Appunti di Analisi Funzionale

Github Repository: 0xke/appunti/AnalFun

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Antonio Giovanni Segatti

0.1 Intro

0.1.1 Spazi Normati

Sia X uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$).

Definizione 0.1.1: norma

Si definisce **norma** una funzione

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che

i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

Definizione 0.1.2: Spazio Normato

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ tale che X sia uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su X.

Per una notazione più leggera, quando non è ambiguo sottintenderemo la norma, scrivendo "sia X uno spazio normato".

Proposizione 0.1.1 (Metrica indotta da $\|\cdot\|$)**.** *La norma $\|\cdot\|$ induce su X una metrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$$

Nota (zioni)*.* Alcune notazioni utili:

- $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} = x_0 + r\, B_1(0)$
- $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$

Definizione 0.1.3: Convergenza in norma - Convergenza forte

Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X e sia $x \in X$. Dico che x_n converge a x in norma o fortemente se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}\ :\ \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \overline{n}$$

Definizione 0.1.4: Successione di Cauchy

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}\ :\ \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \overline{n}$$

Osservazione. La norma $\|\cdot\|$ è una funzione continua.

Dimostrazione. Preso $x, y \in X$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e similmente si può con variabili scambiate. Ne consegue che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque la norma è Lipschitziana con costante 1 □

Definizione 0.1.5: Norma equivalente

Sia X uno spazio normato e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X. Dico che $\|\cdot\|_1$ è **topologicamente equivalente** a $\|\cdot\|_2$ se

$$\forall x \in X\ \forall r > 0\ \exists r_1, r_2 > 0 :$$
$$B_{r_1}(x, \|\cdot\|_1) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_2) \text{ e } B_{r_2}(x, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_1)$$

Proposizione 0.1.2. *Sia X normato. Allora due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Fissato $x_0 = 0$, preso r tale che

$$B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(0, \|\cdot\|_1)$$

preso ora $0 \neq x \in X$, sia $y := \frac{r_2}{2\|x\|_2}x$, così che $\|y\|_2 = \frac{r_2}{2}$, dunque $y \in B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2)$ e quindi per l'inclusione sopra

$$\|y\|_1 = \frac{r_2}{2}\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq r$$

che è la prima delle disuguaglianze richieste. Similmente si può trovare l'altra scambiando x e y, le due norme, e r_2 con r_1

$\Longleftarrow$ Preso $x_0 \in X$ e $r > 0$, sia $r_1 := r/\beta$. Allora, per ogni $x \in X$

$$\|x - x_0\|_1 \leq \frac{r}{\beta} \implies \|x - x_0\|_2 \leq \beta\|x - x_0\|_1 \leq r$$

che è la prima delle inclusioni richieste. Similmente si può trovare l'altra prendendo $r_2 := r/\alpha$ e scambiando le norme.

□

Osservazione. Se $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ è una norma equivalente alla prima, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$

Definizione 0.1.6: Dimensione

Sia X uno spazio vettoriale. Allora

$$\dim X = \begin{cases} 0 & X = \{0\} \\ n & n \in \mathbb{N} \text{ e } X \text{ ha una base di } n \text{ elementi} \\ +\infty & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ esistono } n \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{cases}$$

Teorema 0.1.3: Equivalenza delle norme

Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su X sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di X. Sia $x \in X$. Allora sia

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \qquad \text{con } x^i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Definiamo la norma (facile controllo lasciato come esercizio)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a^i|$$

Sia ora $\|\cdot\|$ un'altra norma su X, dimostriamo che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right\| \le \sum_{i=1}^{n} |x^i| \|e_i\| \le \underbrace{\left(\max_{1 \le i \le N} \|e_i\| \right)}_{\beta} \|x\|_1$$

Rimane da dimostrare che $\exists \alpha > 0$ tale che $\|x\|_1 \le \frac{1}{\alpha} \|x\|$. Assumiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}$ esista $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|$. Prendiamo ora (ovviamente $x_n \neq 0$ per la diseguaglianza stretta)

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \implies \|y_n\| < \frac{1}{n} \quad ; \quad \|y_n\|_1 = 1$$

Dalla seconda otteniamo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n^i| \le 1$. Per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione n_k tale che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $y_{n_k}^i \to y^i$.

Allora

$$\|y_{n_k} - y\| \le \beta \|y_{n_k} - y\|_1 = \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} (y_{n_k}^i - y^i) e_i \right\|_1 \le \beta^2 \sum_{i=1}^{n} |y_{n_k}^i - y^i| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

e poiché

$$1 = \|y_{n_k}\| \le \|y_{n_k} - y\| + \|y\| \overset{k \to \infty}{\implies} \|y\| \ge 1$$

che è in contraddizione con $\|y_n\| \to 0$ □

Definizione 0.1.7: Spazio di Banach

X spazio normato è detto **spazio di Banach** se le successioni di Cauchy convergono in X (ossia X è completo)

Teorema 0.1.4

Sia X uno spazio normato di dimensione finita. Allora X è di Banach.

Dimostrazione. Sia $N = \dim X$. Dimostro che X è completo secondo la norma $\|\cdot\|_1$.

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Vogliamo mostrare l'esistenza di $x \in X$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0$. Da definizione di successione di Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \overline{n},\ \|x_n - x_m\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|x_n^i - x_m^i\right| \leq \varepsilon$$

per cui ogni successione delle componenti $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$. Poiché $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ sono completi, allora $x_n^i \to x^i \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$. Concludiamo osservando che

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|x_n^i - x^i\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

Esempio 0.1.1. Sia $X = \mathbb{K}^N$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Su tale spazio possiamo avere le norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

X è chiaramente di Banach.

Esempio 0.1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $X = C^0(\Omega, \mathbb{K}^N)$ spazio delle funzioni continue $\Omega \to \mathbb{R}^N$. Facile verificare che X formi uno spazio vettoriale.

Preso ora Ω aperto e limitato.

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ unif. continue}\}$$

poiché f è uniformemente continua se e solo se si può estendere con coninuità al bordo. Si può prendere la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \quad \forall f \in C^0(\overline{\Omega})$$

che si può verificare essere effettivamente una norma. Inoltre con tale norma $C^0(\overline{\Omega})$ è uno spazio di Banach.

Le funzioni in $C^0(\overline{\Omega})$ sono limitate e definite su un compatto, dunque sono anche integrabili, e possiamo dunque definire le norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, d\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \forall p \in [1, \infty)$$

ma per nessun p la norma rende $C^0(\overline{\Omega})$ completo. Un esempio è

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \text{lineare} & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definita in $[0, 1]$. Tale funzione converge in L_p con la stessa norma a una funzione non continua.

Esempio 0.1.3. Legato all'esempio precedente, con la stessa norma gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$ sono spazi di Banach.

Presi ora gli spazi $l^p := L^p(\mathbb{N}, \#)$ gli spazi di successioni $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, abbiamo che anch'essi sono spazi di Banach con norma

$$\|x\|_p := \|x\|_{L^p(\mathbb{N},\#)} = \left(\int_{\mathbb{N}} |x(n)|^p \, d\# \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$$

Nota (*zione*). Per le successioni in l^p, indicheremo $x \in l^p$ intendendola come funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, per cui per indicare la componente n-esima di x indicheremo $x(n)$. In tal modo possiamo indicare le successioni di elementi in l^p come successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove ogni $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ è una funzione in l^p

0.1.2 Spazi di Hilbert

Definizione 0.1.8: Prodotto scalare

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora un prodotto scalare è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tale che

i. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$

ii. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

iii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y, z \in X$

Osservazione. Gli stessi assiomi valgono anche sul prodotto scalare su spazio reale. Semplicemente si ha che se $x \in \mathbb{R}$, allora $\overline{x} = x$ quindi si possono droppare tutti i coniugati e viene tutto più leggero.

Nota (antilinearità nella seconda componente).

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \overset{i.}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} \overset{iii.}{=} \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\beta} \overline{\langle z, x \rangle} \overset{i.}{=} \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

Lemma 0.1.5: Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia X uno spazio vettoriale munito del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

e inoltre la diseguaglianza è un'uguaglianza se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Sia $z := \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y$. Allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z, z \rangle &= \langle \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle \langle x, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \cancel{\langle x, y \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle} + \cancel{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle} = \\ &= \langle y, y \rangle \big(\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \big) \end{aligned}$$

quindi ora o $y = 0$ che farebbe valere la tesi, oppure si può semplificare $\langle y, y \rangle$ e rimane esattamente la tesi.

Infine si verifica l'uguaglianza quando $z = 0$, ossia quando x e y sono collineari. $\square$

Definizione 0.1.9: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale X con prodotto scalare viene detto spazio **prehilbertiano** (o spazio *con prodotto interno*)

Esempio 0.1.4. $\mathbb{K}^N$ con $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i}$ è prehilbertiano.

Esempio 0.1.5. $C^0([0,1], \mathbb{C})$ con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)\, dx$

Definizione 0.1.10: Norma indotta dal prodotto scalare

Su uno spazio prehilbertiano $X, \langle\cdot,\cdot\rangle$ definisco

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in X$$

Allora $\|\cdot\|$ è una norma su X

buona definizione. La radice è ben definita perché $\langle x, x\rangle$ è un reale non negativo. Inoltre si può mostrare che $\|\cdot\|$ è una norma con gli assiomi di prodotto scalare e la diseguaglianza di Schwarz per la diseguaglianza triangolare. $\square$

Proposizione 0.1.6. *Sia X uno spazio prehilbertiano, allora il prodotto scalare è una funzione continua $X \times X \to \mathbb{K}$.*

Dimostrazione. prese $x_n \to x$ e $y_n \to y$,

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \leq \\
&\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$\square$

Definizione 0.1.11: ortogonalità

$x, y \in X$ si dicono ortogonali se $\langle x, y\rangle = 0$

Proposizione 0.1.7 (Identità di polarizzazione)**.** *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

Dimostrazione. Non sono difficili, basta scrivere per esteso $\|x+y\|^2$ e $\|x-y\|^2$ (e $\|x+iy\|^2$ e $\|x-iy\|^2$ nel caso complesso) e poi fare i contazzi. $\square$

Proposizione 0.1.8. *teorema di Pitagora Se $\langle x, y\rangle = 0$ allora $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$*

Dimostrazione. ovvio $\square$

Proposizione 0.1.9. *Identità del parallelogramma Per ogni $x, y \in X$, allora*

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

Teorema 0.1.10

Jordan - Von Neumann Sia X uno spazio normato, allora la norma è indotta da un prodotto scalare se vale l'*identità del parallelogramma*

Dimostrazione per $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Definiamo il prodotto scalare con l'identità di polarizzazione, dunque

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)$$

infatti se effettivamente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare allora quest'uguaglianza varrebbe, dunque ha senso iniziare prendendola come definizione. Verifichiamo ora che è un prodotto scalare.

i. Evidente per definizione

ii. Evidente dalla definizione, perché viene letteralmente $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$

iii. Proseguiamo con la dimostrazione, dividendo in $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$ e $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle &\overset{(def)}{=} \frac{1}{4}\big(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2\big)=\\
&=\frac{1}{4}\big(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2\big)-\frac{1}{4}\big(\|x-z\|^2+\|y-z\|^2\big)=\\
&\overset{prll.}{=}\frac{1}{8}\big(\cancel{\|x-y\|^2}+\|x+y+2z\|^2\big)-\frac{1}{8}\big(\cancel{\|x-y\|^2}+\|x+y-2z\|^2\big)=\\
&=\frac{2}{4}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)=\\
&\overset{(def)}{=}2\left\langle\frac{x+y}{2},z\right\rangle
\end{aligned}$$

Da quest'ultima, scelto $y=0$ e notando dalla definizione che $\langle 0,z\rangle=0$, abbiamo che

$$\langle x,z\rangle=2\left\langle\frac{x}{2},z\right\rangle \implies \langle x+y,z\rangle=2\left\langle\frac{x+y}{2},z\right\rangle$$

che conclude la prima parte della dimostrazione della linearità.

Procediamo definendo

$$\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}:\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle,\ \forall x,y\in X\}$$

allora chiaramente $\{0,1,-1\}\subseteq\Lambda$. Notiamo che se $\alpha,\beta\in\Lambda$ allora $\alpha+\beta\in\Lambda$:

$$\langle(\alpha+\beta)x,y\rangle=\langle\alpha x+\beta x,y\rangle=\langle\alpha x,y\rangle+\langle\beta x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,y\rangle=(\alpha+\beta)\langle x,y\rangle$$

Dunque necessariamente $\mathbb{Z}\subseteq\Lambda$. Prendiamo ora $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ con $\beta\neq 0$, allora

$$\alpha\langle x,y\rangle=\langle\alpha x,y\rangle=\left\langle\alpha\frac{\beta}{\beta}x,y\right\rangle=\beta\left\langle\frac{\alpha}{\beta}x,y\right\rangle$$

da cui dividendo ambo i termini per β otteniamo che anche $\mathbb{Q}\subseteq\Lambda$. Concludiamo che, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è continuo (per come è definito, chiaramente non possiamo usare la prop, essendo che non abbiamo ancora dimostrato che $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare), allora $\mathbb{R}\subseteq\Lambda\subseteq$. □

Dimostrazione per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Similmente a prima, definiamo

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) + i\frac{1}{4}\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big)$$

Dunque $Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) =: (x, y)$. Allora

$$\langle x, y\rangle = (x, y) + i(x, iy)$$

allora per la parte reale del teorema (x, y) verifica $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ e $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque

$$\langle x + y, z\rangle = (x, z) + (y, z) + i(x, iz)i(y, iz) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

Rimane da verificare l'omogeneità per $\lambda \in \mathbb{C}$ e che $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Iniziamo dalla seconda:

$$\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{(y, x) + i(y, ix)} = (y, x) - i(y, ix)$$

inolre

$$\begin{aligned}(y, ix) &= \frac{1}{4}\big(\|y + ix\|^2 - \|y - ix\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|i(-iy + x)\|^2 + \|i(-iy - x)\|^2\big) = \\ &= \frac{1}{4}\big(\|x - iy\|^2 + \|x + iy\|^2\big) = -(x, iy)\end{aligned}$$

e quindi la precedente è

$$\overline{\langle y, x\rangle} = (x, y) + i(x, iy) = \langle x, y\rangle$$

Sia ora $\alpha + i\beta = \lambda \in \mathbb{C}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\langle(\alpha + i\beta)x, y\rangle = \langle\alpha x + i\beta x, y\rangle = \langle\alpha x, y\rangle + i\langle\beta x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle ix, y\rangle$$

ma abbiamo che, riprendendo la definizione

$$\begin{aligned}\langle ix, y\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2\big) + i\frac{1}{4}\big(\|ix + iy\|^2 - \|ix - iy\|^2\big) \\ &= -\frac{1}{4}\big(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\big) + i(x, y) = i(x, y) - (x, iy) = \\ &= i\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

e quindi concludiamo

$$\langle(\alpha + i\beta)x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle ix, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + i\beta\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

□

Osservazione. presa su $C^0([0, 1])$ la norma $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f|^2\,dt$, allora $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ questo è uno spazio prehilbertiano.

Però con la norma $\|f\|_\infty$ non è uno spazio prehilbertiano. Infatti non vale l'identità del parallelogramma: prese $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = t$ abbiamo

$$\|f - g\|_\infty^2 + \|f + g\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 2(1 + 1) = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$$

Corollario 0.1.10.1. *Sia X uno spazio normato e sia $M \subseteq X$ un sottospazio di dimensione finita. Allora M è chiuso.*

Dimostrazione. $(M, \|\cdot\|)$ è esso stesso uno spazio normato di dimensione finita. M è dunque completo quindi chiuso. □

Esempio 0.1.6. La precedente non vale se $\dim X = +\infty$. Presi infatti $M = C^0(\Omega)$ e $X = L^2(\Omega)$, abbiamo che $\overline{M}^{L^2} = L^2$

0.1.3 Operatori lineari e continui

Siano X e Y spazi normati. Sia $T : X \to Y$. Allora T è lineare se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in X$. Per ricordare la linearità, invece di scrivere $T(x)$ scriveremo Tx.

Nota. zione Nelle bolle, indicando a pedice lo spazio invece che il raggio, si sottintende il raggio 1 e si esplicita la norma da utilizzare:

$$B_X(0) := \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$$

Teorema 0.1.11

Siano X, Y spazi normati. Sia $T : X \to Y$. Allora le seguenti proposizioni sono tutte equivalenti:

(i) T è continuo

(ii) T è continuo in 0

(iii) Ogni limitato di X ha immagine limitata in Y

(iv) $\exists \alpha > 0 : \overline{T(B_X)} \subseteq \alpha B_Y(0)$

(v) $\displaystyle\sup_{X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_y}{\|x\|_X} < +\infty$

(vi) $\displaystyle\sup_{x \in B_X(0)} \|Tx\|_Y < +\infty$

(vii) $\displaystyle\sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y < +\infty$

Osservazione. Se X e Y hanno dimensione finita, T è sempre continuo.

Esempio 0.1.7. Preso

$$\begin{aligned} T : C^0([0,1])_{\|\cdot\|_1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T(f) = f(0) \end{aligned}$$

è chiaramente lineare. Tuttavia la controimmagine di $\{0\}$ tramite T contiene ad esempio la successione $f_n(x) = \max(nx, 1)$ che ha come limite in $C^0_{\|\cdot\|_1}$ la funzione costante 1, per cui $T^{-1}\{0\}$ non è chiuso.

Definizione 0.1.12: Operatore limitato

Un operatore che soddisfa la condizione (iii) viene detto **limitato**

Dimostrazione.

$(i) \implies (ii)$ ovvio

$(ii) \implies (i)$ ovvio, poiché $T(x - x_0) = T(x) - T(x_0)$

$(ii) \implies (iv)$ Abbiamo che per ogni intorno U_Y di 0_Y esiste un intorno U_X di 0_X tale che $T(U_X) \subseteq U_Y$. Allora scelto $U_Y = \overline{B_Y(0)}$ abbiamo

$$\exists \delta > 0 : T(\delta \overline{B_X(0)}) = \delta T(\overline{B_X(0)}) \subseteq B_Y(0)$$

per cui basta prendere $\alpha = \frac{1}{\delta}$

$(iv) \implies (ii)$ Preso $\varepsilon > 0$ bisogna trovare $\delta > 0$ tale che

$$T(\delta \overline{B_x(0)}) \subseteq \varepsilon B_Y(0)$$

e similmente a prima per linearità basta prendere $\delta = \varepsilon/\alpha$

$(iv) \implies (iii)$ Sia $C \subseteq R\overline{B_X(0)}$ un limitato. Allora

$$T(C) \subseteq T(R\overline{B_X(0)}) = RT(\overline{B_x(0)}) \subseteq R\alpha\overline{B_Y(0)}$$

$(iii) \implies (iv)$ $\overline{B_X}(0)$ è limitato in X, dunque $T(\overline{B_x(0)})$ è limitato in Y, e dunque è contenuto in una palla $\alpha B_Y(0)$ per un $\alpha > 0$

$(iv) \iff (vi)$ $\|x\|_X \leq 1$ se e solo se $x \in \overline{B_X(0)}$, il resto vien da sè

$(v) \iff (vi) \iff (vii)$ tutte ovvie, come anche è ovvio che il valore finito nel caso sia lo stesso, e viene denotato $\|T\|$ e in pratica tutte e tre dicono che

$$\exists \|T\| > 0 : \|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$$

per ogni $x \in X$

□

0.2 Hahn - Banach

Teorema 0.2.1: Hahn - Banach (spazi normati)

Sia X uno spazio normato, X_0 un sottospazio. Sia $g : X_0 \to X$ lineare e continua, cioè $g \in X_0'$. Allora $\exists f : X \to \mathbb{K}$ lineare e continua, ossia $f \in X'$ tale che

1) f prolunga g

2) $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X_0'}$

Dimostrazione. sia $p(x) = \|g\|_{X_0'}\|x\|$. Allora $p : X \to \mathbb{R}$ ed è sublineare e omogenea, dunque è una seminorma. □

Esempio 0.2.1. Sia $X = \mathbb{R}^2$, allora un generico operatore lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è del tipo $x \mapsto a \cdot x$, con $a \in \mathbb{R}^2$.

Allora $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|fx|}{\|x\|_p}$ e abbiamo che $|fx| \leq \|a\|_q \|x\|_p$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Dunque concludiamo che $\|f\| \leq \|a\|_q$. In realtà questa è un'uguaglianza. Basta infatti prendere

$$\overline{x} = \left(|a_1|^{q-2}a_1, |a_2|^{q-2}a_2\right) \implies \|x\|_p^p = |a_1|^{(q-1)p} + |a_2|^{(q-1)p} = |a_1|^q + |a_2|^q = \|a\|_q^q$$

dove si è usato che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies (q-1)p = q$. Ma inoltre abbiamo che

$$|f\overline{x}| = |a \cdot \overline{x}| = \|a\|_q^q$$

concludiamo che

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \geq \frac{|fx|}{\|\overline{x}\|_p} = \|a\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|a\|_q$$

Esercizio 0.2.1

Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio di X spazio normato. Mostrare che $\overline{Y}$ è un sottospazio di X.

Lemma 0.2.2

Sia X uno spazio normato e $Y \subseteq X$ un sottospazio tale che $\overline{Y} \subset X$. Allora $\exists f : X \to \mathbb{K}$ con f lineare continua, ossia $f \in X'$ tale che:

1. $f \neq 0$
2. $\langle f, x \rangle = 0$ per ogni $x \in Y$

Osservazione. Sia X uno spazio normato, $Y \subseteq X$ un sottospazio si supponga che se un funzionale $f \in X'$ tale che $\langle f, x \rangle = 0$ per ogni $x \in Y$ allora necessariamente $f = 0$. Segue che $\overline{Y} = X$

Dimostrazione. $\exists x_0 \in X - \overline{Y}$, allora $X_0 = Y \oplus \mathbb{K}x_0$. A questo punto prendiamo il funzionale $g : X_0 \to \mathbb{K}$ definito da $g(y + \alpha x_0) = \alpha$. Mostriamo ora che $g \in X_0'$ e che è vero che $g|_Y = 0$. La seconda è banalmente vera perché se $y \in Y$ allora $g(y) = g(y + 0 * x_0) = 0$. Mostriamo che g è lineare e continuo. Supponiamo $x_1 = y_1 + \alpha_1 x_0$ e $x_2 = y_2 + \alpha_2 x_0$. Allora

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + \mu x_2) &= g(\lambda y_1 + \lambda \alpha_1 x_0 + \mu y_2 + \mu \alpha_2 x_0) = \\ &= g((\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2) x_0) = \lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 = \\ &= \lambda g(x_1) + \mu g(x_2) \end{aligned}$$

Per la continuità, prendiamo $\alpha \neq 0$ e abbiamo che

$$\|x\| = \|y + \alpha x_0\| = \left\| (-\alpha) \left(\frac{y}{-\alpha} - x_0 \right) \right\| = |\alpha| \left\| \frac{y}{-\alpha} - x_0 \right\|$$

necessariamente $\frac{y}{-\alpha} \in Y$ e dunque possiamo proseguire la precedente equazione con

$$\|x\| = |\alpha| \left\| \frac{y}{-\alpha} - x_0 \right\| \geq |\alpha| \, d(x_0, Y) = |g(x)| \, d(x_0, Y)$$

per cui concludiamo che g è continua con norma $\|g\| \leq 1/d(x_0, Y)$. Questa disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza, infatti poiché $d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$ abbiamo che

$$\exists y_n \in Y : \|y_n - x_0\| < \frac{n+1}{n} d(x_0, Y)$$

e ora abbiamo che

$$\frac{n}{n+1} \frac{\|y_n - x_0\|}{d(x_0, Y)} < 1 = |g(x_0 - y_n)| \leq \|g\| \|x_0 - y_n\|$$

da cui per $n \to \infty$ otteniamo $\|g\|_{X_0'} \geq 1/d(x_0, Y)$.

Ora estendo g a tutto X con Hahn-Banach ottenendo $f \in X'$ tale che $f|_{X_0} = g$ e dunque $f|_Y = 0$. Inoltre l'estensione poiché Hahn-Banach conserva la norma, abbiamo che

$$\|f\|_{X'} = \frac{1}{d(x_0, Y)}$$

□

Corollario 0.2.2.1. *Sia X uno spazio normato reale. Allora per ogni $x_0 \in X$ esiste una $f \in X'$ tale che $\langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ e $\|f\|_{X'} = \|x_0\|$*

Dimostrazione. Sia $X_0 = \mathbb{R}x_0$. Sia $x = tx_0 \in X_0$, allora definiamo $g(x) = g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Verifichiamo che la norma sia corretta: $|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2$ dunque $\|g\|_{X_0'} = \|x_0\|$.

Per Hahn-Banach possiamo estendere g a tutto X' ottenendo $f : X \to \mathbb{R}$ tale che $\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle$ per ogni $x \in X_0$ e $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X_0'} = \|x_0\|$. In particolare anche $\langle f, x_0\rangle = \langle g, x_0\rangle = \|x_0\|^2$ □

Il corollario precedente motiva la seguente definizione:

Definizione 0.2.1: Mappa di dualità

Chiamiamo la **mappa di dualità** la seguente funzione

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : X &\longrightarrow 2^{X'} \\ x &\longmapsto \mathcal{F}(x) = \{f \in X' : \langle f, x\rangle = \|x\|^2 \ ; \ \|f\|_{X'} = \|x\|\}\end{aligned}$$

che associa a ogni elemento di X l'insieme degli elementi "a lui duali".

Esercizio 0.2.2

Consideriamo

$$\mathcal{F}'(x) = \{f \in X' : \langle f, x\rangle = \|x\|^2 \ ; \ \|f\|_{X'} \le \|x\|\}'$$

Mostrare che $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$

Fissato $x \in X$, è evidente che $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}'(x)$. Supponiamo ora che $f \in \mathcal{F}'(x)$, ossia $\|f\|_{X'} \le \|x\|$. Da $|\langle f, x\rangle| = \|x\|\|x\|$ concludiamo che $\|f\|_{X'} = \|x\|$ e dunque $f \in \mathcal{F}(x)$

Esercizio 0.2.3

Consideriamo

$$\mathcal{I}(x) = \left\{ f \in X' : \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \ge \langle f, y - x\rangle \ \forall y \in X \right\}$$

Mostrare che $\mathcal{I} = \mathcal{F}$

Fissiamo $x \in X$

- $\subseteq$ Sia $f \in \mathcal{I}(x)$. Iniziamo mostrando che $\langle f, x\rangle = \|x\|^2$. Scegliamo $y = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbb{R}$. Segue che

  $$\frac{1}{2}\alpha^2\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \ge \langle f, x\rangle(\alpha - 1)$$

  con questa uguaglianza, dividendo i casi per $\alpha > 0$ e $\alpha < 1$, prendiamo il limite di $\alpha \to 1^+$ e $\alpha \to 1^-$, ottenendo le due disuguaglianza $\langle f, x\rangle \le \|x\|^2$ e $\langle f, x\rangle \ge \|x\|^2$.

  Rimane da controllare che $\|f\|_{X'} \le \|x\|$. Scegliamo $y \in X$ tale che $\|y\| = \|x\|$. Otteniamo che

  $$\langle f, y\rangle \le \langle f, x\rangle = \|x\|^2 \implies |\langle f, y\rangle| \le \|y\|\|x\| \implies \|f\|_{X'} \le \|x\|$$

$\supseteq$ Sia $f \in \mathcal{F}(x)$ e $y \in X$. Allora

$$\begin{aligned}\langle f, y - x\rangle = \langle f, y\rangle - \langle f, x\rangle \leq \|f\|\|y\| - \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|x\|^2 \\ \leq \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2\end{aligned}$$

da cui $f \in \mathcal{I}(x)$

Osservazione. Il precedente esercizio suggerisce che $f \in \mathcal{F}(x)$ svolge in un certo senso il ruolo della derivata di $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ valutata in x. Vedremo più avanti il significato di questa analogia.

Esercizio 0.2.4

Mostrare che

$$c_0 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x(n) = 0\}$$
$$c = \{x \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x(n) \text{ esiste }\}$$

sono sottospazi chiusi di ℓ^∞.

Le dimostrazioni contose esplicite sono lasciate davvero come esercizio, riporto dimostrazioni più sintetiche.
Utilizzando la f definita come il limite come poco più avanti (dopo il teorema), abbiamo che c_0 è chiuso in quanto $c_0 = f^{-1}(\{0\})$ controimmagine continua di chiuso.

Teorema 0.2.3

Sia $p \in [1, +\infty)$, sia $f \in (\ell^p)'$. Sia $q \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$$\exists! y \in \ell^q : \langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$$

e inoltre $\|f\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_{\ell^q}$

Notare che il precedente teorema non vale per $p = \infty$. Costruiamo infatti un funzionale lineare e continuo su ℓ^∞ che non si rappresenta con $y \in \ell^1$. Consideriamo infatti $g : c \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $\langle g, x\rangle = \lim_{n\to\infty} x(n)$. Allora g è lineare ed è continuo perché $|\langle g, x\rangle| = |\lim_{n\to\infty} x(n)| \leq \|x\|_\infty$ per cui $g \in c'$ e in particolare $\|g\|_{c'} = 1$ ad esempio prendendo la successione $x \in c$ definita da $x(n) = 1$.

Estendo ora g a tutto ℓ^∞ con Hahn-Banach, ottenendo $f : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ lineare continuo con $\|f\|_{(\ell^\infty)'} = 1$.

Supponiamo ora per assurdo che esista $y \in \ell^1$ tale che

$$\langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n) \quad \forall x \in \ell^\infty$$

e consideriamo ora gli x_k definiti come[1] $x_k = (n == k)$. Allora abbiamo $\langle f, x_k\rangle = \lim_{n\to\infty} x_k(n) = 0$ ma per ogni k allora avremmo che
$0 = \langle f, x_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x_k(n) = y(k)$ per cui $y = 0$ che è impossibile perché sappiamo che f ha norma 1.

[1] concedetemi questa notazione da informatico

Esercizio 0.2.5

Mostrare che

$$c_{00} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ definitivamente nulle}\}$$

è denso in ℓ^p, per ogni $p \in [1, \infty)$

Esercizio 0.2.6

Mostrare che $T : \ell^2 \to \ell^2$ dato da

$$(Tx)(n) = \frac{x(n)}{n}$$

è ben definito, lineare, continuo e $T(\ell^2)$ non è chiuso in ℓ^2 ed è denso in ℓ^2