico attraverso 0.

$\impliedby$ Se $\mathrm{Ker} f = 0$ dato $g : Z \to X$ tale che $f \circ g = 0$, allora per definizione di nucleo, g fattorizza in modo unico attraverso $0 \to X$, dunque $g = 0$

□

Definizione 220: Immagine e coimmagine

Un'*immagine* di $f : X \to Y$ in una categoria preabeliana è un nucleo di un conucleo di f. Una *coimmagine* di f è un conucleo di un nucleo di f. Diagrammaticamente abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\ker f) = \mathrm{coim} f"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{coker} f"] & \mathrm{Coker} f \\
& \mathrm{Coim} f & \mathrm{Im} f \arrow[u, "\mathrm{im} f = \ker(\mathrm{coker} f)"'] &
\end{tikzcd}$$

Nota (zione). Se f è nucleo di g si scrive $f = \ker g$

Proposizione 221. *Sia f un (co)nucleo in una categoria preabeliana. Allora*

$$f = (co)im(f)$$

Dimostrazione. Sia $f : X \implies Y$ un nucleo di $g : Y \to Z$. Voglio dimostrare che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker} f"] & Z \\
& Y' \arrow[u, "h"] \arrow[ul, dashed, "\exists!\, h'"] \arrow[r, "0"'] & \mathrm{Coker} f \arrow[u, dashed, "\exists!\, g'"']
\end{tikzcd}$$

Ossia f è nucleo di $\mathrm{coker} f$. È sempre vero che $\mathrm{coker} f \circ f = 0$. Dato $h : Y' \to Y$ tale che $\mathrm{coker} f \circ h = 0$, devo dire che $\exists!\, h' : Y' \to X$ tale che $h = f \circ h'$.

□

Corollario 222. *Sia f* mono/epi *in una categoria abeliana. Allora $f =$ (co)*$\mathrm{im}(f)$.

Proposizione 223. *Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Sia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ una sottocategoria piena chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei. Allora $\mathcal{A}'$ è abeliana.*

Dimostrazione. $\mathcal{A}'$ è già preabeliana.

$f : X \to Y$ mono di $\mathcal{A}'$ $\iff$ $\mathrm{Ker} f = 0$ in $\mathcal{A}'$ e quindi in $\mathcal{A}$, ossia f è mono in $\mathcal{A}$, ma allora $f = \mathrm{im} f$ in $\mathcal{A}$ e quindi in $\mathcal{A}'$ □

Esempio 224. In particolare le sottocategoria di $A-$`Mod` con oggetti i moduli *noeth./artin./coerenti* sono abeliane

Esempio 225. Sia $\mathcal{C}$ piccola, $\mathcal{A}$ categoria abeliana. Allora `Fun`$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è abeliana.

Dimostrazione. Sappiamo già che `Fun`$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è preabeliana.

ora $\alpha : F \to G$ è mono in `Fun`$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ $\iff$ $\mathrm{Ker}\alpha = 0$ $\iff$ $\mathrm{Ker}(\alpha_X) = 0$ per ogni $X \in \mathcal{C}$, cioè α_X mono in $\mathcal{A}$ abeliana e dunque $\alpha_X = \mathrm{im}(\alpha_X)$ $\implies$ $\alpha = \mathrm{im}\alpha$. □

Se $\mathcal{C}$ è preadditiva, allora `AddFun`$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è chiusa per nuclei e conuclei in `Fun`$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ e dunque `AddFun`$(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è abeliana. In particolare $\mathcal{A}-$`Mod` $=$ `AddFun`$(\mathcal{A}, $`Ab`$)$ è abeliana $\forall \mathcal{A}$ preadditiva piccola.

Proposizione 226. *Sia $f : X \to Y$ monomorfismo e epimorfismo in una categoria abeliana. Allora f è isomorfismo.*

Dimostrazione. f è mono, dunque $f = \mathrm{im} f = \ker(\mathrm{coker} f)$. Poiché f è epi, $\mathrm{Coker} f = 0$, dunque un'immagine di f è 1_Y, e quindi f è isomorfismo. □

Esempio 227. Sia $\mathcal{A}$ sottocategoria piena di $A-$`Mod` (A dominio d'integrità non campo) dei moduli senza torsione. Allora $\mathcal{A}$ non è abeliana.

Dimostrazione. Sia $0 \neq I \neq A$ ideale. Allora l'inclusione $i : I \to A$ è mono ($\mathrm{Ker} i = 0$), epi ($\mathrm{Coker} i = (A/I)/(T(A/I)) = 0$) ma non è isomorfismo. $\square$

Proposizione 228. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due categorie equivalenti, allora $\mathcal{A}$ è abeliana se e solo se $\mathcal{B}$ è abeliana.*

Dimostrazione. So già che $\mathcal{B}$ è preabeliana. Per dualità basta dimostrare che se $f : X \to Y$ è monomorfismo di $\mathcal{B}$, allora è nucleo.

Sia $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un'equivalenza (quindi preserva i (co)nuclei). Allora se f è mono $\mathrm{Ker} f = 0$, dunque $\mathrm{Ker}(F(f)) = F(0) = 0$ è dunque $F(f)$ è mono.

Inoltre $F(f) = \mathrm{im}(F(f)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{coker}(F(f)))$. Ma $\mathrm{im}(F(f)) = F(\mathrm{im}(f))$. A meno di isomorfismo, $F(f) = F(\mathrm{im}(f))$ e dunque $f = \mathrm{im}(f)$ poiché F è pienamente fedele. $\square$

Nota (zione). I mono si possono indicare con $\rightarrowtail$ e gli epi con

Teorema 229

Sia $\mathcal{A}$ una categoria preabeliana. Allora

1. $\forall f : X \to Y$ di $\mathcal{A}$, $\exists!\, s(f) : \mathrm{Coim} f \to \mathrm{Im} f$ tale che $f = \mathrm{im}(f) \circ s(f) \circ \mathrm{coim}(f)$
2. $\mathcal{A}$ è abeliana se e solo se $s(f)$ è isomorfismo per ogni morfismo f di $\mathcal{A}$

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f \arrow[r, tail, "\ker f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coim} f"'] & Y \arrow[r, two heads, "\mathrm{coker} f"] & \mathrm{Coker} f \\
& \mathrm{Coim} f \arrow[r, dashed, "s(f)"'] \arrow[ur, dashed, "f'"] & \mathrm{Im} f \arrow[u, tail, "\mathrm{im} f"'] &
\end{tikzcd}$$

1. $f \circ \ker f = 0$ e $\mathrm{coim} f = \mathrm{coker}(\ker f)$. Dunque esiste unico $f' : \mathrm{Coim} f \to Y$ tale che $f = f' \circ \mathrm{coim} f$.

   $$0 = \mathrm{coker} f \circ f = \mathrm{coker} f \circ f' \circ \mathrm{coim} f \implies \mathrm{coker} f \circ f' = 0$$

   poiché coim è epi.

   Inoltre

   $$\mathrm{im} f = \ker(\mathrm{coker} f) \implies \exists!\, s(f) : \mathrm{Coim} f \to \mathrm{Im} f : f' = \mathrm{im} f \circ s(f)$$

   dove $s(f)$ è unico perché $\mathrm{im} f$ è mono e $\mathrm{coim} f$ è epi.

2. $\implies$ Per dualità basta dimostrare che f mono $\implies$ f nucleo

   $$\mathrm{coim} f = \mathrm{coker}(\ker f) = \mathrm{coker}(0 \to X) \implies \mathrm{coim}(f) \text{ iso} \implies f = \mathrm{im} f \circ iso$$

   cioè f " $=$ " $\mathrm{im} f$ è un nucleo

   $\impliedby$ $s(f)$ è isomorfismo se e solo se $s(f)$ è mono e epi. Per dualità basta dimostrare che $s(f)$ è mono, che è vero se f' è mono. Dunque dimostreremo che f' è mono.

   Sia $g : Z \to \mathrm{Coim} f$ tale che $f' \circ g = 0$, devo dimostrare che $g = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker} f \arrow[r, tail, "\ker f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, dashed, "\mathrm{coim} f"] & Y \arrow[r, two heads, "\mathrm{coker} f"] & \mathrm{Coker} f \\
W \arrow[u, dashed, "h'"] \arrow[ur, "h"] & \mathrm{Coim} f \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, dashed, "s(f)"] \arrow[dr, "\mathrm{coker} g"] & \mathrm{Im} f \arrow[u, tail, "\mathrm{im} f"'] & \\
Z \arrow[ur, "g"] & \mathrm{Coker} h \arrow[u, dashed, "q"] \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{Coker} g \arrow[uu, dashed, bend right, "f''"'] &
\end{tikzcd}
$$

ma $f' \circ g = 0$, quindi $\exists!\, f'' : \mathrm{Coker} g \to Y$ tale che $f' = f'' \circ \mathrm{coker} g$.
Inoltre $\mathrm{coker} g \circ \mathrm{coim} f : X \to \mathrm{Coker} g$ epi e $\mathcal{A}$ è abeliana, dunque

$$\exists h : W \to X : \mathrm{coker} g \circ \mathrm{coim} f = \mathrm{coker} h$$

$f \circ h = f' \circ \mathrm{coim} f \circ h = f'' \circ \mathrm{coker} g \circ \mathrm{coim} f \circ h = f'' \circ \mathrm{coker} h \circ h = 0$
dunque $\exists!\, h' : W \to \mathrm{Ker} f$ tale che $h = \mathrm{Ker} f \circ h'$.

$\square$

Corollario 230. *Sia $f : X \to Y$ morfismo in una categoria abeliana. Allora f si fattorizza come $X \overset{e}{\twoheadrightarrow} I \overset{m}{\rightarrowtail} Y$ con e epi e m mono. Inoltre tale fattorizzazione è essenzialmente unica, cioè se $X \overset{e'}{\twoheadrightarrow} I' \rightarrowtail Y$ è un'altra fattorizzazione simile, allora $\exists!\, t : I \to I'$ (iso)morfismo tale che $e' = t \circ e$ e $m = m' \circ t$*

dimostrazione unicità.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[dr, two heads, "e'"] & I \arrow[r, tail, "m"] & Y \\
Z \arrow[u, "g"] & I' \arrow[u, dashed, "t"] \arrow[ur, tail, "m'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Poiché e è epi, allora $e = \mathrm{coker} g$ con $g : Z \to X$. Allora $e \circ g = 0 \implies m \circ e \circ g = m' \circ e' \circ g = 0 \implies e' \circ g = 0$ perché m' è mono. Poiché $e = \mathrm{coker} g$,

$$\exists!\, t : I \to I' : e' = t \circ e$$

Allora $m' \circ t \circ e = m' \circ e' = m \circ e$. Inoltre e è epi, dunque $m' \circ t = m$.
Verificare come esercizio che t è iso. $\square$

Definizione 231: Sottoggetto

Un *sottoggetto* di X è una classe di equivalenza di monomorfismi $Y \overset{i}{\rightarrowtail} X$, dove $(Y \overset{i}{\rightarrowtail} X) \sim (Y' \overset{i'}{\rightarrowtail} X)$ se $\exists t : Y \to Y'$ isomorfismo tale che $i = i' \circ t$, ossia

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "t"'] & X \\
Y' \arrow[ur, "i'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Osservazione. Sia $\mathcal{C}'_X$ la sottocategoria di $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ con oggetti i mono con codominio X. Sia ora

$$\mathcal{C}'_X((Y \overset{i}{\rightarrowtail} X), (Y' \overset{i'}{\rightarrowtail} X)) := \{t \in \mathcal{C}(Y, Y') : i' \circ t = i\}$$

Inoltre t è tale che $i' \circ t = i$ è mono, dunque t è mono. Inoltre t, se esiste, è unico, quindi $\mathcal{C}'_X$ è un preordine.

Una relazione di preordine induce una relazione d'ordine sulle classi di isomorfismo degli oggetti. Quindi ottengo una relazione d'ordine sui sottoggetti di X (che indico con $\subseteq$), cioè se Y, Y' sottoggetti di X, si scrive $Y \subseteq Y'$ se $\exists t$ tale che. Dualmente si ottiene la nozione di quoziente di X considerando gli epi $X \twoheadrightarrow Y$.

Esempio 232. Sia $f : X \to Y$ un monomorfismo in una categoria abeliana. Allora $f = \mathrm{im}(f)$ come sottoggetti di Y.

Definizione 233: Complesso

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in una categoria preadditiva è un *complesso* se $g \circ f = 0$

Proposizione 234. *In $\mathcal{A}$ abeliana,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{coim} f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ \mathrm{Im} f \arrow[ur, "\mathrm{im} f"'] \arrow[rr, dashed, "t"'] & & \mathrm{Ker} g \arrow[ul, tail, "\mathrm{ker} g"'] \end{tikzcd}$$

$$g \circ f = 0 \iff \exists(!)\, t : \mathrm{Im} f \to \mathrm{Ker} g \text{ t.c. } \mathrm{im} f = \mathrm{ker} g \circ t$$

Dimostrazione.

$\Longleftarrow$

$$g \circ f = g \circ \mathrm{im} f \circ \mathrm{coim} f = \underbrace{g \circ \mathrm{ker} g}_{0} \circ t \circ \mathrm{coim} f = 0$$

$\Longrightarrow$

$$0 = g \circ f = g \circ \mathrm{im} f \circ \mathrm{coim} f\,, \mathrm{coim} f \text{ epi} \implies g \circ \mathrm{im} f = 0$$

da cui $\exists!\, t : \mathrm{Im} f \to \mathrm{Ker} g$ tale che $\mathrm{im} f = \mathrm{ker} g \circ t$ per la proprietà universale del nucleo.

□

Osservazione. In un complesso, esiste sempre tale t, ma non necessariamente è un isomorfismo

Definizione 235: Successione esatta

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ complesso in una categoria abeliana è detta successione *esatta* se $t : \mathrm{Im} f \to \mathrm{Ker} g$ tale che $\mathrm{im} f = \mathrm{ker} g \circ t$ è isomorfismo (ossia $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$ come sottoggetti di Y)

Osservazione.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\mathrm{coker} f"'] \arrow[dr, "\mathrm{coim} g"] & Z \\ \mathrm{Coker} f \arrow[rr, dashed, "t"'] & & \mathrm{Coim} g \arrow[u, tail, "\mathrm{im} g"'] \end{tikzcd}$$

$$g \circ f = 0 \iff \exists(!) t : \mathrm{coim} g \circ t = \mathrm{coker} f$$

e la successione è esatta se e solo se t è isomorfismo.

Proposizione 236.

1. $0 \to X \xrightarrow{f} Y$ *è esatta* $\iff \mathrm{Ker} f = 0 \iff f$ *mono.*

1^{op}. $X \xrightarrow{f} Y \to 0$ *è esatta* $\iff \mathrm{Coker} f = 0 \iff f$ *epi*

2. $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *è esatta (in X e Y)* $\iff f = \mathrm{ker} g$

2^{op}. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *è esatta* $\iff g = \mathrm{coker} f$

3. *$\forall f : X \to Y$ la successione $0 \to \mathrm{Ker} f \overset{\ker f}{\to} X \overset{f}{\to} Y \overset{\mathrm{coker} f}{\to} \mathrm{Coker} f \to 0$ è esatta. In particolare se f è mono, allora $0 \to X \overset{f}{\to} Y \overset{\mathrm{coker} f}{\to} \mathrm{Coker} f \to 0$ è esatta e f epi, dunque $0 \to \mathrm{Ker} f \overset{\ker f}{\to} X \to Y \to 0$ è esatta*

Dimostrazione. A quanto pare l'unica non ovvia è la 2.

$\Longrightarrow$ Se la successione è esatta in X allora f è mono, dunque $f = \mathrm{im} f$. Se la successione è esatta in Y allora $\mathrm{im} f = \mathrm{ker} g \implies f = \mathrm{ker} g$

$\Longleftarrow$ Se $f = \mathrm{ker} g$, allora f è mono, dunque successione esatta in X. Ma quindi $(\ker f) = f = \mathrm{im} f$ e dunque esatta in Y

□

Definizione 237: Successione esatta corta

Le successioni esatte della forma $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ si dicono esatte corte.

Proposizione 238. *Una successione esatta corta $0 \to X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \to 0$ in una categoria abeliana si spezza se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

1. *f è invertibile a sinistra*
2. *g è invertibile a destra*
3. *$\exists r : Y \to X$ e $s : Z \to Y$ tale che (Y, f, s, r, g) è un biprodotto di X e Z*

Buona definizione. Per dualità basta dimostrare che 1. $\iff$ 3.. Inoltre 3. $\implies$ 1. è ovvia, dunque dimostriamo solo 1. $\implies$ 3..

Sia $h := 1_Y - f \circ r : Y \to Y$. Allora $h \circ f = f - f \circ \underbrace{r \circ f}_{1_X} = 0$. Allora

$$g = \mathrm{coker} f \implies \exists!\, s : Z \to Y : h = s \circ g \implies 1_Y = s \circ g + f \circ r$$

Dunque resta da dimostrare che $g \circ s = 1_Z$. Infatti $g \circ s \circ g = g \circ h = g - g \circ f \circ r = g = 1_Z \circ g$ e g è epimorfismo, dunque $g \circ s = 1_Z$. □

Definizione 239: Categoria semisemplice

Una categoria abeliana $\mathcal{A}$ è detta *semisemplice* se tutte le successioni esatte corte di $\mathcal{A}$ si spezzano

Esempio 240. $A-\texttt{Mod}$ è semisemplice se e solo se A è semisemplice.

Definizione 241: Funtore esatto

Un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie abeliane si dice *esatto* a *sinistra/destra* se F è additivo e preserva le successioni esatte rispettivamente della forma $0 \to X \to Y \to Z$ o della forma $X \to Y \to Z \to 0$.

Osservazione. F è esatto a *sinistra/destra* $\iff$ F è additivo e preserva i *nuclei/conuclei* $\iff$ F preserva i *limiti/colimiti* finiti.

Usando l'osservazione si potrebbe definire anche $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ esatto a *sinistra/destra* se $\mathcal{C}$ è finitamente *completa/cocompleta* e F preserva i *limiti/colimiti*

Definizione 242

$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie abeliane è detto *esatto* se lo è sia a sinistra che a destra.

Osservazione. F è esatto a *sinistra/destra* se F preserva i *mono/epi*morfismi. Infatti se $f : X \to Y$ è mono, allora esiste una successione esatta $0 \to X \xrightarrow{f} Y \to Z$

Proposizione 243. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore additivo tra categorie abeliane. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

i) F *è esatto a* sinistra/destra

ii) $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ *è esatta in* $\mathcal{A} \implies$

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \quad / \quad F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0$$

è esatta in $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. $i) \implies ii)$ è ovvia. Si supponga ora che valga $ii)$. Allora sia $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ esatta in $\mathcal{A}$. si decomponga $g = i \circ g'$ con i mono e g epi, dunque $Y \overset{g'}{\twoheadrightarrow} Z' \overset{i}{\rightarrowtail} Z$. Allora $\ker g' = \ker g$ perché i è mono e $\ker g = f$, dunque $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g'} Z' \to 0$ è esatta. Segue che per ipotesi $0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g')} F(Z')$ è esatta.

Poiché ora i è mono, allora $F(i)$ è mono e dunque

$$F(f) = \ker(F(g')) = \ker(F(i) \circ F(g')) = \ker(F(g))$$

Ne consegue che $0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ è esatta. □

Proposizione 244. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore additivo tra categoria abeliane. Allora le seguenti sono equivalenti:*

i) F preserva le successioni esatte (della forma $X \to Y \to Z$).

ii) F è esatto.

iii) F è esatto a sinistra e preserva gli epimorfismi.

iii') F è esatto a destra e preserva i monomorfismi.

iv) F preserva le successioni esatte corte.

Dimostrazione. Molte implicazioni sono ovvie, in particolare è evidente che $i) \implies ii) \implies iii) \implies iv)$ e $ii) => iii') \implies iv)$. Inoltre $iv) \implies ii)$ per la proposizione 243. Resta da dimostarre che $ii) \implies i)$.

Sia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ esatta in $\mathcal{A}$.

Allora $f = f' \circ p$ con p epi e f' mono. Inoltre $\mathrm{im} f = \ker g$ mma $\mathrm{im} f = \ker(\mathrm{coker}(f))$ e poiché p è epi, allora $\mathrm{coker} f = \mathrm{coker} f' \implies \mathrm{im} f = \mathrm{im} f'$. Poiché f' è mono, allora $\mathrm{im} f' = f'$ e dunque $\ker g = f'$. Dunque $0 \to X' \xrightarrow{f'} Y \xrightarrow{g} Z$ è esatta e F è esatto (a sinistra). Segue che $0 \to F(X') \xrightarrow{F(f')} F(X) \to F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ è esatta. Ma $F(f) = F(f') \circ F(p)$ e $F(p)$ è epi, essendo F esatto a destra, dunque $\mathrm{coker}(F(f)) = \mathrm{coker}(F(f')) \implies \mathrm{im}(F(f)) \implies \mathrm{im}(F(f')) = \ker(F(g)) \implies$

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

è esatta. □

Definizione 245

$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtore tra categorie abeliane è esatto al centro se F è additivo e per ogni successione esatta $0 \to X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \to 0$ in $\mathcal{A}$, allora $F(X) \overset{F(f)}{\to} F(Y) \overset{F(g)}{\to} F(Z)$ è esatta in $\mathcal{B}$.

Corollario 246. *F è esatto a* sinistra/destra $\iff$ *F è esatto al centro e preserva i* mono/epi*morfismi.*

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore additivo tra categorie abeliane. Allora F preserva le successioni esatte corte che si spezzano. Dunque se $\mathcal{A}$ è semisemplice allora F è esatto.

Esempio 247. Sia $A \to B$ un omomorfismi di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari $B\text{–}\mathtt{Mod} \to A\text{–}\mathtt{Mod}$ è esatto.

Esempio 248. Se $\mathcal{A}$ è abeliana e $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria piena è chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei (dunque $\mathcal{A}'$ è additiva), allora il funtore di inclusione $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ è esatto.

Esempio 249. Sia $\mathcal{C}$ una categoria (piccola) e $\mathcal{A}$ una categoria abeliana (quindi $\mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è abeliana).

Allora $\forall X \in \mathcal{C}$ il funtore di valutazione in X

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_X : \mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{A} \\ F &\longmapsto \mathrm{ev}_X(F) = F(X) \\ \alpha &\longmapsto \mathrm{ev}_X(\alpha) = \alpha_X \end{aligned}$$

è esatto

Esempio 250. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $X \in \mathcal{A}$. Allora i funtori $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathtt{Ab}$ e $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \to \mathtt{Ab}$ sono esatti a sinistra (e più in generale preservano i limiti).

Dim. $\mathcal{A}(X, -)$ esatto a sinistra (assumendo additivo). $0 \to Y' \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Y''(\to 0)$ è esatta in $\mathcal{A}$. Allora $0 \to \mathcal{A}(X, Y') \overset{f_*}{\to} \mathcal{A}(X, Y) \overset{g_*}{\to} \mathcal{A}(X, Y'')$ è esatta in $\mathtt{Ab}$.

Infatti $g \circ f = 0 \implies g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0_* = 0$ e dato $h \in \mathcal{A}(X, Y)$ tale che $g_*(h) = 0$, devo dimostrare che $\exists! h' \in \mathcal{A}(X, Y')$ tale che $h = f_*(h')$. Questo è vero perché $0 = g_*(h) = g \circ h$. E dunque

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f=\ker g"] & Y \arrow[r, "g"] & Y'' \\ & X \arrow[ul, dashed, "h'"] \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

e per la proprietà universale del ker tale h' esiste unico. $\square$

In generale $\mathcal{A}(X, -)$ e $\mathcal{A}(-, X)$ non sono esatti a destra (ma lo sono se $\mathcal{A}$ è semisemplice). In particolare, se $0 \to Y' \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Y'' \to 0$ non si spezza, allora $\mathcal{A}(Y'',_{)}$ non è esatto a destra, perché g epi in $\mathcal{A}$ ma g_* non è epi (suriettivo) in $\mathtt{Ab}$. Infatti $g_* : \mathcal{A}(Y'', Y) \to \mathcal{A}(Y'', Y''))$ è tale che $\mathrm{id}_{Y''} \notin \mathrm{im}(g_*)$. Analogamente $\mathcal{A}(-, Y')$ non è esatto a destra.

Esempio 251. Sia A un dominio d'integrità non campo. Consideriamo $F : A\text{–}\mathtt{Mod} \to A\text{–}\mathtt{Mod}$ dato da $F(M) = M/T(M)$ e $F(f : M \to N) = \overline{f} : M/T(M) \to N/T(N)$ omomorfismo indotto. Allora F è additivo (esercizio) e preserva mono e epi ma **non è esatto al centro** (e dunque neanche a sinistra o destra).

Infatti se f è suriettivo, allora anche $\overline{f}$ è suriettivo e se f è iniettivo, allora $\overline{f}$ è iniettivo poiché $\overline{x} \in \ker \overline{f} \implies f(x) \in T(N) \implies \exists 0 \neq a \in A : 0 = af(x) = f(ax) \implies ax = 0$ per iniettività di f. Segue che quindi $x \in T(M) \implies \overline{x} = \overline{0}$.

Tuttavia nono è esatto al centro, infatti se $0 \neq I \subsetneq A$ è ideale, allora $0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$ è esatta in $A-\texttt{Mod}$, ma $T(I) = T(A) = 0$ e $T(A/I) = A/I$, dunque $F(I) = I$, $F(A) = A$ e $F(A/I) = 0$, per cui si ottiene $I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{F(\pi)} 0$ che **non** è esatta.

Proposizione 252. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esatto e fedele tra categorie abeliane. Sia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ una successione (qualunque) in $\mathcal{A}$ tale che $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$ è esatta in $\mathcal{B}$, allora $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ è esatta in $\mathcal{A}$*

Nota (zione). Sia $X' \subseteq X$ sottoggetto di X. Allora indico con X/X' un conucleo di $X' \rightarrowtail X$

Dimostrazione. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = 0 \overset{\text{additivo}}{=} F(0)$, quindi $g \circ f = 0$ poiché F è fedele, e dunque $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ è un complesso e quindi $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$ come sottoggetti. Devo dimostrare quindi che $C := \operatorname{Ker} g / \operatorname{Im} f = 0$. Poiché F preserva i nuclei, $F(C) = F(\operatorname{Ker} g)/F(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Ker}(F(g))/\operatorname{Im}(F(f)) = 0$ perché la successione in $\mathcal{B}$ è esatta. Segue dunque che $F(1_C) = 0 = F(0 : C \to C)$ e F è fedele, dunque $1_C = 0$, ossia $C = 0$ è l'oggetto nullo. □

Teorema 253: Freyd - Mitchell

Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana (piccola). Allora esiste un anello A e un funtore esatto pienamente fedele $\mathcal{A} \to A-\texttt{Mod}$

Corollario 254. *Le dimostrazioni di caccia al diagramma in $\mathcal{A}$ abeliana si possono fare in $A-\texttt{Mod}$*

In realtà il teorema precedente si può utilizzare anche se $\mathcal{A}$ non è piccola, perché tanto il diagramma solitamente prende pochi oggetti

Lemma 255: del Serpente

Il seguente diagramma con righe esatte

$$\begin{tikzcd}
(0 \arrow[r] &)X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "q"] & Y''(\arrow[r] & 0)
\end{tikzcd}$$

induce una successione esatta

$$(0 \to)\operatorname{Ker} f' \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f'' \xrightarrow{d} \operatorname{Coker} f' \to \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} f''(\to 0)$$

Dimostrazione. Corollario 254. Se invece volessimo dimostrarlo esplicitamente usando solo elementi categorici, si può dimostrare utilizzando prodotti fibrati difficili perché non si può usare la proprietà universale dei ker e coker banalmente (notare che d è dal lato sbagliato per poterlo fare) □

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è una categoria (pre)abeliana, allora ci sono i funtori $\operatorname{Ker}, \operatorname{Coker} : \operatorname{Mor}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ definita nel modo ovvio per $\operatorname{Ker}(f)$ e per ogni morfismo $\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd}$: $f \to f'$ in $\operatorname{Mor}(\mathcal{A})$, allora $\operatorname{Ker}((i,j)) := i'$ tale che $\operatorname{Ker} f \circ i' =$

$i \circ \mathrm{Ker} f'$ o equivalentemente (includendo anche la definizione di Coker) il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f') \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\ker f'"'] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[d, "\ker f"] \\
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\mathrm{coker} f'"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{coker} f"] \\
\mathrm{Coker} f' \arrow[r, "j'"] & \mathrm{Coker} f
\end{tikzcd}$$

e per il lemma del serpente Ker è esatto a sinistra e Coker è esatto a destra. Non sono però esatti, perché se prendo $X' = Y'' = 0$, $p = f$, $j = 1_X$ e $X \neq 0$, allora ottengo la successione

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathrm{Ker} f'' & \mathrm{Coker} f' & &
\end{tikzcd}$$

Capitolo 3

Moduli (reprise)

Definizione 256: Bimodulo

Siano A, B anelli. Allora un (A, B)-*bimodulo* è un gruppo abeliano $(M, +)$ con struttura di A-modulo sinistro e di B-modulo destro tale che $(ax)b = a(xb)$ per ogni $a \in A$, $b \in B$ e $x \in M$.
Se $A = B$ allora si dice A-bimodulo invece che (A, A)-bimodulo.

Osservazione. Un (A, B)-bimodulo è anche un (B^{op}, A^{op})-bimodulo. In particolare

$$A\text{-bimodulo} = A^{op}\text{-bimodulo}$$

Esempio 257. A come anello è un A-bimodulo

Esempio 258. Se A è commutativo, allora se M è A-modulo è un A-bimodulo, con la proprietà aggiuntiva che $ax = xa$ (più in generale se vale questa proprietà si dice che il bimodulo è *simmetrico*)

Esempio 259. Se B è una A-algebra e M un B-modulo *sinistro*/*destro*, allora M è un $(B, A)/(A, B)$-bimodulo.

Di conseguenza, $\forall A$ anello e $\forall M$ A-modulo *sinistro*/*destro*, M è un $(A, \mathbb{Z})/(\mathbb{Z}, A)$-bimodulo.

Definizione 260: Omomorfismo di bimoduli

Un omomorfismo di (A, B)-bimoduli è $f : M \to N$ omomorfismo sia di A-moduli sinistri che di B-moduli destri.

Si ottiene che la categoria $A-\mathtt{Mod}-B$ degli (A, B)-bimoduli è una categoria abeliana.

Proposizione 261. *Sia* $M \in A-\mathtt{Mod}-B$ *e* $N \in A-\mathtt{Mod}-C$. *Allora* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *è un* (B, C)*-bimodulo con*

$$(bf)(x) := f(xb) \quad ; \quad (fc)(x) := f(cx) \quad \forall b \in B,\ c \in C,\ x \in M,\ f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

Dimostrazione. bf è A-lineare, infatti $(bf)(ax) = a(bf)(x)$ per ogni $a \in A$ perché $(bf)(ax) = f((ax)b) = f(a(xb)) = af(xb) = a(bf)(x)$. Analogamente fc è A-lineare (lasciato per esercizio).

Devo dimostrare in particolare che $(bb')(f) = b(b'f)$ e $f(cc') = (fc)c'$. Sono entrambe vere perché, $\forall x \in M$

$$((bb')(f))(x) = f(x(bb')) = f((xb)b') = (b'f)(xb) = (b(b'f))(x)$$

e analogamente l'altra (lasciata per esercizio).

Resta da dimostrare che $(bf)c = b(fc)$. Infatti

$$(b(fc))(x) = (fc)(xb) = f(xb)(c) = (bf)(x)c = ((bf)c)(x)$$

□

Corollario 262. *Sia $M \in A-\texttt{Mod}-B$. Allora si ottengono funtori (additivi)*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(M,-) &: A-\texttt{Mod} \to B-\texttt{Mod}\\ \mathrm{Hom}_A(-,M) &: (A-\texttt{Mod})^{op} \to \texttt{Mod}-B\end{aligned}$$

Dimostrazione. resta da dimostrare che $\forall g : N \to N'$ in $A-\texttt{Mod}$, allora $g_* : \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N')$ definita da $f \mapsto g \circ f$ e $g^* : \mathrm{Hom}_A(N',M) \to \mathrm{Hom}_A(N,M)$ definita da $f' \mapsto f' \circ g$ sono B-lineari.

Dunque vogliamo mostrare che $g_*(bf) = g \circ bf = b(g \circ f) = bg_*(f)$. Effettivamente $\forall x \in M$

$$(g \circ (bf))(x) = g((bf)(x)) = g(f(xb)) = (g \circ f)(xb) = (b(g \circ f))(x)$$

e analogamente g^* è B-lineare (lasciato per esercizio). □

Esempio 263. Il funtore $\mathrm{Hom}_A(A,-) : A-\texttt{Mod} \to A-\texttt{Mod}$ è isomorfo a $\mathrm{id}_{A-\texttt{Mod}}$ con isomorfismo naturale $\alpha : \mathrm{Hom}_A(A,-) \to \mathrm{id}_{A-\texttt{Mod}}$ definito $\forall M \in A-\texttt{Mod}$ da

$$\begin{aligned}\alpha_M : \mathrm{Hom}_A(A,M) &\longrightarrow M\\ f &\longmapsto \alpha_M(f) = f(1)\end{aligned}$$

so già che α_M è biunivoca. Resta da dimostrare che è A-lineare. Questo è vero perché, $\forall a \in A$

$$\alpha_M(af) = (af)(1) = f(1a) = f(a1) = af(1) = a\alpha_M(f)$$

e inoltre se $g : M \to N$ è A-lineare, allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(A,M) \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[d, "g_*"] & M \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Hom}_A(A,N) \arrow[r, "\alpha_N"] & N \end{tikzcd}$$

commuta. Questo è vero perché $\forall f \in \mathrm{Hom}_A(A,M)$, $g(\alpha_M(f)) = g(f(1))$ e $\alpha_N(g_*(f)) = a_N(g \circ f) = (g \circ f)(1)$

Esempio 264. Sia A commutativo, B una A-algebra, M, N B-moduli. Allora Poiché $M, N \in B-\texttt{Mod}-A$, $\mathrm{Hom}_B(M,N)$ è A-bimodulo simmetrico (ossia tale che $\forall a \in A$ e $\forall f \in \mathrm{Hom}_B(M,N)$, $(af)(x) = f(ax) = af(x)$.

In particolare se M, N sono A-moduli, allora $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ è un A-modulo in questo modo.

Definizione 265: Prodotto tensoriale

Un *prodotto tensoriale* di $M \in \mathrm{Mod}-A$ e $N \in A-\texttt{Mod}$ è un gruppo abeliano T con una funzione $t : M \times N \to T$ che sia A-bilanciata, cioè t è $\mathbb{Z}$-bilineare e

$$t(xa, y) = t(x, ay) \quad \forall a \in A,\ \forall x \in M,\ \forall y \in N$$

universale per tale proprietà, ossia t è tale che $\forall G$ gruppo abeliano e $\forall f : M \times N \to G$ A-bilanciata $\exists! f' : T \to G$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $f = f' \circ t$

Proposizione 266. *Siano (T,t) e (T',t') due prodotti tensoriali di M e N. Allora $\exists! i : T \to T'$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $t' = i \circ t$ e i è isomorfismo.*

Inoltre si può prendere $T := \mathbb{Z}^{(M\times N)}/H$. Con leggero abuso di notazione in $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ indico con (x,y) l'elemento della base indicizzato da $(x,y) \in M \times N$. Con tale notazione, e $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ e $a \in A$

$$H = \left\langle \underbrace{(x+x',y)-(x,y)-(x',y)}_{\textit{additività nel primo argomento}}, \underbrace{(x,y+y')-(x,y)-(x,y')}_{\textit{add. nel secondo arg.}}, \underbrace{(xa,y)-(x,ay)}_{\textit{bilanciataggine}} \right\rangle$$

e

$$t(x,y) = (x,y) + H$$

Dimostrazione unicità. Per la proprietà universale di T, t, $\exists! i$ tale che $t' = i \circ t$. Analogamente per $i' : T' \to T$ e come al solito $i \circ i' = \mathrm{id}_{T'}$ e $i' \circ i = \mathrm{id}_T$ $\square$

Dimostrazione. Dimostrazione esistenza t è A-bilanciata per definizione di T. Data $f : M \times N \to G$ A-bilanciata $\exists! \tilde{f} : \mathbb{Z}^{(M\times N)} \to G$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ per ogni $x \in M$ e $y \in N$.

Allora f è A-bilanciata implica che $\tilde{f}|_H = 0$ e per il teorema di omomorfismo per gruppi $\exists! f' : T \to G$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $\tilde{f} = f' \circ \pi$ (con $\pi : Z^{(M\times N)} \to T$ la proiezione).

Abbiamo che $t = \pi \circ j$, con $j : M \times N \to \mathbb{Z}^{(M\times N)}$ definita da $(x,y) \mapsto (x,y)$.

Finalmente si conclude che

$$f = \tilde{f} \circ j = f' \circ \pi \circ j = f' \circ t$$

e f' è unica (esercizio). $\square$

Nota (zione). Si indica T con $M \otimes_A N$ e $t(x,y)$ con $x \otimes y$.

Osservazione. $M \otimes_A N = \langle x \otimes y : x \in M, y \in N \rangle = \langle x \otimes y : x \in U, y \in V \rangle$ con $M = \langle U \rangle$ e $N = \langle V \rangle$. Uno potrebbe pensare che basti prendere U e V generatori come *modulo* di M e N ma questo in generale non basta e U, V devono essere generatori di M e N come gruppo.

Proposizione 267. *Sia $M \in \texttt{Mod}-A$ e $N \in A-\texttt{Mod}$. Allora la funzione*

$$\begin{aligned} M \otimes_A N &\to N \otimes_{A^{op}} M \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x \end{aligned}$$

è ben definita ed è isomorfismo di gruppi

Dimostrazione. Bisogna controllare che

$$\begin{aligned} f : M \times N &\longrightarrow N \otimes_{A^{op}} M \\ (x,y) &\longmapsto f((x,y)) = y \otimes x \end{aligned}$$

sia A-bilanciata. Lo è perché

$$f(xa,y) = y \otimes (xa) = (ay) \otimes x = f(x,ay)$$

E dunque $\exists! f' : M \otimes_A N \to N \otimes_{A^{op}} M$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $f(x \otimes y) = y \otimes x$

Immagino che sia per la solita ragione che f' è $\mathbb{Z}$-lineare. $\square$

Proposizione 268. *Sia $f : M \to M'$ in $\texttt{Mod}-A$ e $g : N \to N'$ in $A-\texttt{Mod}$. Allora $f \otimes g : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ data da $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$ è (ben definita) e isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $\varphi : M \times N \to M' \otimes_A N'$, $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$ è A-bilanciata (esercizio).

Allora $\exists! \varphi' : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $\varphi'(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ $\square$

Corollario 269. *Esistono i funtori (additivi)*

$$\begin{aligned} M \otimes_A - : A\text{-}Mod &\longrightarrow Ab \\ N &\longmapsto M \otimes_A N \\ (g : N \to N') &\longmapsto \mathrm{id}_M \otimes g \end{aligned} \quad e \quad \begin{aligned} - \otimes_A N : Mod\text{-}A &\longrightarrow Ab \\ M &\longmapsto M \otimes_A N \\ (f : M \to M') &\longmapsto f \otimes \mathrm{id}_N \end{aligned}$$

Proposizione 270. *Sia $M \in B\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}A$, $N \in A\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}C$. Allora $M \otimes_A N \in B\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}C$ con $b(x \otimes y) := (bx) \otimes y$ e $(x \otimes y)c := x \otimes (yc)$*

Dimostrazione. Fissato $b \in B$ devo vedere che la moltiplicazione a sinistra per b è ben definita. Infatti $\varphi_b : M \to M$ data da $x \mapsto bx$ è A-lineare e $\varphi_{b*} : M \otimes_A N \to M \otimes_A N$ definita da $x \otimes y \mapsto (bx) \otimes y$ è $\mathbb{Z}$-lineare.

Va visto che $\forall z \in M \otimes_A N$ e $\forall b, b' \in B$ allora $(bb')z = b(b'z)$. Poiché basta verificarlo su un generatore allora basta verificarlo quando $z = x \otimes y$ e lì è chiaro.

Analogamente per $z(cc') = (zc)c'$ e $(bz)c = b(zc)$. $\square$

Corollario 271. *Sia $M \in B\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}A$. Allora esistono i funtori (additivi)*

$$M \otimes_A - : A\text{−}\mathtt{Mod} \to B\text{−}\mathtt{Mod} \quad e \quad - \otimes_B M : \mathtt{Mod}\text{−}B \to \mathtt{Mod} - A$$

Dimostrazione. Per $M \otimes_A -$ resta da dimostrare che $\forall g : N \to N'$ in $A\text{−}\mathtt{Mod}$, $g_* : M \otimes_A N \to M \otimes_A N'$ è B-lineare, cioè $g_*(bz) = bg_*(z)$ per ogni $z \in M \otimes_A N$. Posso supporre $z = x \otimes y$ da cui

$$g_*(bz) = g_*(b(x \otimes y)) = \underbrace{g_*}_{\mathrm{id_M} \otimes g}((bx) \otimes y) = (bx) \otimes g(y) = b(x \otimes g(y)) = bg_*(z)$$

Per $- \otimes_B M$ il discorso è simile nelle categorie op. $\square$

Corollario 272. *Sia A commutativo, $M, N \in A\text{−}\mathtt{Mod}$. Allora $M \otimes_A N \in A\text{−}\mathtt{Mod}$*

Osservazione. Se A è commutativo, allora

$$\begin{aligned} t : M \times N &\to M \otimes_A N \\ (x, y) &\mapsto x \otimes y \end{aligned}$$

è A-bilineare (oltre che A-bilanciata ovviamente) perché $t(ax, y) = (ax) \otimes y = a(x \otimes y) = x \otimes (ay) = t(x, ay)$.

Inoltre, data $f : M \times N \to P$ A-bilineare (con $P \in A\text{−}\mathtt{Mod}$, allora f è A-bilanciata e quindi $\exists! f' : M \otimes_A N \to P$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $f = f' \circ t$ e f' è A-lineare perché $f'(a(x \otimes y)) = f'((ax) \otimes y) = f'(t(ax, y)) = f(ax, y) = af(x, y) = \cdots = af'(x \otimes y)$.

Una conseguenza è che su A commutativo si può definire $M \otimes_A N$ attaverso la proposizione universale per le funzioni A-bilineari $M \times N \to P$.

Osservazione. Sia $M \in B\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}A$ e $N \in A\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}C$. Allora $M \otimes_A N = B(U \otimes V)C$ se $M = BU$ e $N = VC$

Definizione 273: Funtore aggiunto

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ funtori. Si dice che F è *aggiunto sinistro* di G (o che G è *aggiunto destro* di F) e si indica $F \dashv G$ se $\forall X \in \mathcal{C}$ e $\forall Y \in \mathcal{D}$

$$\exists \varphi = \varphi_{X,Y} : \mathcal{D}(F(X), Y) \to \mathcal{C}(X, G(Y))$$

biunivoca e naturale in X e Y, cioè $\forall f : X' \to X$ in $\mathcal{C}$ e $\forall g : Y \to Y'$ in $\mathcal{D}$ il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(X'),Y) \arrow[d, "\varphi_{X',Y}"'] & \mathcal{D}(F(X),Y) \arrow[l, "F(f)^*"'] \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & \mathcal{D}(F(X),Y') \arrow[d, "\varphi_{X,Y'}"] \\
\mathcal{C}(X',G(Y)) & \mathcal{C}(X,G(Y)) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[r, "G(g)_*"] & \mathcal{C}(X,G(Y'))
\end{tikzcd}$$

ossia $\forall h \in \mathcal{D}(F(X),Y)$,

$$\varphi_{X,Y'}(g \circ h) = G(g) \circ \varphi_{X,Y}(h) \text{ e } \varphi_{X',Y}(h \circ F(f)) = \varphi_{X,Y}(h) \circ f$$

Osservazione. Una φ come sopra definisce una trasformazione naturale (isomorfismo) $\mathcal{D}(F(-),=) \Rightarrow \mathcal{C}(-,G(=))$ tra funtori $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathtt{Set}$ (o viceversa dato un tale isomorfismo naturale si ottiene un'aggiunzione tra F e G). Questo equivale a dire che, per ogni $X' \xrightarrow{f} X$ e $Y \xrightarrow{g} Y'$, il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(F(X),Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "g_* \circ F(f)^*"'] & \mathcal{C}(X,G(Y)) \arrow[d, "G(g)_* \circ f^*"] \\
\mathcal{D}(F(X'),Y') \arrow[r, "\varphi_{X',Y'}"'] & \mathcal{C}(X',G(Y'))
\end{tikzcd}$$

ossia che $\forall h \in \mathcal{D}(F(X),Y)$, si ha che $\varphi_{X',Y'} \circ g_* \circ F(f)^*(h) = G(g)_* \circ f^* \circ \varphi_{X,Y}(h)$, ossia $\varphi_{X',Y'}(g \circ h \circ F(f)) = G(g) \circ \varphi_{X,Y}(h) \circ f$

Osservazione. $F \dashv G \iff G^{op} \dashv F^{op}$

Esempio 274. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un'equivalenza e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ è un quasi-inverso di F, allora $F \dashv G$ e $G \dashv F$

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che $\forall X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}(F(X),Y) \underset{\sim}{\overset{G}{\to}} \mathcal{C}(G(F(X)),G(Y)) \underset{\sim}{\overset{\alpha_X^*}{\to}} \mathcal{C}(X,G(Y))$$

se $\alpha : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ isomorfismo ($\implies \alpha_X : X \to G \circ F(X)$ isomorfismo in $\mathcal{C}$) □

Esempio 275.

$$(\mathrm{Abel} : \mathtt{Grp} \to \mathtt{Ab}) \dashv (\mathtt{Ab} \overset{\text{inclusione}}{\to} \mathtt{Grp})$$

con $\mathrm{Abel}(G) = G/[G,G]$. Allora questo è vero perché $\forall G \in \mathtt{Grp}$ e $\forall H \in \mathrm{Ab}$

$$\mathtt{Ab}\left(\frac{G}{[G,G]}, H\right) \longleftrightarrow \mathtt{Grp}(G,H)$$

Esempio 276. Sia A un dominio d'integrità e $\mathcal{A} \subseteq A{-}\mathtt{Mod}$ la sottocategoria piena dei moduli senza torsione. Allora

$$(A{-}\mathtt{Mod} \to \mathcal{A}) \dashv \left(\mathcal{A} \overset{\text{inclusione}}{\to} A{-}\mathtt{Mod}\right)$$
$$M \mapsto \frac{M}{T(M)}$$

perché $\forall M,N \in A{-}\mathtt{Mod}$ con $T(N) = 0$ allora

$$\mathrm{Hom}_A(M/T(M),N) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N)$$

Proposizione 277. *Se $F \overset{\varphi}{\dashv} G$ e $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, allora $F' \dashv G \iff F' \cong F$*

Dimostrazione.

$\implies$ Cerco $\alpha_X \in \mathcal{D}(F(X), F'(X))$ e possiamo prendere

$$\alpha_X = \varphi^{-1}_{X,F'(X)}\left(\varphi'_{X,F'(X)}(1_{F'(X)})\right)$$

$\impliedby$ Sia $\alpha : F \to F'$ l'isomorfismo. Allora voglio definire $\varphi'_{X,Y} : \mathcal{D}(F'(X) \to Y) \to \mathcal{C}(X, G(Y))$ per ogni $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$ e possiamo definirlo come $\varphi'_{X,Y} = \varphi_{X,Y} \circ \alpha^*_X$

$\square$

Esempio 278. Dati $F : \mathtt{Set} \to A\text{−}\mathtt{Mod}$ e $G : A\text{−}\mathtt{Mod} \to \mathtt{Set}$ dati da $F : \Lambda \mapsto A^{(\Lambda)}$ e $G : M \mapsto M$ il funtore dimenticante, allora $F \dashv G$ poiché $\mathrm{Hom}_A(A^{(\Lambda)}, M) \leftrightarrow \mathtt{Set}(\Lambda, M)$

Osservazione. Dato $(F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$ dato da $\varphi_{X,Y} : \mathcal{D}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, G(Y))$, ottengo una trasformazione naturale

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F \text{ (\textbf{unità} dell'aggiunto) e } \varepsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \text{ (\textbf{counità} dell'aggiunto)}$$

definite da, $\forall X \in \mathcal{C}$, $\eta_X := \varphi_{X,F(X)}(1_{F(X)}) \in \mathcal{C}(X, G(F(X))) \cong \mathcal{D}(F(X), F(X)) \ni 1_{F(X)}$ e la ε $\forall Y \in \mathcal{D}$ data da $\varepsilon_Y := \varphi^{-1}_{G(Y),Y}(1_{G(Y)})$.

A questo punto, per ogni $h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$,

$$\varphi(h) = \varphi(h \circ 1_{F(X)}) \overset{\varphi \text{ nat.}}{=} G(h) \circ \varphi(1_{F(X)}) = G(h) \circ \eta_X$$

Quindi $\forall k \in C(X, G(Y))$, esiste unico $h \in \mathcal{D}(F(X), Y)$ tale che $k = \varphi(h) = G(h) \circ \eta_X$

Proposizione 279. *Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono preadditive e G è additiva, allora F è additivo e $\varphi_{X,Y}$ è $\mathbb{Z}$-lineare per ogni $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$. In altre parole φ dà trasformazioni naturali $\mathcal{D}(F(-), =) \to \mathcal{C}(-, G(=))$ come funtori $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathtt{Ab}$*

Dimostrazione. $\forall h, h' \in \mathcal{D}(F(X), Y)$, si ha che $\varphi_{X,Y}(h + h') = G(h + h') \circ \eta_X = G(h) \circ \eta_X + G(h') \circ \eta_X = \varphi(h) + \varphi(h')$. Inoltre $\forall f' : X \to X'$ in $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} &G(F(f + f')) \circ \eta_X \overset{\eta \text{ nat}}{=} \eta_{X'} \circ (f + f') = \eta_{X'} \circ f + \eta_{X'} \circ f' = \\ &= G(F(f)) \circ \eta_X + G(F(f')) \circ \eta_X = G(F(f) + F(f')) \circ \eta_X \\ &\implies F(f + f') = F(f) + F(f') \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 280

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorie qualunque e siano F, G funtori tali che

$$(F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$$

Allora F preserva i colimiti e G preserva i limiti.

idea della dimostrazione. Sia $I : \mathcal{L} \to \mathcal{D}$ un funtore (con $\mathcal{L}$ piccola) con $\lim I = (Z \in \mathcal{D}, \alpha : K_Z \to I)$. Allora per definizione di limite si ha che, $\forall Y \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \delta_{Y,Z} : \mathcal{D}(Y, Z) &\longrightarrow \mathtt{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_Y, I) \\ g &\longmapsto \delta_{Y,Z}(g) = \alpha \circ K_g \end{aligned}$$

è biunivoca. Vogliamo dimostrare che $\lim(G \circ I) = (G(Z), G \circ \alpha : K_{G(Z)} \to G \circ I)$, ossia che $\forall X \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \gamma_{X,Z} : \mathcal{C}(X, G(Z)) &\longrightarrow \mathtt{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{C})(K_X, G \circ I) \\ f &\longmapsto \gamma_{X,Z}(f) = g \circ \alpha \circ K_f \end{aligned}$$

è biunivoca. A tale scopo notiamo che abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X, G(Z)) \arrow[r, "\gamma_{X,Z}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_{X,Z}"'] & \mathtt{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{C})(K_X, G \circ I) \\ \mathcal{D}(F(X), Z) \arrow[r, leftrightarrow, "\delta_{F(X),Z}"'] & \mathtt{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_{F(X)}, I) \arrow[u, "\tilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

dove $\tilde{\varphi}$ è definita nel seguente modo per ogni $\beta \in \mathtt{Fun}(\mathcal{L}, \mathcal{D})(K_{F(X)}, I)$, ossia per ogni trasformazione naturale $\beta : K_{F(X)} \to I$

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \tilde{\varphi}(\beta)_L := \varphi_{X,I(L)}(\beta_L) : X \to G(I(L))$$

si verifica che $\tilde{\varphi}$ è ben definita ed è biunivoca, il diagramma commuta e dunque $\gamma_{X,Z}$ è biunivoca. $\square$

Corollario 281. *Ogni equivalenza di categorie preserva limiti e colimiti.*

Corollario 282. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore tra categorie additive. Allora:*

1. *Se F è aggiunto* sinistro/destro, *F è additivo (preserva infatti i* coprodotti/prodotti *finiti)*
2. *Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono abeliane e F è aggiunto* sinistro/destro, *allora F è esatto a* destra/sinistra

Esercizio 283

Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Dimostrare che Ker è esatto a sinistra e Coker è esatto a destra.
Suggerimento: (per Ker) considerare il funtore $\mathcal{A} \to \mathtt{Mor}(\mathcal{A})$ dato da $X \mapsto (X \mapsto 0)$

Teorema 284

Sia $M \in B\text{--}\mathtt{Mod}\text{--}A$. Allora

$$(M \otimes_A - : A\text{--}\mathtt{Mod} \to B\text{--}\mathtt{Mod}) \dashv (\mathrm{Hom}_B(M, -) : B\text{--}\mathtt{Mod} \to A\text{--}\mathtt{Mod})$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che, $\forall N \in A\text{--}\mathtt{Mod}$ e $\forall P \in B\text{--}\mathtt{Mod}$,
$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_B(M, P))$. Questo è vero perché

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, P) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & \mathrm{Bal}_A^B(M \times N, P) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_B(M, P)) \arrow[d, phantom, "\cap" description] \\ \mathrm{Hom}(M \otimes_A N, P) \arrow[r, "t^*", "\sim"'] & \mathrm{Bal}_A(M \times N, P) \arrow[r, leftrightarrow, "\substack{f \mapsto \tilde{f} \\ \tilde{g} \leftarrow g}"'] & \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}(M, P)) \end{tikzcd}$$

Dove:

- t^* è biunivoca perché sappiamo che $t : M \times N \to M \otimes_A N$ è A-bilanciata universale.

- le due funzioni tra Bal_A e Hom_A sono definite da $\tilde{g}(x,y) = g(y)(x)$ e $\tilde{f}(y)(x) = f(x,y)$. Sono chiaramente una l'inversa dell'altra, e l'unica verifica non ovvia da fare è che $\tilde{f}(ay) = a\tilde{f}(y)$ per ogni $a \in A$ e $\forall y \in N$, effettivamente abbiamo che, $\forall x \in M$,

$$\tilde{f}(ay)(x) = f(x)(ay) = f(xa,y) = \tilde{f}(y)(xa) = a\tilde{f}(y)(x)$$

  e analogamente se g è A-lineare, allora $\tilde{g}$ è A-bilanciata.

- $\mathrm{Bal}_A^B(M \times N, P) = \{f \in \mathrm{Bal}_A(M \times N, P) | f$ è B-lineare nel primo argomento$\}$

Le biezioni rimangono nei sottoinsiemi, perché conservano la B-linearità □

Corollario 285. *$M \otimes_A -$ è esatto a destra e preserva i coprodotti (e anche $\mathrm{Hom}_B(M,-)$ è esatto a sinistra e preserva i prodotti)*

Corollario 286. *Se A è commutativo e $M \in A-\mathtt{Mod}$, allora*

$$(M \otimes_A - : A-\mathtt{Mod} \to A-\mathtt{Mod}) \dashv (\mathrm{Hom}_A(M,-) : A-\mathtt{Mod} \to A-\mathtt{Mod})$$

Osservazione. A $\in A-\mathtt{Mod}-A$, dunque

$$(A \otimes_A - : A-\mathtt{Mod} \to A-\mathtt{Mod}) \dashv (\mathrm{Hom}_A(A,-) : A-\mathtt{Mod} \to A-\mathtt{Mod}) \cong \mathrm{id}_{A-\mathtt{Mod}}$$

da cui $A \otimes_A - \cong \mathrm{id}_{A-\mathtt{Mod}}$ e potevamo vederlo più direttamente in quanto $\forall M \in A-\mathtt{Mod}$ $A \otimes_A M \to M$ dato da $a \otimes x \mapsto ax$ è ben definito ed è un isomorfismo con inverso $M \to A \otimes_A M$ dato da $x \mapsto 1 \otimes x$.

Proposizione 287. *Sia $M \in \mathtt{Mod}-A$, $N \in A-\mathtt{Mod}-B$ e $P \in B-\mathtt{Mod}$. Allora*

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

con isomorfismo tale che $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$

Dimostrazione. Fissato $z \in P$, sia

$$\begin{aligned} f_z : M \times N &\longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P) \\ (x,y) &\longmapsto f_z((x,y)) = x \otimes (y \otimes z) \end{aligned}$$

allora f_z è A-bilanciata e dunque per la proprietà universale del prodotto tensoriale $\exists! f'_z : M \otimes_A N \to M \otimes_A (N \otimes_B P)$ $\mathbb{Z}$-lineare tale che $x \otimes y \mapsto x \otimes (y \otimes z)$. Sia ora

$$\begin{aligned} f : (M \otimes_A N) \times P &\longrightarrow M \otimes_A (N \otimes_B P) \\ (w,z) &\longmapsto f((w,z)) = f'_z(w) \end{aligned}$$

Allora f è B-bilanciata. Infatti se $w = x \otimes y$ (basta verificare in questo caso)

$$\begin{aligned} f(wb,z) &= f'_z(wb) = f'_z((x \otimes y)b) = f'_z(x \otimes yb) = x \otimes ((yb) \otimes z) = \\ &= x \otimes (y \otimes bz) = f'_{bz}(x \otimes y) = f'_{bz}(w) = \\ &= f(w,bz) \end{aligned}$$

Ora di nuovo per la proprietà universale del prodotto tensoriale possiamo dire che $\exists! f' : (M \otimes_A N) \otimes_B P \to M \otimes_A (N \otimes_B P)$ $\mathbb{Z}$-bilineare t.c. $f'((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ □

Corollario 288. *Se A è commutativo e $M, N, P \in A-\mathtt{Mod}$, allora $(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P)$*

Osservazione. Se $M \in B-\mathtt{Mod}-A$, allora in generale $M \otimes_A - : A-\mathtt{Mod} \to B-\mathtt{Mod}$ non preserva i monomorfismi.

Ad **esempio** sia A un dominio d'integrità non campo e sia $0 \neq a \in A \smallsetminus A^*$. Allora $f_a : A \to A$ dato da $b \mapsto ab$ è monomorfismo in $A-\mathtt{Mod}$, ma preso $M = A/(a)$ abbiamo che $\varphi_{a*} : M \otimes_A A \to M \otimes_A A$ dato da $x \otimes b \mapsto x \otimes (ab)$ non è iniettivo

3.1 Funtori indotti da omomorfismi di anelli

A questo punto, dato un omomorfismo di anelli $f : A \to B$, esso induce i funtori

- $f^* : B\text{−}\mathtt{Mod} \to A\text{−}\mathtt{Mod}$ (restrizione degli scalari)
- $f_! := B \otimes_A - : A\text{−}\mathtt{Mod} \to B\text{−}\mathtt{Mod}$ (estensione degli scalari, considerando $B \in B\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}A$)
- $f_* := \mathrm{Hom}_A(B, -) : A\text{−}\mathtt{Mod} \to B\text{−}\mathtt{Mod}$ (coestensione degli scalari, considerando $B \in A\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}B$)

Come notazione si può usare f_* invece di f^*, f^* invece di $f_!$ e $f^!$ invece di f_*

Proposizione 289. *Sia $f : A \to B$ come sopra, ossia $f \in \mathtt{Rng}(A, B)$, allora*

$$f_! \dashv f^* \dashv f_*$$

Dimostrazione. $\forall N \in A\text{−}\mathtt{Mod}$ e $\forall B \in B\text{−}\mathtt{Mod}$ devo dimostrare che

1. $\mathrm{Hom}_B(f_!(N), P) \cong \mathrm{Hom}_A(N, f^*(P))$
2. $\mathrm{Hom}_A(f^*(P), N) \cong \mathrm{Hom}_B(P, f_*(N))$

1. $\mathrm{Hom}_B(f_!(N), P) = \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_B(B, P))$ per il corollario 286 ma ora $\mathrm{Hom_B(B, P)} \cong P$ come A-modulo, dunque abbiamo che il precedente

$$\mathrm{Hom}_B(f_!(N), P) \cong \mathrm{Hom}_A(N, P) = \mathrm{Hom}_A(N, f^*(P))$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato che effettivamente $\mathrm{Hom}_A(N, P)$ è la restrizione degli scalari. □

2.

$$\mathrm{Hom}_A(f^*(P), N) \overset{P\ A\text{-modulo}}{=} \mathrm{Hom}_A(P, N) \cong \mathrm{Hom}_A(B \otimes_B P, N) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_B(P, \mathrm{Hom}_A(B, N)) = \mathrm{Hom}_B(P, f_*(N))$$

□

□

Corollario 290. *$f_!$ è esatto a destra e f_* è esatto a sinistra*

Osservazione. $f_!(A) \cong B$

Proposizione 291. *Sia $M \in A\text{−}\mathtt{Mod}$ f.g./f.p.. Allora $f_!(M) \in B\text{−}\mathtt{Mod}$ è f.g./f.p..*

Dimostrazione. Se la successione $(A^m \to) A^n \to M \to 0$ è esatta, allora anche

$$(\underbrace{f_!(A^m)}_{B^m} \to) \underbrace{f_!(A^n)}_{B^n} \to f_!(M) \to 0$$

è esatta, e dunque $f_!(M)$ è *f.g./f.p.*. □

Corollario 292. *Sia $I \subseteq A$ un ideale e $\pi : A \to A/I$ il quoziente. Allora $\forall M \in A\text{−}\mathtt{Mod}$, $\pi_!(M) \cong M/IM$ (in $A/I\text{−}\mathtt{Mod}$, dunque equivalentemente in $A\text{−}\mathtt{Mod}$)*

Dimostrazione. La successione $0 \to I \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} A/I \to 0$ è esatta in $A\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}A$. So che $\pi_!(M) = (A/I) \otimes_A M$. A questo punto possiamo usare che $- \otimes_A M : A\text{−}\mathtt{Mod}\text{−}A \to A\text{−}\mathtt{Mod}$ è esatto a destra, dunque.

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_A M \arrow[r] \arrow[drr, "a\otimes x \mapsto ax"'] & A \otimes_A M \arrow[r] & A/I \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \bullet \arrow[r] & 0 \\
& & M & &
\end{tikzcd}$$

Ma allora $A/I \otimes_A M \cong \mathrm{Coker}\left(\begin{smallmatrix} I\otimes_A M \to M \\ a\otimes x \mapsto ax \end{smallmatrix}\right) = M/IM$ $\square$

Definizione 293: Proiettività e iniettività

Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $X \in \mathcal{A}$. Allora X si dice *proiettivo* se $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathtt{Ab}$ è esatto (ossia equivalentemente se $\mathcal{A}(X, -)$ preserva gli epi, cioè $\forall f : Y \twoheadrightarrow Z$ epimorfismi di $\mathcal{A}$, allora $f_* : \mathcal{A}(X, Z) \to \mathcal{A}(X, Z)$ è suriettivo, ossia per ogni $g : X \to Z$ esiste $s : X \to Y$ tale che $f \circ s = g$)
X si dice *iniettivo* (in $\mathcal{A}$) se è proiettivo in $\mathcal{A}^{op}$, cioè se $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \to \mathtt{Ab}$ è esatto. (Equivalentemente $\mathcal{A}(-, X)$ preserva gli epimorfismi, ossia $\forall f : Y \rightarrowtail Z$ monomorfismo di $\mathcal{A}$, $f^* : \mathcal{A}(Z, X) \to \mathcal{A}(Y, X)$ è suriettivo).

Osservazione. Se $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ è esatta, Z è proiettivo oppure X è iniettivo, allora la successione si spezza. Ad esempio se Z è proiettivo, allora $g : Y \twoheadrightarrow Z$ e esiste $\mathrm{id}_Z : Z \to Z$, allora $\exists s : Z \to Y$ tale che $g \circ s = 1_Z$.

Quindi otteniamo che $\mathcal{A}$ è semisemplice se e solo se tutti gli oggetti di $\mathcal{A}$ sono proiettivi se e solo se tutti gli oggetti di $\mathcal{A}$ sono iniettivi.

Definizione 294: Moduli piatti

$M \in \mathtt{Mod}\text{−}A$ è *piatto* (su $\mathcal{A}$) se $M \otimes_A - : A\text{−}\mathtt{Mod} \to \mathtt{Ab}$ è esatto. Equivalentemente $M \otimes_A -$ preserva i monomorfismi, cioè se $f : N \rightarrowtail P$ iniettivo in $A\text{−}\mathtt{Mod}$, allora $f_* : M \otimes_A N \to M \otimes_A P$ è iniettivo in $\mathtt{Ab}$.

Proposizione 295.

1. *Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $X_\lambda \in \mathcal{A}$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Supponiamo inoltre che esista $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ (resp. $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$). Allora X è proiettivo (resp. iniettivo) se e solo se tutti gli X_λ sono proiettivi (resp. iniettivi).*

2. *Sia A un anello, $M_\lambda \in \mathtt{Mod} - A$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora*

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \text{ è piatto} \iff M_\lambda \text{ è piatto } \forall \lambda \in \Lambda$$

Dimostrazione.

1. Basta dimostrare il caso $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. In tale caso sia $f : Y \twoheadrightarrow Z$ un epimorfismo in $\mathcal{A}$. Allora X è proiettivo se e solo se $f_* : \mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{A}(X, Z)$ è suriettivo. Ma

$$\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{A}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y\right) \overset{\text{prop. univ.} \coprod}{\cong} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Y)$$

quindi ora poiché il seguente diagramma commuta,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X,Y) \arrow[rr, "f_*"] & & \mathcal{A}(X,Z) \\
\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Y) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[rr, "\prod_{\lambda\in\Lambda} f_*", "(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\mapsto(f\circ g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}"'] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}(X_\lambda, Z) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

La mappa f_* è suriettiva se e solo se $\prod_{\lambda\in\Lambda} f_*$ è suriettiva. Ma quest'ultima lo è se tutte le sue componenti lo sono, ossia se ogni X_λ è proiettivo.

2. M è piatto se e solo se $\forall f : N \to P$ iniettivo in $A-\mathtt{Mod}$, $f_* : M\otimes_A N \to M\otimes_A P$ è iniettivo in $\mathtt{Ab}$. Poiché $-\otimes_A N$ preserva i coprodotti, $M\otimes_A N \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \otimes N$. Allora

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_A N \arrow[rr, "f_*"] & & M\otimes_A P \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \otimes_A N \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[rr, "\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} f_*"] & & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \otimes_A P \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

ma ora f_* è iniettivo $\iff$ se $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} f_*$ è iniettivo $\iff$ ogni componente di $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} f_*$ è iniettiva $\iff$ ogni M_λ è piatto.

□

Corollario 296.

1. *Un A-modulo è proiettivo se e solo se è addendo diretto di un modulo libero.*
2. *Ogni modulo proiettivo è piatto.*

Dimostrazione. $A \in A-\mathtt{Mod}$ è proiettivo e piatto perché $\mathrm{Hom}_A(A,-) : A-\mathtt{Mod} \to \mathtt{Ab}$ è isomorfo al funtore dimenticante, e dunque è esatto. Analogamente $-\otimes_A A : \mathtt{Mod}-A \to \mathtt{Ab}$ è isomorfo al funtore dimenticante e dunque è esatto.

Sia $\mathcal{P}$ una collezione di oggetti (chiusa per isomorfismi) di $A-\mathtt{Mod}$ tale che $A \in \mathcal{P}$ e tali che se $M_\lambda \in A-\mathtt{Mod}$ (con $\lambda \in \Lambda$), si ha che

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \in \mathcal{P} \iff M_\lambda \in \mathcal{P} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Allora ogni M addendo diretto di un modulo libero è tale che $M \in \mathcal{P}$. Infatti in tal caso $\exists N \in A-\mathtt{Mod}$ tale che $M\oplus N$ è libero, dunque $M \oplus N \cong A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ, e dunque $A \in \mathcal{P} \implies A^{(\Lambda)} \in \mathcal{P} \implies M\oplus N \in \mathcal{P} \implies M \in \mathcal{P}$, quindi sia i proiettivi che i piatti contengono gli addendi diretti dei moduli liberi.

Per concludere basta dimostrare che se $M \in A-\mathtt{Mod}$ è proiettivo, allora è addendo diretto di un modulo libero. Questo è vero perché $\exists L \in A-\mathtt{Mod}$ libero, e $N \subseteq L$ sottomodulo tale che $M \cong L/M$, cioè esiste una successione esatta

$$0 \to N \to L \to M \to 0$$

ma poiché M è proiettivo la successione si spezza, e dunque $L \cong M \oplus N$ □

Esempio 297. Sia $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (semisemplice), allora $\langle \overline{2} \rangle$ è un A-modulo proiettivo non libero.

Esempio 298. Sia A un dominio d'integrità che non sia un campo, sia $0 \neq a \in A \smallsetminus A^*$. Allora $A/(a)$ come A-modulo non è piatto, infatti $A \to A; b \mapsto ab$ è omomorfismo iniettivo in $A-\mathtt{Mod}$ tale che

$$\begin{tikzcd}
A\otimes_A A/(a) \arrow[r, "\varphi_{a*}"] & A\otimes_A A/(a) \\
A/(a) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[r, "0"] & A/(a) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

dove chiaramente $0 : x \mapsto ax$ in $A/(a)$ non è iniettivo.

Proposizione 299. *$M \in A-$*`Mod` *è iniettivo se solo se per ogni $I \subseteq A$ ideale sinistro e $\forall g : I \to M$ A-lineare, $\exists x \in M$ tale che $g(a) = ax$ per ogni $a \in I$.*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Poiché M è iniettivo, $\begin{tikzcd} I \arrow[r, tail] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ M \end{tikzcd}$ commuta, ossia esiste $g' : A \to M$ A-lineare tale che $g'|_I = g$. Allora $x := g'(1)$ e abbiamo che $ax = g'(a) = g(a)$ per ogni $a \in I$.

$\Longleftarrow$ Dato $N_0 \subseteq N$ sottomodulo e $f_0 : N_0 \to M$ A-lineare, basta dimostrare che $\exists f : N \to M$ A-lineare tale che $f|_{N_0} = f_0$.

Sia ora

$$U := \{(N', f') | N_0 \subseteq N' \subseteq N \text{ sottomodulo e } f' : N' \to M \\ \text{è } A\text{-lineare ed è t.c. } f'|_{N_0} = f_0\}$$

Dove U è ordinato da $(N', f') \leq (N'', f'') \iff N' \subseteq N''$ e $f''|_{N'} = f'$. Inoltre $(N_0, f_0) \in U$ che dunque non è vuoto. Inoltre ogni catena (N_λ, f_λ) in U (per $\lambda \in \Lambda$) ha un maggiorante $N' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda, f'$ tale che $f'|_{N_\lambda} = f_\lambda$.

Allora ci sono le ipotesi del lemma di Zorn, per cui esiste un elemento massimale $(N_1, f_1) \in U$. Ora dobbiamo solo dimostrare che $N_1 = N$. Supponiamo per assurdo che $N_1 \subsetneq N$. Allora $\exists y \in N \setminus N_1$. Sia ora $I = \{a \in A : ay \in N_1\} \subseteq A$ ideale sinistro. $g : I \to M$ data da $a \mapsto f_1(ay)$ è A-lineare e per ipotesi $\exists x \in M$ tale che $f_1(ay) = g(a) = ax$ per ogni $a \in I$. Allora possiamo definire $N_2 := N_1 + Ay$ e $f_2 : N_2 \to M$ data da $y_1 + ay \mapsto f_1(y_1) + ax$ che è ben definita (lasciato per esercizio), A-lineare, e $(N_1, f_1) \lneqq (N_2, f_2)$, che è assurdo.

□

3.1.1 Moduli divisibili e senza torsione

Definizione 300: Modulo divisibile

Sia A un dominio d'integrità, $M \in A-$`Mod`. Allora M è *divisibile* se $\forall x \in M$ e $\forall 0 \neq a \in A$, allora $\exists y \in M$ tale che $x = ay$

Osservazione. Un modulo M è divisibile se e solo se $\forall 0 \neq a \in A$ la funzione $M \to M$ definita da $x \mapsto ax$ è suriettiva. Analogamente M è senza torsione se e solo se tale funzione è iniettiva.

Osservazione. Se M è divisibile e $M' \subseteq M$ sottomodulo, allora M/M' è ancora divisibile.

Esempio 301. Il campo dei quozienti $Q(A)$ è divisibile in $A-$`Mod`. Di conseguenza anche $Q(A)/A$ è divisibile.

Proposizione 302. *Sia A un dominio d'integrità e $M \in A-$*`Mod`*. Allora se M è iniettivo, allora M è divisibile. Inoltre se A è PID vale anche l'altra implicazione.*

Dimostrazione. M è iniettivo se e solo se $\forall I \subseteq A$ ideale e $\forall g : I \to M$ A-lineare, allora $\exists x \in M$ tale che $g(a) = ax$ per ogni $a \in I$.

M è d'altra parte divisibile se e solo se $\forall 0 \neq I \subseteq A$ ideale **principale** e $\forall g : I \to M$ A-lineare, allora $\exists x \in M$ tale che $g(a) = ax$ per ogni $a \in I$. Questa definizione equivalente vale perché in tal modo $I = (b)$, con $0 \neq b \in A$, allora $I \cong A$ in $A-\texttt{Mod}$, quindi $g : I \to M$ A-lineare è determinata da $g(b) = y \in M$. Allora chiedere l'esistenza dell'x di cui sopra equivale a dire che $\exists x \in M$ tale che $g(ab) = abx$ per ogni $ab \in I$, ossia $y = bx$.

La proposizione segue ovviamente dalla similarità delle due caratterizzazioni. $\square$

Definizione 303: Avere abbastanza iniettivi o proiettivi

Una categoria abeliana $\mathcal{A}$ *ha abbastanza iniettivi* se $\forall X \in \mathcal{A}$ $\exists X \rightarrowtail Y$ mono con Y iniettivo.
Dualmente $\mathcal{A}$ *ha abbastanza proiettivi* se $\mathcal{A}^{op}$ ha abbastanza iniettivi, cioè se $\forall X \in \mathcal{A}$ $\exists Y \twoheadrightarrow X$ epi (di $\mathcal{A}$) con Y proiettivo (in $\mathcal{A}$).

Esempio 304. $A-\texttt{Mod}$ ha abbastanza proiettivi perché ogni modulo è quoziente di un modulo libero, e i moduli liberi sono proiettivi.

Proposizione 305. *Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Se $A-\texttt{Mod}$ ha abbastanza iniettivi, allora $B-\texttt{Mod}$ ha abbastanza iniettivi.*

Dimostrazione. Sia $N \in B-\texttt{Mod}$. Per ipotesi $\exists i : f^*(N) \twoheadrightarrow M$ mono in $A-\texttt{Mod}$ con M iniettivo. Sappiamo che $f^* \dashv f_* = \mathrm{Hom}_A(B, -)$. Allora f_* è esatto a sinistra e dunque $f_*(i)$ è mono. Sia $\eta : \mathrm{id}_{B-\texttt{Mod}} \to f_* \circ f^*$ unità dell'aggiunzione. Allora $\eta_N : N \to f_*(f^*(N)) = \mathrm{Hom}_A(B, N)$. Viene lasciato in esercizio mostrare che effettivamente tale mappa è $y \mapsto (b \mapsto by)$.

Se $y \in \mathrm{Ker}(\eta_N)$ allora $\eta_N(y)(1) = 0$, quindi η_N è iniettiva, allora

$$N \overset{\eta_N}{\rightarrowtail} f_*(f^*(N)) \overset{f_*(i)}{\rightarrowtail} f_*(M)$$

dunque basta dimostrare che $f_*(M)$ è iniettivo, cioè
$\mathrm{Hom}_B(-, f_*(M)) \cong \mathrm{Hom}_A(f^*(-), M)$ è esatto. Questo è vero poiché sono esatti sia f^* che $\mathrm{Hom}_A(-, M)$. $\square$

Proposizione 306. $\texttt{Ab} \cong \mathbb{Z}-\texttt{Mod}$ *ha abbastanza iniettivi.*

Corollario 307. *Per ogni anello A, $A-\texttt{Mod}$ ha abbastanza iniettivi.*

Dimostrazione. Per la proposizione 302, G è iniettivo se e solo se è divisibile (perché $\mathbb{Z}$ è PID). So che $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \in \texttt{Ab}$ è divisibile (e allora anche $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}^\Lambda$ lo è per ogni Λ) allora per ogni $0 \neq a \in G$, voglio trovare $f_a : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è omomorfismo tale che $f_a(a) \neq 0$. A Questo punto si può definire

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{G \setminus \{0\}} \\ b &\longmapsto f(b) = (a \mapsto f_a(b)) \end{aligned}$$

omomorfismo iniettivo. Per trovare tale f_a considero $\langle a \rangle \hookrightarrow G$. Esiste $g_a : \langle a \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ omomorfismo tale che $g_a(a) \neq 0$. Allora poiché $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è iniettivo esiste $f_a : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tale che $f_a|_{\langle a \rangle} = g_a$ $\square$

Osservazione. $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \texttt{Ab}^{op} \to \texttt{Ab}$ è esatto (poiché $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è iniettivo) e fedele.

Infatti, dato $f : G \to G'$ in $\texttt{Ab}$ tale che $\widehat{f} = f^* : \widehat{G'} := \mathrm{Hom}(G', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = G$, allora se $\widehat{f} = 0$, segue che $f = 0$. Infatti, $\forall h \in \widehat{G'}$, $f^*(h) = h \circ f = 0$. Allora se $\exists a \in G : f(a) = a' \neq 0$ allora posso prendere una $h \in \widehat{G'}$ (la $f_{a'}$ della dimostrazione sopra) tale che $h(a') = h(f(a)) \neq 0$. Allora necessariamente $f = 0$.

Proposizione 308. *Le seguenti condizioni sono equivalenti* *i)* $M \in \texttt{Mod} - A$ *è piatto*

ii) $\widehat{M} \in A\texttt{-Mod}$ *è iniettivo*

iii) $\forall I \subseteq A$ *ideale sinistro,* $M \otimes_A I \to M$ *dato da* $x \otimes a \mapsto xa$ *è iniettivo.*

Dimostrazione. M è piatto se e solo se $\forall f : N \rightarrowtail P$ mono in $A\texttt{-Mod}$, $f_* : M \otimes_A N \to M \otimes_A P$ è iniettivo in $\texttt{Ab}$. Questo è equivalente a dire che $\widehat{f}_* : \widehat{M \otimes_A} P \to \widehat{M \otimes_A} N$ è suriettivo, dove $\widehat{M \otimes_A} P = \mathrm{Hom}(M \otimes_A P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_A(P, \widehat{M})$ e $\widehat{M \otimes_A} N \cong \mathrm{Hom}_A(N, \widehat{M})$. Ma questo è equivalente a dire che $\hat{m}$ è iniettivo in $A\texttt{-Mod}$.

Per *iii)* basta considerare $f : I \to A$ inclusione, con I ideale sinistro. $\square$