Appunti di Geometria 2

Github Repository: `0xke/appunti/Geo2`

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Lidia Stoppino e Leone Slavich

Il corso è diviso in due parti: geometria differenziale (tenuto da Slavich) e gruppo fondamentale (tenuto dalla Stoppino). Ci sono esercitazioni di geometria differenziale. Ci sono vari libri consigliati:

- Abate - Tovena, *Curve e superfici*, Springer
- M. D. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall
- E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri
- Dispense del prof. Ghigi (sulle quali è stato disegnato il corso, almeno per la parte di geometria differenziale)

Capitolo 1

Geometria Differenziale

Il corso di geometria differenziale studierà curve e superfici in $\mathbb{R}^3$ definiti **analiticamente** tramite funzione C^∞ *(lisce)*. Studiamo la **geometria locale** e infine (verso la fine del corso) la **geometria globale**, in particolare il teorema di Gauss-Bonnet.

1.1 Definizioni e proprietà iniziali

1.1.1 Funzioni lisce

Sia $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto (anche possibilmente $a = -\infty$ o $b = +\infty$). Sia

$$C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ è continua}^{1} \text{ su } I\}$$

Definizione 1.1.1: Derivabile

Diciamo che $f \in C^0(I)$ è derivabile se $\forall x_0 \in I$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c =: f'(x_0) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ora procediamo definendo ricorsivamente le funzioni $C^k(I)$.

Definizione 1.1.2: Classe C^k

Per ogni $k \geq 1$, diciamo che $f \in C^k(I)$ se f è derivabile e $f' \in C^{k-1}(I)$

Dunque, ad esempio $f \in C^1(I)$ se f è derivabile su I e la sua derivata f' è continua su I. Detto più colloquialmente, una funzione $f \in C^k(I)$ è una funzione derivabile (almeno) k volte, e tale che la sua derivata i-esima $f^{(i)}$ è continua per ogni $i = 0, \ldots, k$.

Osservazione.

$$C_0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \cdots \supset C^i \supset C^{i+1} \supseteq \ldots$$

Definizione 1.1.3: funzioni lisce

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I) = \text{insieme delle } \textbf{funzioni lisce}$$

Teorema 1.1.1: Proprietà delle classi C^k

Sia $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Se $f, g \in C^k(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

1. $f + g \in C^k(I)$
2. $\lambda f \in C^k(I)$
3. $f \cdot g \in C^k(I)$

Dimostrazione. 1. e 2. sono semplici. Per 3. si procede per induzione su k.

Nel caso base $k = 0$ il prodotto di due funzioni continue è anch'esso una funzione continua, che è vero.

Supponiamo ora che 3. valga per $k-1$. Siano $f, g \in C^k(I)$. Allora $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ che è somma di funzioni C^{k-1} per ipotesi induttiva e perché $C^k \subset C^{k-1}$, e dunque $(f \cdot g)' \in C^{k-1}$ da cui segue che $f \cdot g \in C^k$.

Infine possiamo concludere per $k = +\infty$ perché vale per tutti i $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Dal teorema 1.1.1 segue che $C^k(I)$ è uno spazio vettoriale (con operazione di somma e moltiplicazione per scalare) e inoltre $C^k(I)$ contiene le funzioni costanti e allora $C^k(i)$ con operazioni di somma e moltiplicazione puntuale è un anello. Da queste due segue che $C^k(I)$ è una $\mathbb{R}$-algebra.

Esempio 1.1.1. Esistono funzioni **lisce** che **non** sono **analitiche**. In particolare esistono funzioni lisce che sono nulle su un aperto ma non nulle dappertutto (differentemente da quanto succede sulle funzioni olomorfe). Un esempio di tale funzione è

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Questa è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ che non può essere analitica perché contraddirebbe il teorema del prolungamento. Similmente si possono costruire funzioni costanti in

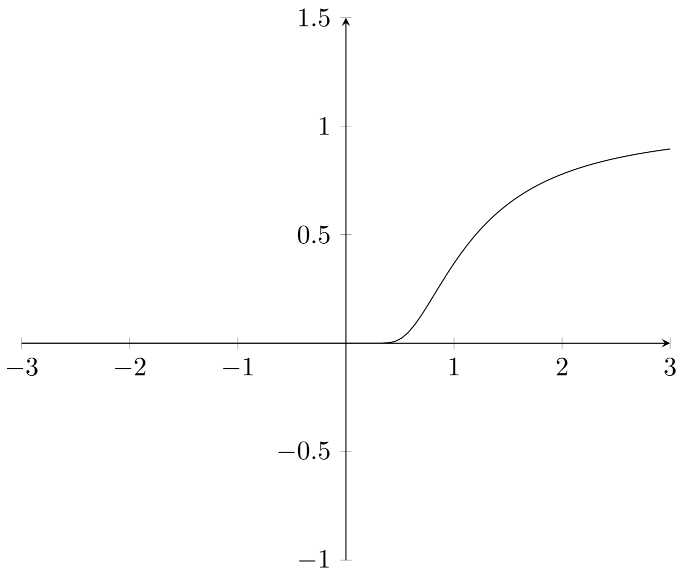

Figura 1.1: Grafico della funzione $f(x)$ dell'esempio 1.1.1

aperti, raccordate in modo C^∞ e ovviamente non analitiche.

Proposizione 1.1.2 (Composizione)**.** *La composizione di funzioni C^∞ è C^∞. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$. Allora se $f \in C^\infty(I)$ e $g \in C^\infty(J)$ e $f(I) \subseteq J$ (ossia si possono comporre), allora $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è ben definita e*

$$g \circ f \in C^\infty(I)$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo per $k \in \mathbb{N}$ invece che $k = \infty$, segue naturalmente il caso enunciato. Per $k = 0$ è ovvio.

Supponiamo che valga per $k - 1$. Allora siano $f, g \in C^k$ e tali che $f(I) \subseteq J$. Allora $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ che è prodotto di funzioni C^{k-1} per ipotesi induttiva e per il teorema 1.1.1 segue che $g \circ f \in C^k(I)$. □

1.1.2 Diffeomorfismi

Definizione 1.1.4: Diffeomorfismo

Un diffeomorfismo è un isomorfismo nella categoria delle funzioni lisce (su $\mathbb{R}$ nel nostro caso).

Informalmente, un diffeomorfismo è un omeomorfismo C^∞.

Definizione 1.1.5: Diffeomorfismo

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti in $\mathbb{R}$. Allora $f : I \to J$ è un **diffeomorfismo** se

1. $f \in C^\infty(I)$
2. f è biettiva
3. $f^{-1} \in C^\infty(J)$

Osservazione. La terza condizione **non** è ridondante. Infatti sia $I = J = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^3$ che è chiaramente C^∞ e biunivoca. Tuttavia $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0, poiché $f'(0) = 0$ e ${f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ se $f(x) = y$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che ${f^{-1}}'(y)$ sia ben definita.

Osservazione. Se I e J sono intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e $f : I \to J$ è diffeomorfismo, allora $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Infatti sappiamo che

$${f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad f(x) = y \quad \forall x \in J \tag{1.1.1}$$

dunque $f'(x)$ non può essere nullo, poiché significherebbe che f^{-1} non è derivabile in $y = f^{-1}(x)$.

Lemma 1.1.3. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Allora $f(I) = J$ è un intervallo aperto e $f : I \to J$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia f come nell'enunciato. Allora $f' : I \to \mathbb{R}$ è continua su I e non si annulla mai. Segue che f' ha segno costante su I ($f' > 0$ oppure $f' < 0$).

Assumiamo $f' > 0$ su I. Allora f è strettamente crescente e dunque iniettiva. Allora $f : I \to f(I) =: J$ è biettiva. Inoltre J è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$. Infatti è chiaramente intervallo (è connesso) in quanto immagine continua di un connesso (intervallo). Sia ora $y_0 \in J$ e sia $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = y_0$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$. Poiché f è strettamente crescente, segue che

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$$

sapendo già che J è un intervallo, segue che

$$I \supseteq [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)] \text{ è un intorno di } y_0$$

Rimane solo da vedere che la funzione $f^{-1} : J \to I$ è C^∞. Notiamo intento che f^{-1} è continua, poiché f è aperta. Inoltre sappiamo che f^{-1} è derivabile poiché è l'inversa di una funzione derivabile con derivata e vale l'equazione (1.1.1) per ogni $y \in J$.

Sia $u : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definita da $u(x) = 1/x$ è un diffeomorfismo e da 1.1.1 abbiamo che

$$f^{-1\prime} = u \circ f' \circ f^{-1}$$

e quindi se assumiamo induttivamente che se $f^{-1} \in C^k$ allora ne consegue dalla proposizione 1.1.2 che $f^{-1\prime} \in C^k$ e dunque $f^{-1} \in C^{k+1}$

□

1.1.3 Curve

Definizione 1.1.6: Curva parametrizzata

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una funzione $t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ con I intervallo aperto. Allora se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono funzioni lisce la funzione α è detta **curva** parametrizzata in $\mathbb{R}^3$

In generale se una funzione $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ verrà chiamata *funzione vettoriale* e ha come componenti n *funzioni scalari* $a_i : I \to \mathbb{R}$. Con questa terminologia allora una curva parametrizzata è una funzione vettoriale in $\mathbb{R}^3$ con componenti $C^\infty(I)$.

Esempio 1.1.2 (Retta in $\mathbb{R}^3$)**.** Ovviamente in forma parametrica

$$\alpha(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \quad ; \quad \mathbf{p}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ fissati e } t \in \mathbb{R}$$

e dunque $\alpha_1(t) = p_{0_1} + tv_1$ e simili per le altre due componenti, e sono tutte funzioni lisce.

Esempio 1.1.3. In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ è una circonferenza di raggio $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Una possibile parametrizzazione è

$$\alpha(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

In questo caso avremmo potuto prendere anche $I = [0, 2\pi]$, non è un problema che α non sia iniettiva

La definizione 1.1.6 è molto generale e non richiede che la curva sia come ci piacerebbe immaginarcela. Infatti anche se la curva è C^∞, possiamo costruirne una che abbia un punto angoloso, anche se ha parametrizzazione C^∞. Un esempio è visto nell'esempio 1.1.5. Inoltre vorremmo avere una definizione più bella di curva, che dipenda meno dalla parametrizzazione scelta.

Definizione 1.1.7: Vettore tangente

Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, fissato un punto $t \in I$, definiamo il **vettore tangente** ad α al tempo t come

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \\ \alpha_3'(t) \end{pmatrix}$$

Osservazione. Intuitivamente (nella visione cinematica della curva parametrizzata), il vettore tangente rappresenta la velocità della particella che si muove lungo la curva

Osservazione. Una retta ha tante parametrizzazioni diverse

Fissiamo due diverse parametrizzazioni della stessa retta r:

$$\alpha(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \quad ; \quad \beta(t) = \mathbf{q}_0 + t\mathbf{w}$$

Allora α e β definiscono la stessa retta se e solo se $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w} \parallel \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0$ sono paralleli. Equivalentemente

$$\mathbf{q}_0 = \alpha(t_0) \quad e \quad \mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$$

ma allora

$$\beta(s) = \mathbf{q}_0 + s\mathbf{w} = \alpha(t_0) + s(\lambda\mathbf{v}) = \mathbf{p}_0 + t_0\mathbf{v} + \lambda s\mathbf{v} = \mathbf{p}_0 + (t_0 + \lambda s)\mathbf{v} = \alpha(t_0 + \lambda s)$$

ossia $\beta = \alpha \circ h$ con $h(s) = t_0 + \lambda s$ è una funzione liscia con derivata mai nulla, dunque un diffeomorfismo. Questo motiva la seguente definizione

Definizione 1.1.8: Riparametrizzazione

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e $h : J \to I$ un diffeomorfismo. Allora $\beta := \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^3$ è una **riparametrizzazione** di α

Osservazione. $h' = 0$ significa che $\dot{\beta}(t) = 0 \iff \dot{\alpha}(t) = 0$. Se $h' > 0$ allora la curva viene percorsa nello stesso verso.

A noi interessano le curve parametrizzate *a meno di riparametrizzazione*. Questo suggerisce di introdurre una classe di equivalenza sulle curve parametrizzate

Definizione 1.1.9: Equivalenza tra curve

Siano $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ curve parametrizzate. Allora α e β sono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo $h : J \to I$ tale che $\beta = \alpha \circ h$. In altre parole α e β sono **equivalenti** se e solo se β è una riparametrizzazione di α.
La notazione che si usa è allora $\alpha \sim \beta$

Nota. La relazione di equivalenza $\sim$ è una relazione di equivalenza. Infatti è ovviamente simmetrica per il diffeomorfismo $t \mapsto t$, è simmetrica mediante il diffeomorfismo h^{-1} ed è transitiva perché la composizione di due diffeomorfismi è un diffeomorfismo.

Definizione 1.1.10: Curve geometriche

L'insieme delle curve geometriche è l'insieme delle classi di equivalenza delle curve parametrizzate rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ di riparametrizzazione.

Per ogni curva geometrica, vogliamo trovare una curva parametrizzata in parametrizzazione "canonica".

Definizione 1.1.11: Parametrizzazione per lunghezza d'arco

Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, α è detta **parametrizzata per lunghezza d'arco** (o *parametrizzata per ascissa curvilinea*) se

$$\|\dot{a}(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$$

Ora la questione è capire se è possibile riparametrizzare una curva in modo che abbia parametrizzazione per lunghezza d'arco. Per quanto osservato prima è necessario che $\dot{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$, infatti $\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(t) \cdot h'(s)$. Vogliamo ora mostrare che questa condizione è sufficiente.

Definizione 1.1.12: Curva regolare

Una curva parametrizzata $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ si dice **regolare** se $\alpha(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$

Teorema 1.1.4: regolare $\iff$ $\exists$ riparam. per lunghezza d'arco

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare. Allora $\exists h : J \to I$ diffeomorfismo tale che $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}$ è una parametrizzazione per lunghezza d'arco.

Prima di procedere alla dimostrazione facciamo una piccola digressione sulle lunghezze di una curva. Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata. Fisso $[c, d] \subseteq I$ intervallo chiuso. Allora l'*arco di curva* $\alpha|_{[c,d]} : [c, d] \to \mathbb{R}$ ha lunghezza che si calcola come

$$L(\alpha|_{[c,d]}) = \int_c^d \|\dot{\alpha}(\tau)\| \, d\tau$$

per continuità della norma l'integranda è continua e dunque integrabile. In particolare le somme di Riemann di questo integrale corrispondono alle lunghezza delle curve poligonali che approssimano la curva, il sup di esse è dunque il valore cercato.

Dimostrazione del teorema 1.1.3. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Fisso $t_0 \in I$ e definisco $h : I \to \mathbb{R}$ tramite

$$h(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(\tau)\| \, d\tau$$

allora $h(I) = J \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Inoltre $h : I \to J$ è un diffeomorfismo e $\beta = \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^3$ è una riparametrizzazione con ascissa curvilinea.

Infatti:

1. h è C^∞. Infatti $t \mapsto \|\dot{\alpha}(t)\|$ è C^∞ in quanto composizione di funzioni lisce. Infatti è radice di un valore che non è mai nullo, dunque la radice è definibile da $(0, +\infty)$ e allora C^∞.

   Allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale, h è C^∞

2. $h'(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0$, dunque h è diffeomorfismo e J è aperto.

3. $\beta = \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^3$ è C^∞ e

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(h^{-1}(s)) \cdot (h^{-1})'(s) = \frac{\dot{\alpha}(h^{-1}(s))}{h'(h^{-1}(s))} = \frac{\dot{\alpha}(h^{-1}(s))}{\|\dot{\alpha}(h^{-1}(s))\|}$$

   e dunque $\|\dot{\beta}\| = 1$

□

Il teorema 1.1.3 è la motivazione per cui sceglieremo di lavorare con curve regolari.

Esempio 1.1.4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$ è l'unione dei semiassi positivi. Allora due fatti sono veri:

1. È possibile trovare una curva parametrizzata liscia con $\alpha : I \to R^2$ tale che $\alpha(I) = C$

2. Non esiste una curva regolare tale che $\alpha(I) = C$

dunque le curve regolari sono l'oggetto giusto per studiare la geometria delle curve che appaiono geometricamente lisce.

Esempio 1.1.5 (Curva liscia con punto angoloso)**.** Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ definita da