Appunti di Meccanica Razionale

Osea

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Ada Pulvirenti

Testo di riferimento: *Meccanica Analitica* di Fasano Marmi, più lungo e preciso. Mentre il testo *Meccanica Classica* di Goldstein è il testo classico dei fisici.

1 Spazio-Tempo-Moto

1.1 Moto

Studiare il moto in meccanica significa studiare la funzione $I = [0, T) \to \mathcal{E}$, con $t \mapsto P(t)$, dove $\mathcal{E}$ e I sono rispettivamente lo spazio della meccanica classica e un intervallo incluso nell'asse dei tempi, e entrambi sono spazi affini euclidei.

> Nella meccanica classica il **tempo** è **assoluto**, ovvero è indipendente dallo stato di moto dell'osservatore.

Definizione 1.1: Spazio affine

Uno spazio affine reale di dimensione n è un insieme $\mathbb{A}^n$ i cui elementi sono detti punti, dotato delle seguenti strutture:

1. Uno spazio vettoriale reale di dimensione n, V, detto spazio delle traslazioni (o dei vettori liberi)
2. Un'applicazione $\varphi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to V$; $P, Q \mapsto P - Q$ con le seguenti proprietà
    a. $\forall (P, v) \in A^n \times V$ esiste un unico punto Q tale che $Q - P = \mathbf{v}$
    b. $(P - Q) + (Q - R) = P - R$ per ogni $P, Q, R \in \mathbb{A}^n$

Definizione 1.2: Retta

Una **retta** in $\mathbb{A}^n$ passante per un dato punto P e con direzione $\mathbf{v}$ è il sottospazio affine $P + \langle \mathbf{v} \rangle$ ed è parametrizzata da $t \mapsto P + t\mathbf{v}$

Definizione 1.3: Vettore applicato

Una coppia ordinata $(P, \mathbf{u}) \in \mathbb{A}^n \times V$ si dice vettore applicato a P.

Definizione 1.4: Sistema di riferimento

Indicheremo con sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^n$ un insieme

$$\Sigma = \{O \in \mathbb{A}^n; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad ; \quad \{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots,n} \text{ base di } V$$

Osservazione. Allora ogni punto P rispetto a Σ è individuato da
$P - O = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$

Definizione 1.5: Spazio euclideo

Uno spazio affine reale di dimensione n, **dotato di prodotto scalare** su V si dice spazio **affine euclideo**

Dal prodotto scalare possiamo definire la distanza tra due punti di $\mathbb{A}^n$ come

$$d(P,Q) = \|P-Q\| = \sqrt{\langle P-Q, P-Q\rangle} = \sqrt{(P-Q)\cdot(P-Q)}$$

e la nozione di angolo tra due vettori $\mathbf{u},\mathbf{v} \neq 0$ come il valore $\alpha \in [0,\pi]$ tale che

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

(notare che per Schwarz risulta che effettivamente tale valore esiste)

Comunemente ci ricondurremo a utilizzare un sistema di riferimento **ortonormale**, ossia che ha come base una base ortonormale dello spazio. In particolare $\mathcal{E}$ è uno spazio affine reale euclideo di dimensione 3, e dunque useremo il sistema di riferimento

$$\Sigma = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad ; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \forall i,j = 1,2,3$$

Studiare il moto significherà studiare la relazione $t \mapsto P(t)$ funzione $[0,T) \to \mathcal{E}$. Introdotto Σ, possiamo scrivere allora che il problema è ricondotto a studiare la funzione $[0,T) \to \mathbb{R}^3$ tale che $t \mapsto (x_1,x_2,x_3)$ e tale che $P(t) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.

Definizione 1.6: Coordinate Curvilinee

Sia $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo un'applicazione $\mathbf{x} : Q \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_1(q_1,\ldots,q_n) \\ \vdots \\ x_n(q_1,\ldots,q_n) \end{pmatrix}$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x} \in C^1(Q)$
2. La matrice Jacobiana $J\mathbf{x}$ abbia rango massimo

Allora $\mathbf{x}$ rappresenta un sistema di coordinate su D che sono dette *coordinate curvilinee*

I vettori colonna della matrice $J\mathbf{x}$, ossia

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q_i} \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

sono una base per V che viene chiamata **base locale**.

La base locale è ortogonale se $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ per ogni $i \neq j$. Vogliamo ora operare Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}$ a partire da una base generica $\{\mathbf{u}_i\}$.

Osservazione. I vettori $\mathbf{u}_i$ della base locale sono in ogni punto P tangenti alla rispettiva linea coordinata $\mathbf{x}(q_i) = \mathbf{x}(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n)$, dove tutte le coordinate sono fissate tranne q_i. Allora $\mathbf{u}_i = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial q_i}$ è tangente alla linea coordinata $\mathbf{x}(q_i)$.

Esempio 1.1 (Coordinate polari nel piano)**.** Prendiamo $Q = (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (r, \theta)$. Allora

$$\mathbf{x}(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_1(r, \theta) = r\cos\theta \\ x_1(r, \theta) = r\sin\theta \end{pmatrix} \in C^1$$

E la base locale è

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

ed evidentemente $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ dunque la base locale è ortogonale. Per ottenere una base ortonormale dunque prendiamo

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \mathbf{u}_1 \quad ; \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{r}\mathbf{u}_2$$

Osserviamo che effettivamente $\mathbf{e}_r$ è tangente alla linea coordinata corrispondente (fisso θ) e $\mathbf{e}_\theta$ è tangente alla linea coordinata corrispondente (fisso r).

Esempio 1.2 (Coordinate sferiche)**.**

$$Q = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_1(r, \theta, \varphi) = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2(r, \theta, \varphi) = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3(r, \theta, \varphi) = r\cos\theta \end{pmatrix} : Q \to \mathcal{E} \setminus \{ \text{ asse } z \}$$

che è chiaramente di classe C^1 e ha Jacobiano di rango massimo. La base locale è

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

e dunque la base locale è ortogonale. Per ottenere una base ortonormale prendiamo, per ogni $\mathbf{u}_i$, il vettore $\mathbf{u}_i / \|\mathbf{u}_i\|$, ossia

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{u}_1 \quad ; \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{u}_2}{r\sin\theta} \quad ; \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\mathbf{u}_3}{r}$$