

Appunti di Analisi Funzionale

Github Repository: [Oxke/appunti/AnalFun](#)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Antonio Giovanni Segatti

0.1 Intro

0.1.1 Spazi Normati

Sia X uno spazio vettoriale su campo \mathbb{K} (\mathbb{C} o \mathbb{R}).

Definizione 0.1.1: norma

Si definisce **norma** una funzione

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che

- i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in X$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

Definizione 0.1.2: Spazio Normato

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ tale che X sia uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su X .

Per una notazione più leggera, quando non è ambiguo sottintenderemo la norma, scrivendo “sia X uno spazio normato”.

Proposizione 0.1.1 (Metrica indotta da $\|\cdot\|$). *La norma $\|\cdot\|$ induce su X una metrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

Nota (zioni). Alcune notazioni utili:

- $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} = x_0 + r B_1(0)$
- $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$

Definizione 0.1.3: Convergenza in norma - Convergenza forte

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X e sia $x \in X$. Dico che x_n converge a x in norma o fortemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Definizione 0.1.4: Successione di Cauchy

Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}$$

Osservazione. La norma $\|\cdot\|$ è una funzione continua.

Dimostrazione. Preso $x, y \in X$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e similmente si può con variabili scambiate. Ne consegue che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque la norma è Lipschitziana con costante 1 □

Definizione 0.1.5: Norma equivalente

Sia X uno spazio normato e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X . Dico che $\|\cdot\|_1$ è **topologicamente equivalente** a $\|\cdot\|_2$ se

$$\forall x \in X \forall r > 0 \exists r_1, r_2 > 0 : \\ B_{r_1}(x, \|\cdot\|_1) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_2) \text{ e } B_{r_2}(x, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_1)$$

Proposizione 0.1.2. *Sia X normato. Allora due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Fissato $x_0 = 0$, preso r tale che

$$B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(0, \|\cdot\|_1)$$

preso ora $0 \neq x \in X$, sia $y := \frac{r_2}{2\|x\|_2}x$, così che $\|y\|_2 = \frac{r_2}{2}$, dunque $y \in B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2)$ e quindi per l'inclusione sopra

$$\|y\|_1 = \frac{r_2}{2} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq r$$

che è la prima delle disuguaglianze richieste. Similmente si può trovare l'altra scambiando x e y , le due norme, e r_2 con r_1

\Leftarrow Preso $x_0 \in X$ e $r > 0$, sia $r_1 := r/\beta$. Allora, per ogni $x \in X$

$$\|x - x_0\|_1 \leq \frac{r}{\beta} \implies \|x - x_0\|_2 \leq \beta \|x - x_0\|_1 \leq r$$

che è la prima delle inclusioni richieste. Similmente si può trovare l'altra prendendo $r_2 := r/\alpha$ e scambiando le norme. □

Osservazione. Se $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ è una norma equivalente alla prima, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$

Definizione 0.1.6: Dimensione

Sia X uno spazio vettoriale. Allora

$$\dim X = \begin{cases} 0 & X = \{0\} \\ n & n \in \mathbb{N} \text{ e } X \text{ ha una base di } n \text{ elementi} \\ +\infty & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ esistono } n \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{cases}$$

Teorema 0.1.3: Equivalenza delle norme

Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su X sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di X . Sia $x \in X$. Allora sia

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \quad \text{con } x^i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Definiamo la norma (facile controllo lasciato come esercizio)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$$

Sia ora $\|\cdot\|$ un'altra norma su X , dimostriamo che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x^i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right)}_{\beta} \|x\|_1$$

Rimane da dimostrare che $\exists \alpha > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$. Assumiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}$ esista $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n \|x_n\|$. Prendiamo ora (ovviamente $x_n \neq 0$ per la disuguaglianza stretta)

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \implies \|y_n\| < \frac{1}{n} \quad ; \quad \|y_n\|_1 = 1$$

Dalla seconda otteniamo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n^i| \leq 1$. Per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione n_k tale che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $y_{n_k}^i \rightarrow y^i$.

Allora

$$\|y_{n_k} - y\| \leq \beta \|y_{n_k} - y\|_1 = \beta \left\| \sum_{i=1}^n (y_{n_k}^i - y^i) e_i \right\| \leq \beta^2 \sum_{i=1}^n |y_{n_k}^i - y^i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

e poiché

$$1 = \|y_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - y\| + \|y\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|y\| \geq 1$$

che è in contraddizione con $\|y_n\| \rightarrow 0$

□

Definizione 0.1.7: Spazio di Banach

X spazio normato è detto **spazio di Banach** se le successioni di Cauchy convergono in X (ossia X è completo)

Teorema 0.1.4

Sia X uno spazio normato di dimensione finita. Allora X è di Banach.

Dimostrazione. Sia $N = \dim X$. Dimostro che X è completo secondo la norma $\|\cdot\|_1$.

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Vogliamo mostrare l'esistenza di $x \in X$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0$. Da definizione di successione di Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \bar{n}, \|x_n - x_m\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_n^i - x_m^i| \leq \varepsilon$$

per cui ogni successione delle componenti $\{x_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in \mathbb{K} . Poiché \mathbb{C} e \mathbb{R} sono completi, allora $x_n^i \rightarrow x^i \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$. Concludiamo osservando che

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_n^i - x^i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Esempio 0.1.1. Sia $X = \mathbb{K}^N$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o \mathbb{R} . Su tale spazio possiamo avere le norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

X è chiaramente di Banach.

Esempio 0.1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $X = C^0(\Omega, \mathbb{K}^N)$ spazio delle funzioni continue $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Facile verificare che X formi uno spazio vettoriale.

Preso ora Ω aperto e limitato.

$$C^0(\bar{\Omega}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ unif. continue}\}$$

poiché f è uniformemente continua se e solo se si può estendere con continuità al bordo. Si può prendere la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)| \quad \forall f \in C^0(\bar{\Omega})$$

che si può verificare essere effettivamente una norma. Inoltre con tale norma $C^0(\bar{\Omega})$ è uno spazio di Banach.

Le funzioni in $C^0(\bar{\Omega})$ sono limitate e definite su un compatto, dunque sono anche integrabili, e possiamo dunque definire le norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in C^0(\bar{\Omega}) \quad \forall p \in [1, \infty)$$

ma per nessun p la norma rende $C^0(\bar{\Omega})$ completo. Un esempio è

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \text{lineare} & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definita in $[0, 1]$. Tale funzione converge in L_p con la stessa norma a una funzione non continua.

Esempio 0.1.3. Legato all'esempio precedente, con la stessa norma gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$ sono spazi di Banach.

Presi ora gli spazi $l^p := L^p(\mathbb{N}, \#)$ gli spazi di successioni $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, abbiamo che anch'essi sono spazi di Banach con norma

$$\|x\|_p := \|x\|_{L^p(\mathbb{N}, \#)} = \left(\int_{\mathbb{N}} |x(n)|^p d\# \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$$

Nota (zione). Per le successioni in l^p , indicheremo $x \in l^p$ intendendola come funzione $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, per cui per indicare la componente n -esima di x indicheremo $x(n)$. In tal modo possiamo indicare le successioni di elementi in l^p come successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove ogni $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione in l^p

0.1.2 Spazi di Hilbert

Definizione 0.1.8: Prodotto scalare

Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{C} . Allora un prodotto scalare è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

- i. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$
- ii. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- iii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y, z \in X$

Osservazione. Gli stessi assiomi valgono anche sul prodotto scalare su spazio reale. Semplicemente si ha che se $x \in \mathbb{R}$, allora $\bar{x} = x$ quindi si possono droppare tutti i coniugati e viene tutto più leggero.

Nota (antilinearità nella seconda componente).

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \stackrel{i.}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} \stackrel{iii.}{=} \overline{\alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle} \stackrel{i.}{=} \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\beta} \overline{\langle z, x \rangle} \stackrel{i.}{=} \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

Lemma 0.1.5: Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia X uno spazio vettoriale munito del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

e inoltre la diseguaglianza è un'uguaglianza se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Sia $z := \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y$. Allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle z, z \rangle &= \langle \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle \langle x, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle = \\ &= \langle y, y \rangle (\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2) \end{aligned}$$

quindi ora o $y = 0$ che farebbe valere la tesi, oppure si può semplificare $\langle y, y \rangle$ e rimane esattamente la tesi.

Infine si verifica l'uguaglianza quando $z = 0$, ossia quando x e y sono collineari. \square

Definizione 0.1.9: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale X con prodotto scalare viene detto spazio **prehilbertiano** (o spazio *con prodotto interno*)

Esempio 0.1.4. \mathbb{K}^N con $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i}$ è prehilbertiano.

Esempio 0.1.5. $C^0([0, 1], \mathbb{C})$ con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$

Definizione 0.1.10: Norma indotta dal prodotto scalare

Su uno spazio prehilbertiano $X, \langle \cdot, \cdot \rangle$ definisco

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X$$

Allora $\|\cdot\|$ è una norma su X

buona definizione. La radice è ben definita perché $\langle x, x \rangle$ è un reale non negativo. Inoltre si può mostrare che $\|\cdot\|$ è una norma con gli assiomi di prodotto scalare e la disuguaglianza di Schwarz per la disuguaglianza triangolare. \square

Proposizione 0.1.6. Sia X uno spazio prehilbertiano, allora il prodotto scalare è una funzione continua $X \times X \rightarrow \mathbb{K}$.

Dimostrazione. prese $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y_n \rangle + \langle x, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

\square

Definizione 0.1.11: ortogonalità

$x, y \in X$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

Proposizione 0.1.7 (Identità di polarizzazione). Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Dimostrazione. Non sono difficili, basta scrivere per esteso $\|x + y\|^2$ e $\|x - y\|^2$ (e $\|x + iy\|^2$ e $\|x - iy\|^2$ nel caso complesso) e poi fare i contazzi. \square

Proposizione 0.1.8. *teorema di Pitagora* Se $\langle x, y \rangle = 0$ allora $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dimostrazione. ovvio \square

Proposizione 0.1.9. *Identità del parallelogramma* Per ogni $x, y \in X$, allora

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Teorema 0.1.10

Jordan - Von Neumann Sia X uno spazio normato, allora la norma è indotta da un prodotto scalare se vale l'identità del parallelogramma

Dimostrazione per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Definiamo il prodotto scalare con l'identità di polarizzazione, dunque

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

infatti se effettivamente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare allora quest'uguaglianza varrebbe, dunque ha senso iniziare prendendola come definizione. Verifichiamo ora che è un prodotto scalare.

i. Evidente per definizione

ii. Evidente dalla definizione, perché viene letteralmente $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

iii. Proseguiamo con la dimostrazione, dividendo in $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ e $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle &\stackrel{(def)}{=} \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) = \\ &= \frac{1}{4} (\|x + z\|^2 + \|y + z\|^2) - \frac{1}{4} (\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2) = \\ &\stackrel{prtl.}{=} \frac{1}{8} (\|x + y + 2z\|^2 - \|x + y - 2z\|^2) = \\ &= \frac{2}{4} \left(\left\| \frac{x + y}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x + y}{2} - z \right\|^2 \right) = \\ &\stackrel{(def)}{=} 2 \left\langle \frac{x + y}{2}, z \right\rangle \end{aligned}$$

Da quest'ultima, scelto $y = 0$ e notando dalla definizione che $\langle 0, z \rangle = 0$, abbiamo che

$$\langle x, z \rangle = 2 \left\langle \frac{x}{2}, z \right\rangle \implies \langle x + y, z \rangle = 2 \left\langle \frac{x + y}{2}, z \right\rangle$$

che conclude la prima parte della dimostrazione della linearità.

Procediamo definendo

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X \}$$

allora chiaramente $\{0, 1, -1\} \subseteq \Lambda$. Notiamo che se $\alpha, \beta \in \Lambda$ allora $\alpha + \beta \in \Lambda$:

$$\langle (\alpha + \beta)x, y \rangle = \langle \alpha x + \beta x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + \langle \beta x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y \rangle = (\alpha + \beta) \langle x, y \rangle$$

Dunque necessariamente $\mathbb{Z} \subseteq \Lambda$. Prendiamo ora $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ con $\beta \neq 0$, allora

$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \left\langle \alpha \frac{\beta}{\beta} x, y \right\rangle = \beta \left\langle \frac{\alpha}{\beta} x, y \right\rangle$$

da cui dividendo ambo i termini per β otteniamo che anche $\mathbb{Q} \subseteq \Lambda$. Concludiamo che, poiché \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è continuo (per come è definito, chiaramente non possiamo usare la prop, essendo che non abbiamo ancora dimostrato che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare), allora $\mathbb{R} \subseteq \Lambda \subseteq$. \square

Dimostrazione per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Similmente a prima, definiamo

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + i\frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

Dunque $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) =: (x, y)$. Allora

$$\langle x, y \rangle = (x, y) + i(x, iy)$$

allora per la parte reale del teorema (x, y) verifica $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ e $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque

$$\langle x + y, z \rangle = (x, z) + (y, z) + i(x, iz)i(y, iz) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

Rimane da verificare l'omogeneità per $\lambda \in \mathbb{C}$ e che $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$. Iniziamo dalla seconda:

$$\overline{\langle y, x \rangle} = \overline{(y, x) + i(y, ix)} = (y, x) - i(y, ix)$$

inoltre

$$\begin{aligned} (y, ix) &= \frac{1}{4}(\|y + ix\|^2 - \|y - ix\|^2) = \frac{1}{4}(\|i(-iy + x)\|^2 + \|i(-iy - x)\|^2) = \\ &= \frac{1}{4}(\|x - iy\|^2 + \|x + iy\|^2) = -(x, iy) \end{aligned}$$

e quindi la precedente è

$$\overline{\langle y, x \rangle} = (x, y) + i(x, iy) = \langle x, y \rangle$$

Sia ora $\alpha + i\beta = \lambda \in \mathbb{C}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\langle (\alpha + i\beta)x, y \rangle = \langle \alpha x + i\beta x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + i\langle \beta x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + \beta\langle ix, y \rangle$$

ma abbiamo che, riprendendo la definizione

$$\begin{aligned} \langle ix, y \rangle &= \frac{1}{4}(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2) + i\frac{1}{4}(\|ix + iy\|^2 - \|ix - iy\|^2) \\ &= -\frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) + i(x, y) = i(x, y) - (x, iy) = \\ &= i\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

e quindi concludiamo

$$\langle (\alpha + i\beta)x, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + \beta\langle ix, y \rangle = \alpha\langle x, y \rangle + i\beta\langle x, y \rangle = \lambda\langle x, y \rangle$$

□

Osservazione. presa su $C^0([0, 1])$ la norma $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f|^2 dt$, allora

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ questo è uno spazio prehilbertiano.

Però con la norma $\|f\|_\infty$ non è uno spazio prehilbertiano. Infatti non vale l'identità del parallelogramma: prese $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = t$ abbiamo

$$\|f - g\|_\infty^2 + \|f + g\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 2(1 + 1) = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$$

Corollario 0.1.10.1. Sia X uno spazio normato e sia $M \subseteq X$ un sottospazio di dimensione finita. Allora M è chiuso.

Dimostrazione. $(M, \|\cdot\|)$ è esso stesso uno spazio normato di dimensione finita. M è dunque completo quindi chiuso. □

Esempio 0.1.6. La precedente non vale se $\dim X = +\infty$. Presi infatti $M = C^0(\Omega)$ e $X = L^2(\Omega)$, abbiamo che $\overline{M}^{L^2} = L^2$

0.1.3 Operatori lineari e continui

Siano X e Y spazi normati. Sia $T : X \rightarrow Y$. Allora T è lineare se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in X$. Per ricordare la linearità, invece di scrivere $T(x)$ scriveremo Tx .

Nota. Nelle bolle, indicando a pedice lo spazio invece che il raggio, si sottintende il raggio 1 e si esplicita la norma da utilizzare:

$$B_X(0) := \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$$

Teorema 0.1.11

Siano X, Y spazi normati. Sia $T : X \rightarrow Y$. Allora le seguenti proposizioni sono tutte equivalenti:

- (i) T è continuo
- (ii) T è continuo in 0
- (iii) Ogni limitato di X ha immagine limitata in Y
- (iv) $\exists \alpha > 0 : \overline{T(B_X)} \subseteq \alpha B_Y(0)$
- (v) $\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$
- (vi) $\sup_{x \in B_X(0)} \|Tx\|_Y < +\infty$
- (vii) $\sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y < +\infty$

Osservazione. Se X e Y hanno dimensione finita, T è sempre continuo.

Esempio 0.1.7. Preso

$$\begin{aligned} T : C^0([0, 1])_{\|\cdot\|_1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T(f) = f(0) \end{aligned}$$

è chiaramente lineare. Tuttavia la controimmagine di $\{0\}$ tramite T contiene ad esempio la successione $f_n(x) = \max(nx, 1)$ che ha come limite in $C^0_{\|\cdot\|_1}$ la funzione costante 1, per cui $T^{-1}\{0\}$ non è chiuso.

Definizione 0.1.12: Operatore limitato

Un operatore che soddisfa la condizione (iii) viene detto **limitato**

Dimostrazione.

- (i) \implies (ii) ovvio
- (ii) \implies (i) ovvio, poiché $T(x - x_0) = T(x) - T(x_0)$
- (ii) \implies (iv) Abbiamo che per ogni intorno U_Y di 0_Y esiste un intorno U_X di 0_X tale che $T(U_X) \subseteq U_Y$. Allora scelto $U_Y = B_Y(0)$ abbiamo

$$\exists \delta > 0 : T(\delta \overline{B_X(0)}) = \delta \overline{T(B_X(0))} \subseteq B_Y(0)$$

per cui basta prendere $\alpha = \frac{1}{\delta}$

(iv) \implies (ii) Preso $\varepsilon > 0$ bisogna trovare $\delta > 0$ tale che

$$T(\delta \overline{B_x(0)}) \subseteq \varepsilon B_Y(0)$$

e similmente a prima per linearità basta prendere $\delta = \varepsilon/\alpha$

(iv) \implies (iii) Sia $C \subseteq \overline{RB_X(0)}$ un limitato. Allora

$$T(C) \subseteq T(\overline{RB_X(0)}) = R\overline{T(B_X(0))} \subseteq R\alpha \overline{B_Y(0)}$$

(iii) \implies (iv) $\overline{B_X(0)}$ è limitato in X , dunque $T(\overline{B_X(0)})$ è limitato in Y , e dunque è contenuto in una palla $\alpha B_Y(0)$ per un $\alpha > 0$

(iv) \iff (vi) $\|x\|_X \leq 1$ se e solo se $x \in \overline{B_X(0)}$, il resto vien da sè

(v) \iff (vi) \iff (vii) tutte ovvie, come anche è ovvio che il valore finito nel caso sia lo stesso, e viene denotato $\|T\|$ e in pratica tutte e tre dicono che

$$\exists \|T\| > 0 : \|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$$

per ogni $x \in X$

□

0.2 Hahn - Banach

Teorema 0.2.1: Hahn - Banach (spazi normati)

Sia X uno spazio normato, X_0 un sottospazio. Sia $g : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, cioè $g \in X'_0$. Allora $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continua, ossia $f \in X'$ tale che

- 1) f prolunga g
- 2) $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X'_0}$

Dimostrazione. sia $p(x) = \|g\|_{X'_0} \|x\|$. Allora $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ ed è sublineare e omogenea, dunque è una seminorma. □

Esempio 0.2.1. Sia $X = \mathbb{R}^2$, allora un generico operatore lineare $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è del tipo $x \mapsto a \cdot x$, con $a \in \mathbb{R}^2$.

Allora $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|fx|}{\|x\|_p}$ e abbiamo che $|fx| \leq \|a\|_q \|x\|_p$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Dunque concludiamo che $\|f\| \leq \|a\|_q$. In realtà questa è un'uguaglianza. Basta infatti prendere

$$\bar{x} = (|a_1|^{q-2} a_1, |a_2|^{q-2} a_2) \implies \|x\|_p^p = |a_1|^{(q-1)p} + |a_2|^{(q-1)p} = |a_1|^q + |a_2|^q = \|a\|_q^q$$

dove si è usato che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies (q-1)p = q$. Ma inoltre abbiamo che

$$|f\bar{x}| = |a \cdot \bar{x}| = \|a\|_q^q$$

concludiamo che

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} \geq \frac{|fx|}{\|\bar{x}\|_p} = \|a\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|a\|_q$$

Esercizio 0.2.1

Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio di X spazio normato. Mostrare che \overline{Y} è un sottospazio di X .

Lemma 0.2.2

Sia X uno spazio normato e $Y \subseteq X$ un sottospazio tale che $\overline{Y} \subset X$. Allora $\exists f : X \rightarrow \mathbb{K}$ con f lineare continua, ossia $f \in X'$ tale che:

1. $f \neq 0$
2. $\langle f, x \rangle = 0$ per ogni $x \in Y$

Osservazione. Sia X uno spazio normato, $Y \subseteq X$ un sottospazio si supponga che se un funzionale $f \in X'$ tale che $\langle f, x \rangle = 0$ per ogni $x \in Y$ allora necessariamente $f = 0$. Segue che $\overline{Y} = X$

Dimostrazione. $\exists x_0 \in X - \overline{Y}$, allora $X_0 = Y \oplus \mathbb{K}x_0$. A questo punto prendiamo il funzionale $g : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ definito da $g(y + \alpha x_0) = \alpha$. Mostriamo ora che $g \in X'_0$ e che è vero che $g|_Y = 0$. La seconda è banalmente vera perché se $y \in Y$ allora $g(y) = g(y + 0 \cdot x_0) = 0$. Mostriamo che g è lineare e continuo. Supponiamo $x_1 = y_1 + \alpha_1 x_0$ e $x_2 = y_2 + \alpha_2 x_0$. Allora

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + \mu x_2) &= g(\lambda y_1 + \lambda \alpha_1 x_0 + \mu y_2 + \mu \alpha_2 x_0) = \\ &= g((\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2) x_0) = \lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 = \\ &= \lambda g(x_1) + \mu g(x_2) \end{aligned}$$

Per la continuità, prendiamo $\alpha \neq 0$ e abbiamo che

$$\|x\| = \|y + \alpha x_0\| = \left\| (-\alpha) \left(\frac{y}{-\alpha} - x_0 \right) \right\| = |\alpha| \left\| \frac{y}{-\alpha} - x_0 \right\|$$

necessariamente $\frac{y}{-\alpha} \in Y$ e dunque possiamo proseguire la precedente equazione con

$$\|x\| = |\alpha| \left\| \frac{y}{-\alpha} - x_0 \right\| \geq |\alpha| d(x_0, Y) = |g(x)| d(x_0, Y)$$

per cui concludiamo che g è continua con norma $\|g\| \leq 1/d(x_0, Y)$. Questa disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza, infatti poiché $d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$ abbiamo che

$$\exists y_n \in Y : \|y_n - x_0\| < \frac{n+1}{n} d(x_0, Y)$$

e ora abbiamo che

$$\frac{n}{n+1} \frac{\|y_n - x_0\|}{d(x_0, Y)} < 1 = |g(x_0 - y_n)| \leq \|g\| \|x_0 - y_n\|$$

da cui per $n \rightarrow \infty$ otteniamo $\|g\|_{X'_0} \geq 1/d(x_0, Y)$.

Ora estendo g a tutto X con Hahn-Banach ottenendo $f \in X'$ tale che $f|_{X_0} = g$ e dunque $f|_Y = 0$. Inoltre l'estensione poiché Hahn-Banach conserva la norma, abbiamo che

$$\|f\|_{X'} = \frac{1}{d(x_0, Y)}$$

□

Corollario 0.2.2.1. Sia X uno spazio normato reale. Allora per ogni $x_0 \in X$ esiste una $f \in X'$ tale che $\langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ e $\|f\|_{X'} = \|x_0\|$

Dimostrazione. Sia $X_0 = \mathbb{R}x_0$. Sia $x = tx_0 \in X_0$, allora definiamo $g(x) = g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Verifichiamo che la norma sia corretta: $|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2$ dunque $\|g\|_{X'_0} = \|x_0\|$.

Per Hahn-Banach possiamo estendere g a tutto X' ottenendo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\langle f, x \rangle = \langle g, x \rangle$ per ogni $x \in X_0$ e $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X'_0} = \|x_0\|$. In particolare anche $\langle f, x_0 \rangle = \langle g, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$ \square

Il corollario precedente motiva la seguente definizione:

Definizione 0.2.1: Mappa di dualità

Chiamiamo la **mappa di dualità** la seguente funzione

$$\mathcal{F} : X \longrightarrow 2^{X'} \\ x \longmapsto \mathcal{F}(x) = \{f \in X' : \langle f, x \rangle = \|x\|^2 ; \|f\|_{X'} = \|x\|\}$$

che associa a ogni elemento di X l'insieme degli elementi “a lui duali”.

Esercizio 0.2.2

Consideriamo

$$\mathcal{F}'(x) = \{f \in X' : \langle f, x \rangle = \|x\|^2 ; \|f\|_{X'} \leq \|x\|\}'$$

Mostrare che $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$

Fissato $x \in X$, è evidente che $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}'(x)$. Supponiamo ora che $f \in \mathcal{F}'(x)$, ossia $\|f\|_{X'} \leq \|x\|$. Da $|\langle f, x \rangle| = \|x\|\|x\|$ concludiamo che $\|f\|_{X'} = \|x\|$ e dunque $f \in \mathcal{F}(x)$

Esercizio 0.2.3

Consideriamo

$$\mathcal{I}(x) = \left\{ f \in X' : \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, y - x \rangle \forall y \in X \right\}$$

Mostrare che $\mathcal{I} = \mathcal{F}$

Fissiamo $x \in X$

\subseteq Sia $f \in \mathcal{I}(x)$. Iniziamo mostrando che $\langle f, x \rangle = \|x\|^2$. Scegliamo $y = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbb{R}$. Segue che

$$\frac{1}{2}\alpha^2\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, x \rangle(\alpha - 1)$$

con questa uguaglianza, dividendo i casi per $\alpha > 0$ e $\alpha < 1$, prendiamo il limite di $\alpha \rightarrow 1^+$ e $\alpha \rightarrow 1^-$, ottenendo le due disuguaglianze $\langle f, x \rangle \leq \|x\|^2$ e $\langle f, x \rangle \geq \|x\|^2$.

Rimane da controllare che $\|f\|_{X'} \leq \|x\|$. Scegliamo $y \in X$ tale che $\|y\| = \|x\|$. Otteniamo che

$$\langle f, y \rangle \leq \langle f, x \rangle = \|x\|^2 \implies |\langle f, y \rangle| \leq \|y\|\|x\| \implies \|f\|_{X'} \leq \|x\|$$

⊇ Sia $f \in \mathcal{F}(x)$ e $y \in X$. Allora

$$\begin{aligned}\langle f, y - x \rangle &= \langle f, y \rangle - \langle f, x \rangle \leq \|f\| \|y\| - \|x\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2 - \|x\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|y\|^2 - \frac{1}{2} \|x\|^2\end{aligned}$$

da cui $f \in \mathcal{I}(x)$

Osservazione. Il precedente esercizio suggerisce che $f \in \mathcal{F}(x)$ svolge in un certo senso il ruolo della derivata di $\varphi(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$ valutata in x . Vedremo più avanti il significato di questa analogia.

Esercizio 0.2.4

Mostrare che

$$\begin{aligned}c_0 &= \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0\} \\ c &= \{x \in \ell^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \text{ esiste} \}\end{aligned}$$

sono sottospazi chiusi di ℓ^∞ .

Le dimostrazioni contose esplicite sono lasciate davvero come esercizio, riporto dimostrazioni più sintetiche.

Utilizzando la f definita come il limite come poco più avanti (dopo il teorema), abbiamo che c_0 è chiuso in quanto $c_0 = f^{-1}(\{0\})$ controimmagine continua di chiuso.

Teorema 0.2.3

Sia $p \in [1, +\infty)$, sia $f \in (\ell^p)'$. Sia $q \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$$\exists! y \in \ell^q : \langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$$

e inoltre $\|f\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_{\ell^q}$

Notare che il precedente teorema non vale per $p = \infty$. Costruiamo infatti un funzionale lineare e continuo su ℓ^∞ che non si rappresenta con $y \in \ell^1$. Consideriamo infatti $g : c \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $\langle g, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$. Allora g è lineare ed è continuo perché $|\langle g, x \rangle| = |\lim_{n \rightarrow \infty} x(n)| \leq \|x\|_\infty$ per cui $g \in c'$ e in particolare $\|g\|_{c'} = 1$ ad esempio prendendo la successione $x \in c$ definita da $x(n) = 1$.

Estendo ora g a tutto ℓ^∞ con Hahn-Banach, ottenendo $f : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineare continuo con $\|f\|_{(\ell^\infty)'} = 1$.

Supponiamo ora per assurdo che esista $y \in \ell^1$ tale che

$$\langle f, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n) \quad \forall x \in \ell^\infty$$

e consideriamo ora gli x_k definiti come¹ $x_k = (n == k)$. Allora abbiamo $\langle f, x_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k(n) = 0$ ma per ogni k allora avremmo che $0 = \langle f, x_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x_k(n) = y(k)$ per cui $y = 0$ che è impossibile perché sappiamo che f ha norma 1.

¹concedetemi questa notazione da informatico

Esercizio 0.2.5

Mostrare che

$$c_{00} = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definitivamente nulle}\}$$

è denso in ℓ^p , per ogni $p \in [1, \infty)$

Esercizio 0.2.6

Mostrare che $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ dato da

$$(Tx)(n) = \frac{x(n)}{n}$$

è ben definito, lineare, continuo e $T(\ell^2)$ non è chiuso in ℓ^2 ed è denso in ℓ^2

Definizione 0.2.2: Immersione Compatta

Siano X, Y spazi di Banach. Dico che Y è immerso con compattezza in X (indicato $Y \subset\subset X$) se

1. $\exists C > 0 : \|x\|_X \leq C\|x\|_Y$ per ogni $x \in Y$ (dunque l'immersione $Y \hookrightarrow X$ è continua.
2. Ogni successione limitata in Y ha un'estratta convergente in X

Esercizio 0.2.7

Sia $X = \ell^2$ e consideriamo

$$Y = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

Mostrare che

1. Y è sottospazio vettoriale di ℓ^2
2. Posto $\|x\|_Y^2 := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2$, questa è una norma indotta da un prodotto scalare
3. L'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è continua
4. Y è completo
5. $Y \subset\subset X$

-
1. preso $x \in Y$, $|x(n)|^2 \leq n^2 |x(n)|^2$ e poiché $\{nx(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ allora anche $x \in \ell^2$. Facile verificare che Y è sottospazio
 2. Tutte facili verifiche, con prodotto scalare $\langle x, y \rangle_Y = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x(n)y(n)$
 3. Come visto nel punto 1., $\|x\|_{\ell^2} \leq \|\{nx(n)\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell^2} = \|x\|_Y$
 4. Sia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di Cauchy in $\|\cdot\|_Y$. Vogliamo mostrare che $x_k \rightarrow \bar{x}$ in Y . Poiché $\|x_n - x_m\|_{\ell^2} \leq \|x_n - x_m\|_Y$ allora esiste $\bar{x} \in \ell^2$ tale che $x_k \rightarrow \bar{x}$ in ℓ^2 per completezza di ℓ^2 . Poste $y_k(n) = nx_k(n)$, evidentemente y_k è di Cauchy in ℓ^2 , dunque esiste $\bar{y} \in \ell^2$ tale che $y_k \rightarrow \bar{y}$. Vogliamo ora mostrare che

$\bar{y}(n) = n\bar{x}(n)$. Questo si può dire perché la convergenza in ℓ^2 implica la convergenza puntuale, e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $y_k(n) = nx_k(n)$

5. Sia $\{x_k\}$ limitata in Y . Allora $\exists M > 0 : \|x_k\|_Y^2 \leq M$. Vogliamo trovare una sottosuccessione $\{x_{k_j}\} \subseteq \{x_k\}$ tale che $x_{k_j} \xrightarrow{\ell^2} \bar{x} \in \ell^2$. Ora usando un risultato che ancora non abbiamo dimostrato, la **compattezza debole**, diciamo che $\exists \bar{x} \in \ell^2$ e una sottosuccessione tale che

$$\langle y, x_{k_j} \rangle \rightarrow \langle y, \bar{x} \rangle \quad \forall y \in \ell^2$$

(reindicizziamo per comodità i k a indicare k_j , per alleggerire la notazione) Fisso $n \in \mathbb{N}$ e prendo $y(i) = (i == n)$. Allora otteniamo dalla precedente che $\langle y, x_k \rangle = x_k(n) \rightarrow \bar{x}(n) = \langle y, \bar{x} \rangle$. Vogliamo ora mostrare che la convergenza è in ℓ^2

$$\begin{aligned} \|x_k - \bar{x}\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 = \sum_{n=1}^m |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 + \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^2 |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 \end{aligned}$$

osservo ora che $n^2 |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 \leq n^2 (|x_k(n)| + |\bar{x}(n)|)^2 \leq 2n^2 |x_k(n)|^2 + 2n^2 |\bar{x}(n)|^2$

Prima di proseguire vogliamo dire che $\bar{x} \in Y$. Abbiamo che

$$nx_k(n) \rightarrow n\bar{x}(n) \implies n^2 |x_k(n)|^2 \rightarrow n^2 |\bar{x}(n)|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per il lemma di Fatou, abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\bar{x}(n)|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_k(n)|^2 \leq M$$

possiamo ora proseguire la disuguaglianza precedente

$$\begin{aligned} \|x_k - \bar{x}\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=1}^m |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^2 |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^m |x_k(n) - \bar{x}(n)|^2 + \frac{4}{(m+1)^2} M \end{aligned}$$

Infine fisso $\varepsilon > 0$ e prendo $m \in \mathbb{N} : \frac{4M}{(m+1)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\bar{k} = \bar{k}(\varepsilon, m)$ tale che anche la somma troncata del primo addendo sia minore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Concludiamo che

$$\|x_k - \bar{x}\|_{\ell^2}^2 < \varepsilon$$

e dunque $x_k \rightarrow \bar{x}$ in ℓ^2

Nell'esercizio precedente abbiamo che similmente si comporterebbe anche

$$Y_\alpha = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} |x(n)|^2 < +\infty \right\} \quad \text{con } \alpha \in (0, 1)$$

Riprendendo l'operatore T definito nell'esercizio 0.2, abbiamo che $T(\ell^2) \neq \ell^2$.

Poiché T è iniettivo, definiamo $A = T^{-1}$ come $(Ax)(n) = nx(n)$. Ovviamente il dominio di A non è tutto ℓ^2 , ma

$$A : D(A) \longrightarrow \ell^2$$

$$D(A) = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

ossia Y dell'esercizio 0.2. Ma allora A è lineare ma non limitato, infatti

$$\|Ax\|_{\ell^2}^2 = \|x\|_Y^2 \not\leq C\|x\|_{\ell^2}^2$$

Corollario 0.2.3.1. *Sia X uno spazio normato. Allora*

$$\|x\| = \sup_{f \in X'; \|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

che è in realtà un massimo

Dimostrazione. Prendo $x \neq 0$, $|\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$, $\forall f \in X'$ e quindi anche

$$\sup_{f: \|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

preso ora $f \in \mathcal{F}(x)$, abbiamo che $\langle f, x \rangle = \|x\|^2$ e $\|f\|_{X'} = \|x\|$. Prendiamo ora $f_1 = \frac{f}{\|x\|}$ e dunque $\|f_1\|_{X'} = 1$ e $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$ ne consegue che il sup è un max ed è raggiunto da f_1 \square

Definizione 0.2.3: Stretta convessità

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora $(X, \|\cdot\|)$ è **strettamente convesso** se, dati $x, y \in X$

$$x \neq y \text{ e } \|x\| = \|y\| = 1 \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

Esempio 0.2.2. \mathbb{R}^2 è strettamente convesso in norma p per $p \in (1, \infty)$

Esempio 0.2.3 (Spoiler). Gli spazi di Hilbert sono strettamente convessi

Proposizione 0.2.4. *Unicità in Hahn-Banach Sia X uno spazio normato tale che X' sia strettamente convesso. Allora dato $X_0 \subseteq X$ sottospazio e $g \in X'_0$,*

$$\exists! f \in X' : f \text{ estende } g ; \|f\|_{X'} = \|g\|_{X'_0}$$

Dimostrazione. Siano f_1 e f_2 due estensioni di g . Se $g \equiv 0$ allora necessariamente $f_1 = f_2 \equiv 0$.

Assumo che $\|g\|_{X'_0} = \|f_1\|_{X'} = \|f_2\|_{X'} = 1$. Allora

$$\frac{f_1 + f_2}{2}|_{X'_0} = g \implies \left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| \geq \|g\|_{X'_0} = 1$$

allora dalla contropositiva della stretta convessità, concludiamo che $f_1 = f_2$ \square

Definizione 0.2.4: Spazio Separabile

X spazio metrico è detto **separabile** se esiste DCX tale che

1. D è numerabile
2. D è denso in X

Proposizione 0.2.5. *Se X è separabile e $M_0 \subseteq X$ allora M_0 è separabile.*

Dimostrazione. $M_0 \cap D$ è numerabile e denso in M_0 \square

Teorema 0.2.6

Sia X uno spazio normato tale che X' è separabile. Allora X è separabile.

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ numerabile e chiuso in X' . Allora

$$\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in X : |\langle f_n, x_n \rangle| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|_{X'}$$

per la definizione di norma duale.

Assumo momentaneamente che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora

$$D = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

che è numerabile in quanto unione numerabile di numerabili (insiemi $\{\sum_{i=1}^n \alpha_k x_k, \alpha_k \in \mathbb{Q}\} \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$ per n fissato).

Mostriamo ora la densità. Consideriamo l'insieme

$$D = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

e chiaramente $\overline{D} = \overline{Y}$ dunque dobbiamo solo dimostrare $\overline{Y} = X$. Mostriamo la condizione equivalente che se $f \in X'$ e $f \equiv 0$ su Y , allora $f \equiv 0$ su tutto X . A tal scopo fissiamo $\varepsilon > 0$ e troviamo $f_n \in X'$ tale che (con $\|x_n\| = 1$)

$$\|f_n - f\|_{X'} \leq \varepsilon \implies \frac{1}{2} \|f_n\|_{X'} \leq |\langle f_n, x \rangle| = |\langle f_n - f, x_n \rangle + \langle f, x_n \rangle| \leq \|f_n - f\|_{X'} \leq \varepsilon$$

ma allora

$$\|f\|_{X'} \leq \|f_n - f\|_{X'} + \|f_n\|_{X'} \leq 3\varepsilon$$

e per arbitrarietà di ε concludiamo che $f \equiv 0$ su X

Il caso complesso è analogo, ma prendendo $\alpha_k \in \mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$. □

Esempio 0.2.4. c_{00} è denso in ℓ^p per $p \in [1, +\infty)$. Allora preso

$$D = \{x \in c_{00} : x(n) \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

si ha che $\overline{D} = \overline{c_{00}} = \ell^p$

Esercizio 0.2.8

Mostrare che c_0 e c sono separabili con la $\|\cdot\|_\infty$

Proposizione 0.2.7. ℓ^∞ *non* è separabile

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che se D è un sottoinsieme numerabile di ℓ^∞ allora non può essere denso. Sia $D = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ora consideriamo $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dato da

$$x(n) = \begin{cases} 1 + y_n(n) & |y_n(n)| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dunque chiaramente $\|x\|_\infty \leq 2$ e in particolare $x \in \ell^\infty$ ma allora

$$\|x - y_k\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y_k(n)| \geq |x(k) - y_k(k)| \geq 1$$

dove l'ultima disuguaglianza è perché se $|y_k(k)| \leq 1 \implies |x(k) - y_k(k)| = 1$ e se $|y_k(k)| > 1$ allora $|x(k) - y_k(k)| = |y_k(k)|$.

Concludiamo che D non può essere denso in ℓ^∞ e dunque ℓ^∞ non è separabile. □

0.3 Forme geometriche di Hahn-Banach

Ora supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sia X uno spazio normato e $f \in X'$. Allora un iperpiano è definito come $\ker f$. Se vogliamo generalizzare a iperpiani non sottospazi vettoriali, possiamo prendere, preso un $\alpha \in \mathbb{R}$, lo spazio

$$H = \{x \in X : \langle f, x \rangle = \alpha\} =: [f = \alpha]$$

Allora due insiemi $A, B \subseteq X$ sono separati in senso largo da $[f = \alpha]$ se

$$f(x) \leq \alpha \forall x \in A$$

$$f(x) \geq \alpha \forall x \in B$$

e dico che l'iperpiano $[f = \alpha]$ separa in senso stretto A e B se esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \forall x \in A$$

$$f(x) \geq \alpha + \varepsilon \forall x \in B$$

Teorema 0.3.1: Hahn-Banach, prima forma geometrica

Sia X spazio normato, $A, B \subseteq X$ convessi, non vuoti e disgiunti. Allora se A è aperto esiste $f \in X'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $[f = \alpha]$ separa A e B in senso largo

Osservazione. Non è migliorabile (avere senso stretto) neanche nel caso a dimensione finita. Ad esempio su \mathbb{R} posso avere $A = \{x > 0\}$ e $B = \{x \leq 0\}$ che sono separati da $\{0\}$ ma solo in senso largo.

Definizione 0.3.1: Funzionale di Minkowski

Sia X uno spazio normato. C aperto convesso che contiene lo 0. Sia

$$p(x) = \inf \left\{ r > 0 : \frac{x}{r} \in C \right\} \text{ il funzionale di Minkowski}$$

viene anche detto *gauge di C*.

Buona definizione. $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definito. Poiché C è aperto e $0 \in C$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0) \subseteq C$, ossia $\|x\| \leq \varepsilon \implies x \in C$. Fissato ora $x \in X$, allora preso $r = \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ abbiamo che $\frac{\|x\|}{r} = \varepsilon$ e dunque $\frac{x}{r} \in C$.

Dunque l'insieme di cui si fa l'inf è non vuoto. \square

Lemma 0.3.2: Proprietà del funzionale di Minkowski

Il funzionale di Minkowski p ha diverse proprietà

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda > 0$
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$
3. $\exists m > 0 : 0 \leq p(x) \leq m\|x\|$ per ogni $x \in X$
4. $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$

Dimostrazione. 1. ovvio

3.

$$\exists R > 0 : \overline{B}_R(0) \subseteq C, \text{ cioè } \forall x \in X \setminus \{0\}, \quad R \frac{x}{\|x\|} \in C$$

dunque $p(x) \leq \|x\|/R$ per ogni $x \in X$

4. Sia $x \in C$, trovo $\varepsilon > 0$ tale che $(1 + \varepsilon)x \in C$ poiché C è aperto. Allora $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Viceversa se $p(x) < 1$, allora esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che $\frac{x}{\alpha} \in C$. Ma allora per la convessità di C e poiché $0 \in C$, anche $\alpha \frac{x}{\alpha} + (1 - \alpha)x \in C$ e dunque $x \in C$

2. Prendo $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$. Allora

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C$$

(infatti $p(x) + \varepsilon > p(x)$). Ora poiché C è convesso, $\forall t \in (0, 1)$

$$t \frac{x}{p(x) + \varepsilon} + (1 - t) \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C$$

preso ora $t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$, quindi $1 - t = \frac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$ abbiamo che

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C$$

Ne consegue (da 4. o dalla definizione) che

$$p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

e per arbitrarietà di ε segue la sottolinearità $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

□

Abbiamo detto dunque che p è una seminorma. Cosa dovremmo aggiungere per renderla una norma? Serve che sia omogenea anche per $\lambda \leq 0$, dunque vogliamo $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ e inoltre vorremmo che $p(x) = 0 \iff x = 0$.

Per la prima abbiamo che se $\lambda < 0$ allora $p(\lambda x) = p(-\lambda(-x)) = |\lambda|p(-x)$. Vogliamo dunque che $p(-x) = p(x)$. Abbiamo però che

$$p(-x) = \inf\{r > 0 : -\frac{x}{r} \in C\} = \inf\{r > 0 : -x \in rC\}$$

Una proprietà dunque che renderebbe l'uguaglianza vera (p “pari” diciamo) sarebbe avere che se $x \in C$, allora $-x \in C$. Per poter avere inoltre che $p(x) = 0 \iff x = 0$ dobbiamo anche richiedere che C sia limitato. In tali ipotesi in realtà p non è solo una norma ma è equivalente a $\|\cdot\|_X$.

Proposizione 0.3.3. *Se C aperto convesso non vuoto e limitato è tale che $x \in C \iff -x \in C$, allora $\exists m_2 > 0$ tale che $\|x\| \leq m_2 p(x)$ per ogni $x \in X$*

Dimostrazione. Sappiamo che $\exists R > 0 : C \subseteq B_R(0)$. Prendo ora $x \in X \setminus \{0\}$. Sia ora $0 < \bar{r} = \|x\|/R$. Allora per $r < \bar{r}$,

$$r < \frac{\|x\|}{R} \implies \frac{\|x\|}{r} > R \implies \frac{x}{r} \notin C$$

Sappiamo che $p(x) \geq \|x\|/R$ per ogni $x \in X$. Infatti se per assurdo $p(x) < \|x\|/R$ allora esisterebbe \tilde{r} tale che $\frac{x}{\tilde{r}} \in C$ e $\tilde{r} < \|x\|/R \implies \frac{x}{\tilde{r}} \notin C$.

Abbiamo dunque che $R =: m_2$

□

In particolare, se $C = B_1(0)$, allora $p(x) = \|x\|$. Infatti ovviamente $p(x) \geq \|x\|$ perché $B_1(0) \supseteq C$.

Sia ora $X = \ell^2$. Sia $C = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : |x(n)| \leq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}\}$. Allora

1. $C \neq \emptyset$, C è chiuso in ℓ^2 e C è convesso.

Infatti $0 \in C$. Siano $x_1 \in C$ e $x_2 \in C$, allora

$$|tx_1(n) + (1-t)x_2(n)| \leq t|x_1(n)| + (1-t)|x_2(n)| \leq \frac{t}{n} + (1-t)/n = \frac{1}{n}$$

dunque C è convesso.

Infine C è chiuso perché ogni $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso.

2. $\dot{C} = \emptyset$

Mi chiedo se $\exists \varepsilon > 0$ tale che, se $x \in \ell^2$ e $\|x\|_2 < \varepsilon$, allora $x \in C$. Questo non è vero. Infatti prendendo

$$\bar{x}(n) = \begin{cases} \varepsilon & n = \bar{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

abbiamo che $\|\bar{x}\| = \varepsilon$ ma $\bar{x} \notin C$

3. C **non** è compatto in ℓ^2

4. $\exists m > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq mp(x)$

Basta dimostrare che C è limitato. Ma questo è banalmente vero perché per ogni $x \in X$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right|^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

Lemma 0.3.4 (Separazione di un convesso non vuoto da un punto esterno). *Sia $C \subseteq X$ convesso aperto non vuoto e sia $x_0 \notin C$. Allora $\exists f \in X'$ tale che*

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C$$

Dimostrazione. Sia $X_0 = \mathbb{R}x_0$. Allora X_0 è sottospazio di X . Sia $g : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(tx_0) = t$, per $t \in \mathbb{R}$. Sia p il funzionale di Minkowski di C , vogliamo dire che $g(tx_0) \leq p(tx_0)$ per ogni $t > 0$. Poiché $x_0 \notin C$, abbiamo che $p(x_0) \geq 1$. Effettivamente allora

$$g(tx_0) = t \cdot 1 \leq tp(x_0) = p(tx_0)$$

Se invece $t < 0$ banalmente $g(tx_0) \leq 0 \leq p(tx_0)$.

Ora possiamo applicare Hahn-Banach dicendo che esiste $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $f = g$ su X_0 e $f(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in X$. Per le proprietà di Minkowski, abbiamo che $f(x) \leq p(x) \leq m\|x\|$ per ogni $x \in X$. Inoltre per linearità $-f(x) = f(-x) \leq m\| -x \| = m\|x\|$. Dalle due otteniamo che

$$|f(x)| \leq m\|x\| \quad \forall x \in X$$

e dunque $f \in X'$.

Ora se $x \in C$, allora

$$f(x) \leq p(x) < 1 = g(x_0) = f(x_0)$$

□

Teorema 0.3.5: Hahn-Banach – prima forma geometrica

Sia X uno spazio normato. Siano A, B sottoinsiemi non vuoti, disgiunti e convessi. Allora se A è aperto esiste un iperpiano chiuso che separa A e B , cioè

$\exists f \in X'$ e $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B$$

Dimostrazione. Sia $C = A - B = \{x \in X : x = a - b, a \in A, b \in B\}$. Dobbiamo ora mostrare che C è convesso, aperto e non contiene lo 0. È aperto in quanto

$$C = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

unione di aperti. È convesso in quanto, se $a_i - b_i = x_i \in C$ per $i = 1, 2$, allora

$$(1-t)(a_1 - b_1) + t(a_2 - b_2) = ((1-t)a_1 + ta_2) - ((1-t)b_1 + tb_2) \in C$$

Infine chiaramente $0 \notin C$ poiché A e B sono disgiunti.

Allora $\exists f \in X'$ tale che $0 = f(0) > f(z)$ per ogni $z \in C$. Se $z = x - y$, con $x \in A$ e $y \in B$ abbiamo dunque per linearità che

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

concludiamo l'esistenza di α della tesi. \square

Teorema 0.3.6: Hahn-Banach – seconda forma geometrica

Sia X uno spazio normato, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Siano A, B convessi non vuoti e disgiunti. Allora, se A è chiuso e B è compatto, esiste un iperpiano chiuso che separa A e B strettamente, cioè

$$\exists f \in X', \exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B$$

Dimostrazione. $\forall \varepsilon > 0$, siano $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)$ e $B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0)$. Dimostro ora che A_ε e B_ε sono convessi, disgiunti e aperti. Sono convessi in quanto somma di due convessi. Sono aperti in quanto

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) \quad \text{e} \quad B_\varepsilon = \bigcup_{b \in B} B_\varepsilon(b)$$

Dimostro ora che $\exists \bar{\varepsilon} > 0 : \forall \varepsilon < \bar{\varepsilon}, A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Per assurdo supponiamo esista una successione $\varepsilon_n \rightarrow 0$ decrescente e x_n, y_n, w_n, z_n , con $x_n \in A$, $y_n \in B$, $w_n \in B_{\varepsilon_n}(0)$ e $z_n \in B_{\varepsilon_n}(0)$ tali che $x_n + w_n = y_n + z_n$. Allora

$$\|x_n - y_n\| = \|z_n - w_n\| \leq 2\varepsilon_n$$

poiché $y_n \in B$ compatto, esiste n_k sottosuccessione con $y_{n_k} \rightarrow \bar{y} \in B$. Allora

$$\|x_{n_k} - \bar{y}\| \leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - \bar{y}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Da cui $x_{n_k} \rightarrow \bar{y}$, ma $x_{n_k} \in A$ chiuso, dunque $\bar{y} \in A$. Risulterebbe che $\bar{y} \in A \cap B$ che è assurdo.

Abbiamo dunque che $\exists f \in X'$, ed $\exists \alpha > 0$ tale che

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \alpha \quad \forall z \in A_\varepsilon \\ f(z) &\geq \alpha \quad \forall z \in B_\varepsilon \end{aligned}$$

Ossia $f(x + \varepsilon w) \leq \alpha$, per ogni $x \in A$ e $w \in B_1(0)$ da cui $f(x) + \varepsilon f(w) \leq \alpha$ e poiché vale per ogni $w \in B_1(0)$ abbiamo

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \|f\|_{X'} \quad \text{e} \quad \text{analogamente} \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \|f\|_{X'}$$

\square

0.4 Funzioni convesse

Sia X uno spazio vettoriale e sia $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} + \{+\infty\}$. Dico che φ è *propria* se $D(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) \neq +\infty\} \neq \emptyset$. Dico che φ è *convessa* se, $\forall x, y \in X$ e $\forall t \in [0, 1]$,

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

Sia $C \subseteq X$ convesso non vuoto. Allora sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ \infty & x \notin C \end{cases}$$

è una funzione convessa detta *indicatrice* di C

Definizione 0.4.1: Epigrafico

Data φ una funzione, il suo *epigrafico* è

$$\text{epi}\varphi = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq \lambda\}$$

Proposizione 0.4.1. *Si ha che*

- (1) $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e solo se $\text{epi}\varphi$ è convesso
- (2) Se $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa, allora $\{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ è convesso $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
- (3) Se φ_1, φ_2 sono convesse, allora $\varphi_1 + \varphi_2$ è convessa
- (4) Se $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ sono convesse, allora $\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$ è convessa.

Esempio 0.4.1. Sia X uno spazio normato. Allora $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ data da $\varphi(x) = \|x\|$ è convessa. Infatti

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in (0, 1)$$

0.5 semicontinuità

Definizione 0.5.1: Funzione semicontinua inferiormente

Sia X uno spazio normato. $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ è *semicontinua inferiormente* se

$$\varphi(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} \varphi(y)$$

viene anche abbreviato s.c.i.

Proposizione 0.5.1 (Caratterizzazioni equivalenti). (i) φ è s.c.i. se e solo se $\text{epi}\varphi$ è chiuso in $X \times \mathbb{R}$

- (ii) φ è s.c.i. se e solo se $\{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ è chiuso per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ s.c.i.
- (iii) Se φ_1, φ_2 sono s.c.i. allora anche $\varphi_1 + \varphi_2$ lo è.
- (iv) Se $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ sono s.c.i., allora $\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$ è s.c.i..
- (v) Sia X compatto, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ s.c.i., allora φ ha minimo.

Dimostrazione di (v). S.c.i. se e solo se è continua secondo la topologia della semicontinuità inferiore, con aperti della base della forma $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$ come base. Allora se X è compatto, anche $\varphi(X)$ è compatto. I compatti di $\mathbb{R}_{s.c.i.}$ sono limitati inferiormente, poiché il ricoprimento con gli aperti della base ammette sottoricoprimento finito. \square

Teorema 0.5.2

Sia X uno spazio normato, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa, propria e s.c.i. Allora esiste $f \in X'$ e $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(x) \geq \langle f, x \rangle + c \quad \forall x \in X$$

0.6 Banach - Steinhaus

Sia $X = c_{00}$. Consideriamolo dunque con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Ci chiediamo se X è Banach. Ovviamente no perché ad esempio la successione

$$x_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$

è convergente a $\bar{x}(n) = \frac{1}{n}$ in ℓ_∞ , che però non è in c_{00} . Poiché x_k è convergente in ℓ_∞ , in particolare è di Cauchy, e dunque c_{00} non è Banach.

Definiamo ora il funzionale

$$\begin{aligned} T_n : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T_n(x) = nx(n) \end{aligned}$$

Ora fissato $x \in c_{00}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = 0$. Inoltre T_n è lineare ed è continuo poiché $|T_n x| = |nx(n)| \leq n\|x\|_\infty$. Dunque per n fissato, T_n è continuo.

Inoltre $\|T_n\|_{X'} = n$, dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{X'} = +\infty$.

Teorema 0.6.1: Banach - Steinhaus

Sia X uno spazio di Banach, Y uno spazio normato. Sia $\{T_i\}_{i \in I}$ una famiglia di operatori lineari e continui $T_i : X \rightarrow Y$.

Allora se $\forall x \in X$ esiste $m(x)$ tale che $\|T_i(x)\|_Y \leq m(x)$ per ogni $i \in I$ vale che

$$\forall x \in X \quad \exists m(x) : \sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y \leq m(x) \implies \sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty$$

in altre parole *puntualmente limitato* implica *uniformemente limitato*

Lemma 0.6.2: Baire

Sia X uno spazio metrico completo. Data $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi chiusi magri, ossia con interno vuoto, si ha che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ è magro. Equivalentemente data $\{X_n\}$ una successione di sottoinsiemi chiusi tale che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$, allora $\exists n_0 \in \mathbb{N} : X_{n_0}^\circ \neq \emptyset$

Dimostrazione di B.S.. Costruiamo

$$X_n = \{x \in X : \|T_i x\| \leq n \quad \forall i \in I\}$$

Allora

1. $\forall n, X_n$ è chiuso (controimmagine di chiuso tramite la composizione delle funzioni continue T_i e $\|\cdot\|$)

2. $X = \bigcup_n X_n$

Vogliamo mostrare che data $x \in X$, $\exists \bar{n} : x \in X_{\bar{n}}$. Sappiamo che $\exists m(x) : \|T_i(x)\| \leq m(x)$ per ogni $i \in I$, e allora basta prendere $\bar{n} \geq m(x)$.

Ora abbiamo le condizioni del lemma di Baire, e possiamo dunque dire che esiste $n_0 : X_{n_0}^\circ \neq \emptyset$. Prendo dunque $x_0 \in X_{n_0}^\circ$. Esiste dunque $\delta > 0 : B_\delta(x_0) \subseteq X_{n_0}$. In particolare $x_0 + \frac{x}{\|x\|}\delta \in X_{n_0}$ per ogni $x \neq 0$. Allora dalla definizione degli X_n segue che

$$\left\| T_i \left(x_0 + \delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq n_0$$

ora per linearità e proprietà della norma abbiamo che

$$\delta \left\| T_i \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|T_i x_0\| + \left\| T \left(x_0 + \delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq n_0 + n_0 = 2n_0$$

Finalmente concludiamo che

$$\|T_i x\| \leq \left(\frac{2n_0}{\delta} \right) \|x\| \implies \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T_i x\|}{\|x\|} \leq \frac{2n_0}{\delta}$$

□