Appunti di Analisi Funzionale

Github Repository: `0xke/appunti/AnalFun`

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Antonio Edoardo Segatti

0.1 Intro

0.1.1 Spazi Normati

Sia X uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$).

Definizione 0.1.1: norma

Si definisce **norma** una funzione

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che

i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

Definizione 0.1.2: Spazio Normato

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ tale che X sia uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su X.

Per una notazione più leggera, quando non è ambiguo sottintenderemo la norma, scrivendo "sia X uno spazio normato".

Proposizione 0.1.1 (Metrica indotta da $\|\cdot\|$)**.** *La norma $\|\cdot\|$ induce su X una metrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$$

Nota (zioni)*.* Alcune notazioni utili:

- $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} = x_0 + r\, B_1(0)$
- $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$

Definizione 0.1.3: Convergenza in norma - Convergenza forte

Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X e sia $x \in X$. Dico che x_n converge a x in norma o fortemente se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n} \,:\, \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \overline{n}$$

Definizione 0.1.4: Successione di Cauchy

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} \ : \ \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \overline{n}$$

Osservazione. La norma $\|\cdot\|$ è una funzione continua.

Dimostrazione. Preso $x, y \in X$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e similmente si può con variabili scambiate. Ne consegue che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque la norma è Lipschitziana con costante 1 $\square$

Definizione 0.1.5: Norma equivalente

Sia X uno spazio normato e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X. Dico che $\|\cdot\|_1$ è **topologicamente equivalente** a $\|\cdot\|_2$ se

$$\forall x \in X \ \forall r > 0 \ \exists r_1, r_2 > 0 :$$
$$B_{r_1}(x, \|\cdot\|_1) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_2) \text{ e } B_{r_2}(x, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_1)$$

Proposizione 0.1.2. *Sia X normato. Allora due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Fissato $x_0 = 0$, preso r tale che

$$B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(0, \|\cdot\|_1)$$

preso ora $0 \neq x \in X$, sia $y := \frac{r_2}{2\|x\|_2}x$, così che $\|y\|_2 = \frac{r_2}{2}$, dunque $y \in B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2)$ e quindi per l'inclusione sopra

$$\|y\|_1 = \frac{r_2}{2}\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq r$$

che è la prima delle disuguaglianze richieste. Similmente si può trovare l'altra scambiando x e y, le due norme, e r_2 con r_1

$\Longleftarrow$ Preso $x_0 \in X$ e $r > 0$, sia $r_1 := r/\beta$. Allora, per ogni $x \in X$

$$\|x - x_0\|_1 \leq \frac{r}{\beta} \implies \|x - x_0\|_2 \leq \beta\|x - x_0\|_1 \leq r$$

che è la prima delle inclusioni richieste. Similmente si può trovare l'altra prendendo $r_2 := r/\alpha$ e scambiando le norme.

$\square$

Osservazione. Se $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ è una norma equivalente alla prima, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$

Definizione 0.1.6: Dimensione

Sia X uno spazio vettoriale. Allora

$$\dim X = \begin{cases} 0 & X = \{0\} \\ n & n \in \mathbb{N} \text{ e } X \text{ ha una base di } n \text{ elementi} \\ +\infty & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ esistono } n \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{cases}$$

Teorema 0.1.3: Equivalenza delle norme

Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su X sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di X. Sia $x \in X$. Allora sia

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad \text{con } x^i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Definiamo la norma (facile controllo lasciato come esercizio)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a^i|$$

Sia ora $\|\cdot\|$ un'altra norma su X, dimostriamo che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x^i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq N} \|e_i\| \right)}_{\beta} \|x\|_1$$

Rimane da dimostrare che $\exists \alpha > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$. Assumiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}$ esista $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n \|x_n\|$. Prendiamo ora (ovviamente $x_n \neq 0$ per la diseguaglianza stretta)

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \implies \|y_n\| < \frac{1}{n} \quad ; \quad \|y_n\|_1 = 1$$

Dalla seconda otteniamo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n^i| \leq 1$. Per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione n_k tale che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $y_{n_k}^i \to y^i$.

Allora

$$\|y_{n_k} - y\| \leq \beta \|y_{n_k} - y\|_1 = \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} (y_{n_k}^i - y^i) e_i \right\|_1 \leq \beta^2 \sum_{i=1}^{n} |y_{n_k}^i - y^i| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

e poiché

$$1 = \|y_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - y\| + \|y\| \overset{k \to \infty}{\Longrightarrow} \|y\| \geq 1$$

che è in contraddizione con $\|y_n\| \to 0$ $\square$

Definizione 0.1.7: Spazio di Banach

X spazio normato è detto **spazio di Banach** se le successioni di Cauchy convergono in X (ossia X è completo)

Teorema 0.1.4

Sia X uno spazio normato di dimensione finita. Allora X è di Banach.

Dimostrazione. Sia $N = \dim X$. Dimostro che X è completo secondo la norma $\|\cdot\|_1$.

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Vogliamo mostrare l'esistenza di $x \in X$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0$. Da definizione di successione di Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \overline{n},\ \|x_n - x_m\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|x_n^i - x_m^i\right| \leq \varepsilon$$

per cui ogni successione delle componenti $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$. Poiché $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ sono completi, allora $x_n^i \to x^i \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$. Concludiamo osservando che

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|x_n^i - x^i\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Esempio 0.1.1. Sia $X = \mathbb{K}^N$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Su tale spazio possiamo avere le norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

X è chiaramente di Banach.

Esempio 0.1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $X = C^0(\Omega, \mathbb{K}^N)$ spazio delle funzioni continue $\Omega \to \mathbb{R}^N$. Facile verificare che X formi uno spazio vettoriale.

Preso ora Ω aperto e limitato.

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ unif. continue}\}$$

poiché f è uniformemente continua se e solo se si può estendere con coninuità al bordo. Si può prendere la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \quad \forall f \in C^0(\overline{\Omega})$$

che si può verificare essere effettivamente una norma. Inoltre con tale norma $C^0(\overline{\Omega})$ è uno spazio di Banach.

Le funzioni in $C^0(\overline{\Omega})$ sono limitate e definite su un compatto, dunque sono anche integrabili, e possiamo dunque definire le norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \forall p \in [1, \infty)$$

ma per nessun p la norma rende $C^0(\overline{\Omega})$ completo. Un esempio è

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \text{lineare} & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definita in $[0, 1]$. Tale funzione converge in L_p con la stessa norma a una funzione non continua.

Esempio 0.1.3. Legato all'esempio precedente, con la stessa norma gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$ sono spazi di Banach.

Presi ora gli spazi $l^p := L^p(\mathbb{N}, \#)$ gli spazi di successioni $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, abbiamo che anch'essi sono spazi di Banach con norma

$$\|x\|_p := \|x\|_{L^p(\mathbb{N},\#)} = \left(\int_{\mathbb{N}} |x(n)|^p \, d\#\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$$

Nota (*zione*). Per le successioni in l^p, indicheremo $x \in l^p$ intendendola come funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, per cui per indicare la componente n-esima di x indicheremo $x(n)$. In tal modo possiamo indicare le successioni di elementi in l^p come successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove ogni $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ è una funzione in l^p

0.1.2 Spazi di Hilbert

Definizione 0.1.8: Prodotto scalare

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora un prodotto scalare è un'applicazione $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tale che

i. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in X$

ii. $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

iii. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y, z \in X$

Osservazione. Gli stessi assiomi valgono anche sul prodotto scalare su spazio reale. Semplicemente si ha che se $x \in \mathbb{R}$, allora $\overline{x} = x$ quindi si possono droppare tutti i coniugati e viene tutto più leggero.

Nota (antilinearità nella seconda componente).

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle \overset{i.}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z, x\rangle} \overset{iii.}{=} \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\beta}\overline{\langle z, x\rangle} \overset{i.}{=} \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$$

Lemma 0.1.5: Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia X uno spazio vettoriale munito del prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad \forall x, y \in X$$

e inoltre la diseguaglianza è un'uguaglianza se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Sia $z := \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y$. Allora

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle z, z\rangle &= \langle \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y, \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y\rangle = \\
&= \langle y, y\rangle\langle x, \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, \langle y, y\rangle x - \langle x, y\rangle y\rangle = \\
&= \langle y, y\rangle^2\langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle - \cancel{\langle x, y\rangle\langle y, y\rangle\overline{\langle y, x\rangle}} + \cancel{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle\overline{\langle y, y\rangle}} = \\
&= \langle y, y\rangle\big(\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - |\langle x, y\rangle|^2\big)
\end{aligned}$$

quindi ora o $y = 0$ che farebbe valere la tesi, oppure si può semplificare $\langle y, y\rangle$ e rimane esattamente la tesi.

Infine si verifica l'uguaglianza quando $z = 0$, ossia quando x e y sono collineari. $\square$

Definizione 0.1.9: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale X con prodotto scalare viene detto spazio **prehilbertiano** (o spazio *con prodotto interno*)

Esempio 0.1.4. $\mathbb{K}^N$ con $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i}$ è prehilbertiano.

Esempio 0.1.5. $C^0([0,1], \mathbb{C})$ con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)\, dx$

Definizione 0.1.10: Norma indotta dal prodotto scalare

Su uno spazio prehilbertiano $X, \langle \cdot, \cdot \rangle$ definisco

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in X$$

Allora $\|\cdot\|$ è una norma su X

buona definizione. La radice è ben definita perché $\langle x, x\rangle$ è un reale non negativo. Inoltre si può mostrare che $\|\cdot\|$ è una norma con gli assiomi di prodotto scalare e la diseguaglianza di Schwarz per la diseguaglianza triangolare. □

Proposizione 0.1.6. *Sia X uno spazio prehilbertiano, allora il prodotto scalare è una funzione continua $X \times X \to \mathbb{K}$.*

Dimostrazione. prese $x_n \to x$ e $y_n \to y$,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \leq \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

□

Definizione 0.1.11: ortogonalità

$x, y \in X$ si dicono ortogonali se $\langle x, y\rangle = 0$

Proposizione 0.1.7 (Identità di polarizzazione)**.** *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

Dimostrazione. Non sono difficili, basta scrivere per esteso $\|x+y\|^2$ e $\|x-y\|^2$ (e $\|x+iy\|^2$ e $\|x-iy\|^2$ nel caso complesso) e poi fare i contazzi. □

Proposizione 0.1.8. *teorema di Pitagora Se $\langle x, y\rangle = 0$ allora $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$*

Dimostrazione. ovvio □

Proposizione 0.1.9. *Identità del parallelogramma Per ogni $x, y \in X$, allora*

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

Teorema 0.1.10

Jordan - Von Neumann Sia X uno spazio normato, allora la norma è indotta da un prodotto scalare se vale l'*identità del parallelogramma*

Dimostrazione per $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Definiamo il prodotto scalare con l'identità di polarizzazione, dunque

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)$$

infatti se effettivamente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare allora quest'uguaglianza varrebbe, dunque ha senso iniziare prendendola come definizione. Verifichiamo ora che è un prodotto scalare.

i. Evidente per definizione

ii. Evidente dalla definizione, perché viene letteralmente $\langle x,x\rangle=\|x\|^2$

iii. Proseguiamo con la dimostrazione, dividendo in $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$ e $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle &\overset{(def)}{=} \frac{1}{4}\big(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2\big)=\\
&=\frac{1}{4}\big(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2\big)-\frac{1}{4}\big(\|x-z\|^2+\|y-z\|^2\big)=\\
&\overset{prll.}{=}\frac{1}{8}\big(\cancel{\|x-y\|^2}+\|x+y+2z\|^2\big)-\frac{1}{8}\big(\cancel{\|x-y\|^2}+\|x+y-2z\|^2\big)=\\
&=\frac{2}{4}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)=\\
&\overset{(def)}{=}2\left\langle\frac{x+y}{2},z\right\rangle
\end{aligned}$$

Da quest'ultima, scelto $y=0$ e notando dalla definizione che $\langle 0,z\rangle=0$, abbiamo che

$$\langle x,z\rangle=2\left\langle\frac{x}{2},z\right\rangle \implies \langle x+y,z\rangle=2\left\langle\frac{x+y}{2},z\right\rangle$$

che conclude la prima parte della dimostrazione della linearità.

Procediamo definendo

$$\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}:\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle,\ \forall x,y\in X\}$$

allora chiaramente $\{0,1,-1\}\subseteq\Lambda$. Notiamo che se $\alpha,\beta\in\Lambda$ allora $\alpha+\beta\in\Lambda$:

$$\langle(\alpha+\beta)x,y\rangle=\langle\alpha x+\beta x,y\rangle=\langle\alpha x,y\rangle+\langle\beta x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,y\rangle=(\alpha+\beta)\langle x,y\rangle$$

Dunque necessariamente $\mathbb{Z}\subseteq\Lambda$. Prendiamo ora $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ con $\beta\neq 0$, allora

$$\alpha\langle x,y\rangle=\langle\alpha x,y\rangle=\left\langle\alpha\frac{\beta}{\beta}x,y\right\rangle=\beta\left\langle\frac{\alpha}{\beta}x,y\right\rangle$$

da cui dividendo ambo i termini per β otteniamo che anche $\mathbb{Q}\subseteq\Lambda$. Concludiamo che, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è continuo, allora $\mathbb{R}\subseteq\langle\Lambda\rangle$. □

Dimostrazione per $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Similmente a prima, definiamo

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)+i\frac{1}{4}\big(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\big)$$

Dunque $Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) =: (x, y)$. Allora

$$\langle x, y\rangle = (x, y) + i(x, iy)$$

allora per la parte reale del teorema (x, y) verifica $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ e $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$