

# Appunti di Algebra Superiore

Github Repository: [Oxke/appunti/AlgebraSuperiore](#)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

## Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)

## 0.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

### Definizione 0.1.1: Anello

Un **anello**  $A$ ,  $+$ ,  $\cdot$  è un gruppo abeliano  $A, +$  (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide  $A, \cdot$  (con 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b + c) = ab + ac \quad ; \quad (b + c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione  $\cdot$  è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

**Esempio 0.1.1.**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

**Esempio 0.1.2.** Se  $A$  è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in  $A$  e con variabili in  $\Lambda$  costituiscono l'anello  $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

**Esempio 0.1.3** (Anello Banale). L'anello composto da un solo elemento  $\{0 = 1\}$

**Esempio 0.1.4** (Non comm.).  $A$  anello, allora l'anello  $M_n(A)$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $A$  non è commutativo se  $n > 1$  (e se non è l'anello banale ma dall'anello banale non esiste davvero)

**Esempio 0.1.5.** Endomorfismi Se  $(G, +)$  è un gruppo abeliano, allora  $\text{End}(G)$  è anello con  $+$  determinato da  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$  e  $\cdot$  dato dalla composizione  $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se  $G, G'$  sono gruppi con  $(G, +)$  abeliano, allora l'insieme  $\text{Hom}(G', G)$  degli omomorfismi da  $G'$  a  $G$  è un sottogruppo di  $G^{G'}$  il gruppo delle funzioni da  $G'$  a  $G$ .

Infatti se  $X$  è un insieme allora  $G^X$  è un gruppo con  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

### Definizione 0.1.2: Invertibile

$a \in A$  è invertibile a sinistra (destra) se  $\exists a' \in A$  tale che  $a'a = 1$  ( $aa' = 1$ ).  
 $a$  viene detto **invertibile** se  $\exists a' \in A$  tale che  $a'a = aa' = 1$

*Osservazione* (invertibile  $\iff$  invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se  $a', a'' \in A$  sono tali che  $a'a = aa'' = 1$  allora

$$(a'a)a'' = a'(aa'')1a'' = a'' \quad \quad \quad = a' = a'1$$

quindi  $a$  è invertibile e  $a^{-1} = a' = a''$

*Osservazione* (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con  $A^*$

In generale, se  $1 \neq 0$ , allora  $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

### Definizione 0.1.3: Anello con Divisione

$A$  si dice **anello con divisione** se  $A^* = A \setminus \{0\}$ . Un campo è un anello con divisione commutativo.

### Definizione 0.1.4: Divisore di zero

$a \in A$  è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se  $\exists a' \in A \setminus \{0\}$  tale che  $aa' = 0$  ( $a'a = 0$ )

### Definizione 0.1.5: Dominio

$A$  viene detto **dominio** se  $A \neq 0$  e  $A$  non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

**Esempio 0.1.6.** I campi,  $\mathbb{Z}$ , se  $A$  dominio d'integrità, allora anche  $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$  è dominio d'integrità.

*Osservazione.*  $A \neq 0$  tale che  $\forall 0 \neq a \in A$  è invertibile a sinistra, allora  $A$  è un anello con divisione.

*Dimostrazione.*  $\exists a' \in A$  tale che  $a'a = 1$  ma anche  $\exists a'' \in A : a''a' = 1$ . Allora  $a'$  è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

### Definizione 0.1.6: Sottoanello

$A' \subseteq A$  è **sottoanello** di  $A$  se  $(A', +) < (A, +)$ ,  $ab \in A'$  per ogni  $a, b \in A'$  e  $1 \in A'$

**Esempio 0.1.7.**  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$  sono tutti sottoanelli

**Esempio 0.1.8.**  $A \subseteq A[X]$  sottoanello

### Definizione 0.1.7: Ideale

$I \subseteq A$  è un'ideale sinistro (destro) se  $(I, +) < (A, +)$  e  $ab \in I$  ( $ba \in I$ ),  $\forall a \in A$  e  $\forall b \in I$ .

Un **ideale bilatero** è un ideale sia sinistro che destro.

**Esempio 0.1.9.** Gli ideali in  $\mathbb{Z}$  sono tutti e soli della forma  $n\mathbb{Z}$ , con  $n \in \mathbb{N}$

*Osservazione.* Se  $I$  è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \emptyset$$

quindi  $A$  con divisione  $\implies$  gli unici ideali sinistri o destri sono  $\{0\}$  e  $A$

### Definizione 0.1.8: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello  $A$  è  $A^{op}$ , con  $(A^{op}, +) := (A, +)$  e con prodotto  $ab$  in  $A^{op}$  definito come  $ba$  in  $A$

*Osservazione.*  $(A^{op})^{op} = A$  e  $A^{op} = A \iff A$  commutativo

**Proposizione 0.1.1** (Anello Quoziente). Se  $I \subseteq A$  ideale, allora il gruppo abeliano  $A/I, +$  è un anello con prodotto  $\bar{a}\bar{b} := \overline{ab}$ , dove  $\bar{a} := a + I \in A/I$

### Definizione 0.1.9: omomorfismo di anelli

Siano  $A, B$  anelli.  $f : A \rightarrow B$  è **omomorfismo** di anelli se,  $\forall a, a' \in A$

i)  $f(a + a') = f(a) + f(a')$

ii)  $f(aa') = f(a)f(a')$

iii)  $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

*Osservazione.*  $f$  omomorfismo è isomorfismo  $\iff \exists f' : B \rightarrow A$  omomorfismo tale che  $f' \circ f = \text{id}_A$  e  $f \circ f' = \text{id}_B$

Indicheremo  $A \cong B$  se esiste un isomorfismo tra  $A$  e  $B$

**Proposizione 0.1.2.** Se  $f : A \rightarrow B$  è un omomorfismo allora

1.  $A' \subseteq A$  è sottoanello  $\implies f(A') \subseteq B$  è sottoanello.
2.  $B' \subseteq B$  sottoanello  $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$  è sottoanello
3.  $J \subseteq B$  è ideale (sinistro / destro)  $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$  è ideale (sinistro / destro). In particolare  $\text{Ker } f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$  è ideale
4.  $f$  **suriettivo** e  $I \subseteq A$  ideale  $\implies f(I) \subseteq B$  è ideale

*Osservazione.*  $f : A \rightarrow B$  è iniettivo  $\iff \text{Ker } f = \{0_A\}$  e in tal caso  $A \cong \text{Im } f := f(A)$  che dunque è sottoanello di  $B$

### Teorema 0.1.3: Omomorfismo

$f : A \rightarrow B$  è omomorfismo di anelli,  $I \subseteq A$  ideale tale che  $I \subseteq \text{Ker } f$ . Allora

$$\exists! \bar{f} : A/I \rightarrow B \text{ omomorfismo tale che } \bar{f}(\bar{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

Inoltre  $\text{im } \bar{f} = \text{im } f$  e  $\text{Ker } \bar{f} = \text{Ker } f / I$

**Proposizione 0.1.4.** *Gli ideali di  $A/I$  sono tutti e soli della forma  $J/I$  con  $J \subseteq A$  ideale tale che  $I \subseteq J$*

**Teorema 0.1.5: Primo teorema di isomorfismo**

$f : A \rightarrow B$  è omomorfismo di anelli, allora  $\text{im} f \cong A/\text{Ker} f$

**Definizione 0.1.10**

L'ideale generato da  $U \subseteq A$  è il più piccolo ideale di  $A$  che contiene  $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ ideale}} I$  ed esplicitamente è

$$AU A := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i u_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

*Osservazione.* Se  $A$  è commutativo e  $U = \{u\}$  allora  $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$  (ideale principale)

**Definizione 0.1.11: PID**

$A$  è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di  $A$  è a ideali principali.

**Esempio 0.1.10.** Campi (non ci sono ideali propri)

**Esempio 0.1.11.**  $\mathbb{Z}$  (con ideali  $n\mathbb{Z} = (n)$ )

**Esempio 0.1.12.**  $K[X]$  con  $K$  campo