Appunti di Algebra Superiore

Github Repository: `0xke/appunti/AlgebraSuperiore`

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)

Indice

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 1: Anello

Un **anello** $A, +, \cdot$ è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide $A, \cdot$ (cn 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + ac \quad ; \quad (b+c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione $\cdot$ è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 3. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 4 (Anello Banale)**.** L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 5 (Non comm.)**.** A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dai l'anello banale non esiste davvero)

Esempio 6. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\mathrm{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ e $\cdot$ dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\mathrm{Hom(G', G)}$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G.

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 7: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ $(aa' = 1)$.
a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile $\iff$ invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$\begin{gathered}(a'a)a'' = a'(aa'')\\ 1a'' = a'' = a' = a'1\end{gathered}$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

Definizione 8: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \setminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 9: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \setminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ $(a'a = 0)$

Osservazione. Divisore di zero a sinistra: $aa' = 0$. Invertibile a sinistra: $a'a = 1$

Definizione 10: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 11. I campi, $\mathbb{Z}$, se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall\, 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

$\square$

Definizione 12: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 13. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 14. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 15: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I, +) < (A, +)$ e $ab \in I$ $(ba \in I)$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.
Un **ideale** bilatero è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 16. Gli ideali in $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \varnothing$$

quindi A con divisione $\implies$ gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 17: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op}, con $(A^{op}, +) := (A, +)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 18 (Anello Quoziente)**.** *Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I, +$ è un anello con prodotto $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$, dove $\overline{a} := a + I \in A/I$*

Definizione 19: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \to B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

i) $f(a + a') = f(a) + f(a')$

ii) $f(aa') = f(a)f(a')$

iii) $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \to A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f' = \mathrm{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 20. *Se $f : A \to B$ è un omomorfismo allora*

1. *$A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.*
2. *$B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello*
3. *$J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\mathrm{Ker} f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale*
4. *f **suriettivo** e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale*

Osservazione. $f : A \to B$ è iniettivo $\iff \mathrm{Ker} f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \mathrm{Im} f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 21: Omomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \mathrm{Ker} f$. Allora

$$\exists! \overline{f} : A/I \to B \text{ omomorfismo tale che } \overline{f}(\overline{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
A/I \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Inoltre $\mathrm{im} \overline{f} = \mathrm{im} f$ e $\mathrm{Ker} \overline{f} = \mathrm{Ker} f / I$

Proposizione 22. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 23: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, allora $\text{im} f \cong A/\text{Ker} f$

Definizione 24: Ideale massimale (sinistro / destro)

Un ideale J (sinistro/destro) di A è massimale se $\forall I$ ideale (sinistro/destro) tale che $J \subseteq I \subseteq A$, allora $I = J$ o $I = A$

Osservazione. Esiste sempre un ideale (sinistro/destro) massimale (*lemma di Zorn*)

Definizione 25

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i b_i : n \in N, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 26: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è principale.

Esempio 27. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 28. $\mathbb{Z}$ (con ideali $nZ = (n)$)

Esempio 29. $K[X]$ con K campo

1.2 Richiami sui Moduli

Definizione 30: A-modulo

Un A-modulo (di default sinistro) M è un gruppo abeliano $(M, +)$ con una moltiplicazione per scalare definita da

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \in M \end{aligned}$$

e tale che, $\forall a, b \in A$ e $\forall x, y \in M$:

1) $a(x + y) = ax + ay$
2) $(a + b)x = ax + bx$
3) $(ab)x = a(bx)$
4) $1x = x$

Osservazione. Se $\mathbb{K}$ è un campo, allora un $\mathbb{K}$-modulo è uno spazio vettoriale.

Osservazione. Se $(M,+)$ è un gruppo abeliano, data $f : A \times M \to M$ posso definire $\alpha : A \to M^M$ come $\alpha(a) = (x \mapsto ax)$, e quindi le proprietà precedenti si traducono in

1. $\alpha(a)(x+y) = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$ e dunque $\alpha(a)$ è omomorfismo di gruppi, dunque $\alpha(A) \subseteq \mathrm{End}(M)$
2. $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ dunque $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di gruppi
3. $\alpha(a) \circ \alpha(b) = \alpha(ab)$
4. $\alpha(1) = \mathrm{id}_M$

Dalla 2,3,4 $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di anelli.

Teorema 31: Secondo teorema di isomorfismo

Sia M un modulo, con $M', M'' \subseteq M$ sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

Dimostrazione. Si prenda $f : M' \to (M' + M'')/M''$ composizione dell'inclusione di M' in $M' + M''$ e della proiezione a quoziente, dunque è un omomorfismo.

Allora $\mathrm{Ker} f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$.

Preso $y \in (M' + M'')/M''$, $y = x' + x'' + M'' = x' + M'' = f(x')$ dunque f è suriettiva. Dal primo teorema di isomorfismo segue la tesi. ☐

Teorema 32: Terzo teorema di isomorfismo

Dati $M'' \subseteq M' \subseteq M$ sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M'$$

Dimostrazione. Sia f la composizione delle due proiezioni a quoziente, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \mathrm{Ker} f \iff \pi(x) \in \mathrm{Ker}\pi' = M'/M''$$

dunque $\mathrm{Ker} f = M'$ da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo. ☐

Proposizione 33.

1. *Sia A un anello, allora un A-modulo M è ciclico se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro tale che $M \cong A/I$*
2. *M è semplice se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro massimale tale che $M \cong A/I$*

Dimostrazione.

1. $(\impliedby)$ A/I è ciclico (generato da $\bar{1}$). Viceversa per $(\implies)$ so che $M = Ax$ per un qualche $x \in M$. Considerata $f :_A A \to M$ data da $a \mapsto ax$, $\mathrm{Ker} f$ è sottomodulo di A, ovvero ideale sinistro. Concludo per il primo teorema di isomorfismo.
2. Se M è semplice allora $\forall 0 \neq x \in M$, $M = Ax$, dunque M è ciclico e per il punto 1. esiste I ideale sinistro tale che $M \cong A/I$. La proposizione si riduce a dire che A/I è semplice se e solo se I è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $I \subseteq J \subseteq A$ ideale sinistro. Allora $A/I \neq 0 \iff I \neq A$ e gli unici sottomoduli di A/I sono I/I e A/I, ossia gli unici ideali sinistri J tali che $I \subseteq J \subseteq A$ sono I e A.

☐

Osservazione. Con il lemma di Zorn si dimostra che $A \neq 0 \implies$ esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

1.2.1 Prodotti

Definizione 34: Prodotto

Supponiamo di avere M_λ A-moduli, per $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è un } A\text{-modulo detto } \textbf{prodotto} \text{ degli } M_\lambda$$

con $(x+y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$ e $(ax)_\lambda = ax_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $x, y \in M$.
$\forall \mu \in \Lambda$ esiste $p_\mu : M \to M_\mu$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ che è A-lineare e suriettivo.

Proposizione 35 (Proprietà universale del prodotto)**.**
Dati $f_\mu : N \to M_\mu$ *A-lineari* $\forall \mu \in \Lambda$*, allora esiste unico* $f : N \to M$ *A-lineare tale che* $f_\mu = p_\mu \circ f$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "f_\mu"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
M_\mu & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \arrow[l, "p_\mu"]
\end{tikzcd}$$

Esercizio 36

Dimostrare la proprietà universale del prodotto

Definizione 37: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli M_λ è

$$M' := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda > 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste

$$\begin{aligned} i_\mu : M_\mu &\longrightarrow M' \\ x &\longmapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

che è A-lineare e iniettivo.

Proposizione 38 (Proprietà universale somma diretta)**.**

$$\begin{tikzcd}
N & \\
M_\mu \arrow[u, "f_\mu"] \arrow[r, "i_\mu"'] & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \arrow[ul, dashed, "\exists! f"']
\end{tikzcd}$$

Osservazione. Se $\#\Lambda < +\infty$ allora

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

Nota (zione)*.* Se $M_\lambda = M$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si denota

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M =: M^\Lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M =: M^{(\Lambda)}$$

Dati $M_\lambda \subseteq M$ sottomoduli, con $\lambda \in \Lambda$, sia

$$f : \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$$

l'omomorfismo indotto dalle inclusioni $M_\lambda \overset{i_\lambda}{\hookrightarrow} M$, allora

$$\mathrm{im} f =: \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \subseteq M \text{ è sottomodulo}$$

Inoltre f è iniettiva se e solo se $M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\mu\}} = 0$ per ogni $\mu \in \Lambda$ e in tal caso f induce un isomorfismo tra $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e si può scrivere $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ per indicare il sottomodulo di M

Definizione 39: Linearmente indipendente, base, modulo libero

Sia $U \subseteq M$ un insieme, con M A-modulo. Si dice che U è A-linearmente indipendente se dati $x_1, \dots, x_n \subseteq U$ distinti

$$a_1, \dots, a_n \in A \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

U è detta **base** di M se è linearmente indipendente e genera M, ossia $M = AU$. Si dice che M è **libero** se ammette una base

Esempio 40. Per ogni Λ, $A^{(\Lambda)}$ è libero con base $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dove, per ogni $\lambda \in \Lambda$,

$$(e_\lambda)_i = \begin{cases} 1 & \lambda = i \\ 0 & \lambda \neq i \end{cases}$$

Proposizione 41. *Siano L, M A-moduli, con L libero con base $\{l_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tale che $l_\lambda \neq l_\mu$ se $\lambda \neq \mu$, allora*

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \exists! f : L \to M \ A\text{-lineare t.c. } f(l_\lambda) = x_\lambda$$

Corollario 42. *Un A-modulo è libero se e solo se è isomorfo a $A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ*

Dimostrazione.

$\implies$ M libero con base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ con $x_\lambda \neq x_\mu$ se $\lambda \neq \mu$. Allora per la proposizione

$$\exists! f : A^\Lambda \to M \ A\text{-lineare t.c. } f(e_\lambda) = x_\lambda$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\mathrm{im} f = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle_A = M$ e f è iniettivo perché gli x_λ sono linearmente indipendenti.

$\impliedby$ ovvio

□

Corollario 43. *Ogni A-modulo è insomorfo a un quoziente di un modulo libero ($A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ).*

Inoltre un A-modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n, $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Sia $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un insieme di generatori di un modulo M. Per la proposizione $\exists! f : A^{(\Lambda)} \to M$ A-lineare tale che $fl_\lambda = x_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\mathrm{Im} f = M$ e dunque per il primo teorema di isomorfismo $M \neq A^{(\Lambda)}/\mathrm{ker} f$.

Per la seconda parte se M è finitamente generato posso scegliere Λ finito e viceversa $M \neq A^n/N$ è finitamente generato perché A^n lo è e $\pi : A^n \to A^n/N$ è un omomorfismo suriettivo.

□

Proposizione 44. *A è con divisione se e solo se ogni suo A-modulo è libero*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ (complementi di algebra)

$\Longleftarrow$ Sia M un A-modulo semplice. Per ipotesi è libero, allora $M \cong A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ. Ma se $\#\Lambda > 1$ allora $A^{(\Lambda)}$ non è semplice ($A \subseteq A^{(\Lambda)}$ è un sottomodulo non banale). Inoltre $\Lambda \neq \varnothing$ ($A^{(\varnothing)} = \{0\}$ non è semplice).

Ne consegue che $M \cong A$ e dunque A è con divisione

□

Esempio 45. Con $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non è libero

Si può dimostrare che se A è con divisione, allora tutte le basi di un A-modulo (libero) M hanno la stessa cardinalità, che viene detta rango e indicata con $\mathrm{rk}_A M$.
In generale non tutte le basi di un A-modulo libero hanno la stessa cardinalità, esistono infatti anelli A non banali tali che $^A_A{\cong}_A A^n$ per *ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 46. Sia $A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ con $\mathbb{K}$ campo e $\dim_{\mathbb{K}}(V) = +\infty$

Si dimostra che se $A \to B$ è omomorfismo di anelli e il rango dei B-modulli liberi è ben definito allora anche il rango degli A-moduli liberi è ben definito. Di conseguenza se $A \neq 0$ è commutativo allora il rango degli A-moduli liberi è ben definito ($\exists I \subseteq A$ ideale massimale e $\pi : A \to A/I$ omomorfismo con A/I campo)

1.2.2 restrizione degli scalari

Siano A, B anelli, con $f : A \to B$ omomorfismo di anelli. Allora se M è un B-modulo allora M è anche un A-modulo con $ax := f(a)x$. Si dice allora che $_AM$ è ottenuto da $_BM$ per **restrizione degli scalari** attraverso f.
Inoltre se $M' \subseteq M$ è B-sottomodulo allora è anche un A-sottomodulo e se $g : M \to N$ è B-lineare allora g è anche A-lineare.
Prima della prossima definizione ricordiamo che il **centro** di un anello è sottoanello, con il centro l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri elementi e indicato con $Z(A)$,

$$Z(A) := \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$$

Definizione 47

Sia A commutativo. Allora una A-algebra è un omomorfismo di anelli $f : A \to B$ tale che $\mathrm{im} f \subseteq Z(B)$

Se f è evidente si dice che B è una A-algebra

Esempio 48. $M_n(A)$ è una A-algebra con $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Esempio 49. Se $A = \mathbb{Z}$ per ogni B anello l'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \to B$ è una $\mathbb{Z}$-algebra. Infatti l'omomorfismo unico $\mathbb{Z} \to Z(B)$ deve essere lo stesso di $\mathbb{Z} \to B$

Definizione 50: Morfismo di A-algebre

Siano $f : A \to B$, $g : A \to C$ A-algebre. Un (omo/iso/…)morfismo di A-algebre da f a g è $h : B \to C$ (omo/iso/…)morfismo di anelli tale che $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

Esempio 51. Ogni omomorfismo di anelli è omomorfismo di $\mathbb{Z}$-algebre.

Esempio 52. Sia $f : A \to B$ una A-algebra. Allora $\forall I \subseteq B$ ideale B/I è A-algebra con $\pi \circ f$

Osservazione (**motivazione della definizione**). Se $f : A \to B$ A-algebra, allora B è un anello e A-modulo (per restrizione degli scalari) tale che

$$a(bb') = (ab)b' = b(ab')$$

Lemma 53. *Sia* $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *una successione esatta di* A*-moduli. Siano* $f' : A^m \to M'$ *e* $f'' : A^n \to M''$ *omomorfismi. Allora esiste un diagramma commutativo con righe esatte*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. □

Proposizione 54. *Sia* $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *esatta di* A*-moduli. Allora*

1. $M f.g. \implies M'' f.g.$
2. $M', M'' f.g. \implies M f.g.$
3. $M', M'' f.p. \implies M f.p.$
4. $M f.g., M'' f.p. \implies M' f.g.$
5. $M' f.g., M f.p. \implies M'' f.g.$

Dimostrazione.

1. già visto
2. In esercizio la dimostrazione diretta. In alternativa possiamo applicare il lemma 53. Infatti esistono $f' : A^m \to M'$ e $f'' : A^n \to M''$ omomorfismi suriettivi e per il lemma 53 il diagramma

   $$\begin{tikzcd}
   0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
   0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0
   \end{tikzcd}$$

   commuta. Applicando ora il lemma del serpente otteniamo la successione esatta

   $$\text{coKer} f' = 0 \to \text{coKer} f \to 0 = \text{coKer} f'' \implies \text{coKer} f = 0 \implies M f.g.$$

3. Si può fare una dimostrazione simile a quella precedente e applicando il lemma del serpente troviamo la successione esatta

   $$0 \to \text{Ker} f' \to \text{Ker} f \to \text{Ker} f'' \to 0 = \text{coKer} f'$$

   per il punto 1. M è finitamente generato e dunque M è finitamente presentato.

4. M'' *f.p.* $\implies$ $\exists$ successione esatta $A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{h} M'' \to 0$. Esiste dunque il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A^m \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & A^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

infatti voglio f tale che $p \circ f = h$ e posso come prima (esercizio). allora per il lemma del serpente trovo che

$$0 \to \mathrm{coKer} f' \to \mathrm{coKer} f \to 0 = \mathrm{coKer}_{\mathrm{id}_{M''}}$$

è una successione esatta, e dunque $\mathrm{coKer} f' \cong \mathrm{coKer} f = M/\mathrm{Im} f$ per cui

$$0 \to \mathrm{Im} f' \to M' \to \mathrm{coKer} f' \to 0$$

è esatta. Concludiamo che $\mathrm{Im} f' \cong A^m/\mathrm{Ker} f'$ e dunque è *f.g.*, da cui anche M' è finitamente generato per il punto 1.

5. M è finitamente generato, dunque M'' è finitamente generato per il punto 0. Come prima $\exists\ A^m \to A^n, A^n \to M''$ omomorfismi suriettivi e trovo il diagramma del lemma 53 e applicando il lemma del serpente ottengo la successione esatta

$$\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Ker} f'' \to 0 = \mathrm{coKer} f'$$

Sia ora $f : A^{m+n} \to M$ suriettiva, allora

$$0 \to \mathrm{Ker} f \to A^{m+n} \to M \to 0$$

è esatta, A^{m+n} è finitamente generata, M è finitamente presentato, dunque $\mathrm{Ker} f$ è f.g., quindi per il punto 3. $\mathrm{Ker} f''$ è f.g. e per il punto 0. M è f.p.

□

Esercizio 55

Dimostrare il punto 1. della dimostrazione precedente direttamente.

Corollario 56. *Sia $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Allora M è f.g. / f.p. se e solo se M_i è f.g. / f.p. per ogni i.*

Dimostrazione. La successione $0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to M \to M_n \to 0$ è esatta, dunque

$\implies$ unsando induzione su n e i punti 1. e 2. della proposizione precedente

$\impliedby$ M_n è f.g. per il punto 0., ed è f.p. per il punto 4.

□

Osservazione. per il punto 3., se M è f.p. allora ogni $A^n \xrightarrow{p} M \to 0$ esatta si estende a

$$A^m \to A^n \xrightarrow{p} M \to 0$$

Osservazione. Sia A non noetheriano. Allora $\exists M$ A-modulo f.g. non noetheriamo, ad esempio $M = A$, ossia $\exists M' \subseteq M$ sottomodulo non f.g. e in tal caso anche quando M è finitamente presentato, ad esempio nel caso $M = A$, M/M' non è f.p. perché contraddirrebbe il punto 3.

Uno può chiedersi dato un modulo se i suoi sottomoduli finitamente generati siano anche moduli finitamente presentati. Quesste non è in generale vero ma motiva la seguente definizione

Definizione 57: Modulo coerente

Uno modulo M è detto **coerente** se è finitamente generato e tutti i suoi sottomoduli finitamente generati sono finitamente presentati.

Osservazione. Chiaramente essendo $M \subseteq M$ un sottomodulo, se è coerente è anche f.p.

Definizione 58: Anello coerente

Un anello A è **coerente** (a sinistra) se ${}_A A$ è A-modulo coerente (ossia tutti gli ideali sinistri f.g. di A sono f.p.)

Osservazione. Se A è noetheriano e M è un A-modulo, allora

$$M \text{ coerente} \iff M \text{ f.p.} \iff M \text{ f.g.} \iff M \text{ noetheriano}$$

in particolare A è coerente.

Dimostrazione. Sappiamo già che M noetheriano se e solo se M f.g. Resta da dimostrare dunque che M noetheriano se e solo se M è coerente. So che $M' \subseteq M$ f.g. è noetheriano (perché M lo è). Allora esiste la successione esatta

$$0 \to \mathrm{Ker} p \to A^n \xrightarrow{p} M' \to 0$$

Ora poiché A è noetheriano, anche A^n lo è, e dunque $\mathrm{Ker} p$ è noetheriano, dunque $\mathrm{Ker} p$ è f.g. e infine M' è f.p. ☐

Osservazione. Sia A coerente non noetheriano, allora ${}_A A$ è coerente non noetheriano

Esempio 59. Sia A non noetheriano, $I \subseteq A$ ideale sinistro non f.g., allora A/I è f.g. non f.p. e A/I può anche essere notheriano.

Un esempio è $A = \mathbb{K}[X_n | n \in \mathbb{N}]$, $I = (X_n | n \in \mathbb{N})$, $A/I = \mathbb{K}$

Osservazione. Sia $f : M \to N$ A-lineare, con M, N finitamente generati. Allora $\mathrm{Im} f \cong M/\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{coKer} f \cong N/\mathrm{Im} f$ sono finitamente generati (punto 0. della proposizione) ma non necessariamente anche $\mathrm{Ker} f$ se A è non noetheriano.

Proposizione 60. *Sia* $0 \to M' \xrightarrow{i} m \xrightarrow{p} M'' \to 0$ *esatta di A-moduli.*

1. *M' f.g. e M coerente, allora M'' è coerente*
2. *M', M'' coerenti, allora M è coerente*
3. *M è coerente, M'' è f.p., allora M' è coerente*

in particolare M', M, M'' sono coerenti se due di essi lo sono.

Dimostrazione.

1. M'' è f.g. per il punto 0. della proposizione 54. $N'' \subseteq M''$ è f.g., allora c'è una successione esatta

   $$0 \to M' \to N := p^{-1}(N'') \to N'' \to 0$$

   Allora N è f.g. per 1. di 54 e dunque N è f.p. perché M è coerente, da cui N'' è f.p. per 4. di 54

2. M è f.g. per 1. di 54, se $N \subseteq M$ sottomodulo finitamente generato, allora esiste la successione esatta

   $$0 \to N' := i^{-1}(N) \to N \to N'' := p(N) \to 0$$

   Allora N'' è f.g. per 0. di 54 da cui N'' è f.p. per la coerenza di M, dunque N' è f.g. per 3. di 54. Segue dalla oerenza di M' che N' è f.p. e dunque N lo è per 2. di 54

3. M' è f.g. per 3. di 54 dunque M' è coerente perché $M' \cong i(M') \subseteq M$ sottomodulo è f.g. e M è coerente.

□

Esercizio 61

mostrare che

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \text{ coerente } \iff M_i \text{ coerente } \forall i$$

Corollario 62. *Sia $f : M \to N$ A-lineare, M, N coerenti, allora* $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f, \mathrm{coKer} f$ *sono coerenti.*

Dimostrazione. $\mathrm{Im} f \cong M/\mathrm{Ker} f$ è f.g. per 0. di 54 □

Corollario 63. *Se A è coerente e M è un A-modulo f.p., allora M è coerente.*

Dimostrazione. Basta osservare che per definizione esiste una successione esatta

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \to M \to 0$$

e in particolare dunque $M \cong \mathrm{coKer} f$ e poiché A^m e A^n sono coerenti, lo è pure M □

Esempio 64. Sia A commutativo tale che $A[X_1, \ldots, X_n]$ sia coerente $\forall n \in \mathbb{N}$ (ad esempio A noetheriano, per il teorema della base di Hilbert) Allora $A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda]$ è coerente $\forall \Lambda$, anche se non è noetheriano per $\#\Lambda = +\infty$ e $A \neq 0$.

Idea della dimostrazione. Sia $I \subseteq B$ ideale f.g., ossia $I = (f_1, \ldots, f_n)$. Allora $\exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ finito tale che $f_1 \in B_0 := A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda_0]$ □

Esempio 65 (Anello non coerente)**.** Presi A e B come prima, ma supponiamo che $A = \mathbb{K}$ campo. Prendiamo dunque $J := (X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, con $\#\Lambda = +\infty$. Allora preso

$$C = B/J^2$$

non è coerente. Preso infatti ad esempio

$$I = C\overline{X_\lambda} \text{ con } \lambda \in \Lambda$$

è f.g. ma non f.p. perché c'è la successione esatta

$$0 \to J/J^2 \to C \to I \to 0$$

e J/J^2 è C-modulo annullato da J/J^2 e come $C/(J/J^2) \cong B/J \cong \mathbb{K}$-modulo ha dimensione ∞ con base $\{\overline{x_\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$

Capitolo 2

Categorie

Definizione 66: Categoria

Una **categoria** $\mathcal{C}$ è data da una classe di oggetti $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ da un insieme di morfismi da X a Y indicato con $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ e da una azione composizione di morfismi, cioè $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (anche scritto $X, Y, Z \in \mathcal{C}$) un'operazione

$$\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)(f,g) \qquad\qquad \mapsto g \circ f$$

tale che

0. $\mathcal{C}(X,Y) \cap \mathcal{C}(X',Y') \neq \varnothing \implies X = X'$ e $Y = Y'$
1. $\circ$ è associativa, cioè $\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$ e $\forall f \in \mathcal{C}(X,Y)$ e $\forall g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ e $\forall h \in \mathcal{C}(Z,W)$ allora
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
2. $\forall X \in \mathcal{C}$ esiste $1_X = \mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$ che è eleemento neutro di X cioè $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall f \in \mathcal{C}(X,Y)$,
$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

Esempio 67. La categoria degli insiemi `Set` che ha come oggetti tutti gli insiemi e $\forall X, Y \in$ `Set` i morfismi `Set`$(X,Y) = \{f : X \to Y\}$ le funzioni e $\circ$ la composizione di funzioni

Osservazione. Se ho $\mathcal{C}$ tale che valgano solo 1. e 2. e non necessariamente 0. posso ottenere la categoria $\mathcal{C}'$ che soddisfa anche 0. ponendo $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e

$$\mathcal{C}'(X,Y) := \{X\} \times \mathcal{C}(X,Y) \times \{Y\}$$

Esempio 68. Le categorie concrete, in cui gli oggetti sono insiemi con qualche struttura e i morfismi sono funzioni tra insiemi che preservano la struttura (con $\circ$ sempre la composizione di funzioni). In particolare:

- La categoria `Grp` dei gruppi, dove gli oggetti sono i gruppi e i morfismi gli omomorfismi di gruppi
- La categoria `Rng` degli anelli
- Dato un anello A, la categoria $\mathtt{A} - \mathtt{Mod}$ / $\mathtt{Mod} - \mathtt{A}$ degli A-moduli sinistri / destri
- Dato un anello commutativo A, la categoria $\mathtt{A} - \mathtt{Alg}$ delle A-algebre

- La categoria `Top` degli spazi topologici (con funzioni continue come morfismi)

Nota. Dato $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ si può indicare con $f : X \to Y$ "come fosse una funzione"

Esempio 69. Le categorie discrete, cioè tali che gli unici morfismi sono 1_X per ogni $X \in \mathcal{C}$.

Esempio 70. $\mathcal{C}$ tale che $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $\#\mathcal{C}(X, Y) \leq 1$, ottengo una relazione $\preccurlyeq$ su $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ in cui

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathcal{C}(X, Y) \neq \varnothing$$

e $\preccurlyeq$ è riflessivo (perché $\exists 1_X \in \mathcal{C}(X, X) \forall X \in \mathcal{C}$) e transitivo, perché $\exists \circ$. Ne consegue che $\preccurlyeq$ è un *preordine*

Viceversa, data una relazione di preordine $\preccurlyeq$ su un insieme (o una classe) S, ottengo una categoria $\mathcal{C}$ con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := S$ e $\forall X, Y \in S$,

$$\mathcal{C}(X, Y) := \begin{cases} \{f_{X,Y}\} & \text{se } X \preccurlyeq Y \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con l'unica composizione possibile

Esempio 71 (Categoria Vuota)**.** Prendendo $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \varnothing$

Osservazione. $\forall X \in \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ una categoria, $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X, X)$ è un monoide con $\circ$, ne consegue il prossimo esempio

Esempio 72 (Monoide)**.** Una categoria con un solo oggetto è un monoide. Viceversa ogni monoide può essere visto come categoria di un solo oggetto.

Esempio 73 (Diagrammi)**.** Possiamo definire categorie date da diagrammi, in cui si rappresentano i morfismi (non l'identità). Ad esempio:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet & \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$$

sono tre categorie diverse, rispettivamente con 2, 2, e 3 oggetti

Definizione 74: Categoria opposta

La **categoria opposta** di $\mathcal{C}$ è denotata $\mathcal{C}^{op}$ ed è definita da

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \quad \mathcal{C}^{op}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

con composizione in $\circ^{op}$ data da $f \circ^{op} g := g \circ f$

Osservazione.

$$(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$$

Esempio 75 (Categoria Prodotto)**.** Siano $\mathcal{C}_\lambda$ per $\lambda \in \Lambda$ delle categorie. Allora la categoria prodotto

$$\mathcal{C} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita da

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$$

$$\mathcal{C}((X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda)$$

$$(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \circ (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} := (g_\lambda \circ f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

Esempio 76 (Cateogoria Coprodotto)**.** La categoria coprodotto

$$\mathcal{C} := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$ l'unione disgiunta.

$$\forall X, Y \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C}(X,Y) := \begin{cases} \mathcal{C}_\lambda(X,Y) & \text{se } X, Y \in \mathcal{C}_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\circ$ ovvia.

Definizione 77: Sottocategoria

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Allora una sottocategoria $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ è data da una sottoclasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \mathcal{C}'$ da un sottoinsieme $\mathcal{C}'(X,Y) \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ tale che $\circ$ si restringe a $\mathcal{C}'$ e $1_X \in \mathcal{C}'(X,X)$ per ogni $X \in \mathcal{C}'$.
In particolare $\mathcal{C}'$ è una categoria.

Esempio 78. Se $\mathcal{C}$ è un monoide (cateogoria di un oggetto), allora le sottocategorie non vuote di $\mathcal{C}$ sono i sottomonoidi.

Definizione 79: Sottocategoria Piena

Una sottocategoria $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ si dice **piena** se $\mathcal{C}'(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{C}'$

Osservazione. Una sottocategoria piena di $\mathcal{C}$ equivale a dare una sottoclasse di $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

Esempio 80 (Gruppi Abeliani)**.** $\mathtt{Ab} \subsetneq \mathtt{Grp}$ sottocategoria piena dei gruppi abeliani. Similmente anche $\mathcal{C}\mathtt{Rng} \subsetneq \mathtt{Rng}$ sottocategoria piena degli anelli commutativi.

Oltre alle sotto-strutture sono anche importanti i quozienti, e anche qui possiamo dare una definizione astratta

Definizione 81: Congruenza

Una congruenza $\sim$ su una categoria $\mathcal{C}$ è data da una relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathcal{C}(X,Y)$ $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ tale che

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{C}, \forall f, f' \in \mathcal{C}(X,Y) \forall g, g' \in \mathcal{C}(Y,Z) \quad f \sim f', g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f'$$

equivalentemente $g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f$ e $h \circ g \sim h \circ g'$

Definizione 82: Quoziente

Sia $\sim$ una congruenza su $\mathcal{C}$, allora possiamo definire la categoria quoziente $\mathcal{C}/_\sim$ definita da

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/_\sim) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \quad (\mathcal{C}/_\sim)(X,Y) := \mathcal{C}(X,Y)/_\sim \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$$

e $\circ$ è indotta da quella di $\mathcal{C}$, ossia

$$\overline{g} \circ \overline{f} := \overline{g \circ f}$$

Esempio 83 (Omotopia)**.** Sia $\mathcal{C} = \mathtt{Top}$ e $\sim_h$ l'omotopia, ossia $f, g : X \to Y$ sono omotope se $\exists H : X \times [0,1] \to Y$ continue tali che

$$f(x) = H(x,0), \quad g(x) = H(x,1) \quad \forall x \in X$$

e si ottiene $\texttt{Toph} := \texttt{Top}/ \sim_h$

Esempio 84 (Gruppo quoziente)**.** Sia G un gruppo (visto come monoide, ossia categoria di un oggetto) e sia $H \lhd G$ e $\sim$ su G data da $a \sim b \iff aH = bH$. Allora G/N è la categoria quoziente $G/\sim$. Viceversa ogni $\sim$ congruenza su G si può scrivere in tal modo prendendo $H = \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$ (esercizio).

Definizione 85: morfismo invertibile

Sia $f : X \to Y$ un morfismo in una categoria $\mathcal{C}$. Allora esso è invertibile a sinistra (destra) se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ $(f \circ f' = 1_Y)$.

Osservazione. f è invertibile a sinistra (destra) in $\mathcal{C}$, allora f è invertibile a destra (sinistra) in $\mathcal{C}^{op}$

Definizione 86: Isomorfismo

$f : X \to Y$ è un **isomorfismo** se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f' = 1_Y$

Osservazione. f è isomorfismo se e solo se f è invertibile a destra e a sinistra.

Dimostrazione.

$\implies$ ovvio

$\impliedby$ $\exists f', f''$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f'' = 1_Y$, allora

$$f' \circ (f \circ f'') = f' = f'' = (f' \circ f) \circ f''$$

e dunque f è invertibile.

In particolare dunque la f' della definizione di isomorfismo è unica e viene denotata f^{-1} □

Definizione 87

Siano $X, Y \in \mathcal{C}$. Allora X e Y sono isomorfe $(X \cong Y)$ se esiste un $f : X \to Y$ isomorfismo.

Osservazione. 1_X è isomorfismo e $1_X^{-1} = 1_X$. Se f isomorfismo allora f^{-1} isomorfismo e $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Se f, g isomorfismi componibili, allora $g \circ f$ è isomorfismo e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Ne segue che $\cong$ è una relazione di equivalenza su $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

Definizione 88

Un morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ è detto **monomorfismo** se $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{C}(Z, X) &\longrightarrow \mathcal{C}(Z, Y) \\ g &\longmapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

è iniettiva

Definizione 89: Epimorfismo

f è un **epimorfismo** in $\mathcal{C}$ se è monomorfismo in $\mathcal{C}^{op}$, ossia $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{C}(Y, Z) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

è iniettiva.

Proposizione 90. *f è invertibile a sinistra (destra), allora f è monomorfismo (epimorfismo)*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se f è invertibile a sinistra, allora è mono.

Sappiamo che $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$. Dobbiamo dimostrare che f_* è iniettiva. Siano $g, h \in \mathcal{C}(Z, X)$ tali che $f_*(g) = f_*(h)$. Allora $f \circ g = f \circ g$, da cui $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$ e dunque $g = h$ ☐

Proposizione 91. *Sia $\mathcal{C}$ concreta. Allora*

$$f \text{ invertibile a sinistra/destra} \implies f \text{ iniettiva/suriettiva} \implies f \text{ mono/epi}$$

Dimostrazione. Non possiamo usare il trick della categoria opposta, perché non è detto che $\mathcal{C}^{op}$ sia ancora concreta.

Sia f' tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$), allora chiaramente f iniettiva (suriettiva) perché le composizioni 1_X e 1_Y sono biunivoche.

Se f è iniettiva, allora siano $g_1, g_2 : Z \to X$. Dunque $\forall x \in X$

$$f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \overset{f \text{ inj.}}{\implies} g_1(x) = g_2(x)$$

ossia f_* è iniettiva, ossia f è monomorfismo.

se f è suriettiva, allora siano $g_1, g_2 : Y \to Z$. Sappiamo che $\forall y \in Y$ esiste $x_y \in X$ tale che $f(x_y) = y$. Allora abbiamo che, assumendo che $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$g_1(y) = g_1(f(x_y)) = g_2(f(x_y)) = g_2(y) \quad \forall y \in Y$$

ossia f^* è iniettiva e dunque f è epimorfismo ☐

In generale non vale nessuna delle $\impliedby$.

Esempio 92. In `Set` se $f : X \to Y$ è suriettiva, allora f è invertibile a sinistra. Infatti basta scegliere (AOC) $f'(y) \in f^{-1}\{y\}$ per ogni $y \in Y$. Inoltre se $X \neq \varnothing$ e $f : X \to Y$ è iniettiva, allora f è invertibile a sinistra.

Esercizio 93

In `A` $-$ `Mod`, mostrare che $f : M \to N$ iniettiva è invertibile a sinistra se e solo se $\mathrm{Im}(f) \subseteq N$ è addendo diretto.

Mostrare che $f : M \to N$ suriettiva è invertibile a destra se e solo se $\mathrm{Ker}(f) \subseteq M$ è addendo diretto

Concludere che valgono sempre entrambe le implicazioni se e solo se A è semisemplice.

Esempio 94. In `Set`, se f è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti, poniamo per assurdo $f : X \to Y$ non iniettiva, dunque siano $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$. Allora preso $Z = \{z\}$ e $g, h : Z \to X$ tali che $g(z) = x$ e $h(z) = y$ abbiamo che $f \circ g = f \circ h$ da cui $g = h$ e dunque $x = y$

Supponiamo f non suriettiva, mostrare *per esercizio* $\exists g, h : Y \to Z$ tali che $g \neq h$ ma $g \circ f = h \circ f$

Esempio 95. In $\mathtt{A-Mod}$ $f : M \to N$ è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti $i : \mathrm{Ker}f \to M$ inclusione tale che $f \circ i = 0$ e anche $0 : \mathrm{Ker}f \to M$ è tale che $f \circ 0 = 0$. Concludiamo che $i = 0$ e dunque $\mathrm{Ker}f = 0$.

Similmente $\pi : N \to \mathrm{coKer}f$ è tale che $\pi \circ f = 0$ e se f è epi allora $0 = \pi$ e dunque $\mathrm{coKer}f = 0$ e dunque f è suriettiva.

Esempio 96. In $\mathtt{Grp}$ f mono (epi), allora f iniettiva (suriettiva)

Per mono $\implies$ iniettiva si può usare la stessa dei moduli, mentre per l'altra è un po' più complicato, ma si dimostra che è vero lo stesso

Esempio 97. In $\mathtt{Rng}$ $f : A \to B$ mono, allora f iniettiva.

Tuttavia f epi **non implica** f suriettiva. Ad esempio preso $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è epi, infatti $\forall A$ anello esiste al più un omomorfismo $\mathbb{Q} \to A$ ($f : \mathbb{Q} \to A$ sia omomorfismo, allora $f|_{\mathbb{Z}}$ è l'unico omomorfismo e $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$). Chiaramente però non è suriettiva.

Definizione 98: Funtore

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ tra 2 categorie è dato da una funzione $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ e $\forall X, X' \in \mathcal{C}$ una funzione $F = F_{X,X'} : \mathcal{C}(X, X') \to D(F(X), F(X'))$ tale che

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(se f e g sono componibili in $\mathcal{C}$) e $F(1_X) = 1_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$

Proposizione 99. *Sia F un funtore e f invertibile a sinistra (destra). Allora $F(f)$ è invertibile a sinistra (destra)*

Dimostrazione. $\exists f'$ tale che $f' \circ f = 1_X$, allora $F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$. □

Osservazione. Segue che f iso, allora $F(f)$ iso e $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$

Esempio 100. Sia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria. Allora $\mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, $X \mapsto X$ e $f \mapsto f$ è un funtore

Esempio 101. Se $\sim$ è una congruenza, allora $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ è un funtore, con $X \mapsto X$ e $f \mapsto \overline{f}$

Esempio 102 (Funtore dimenticante)**.** $\mathcal{C} \to \mathtt{Set}$ con $\mathcal{C}$ categoria discreta e $X \mapsto X$, $f \mapsto f$ è un funtore, che "dimentica" la struttura aggiunta.

Analogamente anche $\mathtt{Rng} \to \mathtt{Ab}$, con $(A, +, \cdot) \to (A, +)$ è un funtore dimenticante.

Osservazione. Notare che il secondo funtore dimenticante non preserva gli epimorfismi. Sarebbe infatti $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'inclusione è un'epimorfismo in $\mathtt{Rng}$ ma non in $\mathtt{Ab}$

Esempio 103. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora la restrizione degli scalare è un funtore $\mathtt{B-Mod} \to \mathtt{A-Mod}$

Esempio 104. Funtore tra 2 categorie discrete $\mathcal{C}$ e D è una funzione $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$

Esempio 105. Un funtore tra 2 preordini $\mathcal{C}$ e D è una funzione $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ che preserva la relazione di preordine.

Esempio 106. Un funtore tra 2 monoidi è un omomorfismo di monoidi.

Più in generale dato G un monoide e una categoria $\mathcal{C}$, un funtore $G \to \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da un omomorfismo di monoidi $G \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$

Se G è un gruppo un funtore $G \to \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e un omomorfismo di gruppi $G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Ad esempio se $\mathcal{C} = \texttt{Set}$ il funtore dà un'azione di un gruppo su un insieme. Similmente se $\mathcal{C} = \mathbb{K}$-spazi vettoriali ho una rappresentazione di G.

Esempio 107 (Funtore costante)**.** Date $\mathcal{C}, D$ categorie preso $Y \subseteq D$ si può considerare il funtore costante di valore Y, $\mathcal{C} \to D$, $X \mapsto Y$ e $f \mapsto 1_Y$

Esempio 108. Presa $\texttt{Top}_*$ la categoria degli spazi topologici puntati, il gruppo fondamentale

$$\pi_1 : \texttt{Top}_* \to \texttt{Grp}$$

è un funtore

Esempio 109. $\forall n \in \mathbb{N}$ ci sono funtori di omologia (singolare)

$$H_n : \texttt{Top} \to \texttt{Ab}$$

Teorema 110: Omomorfismo

Sia $\sim$ una congruenza su $\mathcal{C}$ e $F : \mathcal{C} \to D$ un funtore tale che se $f \sim f'$ in $\mathcal{C}$ allora $F(f) = F(f')$. Allora esiste un unico funtore $\overline{F} : \mathcal{C}/_{\sim} \to D$ tale che $\overline{F}(\overline{f}) = F(f)$ per ogni f morfismo di $\mathcal{C}$

Esempio 111. Negli esempi precedenti se f e f' sono omotope, allora $\pi_1(f) = \pi_1(f')$ e $H_n(f) = H_n(f')$, dunque inducono funtori

$$\pi_1 : \texttt{Toph}_* \to \texttt{Grp} \quad H_n : \texttt{Toph} \to \texttt{Ab}$$

Nota. I funtori che abbiamo definito si dicono anche funtori covarianti

Definizione 112: funtore controvariante

Un funtore **controvariante** $\mathcal{C} \to D$ è un funtore (covariante) $\mathcal{C}^{op} \to D$.

Esempio 113. $\forall n \in \mathbb{N}$ i funtori di coomologia (singolare) sono funtori controvarianti $H^n : \texttt{Top(h)}^{op} \to \texttt{Ab}$

Esempio 114. Sia $\mathcal{C}$ una categoria, $X \in \mathcal{C}$

$$\begin{array}{cr} & \mathcal{C}(X,-) : \mathcal{C} \to \texttt{Set} \\ Y \mapsto \mathcal{C}(X,Y) & (f : Y \to Y') \mapsto (f_* : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y')) \\ & g \mapsto f \circ g \end{array}$$

è un funtore perché $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$

Analogamente

$$\begin{array}{cr} & \mathcal{C}(-,Y) : \mathcal{C}^{op} \to \texttt{Set} \\ X \mapsto \mathcal{C}(X,Y) & (f : X \to X') \mapsto (f^* : \mathcal{C}(X',Y) \to \mathcal{C}(X,Y)) \\ & g \mapsto g \circ f \end{array}$$

Osservazione. C'è anche un funtore

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-,=) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\to \texttt{Set} \\ (X,Y) &\mapsto \mathcal{C}(X,Y) \\ (f : X \to X', g : Y \to Y') &\mapsto (f^* : \mathcal{C}(X',Y) \to \mathcal{C}(X,Y), g_* : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y')) \end{aligned}$$

Esempio 115. Per ogni gruppo G, preso il sottogruppo dei commutatori $[G, G]$, allora per ogni $f : G \to H$ omomorfismo di gruppi, $f([G, G]) \subseteq [H, H]$ quindi si ottiene un funtore

$$\begin{aligned} \texttt{Grp} &\to \texttt{Grp} \\ G &\mapsto [G, G] \\ (f : G \to H) &\to (f|_{[G,G]} : [G, G] \to [H, H]) \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} \mathrm{Abel} : \texttt{Grp} &\to \texttt{Ab} \\ G &\mapsto \frac{G}{[G, G]} \text{ (abelianizzato di } G \text{)} \\ (f : G \to H) &\mapsto \left(\overline{f} : \frac{G}{[G, G]} \to \frac{H}{[H, H]}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & H \arrow[d, "q"] \\ \frac{G}{[G,G]} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{H}{[H,H]} \end{tikzcd}$$

Esercizio 116

Indicando con $Z(X)$ il centro di X,

a. Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Rng} \to \texttt{Rng}$ tale che $\forall A \in \texttt{Rng}$ $F(A) = Z(A)$.

b. Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Grp} \to \texttt{Ab}$ tale che $\forall G \in \texttt{Grp}$ $F(G) = Z(G)$.

Supponiamo l'esistenza di F.

a. Se prendo $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$, allora $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e $F(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. A tal punto però $F(i) : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ che non esiste perché altrimenti

$$-1 = F(i)(-1) = F(i)(i^2) = F(i)(i)^2$$

b. Consideriamo

$$\{(1), (12)\} \overset{i}{\hookrightarrow} S_3 \overset{\varepsilon}{\to} \{\pm 1\}$$

Allora $\varepsilon \circ i = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$. Allora avremmo

$$0_{\mathrm{End}(\mathcal{C}_2)} = F(\varepsilon) \circ F(i) = F(\varepsilon \circ i) = F(\mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}) = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$$

L'identità

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \quad X \mapsto X \quad f \mapsto f$$

è un funtore Si possono comporre i funtori. Dati ad esempio

$$\mathcal{C} \overset{F}{\to} D \overset{G}{\to} E$$

funtori, possiamo definire $G \circ F : \mathcal{C} \to E$ come $X \mapsto G(F(X))$ e $f \mapsto G(F(f))$ è un funtore.

La composizione è associativa e $F \circ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} = F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \circ F$

In tal modo otteniamo una categoria $\mathcal{C}\mathtt{at}$ delle categorie (piccole[1])

Definizione 117

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è un isomorfismo se lo è in $\mathcal{C}\mathtt{at}$, cioè se $\exists G : D \to \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}} = F \circ G$

Definizione 118: iniettivo e suriettivo

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è *iniettivo/suriettivo* se $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ è *iniettivo/suriettivo*.
Nel caso in cui F sia sia iniettivo che suriettivo, è **biunivoco**.

Definizione 119: Fedele e pieno

F è detto **fedele** (**pieno**) se $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C}(X, Y) \to D(F(X), F(Y))$ è iniettivo (suriettivo).
Nel caso in cui F sia sia fedele che pieno, si dice che è **pienamente fedele**

Esercizio 120

F funtore è isomorfismo se e solo se F è pienamente fedele e biunivoco.

Esempio 121. Se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è una sottocategoria, allora il funtore di inclusione $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ è iniettivo e fedele ed è pieno se e solo se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è piena.

Ad esempio se $\sim$ è una congruenza in $\mathcal{C}$, allora il funtore quoziente $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ è biunivoco e pieno.

Esempio 122. Un omomorfismo di monoidi (categorie di un oggetto) è iniettivo (suriettivo) se e solo se come funtore è fedele (pieno). In ogni caso è biunivoco.

Esempio 123. I funtori dimenticanti $\mathbb{Z} - \mathtt{Mod} \to \mathtt{Ab}$ e $\mathbb{Z} - \mathtt{Alg} \to \mathtt{Rng}$ sono isomorfismi.

Esempio 124. Anche $\mathtt{Mod} - \mathtt{A} \cong \mathtt{A}^{\mathtt{op}} - \mathtt{Mod}$ ed esiste un isomorfismo (anche se non sono categorie piccole).

Definizione 125

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è **essenzialmente *iniettivo/suriettivo*** se la funzione ridotta

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})/_{\cong} \to \mathrm{Ob}(D)/_{\cong}$$

è *iniettivo/suriettivo*

Osservazione. Se F è suriettivo allora F è essenzialmente suriettivo. L'altra implicazione non vale. Ad esempio

$$(\bullet) \longrightarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

Nessuna delle implicazioni tra iniettiva e essenzialmente iniettiva è vera. Basti considerare

$$(\bullet) \longleftarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

---

[1] si potrebbe anche fare di tutte le categorie, ma per motivi insiemistici/logici dovremmo introdurre gli universi di Grothendieck e fare le cose per bene. Al fine di evitare questo inutile sforzo, ci limitiamo a considerare le categorie piccole.

per essenzialmente iniettiva $\not\Rightarrow$ iniettiva e

$$\begin{tikzcd}(\bullet & \bullet) \arrow[r] & (\bullet \arrow[r, shift left] & \bullet) \arrow[l, shift left]\end{tikzcd}$$

per iniettiva $\not\Rightarrow$ essenzialmente iniettiva.

Proposizione 126. *Sia $F : \mathcal{C} \to D$ un funtore pienamente fedele. Allora F è essenzialmente iniettivo*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathcal{C}$ tali che $F(X) \cong F(Y)$ in D. Devo dimostrare che $X \cong Y$ in $\mathcal{C}$.

Sappiamo che esiste $g : F(X) \to F(Y)$ isomorfismo in D. Poiché F è pieno esiste $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $F(f) = g$. Analogamente $\exists f' \in \mathcal{C}(Y, X)$ tale che $F(f') = g^{-1}$.

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) = g^{-1} \circ g = 1_{F(X)} = F(1_X)$$

Se F è fedele, allora $f' \circ f = 1_X$ e analogamente $f \circ f' = 1_Y$ da cui f è isomorfismo e duque $X \cong Y$ ☐

Definizione 127: Trasformazione naturale

Siano $F, F' : \mathcal{C} \to D$ funtori.
Una **trasformazione naturale** $\alpha : F \to F'$ (si può anche scrivere $\alpha : F \implies F'$) è il dato di un morfismo

$$\alpha_X : F(X) \to F'(X) \text{ in } D \; \forall X \in \mathcal{C}$$

tale che $\forall f : X \to Y$ morfismo di $\mathcal{C}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd}F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ F'(X) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(Y)\end{tikzcd}$$

commuta in D, cioè $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$

Esempio 128. Consideriamo i due funtori Abel : `Grp` $\to$ `Grp` e id : `Grp` $\to$ `Grp`. C'è una trasformazione naturale $\alpha : \mathrm{id} \to \mathrm{Abel}$ definita per ogni $G \in$ `Grp` da

$$\begin{aligned}\alpha_G : G &\longrightarrow \frac{G}{[G, G]} \\ a &\longmapsto \alpha_G(a) = a[G, G]\end{aligned}$$

è naturale perché $\forall f : G \to H$ in `Grp` il diagramma

$$\begin{tikzcd}G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_G"] & H \arrow[d, "\alpha_H"] \\ \frac{G}{[G,G]} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{H}{[H,H]}\end{tikzcd}$$

Esempio 129. Supponendo di avere $F, F' : G \to$ `Set` funtori (G gruppo visto come categoria con un oggetto), cioè G-insiemi (azioni di G su insiemi). Allora una trasformazione naturale $\alpha : F \to F'$ è un morfismo di G-insiemi cioè una funzione $\alpha : F(G) \to F'(G)$ tale che $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in F(G)$.

Osservazione. $\forall F : \mathcal{C} \to D$, $\mathrm{id}_F : F \to F$ data da $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$ è una trasformazione naturale.

Esercizio 130

Dati $F, F', F'' : \mathcal{C} \to D$ funtori, $\alpha : F \to F'$ e $\beta : F' \to F''$ trasformazioni naturali, allora la composizione $\beta \circ \alpha : F \to F''$ è definita da

$$\beta_X \circ \alpha_X =: (\beta \circ \alpha)_X : F(X) \to F''(X)$$

Mostrare che $\alpha \circ \beta$ è una trasformazione naturale

La composizione dell'esercizio precedente è anche detta *composizione verticale* di trasformazioni naturali, per via di questo disegno esplicativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "F" description] \arrow[r, bend right=60, "F''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Considerando funtori e trasformazioni naturali, si ottiene (assumiamo sempre $\mathcal{C}$ piccola) la categoria $\mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ (anche denotata $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$) con oggetti i funtori $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, morfismi le trasformazioni naturali e composizione la composizione verticale.

Definizione 131

Data una categoria $\mathcal{C}$, la categoria dei morfismi di $\mathcal{C}$ è

$$\mathtt{Mor}(\mathcal{C}) := \mathtt{Fun}(\cdot \to \cdot, \mathcal{C})$$

che ha come oggetti esattamente $\{f : X \to Y \text{ morfismo di } \mathcal{C}\}$ e trasformazioni naturali date da $(X \xrightarrow{f} Y) \to (X' \xrightarrow{f'} Y')$ è data da $(g : X \to X', h : Y \to Y')$ tale che

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Definizione 132

Date $F, G : \mathcal{C} \to D$ funtori, $\alpha : F \to G$ trasformazione naturale, allora α è *isomorfismo* (*naturale* o di funtori) se è isomorfismo in $\mathtt{Fun}(\mathcal{C}, D)$ cioè se $\exists \beta : G \to F$ trasformazione naturale tale che $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$.
In tal caso F e G si dicono *isomorfi* (denotato $F \cong G$).

Osservazione. $\cong$ di funtori è una relazione di equivalenza

Esempio 133. Il primo gruppo di omologia si può vedere come l'abelianizzato del gruppo fondamentale. In linguaggio categorico abbiamo

$$\mathtt{Top}_* \xrightarrow{\pi_1} \mathtt{Grp} \overset{\text{Abel}}{\to} \mathtt{Ab}$$

e

$$\text{Top}_* \to \text{Top} \overset{H_1}{\to} \mathtt{Ab}$$
$$(X, x_0) \mapsto \text{comp. c.p.a. che contiene } x_0$$

sono funtori isomorfi

Osservazione. $F \cong F'$ allora F e F' inducono la stessa funzione $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})/_{\cong} \to \mathrm{Ob}(D)/_{\cong}$ quindi F è essenzialmente *iniettiva* / *suriettiva* se e solo se F' lo è.

Esercizio 134

Mostrare che non necessariamente la precedente osservazione vale per le proprietà di iniettività e suriettività.

Proposizione 135. *Se $F \cong F'$ allora F è* fedele/pieno *se e solo se F' è* fedele/pieno.

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \to F'$ l'isomorfismo. Sia allora $\overline{\alpha} : \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \to \mathcal{D}(F'(X), F'(Y))$ definita da $\overline{\alpha}(g) := \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}$. Per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}(F(X),F(Y)) \arrow[dd, "\overline{\alpha}"] \\
\mathcal{C}(X,Y) \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "F'"] & \\
& \mathcal{D}(F'(X),F'(Y))
\end{tikzcd}$$

commuta. Infatti preso $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, per la trasformazione naturale $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$ si ha che

$$(\overline{\alpha} \circ F)(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} = F'(f)$$

Inoltre $\overline{\alpha}$ è una biezione, infatti ha inversa $\overline{\alpha}^{-1}(h) = \alpha_Y^{-1} \circ h \circ \alpha_X$:

$$\overline{\alpha}(\overline{\alpha}^{-1} \circ \overline{\alpha})(g) = \overline{\alpha}^{-1}(\alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}) = \alpha_Y^{-1} \circ \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X = g$$

e similmente l'altra composizione. Allora chiaramente se F è *fedele/pieno*, allora $F' = \overline{\alpha} \circ F$ è *iniettivo/suriettivo.*

□

Proposizione 136. *α, β trasformazioni naturali inducono una trasformazione naturale $\beta * \alpha : G \circ F \to G' \circ F'$*

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \arrow[r, "G(\alpha_X)"] \arrow[d, "\beta_{F(X)}"] & G(F'(X)) \arrow[d, "\beta_{F'(X)}"] \\
G'(F(X)) \arrow[r, "G'(\alpha_X)"] & G'(F'(X))
\end{tikzcd}$$

dunque $(\beta * \alpha)_X := \beta_{F'(X)} \circ G(\alpha_X) = G'(\alpha_x) \circ \beta_{F(X)}$.

Dimostrazione che è una trasformazione naturale. Vogliamo mostrare che $b * a$ è naturale, cioè $\forall f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \arrow[r, "G(F(f))"] \arrow[d, "(\beta*\alpha)_X"] & G(F(X)) \arrow[d, "(\beta*\alpha)_Y"] \\
G'(F'(X)) \arrow[r, "G'(F'(f))"] & G'(F'(X))
\end{tikzcd}$$

commuta. Ma questo è vero perché

$$\begin{aligned}
G'(F'(f)) \circ (\beta * \alpha)_X = G'(F'(f)) \circ G'(\alpha_x) \circ \beta_{F(X)} &= G'(F'(f) \circ \alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = \\
&\overset{\alpha \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y \circ F(f)) \circ \beta_{F(X)} = G'(\alpha_Y) \circ G'(F(f) \circ \beta_{F(X)}) = \\
&\overset{\beta \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y) \circ \beta_{F(Y)} \circ G(F(f)) = (\beta * \alpha)_Y \circ G(F(f))
\end{aligned}$$

□

Ovviamente è chiaro che si potrebbe definire allora la categoria delle trasformazioni naturali eccetera e andare avanti all'infinito. Per assiomatizzare queste cose in realtà bisognerebbe esplicitare che abbiamo definito le "2-frecce" e che quindi siamo in una *2-categoria*

Nota (zione). Se $\beta = \mathrm{id}_G$ invece di $\mathrm{id}_G * \alpha$ si scrive $G \circ \alpha$ (dunque con $(G \circ \alpha)_X = G(\alpha_X)$). Se $\alpha = \mathrm{id}_F$ invece di $\beta * \mathrm{id}_F$ si scrive $\beta \circ F$ (con $(\beta \circ F)_X = \beta_{F(X)}$). In generale

$$\beta * \alpha = (\beta \circ F') \circ (G \circ \alpha) = (G' \circ \alpha) \circ (\beta \circ F)$$

Osservazione. Se α, β sono isomorfismi, allora $\beta * \alpha$ è isomorfismo. Questo significa che se

$$F \cong F', \quad G \cong G' \implies G \circ F \cong G' \circ F'$$

cioè l'isomorfismo di funtori è una congruenza su $\mathcal{C}\mathtt{at}$ e quindi si ottiene la categoria $\mathcal{C}\mathtt{at}/_{\cong}$

Definizione 137: Equivalenza

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è un'equivalenza se $\exists G : D \to \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F \cong \mathrm{id}_G$ e $F \circ G \cong \mathrm{id}_D$.
Un tale G si dice un *quasi-inverso* di F.

Osservazione. F è un'equivalenza se e solo se $\overline{F}$ in $\mathcal{C}\mathtt{at}/_{\cong}$ è un isomorfismo.

Segue che se $F \cong F'$, allora F è un'equivalenza se e solo se F' è un'equivalenza e un quasi-inverso di F è unico a meno di isomorfismo e l'equivalente di categorie è una relazione di equivalenza su $\mathcal{C}\mathtt{at}$

Definizione 138: Scheletro

Una sottocategoria piena $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è detta *scheletro* se $\forall X \in \mathcal{C}$, $\exists! X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$

Lemma 139. *Sia $F : \mathcal{C} \to D$ un funtore, e si supponga che $\forall X \in \mathcal{C}$, $\alpha_X : F(X) \to F'(X)$ sia un isomorfismo in D. Allora $F' : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(D)$ Si estende in modo unico a un funtore $F' : \mathcal{C} \to D$ tale che $\alpha : F \to F'$ è isomorfismo.*

Teorema 140: Finalmente un teorema

Un funtore $F : \mathcal{C} \to D$ è un'*equivalenza* se e solo se F è *pienamente fedele* e *essenzialmente suriettivo*

Osservazione. Non è necessario aggiungere l'ipotesi che F sia essenzialmente iniettivo perché come mostrato prima pienamente fedele implica essenzialmente iniettivo (ma non essenzialmente suriettivo).

Esempio 141. Supponiamo che $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sia una sottocategoria piena. Allora il funtore di inclusione $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ è pienamente fedele ed è essenzialmente suriettivo (quindi è un'equivalenza) se e solo se $\forall X \in \mathcal{C}$ esiste $X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$.

Dimostrazione.

$\implies$ Sia $G : D \to \mathcal{C}$ un quasi-inverso di F. Allora $F \circ G \cong \mathrm{id}_G$ che è essenzialmente suriettivo, e dunque F è essenzialmente suriettivo. D'altra parte lo stesso $F \circ G$ è fedele, e dunque G è fedele.

Ora, per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}(X,Y) \overset{F_{X,Y}}{\to} D(F(X),F(Y)) \overset{G_{F(X),F(Y)}}{\to}{}^{\text{inj}} \mathcal{C}(G(F(X)),G(F(Y)))$$

poiché la composizione è biunivoca e G è fedele, allora entrambi devono essere biunivoci, ossia in particolare F è pienamente fedele.

$\Longleftarrow$ Consideriamo prima il caso di un'inclusione $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria piena tale che $\forall X \in \mathcal{C}$ esista $X' \in \mathcal{C}$ tale che $X \cong X'$. Sia $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ il funtore di inclusione (pienamente fedele e essenzialmente suriettivo).

Allora $\forall X \in \mathcal{C}$ scelto (AoC) un isomorfismo $\alpha_X : X \to \tilde{P}(X) \in \mathcal{C}'$ e se $X \in \mathcal{C}'$ in particolare prendiamo $\alpha_X = 1_X$. Applico ora il lemma 139 con $F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ e dunque $\exists!$ estensione di $\tilde{P}$ a un funtore $\tilde{P} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tale che $\alpha : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \tilde{P}$ è isomorfismo. Allora $\exists! P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funtore tale che $\tilde{P} = I \circ P$ e P è un quasi-inverso di I poiché $I \circ P = \tilde{P} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ e $P \circ I = \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$.

In generale, dato $F : \mathcal{C} \to D$ pienamente fedele. Siano allora $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ e $J : D' \to D$ due scheletri. Per il caso qui fatto I, J sono equivalenze e siano $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ quasi-inverso di I e $Q : D \to D'$ quasi-inverso di J.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "P"'] & D \arrow[d, shift left, "Q"] \\
\mathcal{C}' \arrow[u, shift right, "I"'] \arrow[r, "F'"] & D' \arrow[u, shift left, "J"]
\end{tikzcd}$$

Sia $F' := Q \circ F \circ I : \mathcal{C}' \to D'$ come nel diagramma. Allora I, F, Q sono pienamente fedeli e essenzialmente suriettivi (I per definizione, F per ipotesi e Q perché è un'equivalenza e vale il punto ($\Longrightarrow$)) dunque F' è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

F' è essenzialmente biunivoco, $\mathcal{C}'$ e D' sono scheletri, dunque F' è biunivoco, quindi isomorfismo e quindi equivalenza.

$$F = \mathrm{id}_D \circ F \circ \mathrm{id}_c \cong J \circ Q \circ F \circ I \circ P = J \circ F' \circ P$$

equivalenza perché lo sono J, F' e P

□

Esempio 142. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme X che vedo come categoria $\mathcal{C}$ con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = X$ e $\mathcal{C}(x, y) \neq \varnothing \iff x \sim y$.

Il funtore $\mathcal{C} \to X/_\sim$ (categoria discreta) definito da $x \mapsto \overline{x}$ è un'equivalenza poiché pienamente fedele e essenzialmente suriettiva.

Esercizio 143

Mostrare che ogni categoria equivalente a una categoria discreta è una relazione di equivalenza, ossia una categoria dove $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(X, Y) \neq O \iff x \sim y$ per una qualche $\sim$ relazione di equivalenza.

2.1 Categorie preadditive

Definizione 144: Categoria preadditiva

Una categoria *preadditiva* è una categoria $\mathcal{A}$ con una struttura di gruppo abeliano (notazione: additivo) su $\mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ ed è tale che la composizione di morfismi sia $\mathbb{Z}$-bilineare, ossia

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{e} \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$ e $g, g' \in \mathcal{A}(Y, Z)$.

Osservazione. Si dice anche che $\mathcal{A}$ è una `Ab`-Categoria. Si può studiare quando si può generare una categoria simile partendo da altre categorie invece di `Ab` ma non è argomento di questo corso.

Si può anche dire che $\mathcal{A}$ è $\mathbb{Z}$-lineare. Più in generale $\forall$[2] anello commutativo A una categoria A-lineare è una categoria $\mathcal{A}$ con una struttura di A-modulo su $\mathcal{A}(X,Y)$ tale che la composizione sia A-bilineare.

Proposizione 145. *Se A è non commutativo, allora $\forall a,b \in A$ e $\forall f : X \to Y$ morfismo di $\mathcal{A}$,*

$$(ab)f = (ba)f$$

Dimostrazione.

$$(ab)f = a(bf) = a((bf)\circ 1_X) = (bf)\circ(a1_x) = f\circ(b(a1_X)) = f\circ(ba)1_X = (ba)f$$

□

Esempio 146. Sia A un anello, allora $A-$`Mod` è preadditiva. Infatti per ogni $M,N \in (A-\texttt{Mod})$, $A-\texttt{Mod}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$ è un gruppo abeliano e $\circ$ è $\mathbb{Z}$-bilineare. Se A è commutativo, allora $A-$`Mod` è anche A-lineare. Più in generale se B è una A-algebra allora $B-$`Mod` è A-lineare.

Osservazione. Sia $X \in \mathcal{A}$ categoria A-lineare (quindi A commutativo). Allora $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è una A-algebra. Infatti $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X),\circ)$ è un monoide e $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}$ è A-modulo e $\circ$ è A-lineare.

Quindi le categorie A-lineari con un solo oggetto sono A-algebre. In particolare le categorie preadditive con un solo oggetto sono anelli.

Osservazione. Sia $\mathcal{A}$ preadditiva, allora $\mathcal{A}^{op}$ è preadditiva con la stessa struttura di gruppo abeliano su $\mathcal{A}^{op}(X,Y) = \mathcal{A}(Y,X)$ per ogni $X,Y \in \mathcal{A}$.

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva, allora $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X,Y \in \mathcal{A}'$, allora $\mathcal{A}'$ è preadditiva. In particolare la condizione è sempre verificata per le categorie piene.

Sia $\mathcal{A}$ preadditiva, $\sim$ una congruenza tale che $\forall X,Y \in \mathcal{A}$, $\forall f,f',g \in \mathcal{A}(X,Y)$ allora $f \sim f' \implies f+g \sim f'+g$. In tale ipotesi $\mathcal{A}/_\sim$ è preadditiva con $\overline{f}+\overline{g} = \overline{f+g}$.

Data una tale congruenza, sia $\forall X,Y \in \mathcal{A}$

$$\mathfrak{I}(X,Y) = \{f \in \mathcal{A}(X,Y) : f \sim 0\}$$

e indichiamo con $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ la collezione di tutti gli $\mathfrak{I}(X,Y)$. Allora vale la proprietà di ideale, cioè dati f,g morfismi di $\mathcal{A}$ componibili,

$$f \in \mathfrak{I} \text{ o } g \in \mathfrak{I} \implies g\circ f \in \mathfrak{I}$$

Se per esempio $f \in \mathfrak{I}$ ossia $f \sim 0$, allora $g\circ f \sim g\circ 0 = 0$ e dunque $g\circ f \in \mathfrak{I}$.

Arriviamo dunque alla seguente definizione

Definizione 147

Definiamo un ideale $\mathfrak{I}$ in una categoria preadditiva $\mathcal{A}$ come $\mathfrak{I}(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X,Y \in \mathcal{A}$ tale che

$$f \in \mathfrak{I} \text{ o } g \in \mathfrak{I} \implies g\circ f \in \mathfrak{I}$$

---

[2] normalmente in mezzo alla frase così avrei scritto esplicitamente "per ogni" ma trovavo divertente la quantità di $\mathcal{A}$ e di A nella frase quindi ho valutato simpatico aggiungere anche un $\forall$

Viceversa, dato $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, si ottiene una congruenza $\sim$ su $\mathcal{A}$ definito da

$$f \sim f' \iff f' - f \in \mathfrak{I}(X,Y) \quad \forall X,Y \in \mathcal{A} \quad \forall f,f' \in \mathcal{A}(X,Y)$$

ed è tale che $f \sim f' \implies f + g \sim f' + g$.

In tali ipotesi si può anche denotare $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ invece di $\mathcal{A}/_{\sim}$.

Una categoria $\mathcal{C}$ può non avere nessuna struttura di categoria preadditiva (ad esempio se $\exists X,Y \in \mathcal{C}$) tale che $\mathcal{C}(X,Y) = \varnothing$ o averne più di una.

Esempio 148. G Possiamo pensare ad anelli A e B tali che $(A,\cdot) \cong (B,\cdot)$ e $(A,+) \ncong (B,+)$.

Ad esempio possiamo prendere $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}[X]/(X^2)$. Allora evidentemente

$$(A,+) \cong \mathcal{C}_4 \ncong \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \cong B$$

ma gli elementi diversi da 0 e 1 di A sono $\overline{2}$ e $\overline{3}$ e sono tali che $\overline{2}^2 = \overline{0}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$ e $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2}$. Similmente in B abbiamo che $\overline{X}^2 = \overline{0}$, $\overline{1+X}^2 = \overline{1}$ e $\overline{X} \cdot \overline{1+X} = \overline{X}$

Definizione 149

Un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie preadditive è additivo se

$$F_{X,Y} : \mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{B}(F(X),F(Y))$$

è omomorfismo di gruppi $\forall X,Y \in \mathcal{A}$.
Più in generale $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra categorie A-lineari è detto A-lineare se $F_{X,Y}$ è A-lineare $\forall X,Y \in \mathcal{A}$.

Esempio 150. Sia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X,Y) < \mathcal{A}(X,Y)$ per ogni $X,Y \in \mathcal{A}'$. Allora l'inclusione $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ è addditivo.

Esempio 151. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva e $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, allora il funtore $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{I}$ definito da $X \mapsto X$ e $f \mapsto \overline{f}$ è additivo.

Esercizio 152

Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additivo tale che "$\mathfrak{I} = \ker F$" cioè $F(f) = 0$, $\forall f \in \mathfrak{I}$, allora mostrare che esiste un unico $\overline{F} : \mathcal{A}/\mathfrak{I} \to \mathcal{B}$ funtore additivo tale che $F = \overline{F} \circ P$

Esempio 153. Siano A,B anelli (categorie preadditive con un solo oggetto), allora un funtore additivo $A \to B$ è un omomorfismo di anelli.

Più in generale per ogni anello A e per ogni $\mathcal{A}$ categoria preadditiva un funtore additivo $A \to \mathcal{A}$ è dato da un oggetto $X \in \mathcal{A}$ e un omomorfismo di anelli $A \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$. Quindi un A-modulo è un funtore additivo $A \to \texttt{Ab}$

Esempio 154. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari $B-\texttt{Mod} \to A-\texttt{Mod}$ è additivo.

Esempio 155. Se $\mathcal{A}$ preadditiva, allora $\forall X \in \mathcal{A}$ ci sono funtori additivi

$$\mathcal{A}(X,-) : \mathcal{A} \to \texttt{Ab} \quad , \quad \mathcal{A}(-,X) : \mathcal{A}^{op} \to \texttt{Ab}$$

e in generale se $\mathcal{A}$ è A-lineare, allora i due funtori hanno codominio $A-\texttt{Mod}$ e sono A-lineari

Notare che se $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ sono funtori additivi, allora $G \circ F$ è additivo. Inoltre $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ è additivo. Dunque si ottiene una categoria contenente le **categorie preadditive** (piccole) e morfismi i funtori additivi.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria (piccola) e $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva. Allora $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è preadditiva (in modo naturale) con la seguente struttura

$\forall F, G \in \mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ e $\forall \alpha, \beta : F \to G$ trasformazioni naturali allora $\alpha + \beta : F \to G$ trasformazione naturale definita $\forall X \in \mathcal{C}$ da

$$(\alpha + \beta)_X := \alpha_X + \beta_X : F(X) \to G(X) \text{ in } \mathcal{A}$$

è naturale perché $\forall f : X \to \mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X+\beta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y+\beta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

commuta

Se anche $\mathcal{C}$ è preadditiva sia

$$\mathtt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

la sottocategoria piena di $\mathtt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ con oggetti i funtori additivi. Allora tale categoria è preadditiva.

Esempio 156. Se A è anello, allora gli A-moduli sono gli oggetti di $\mathtt{AddFun}(A, \mathtt{Ab})$ (già visto) e in effetti $A\mathtt{-Mod} \cong \mathtt{AddFun}(A, \mathtt{Ab})$, poiché dati $M, N : A \to \mathtt{Ab}$ funtori (cioè $A \to \mathrm{End}(M)$ e $A \to \mathrm{End}(N)$ omomorfismi di anelli) la trasformazione naturale $\alpha : M \to N$ è data da $\alpha : M \to N$ in $\mathtt{Ab}$ tale che $\forall a \in A$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[d, "\alpha"] \\ N \arrow[r, "a"'] & N \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $a\alpha(x) = \alpha(ax)$ per ogni $x \in M$, ossia α è omomorfismo di A-moduli.

Osservazione. $\forall \mathcal{A}$ preadditiva (piccola) si può definire la categoria (preadditiva) $\mathcal{A}\mathtt{-Mod} := \mathtt{AddFun}(\mathcal{A}, \mathtt{Ab})$.

Proposizione 157. *Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ preadditive, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtori tali che $F \cong G$ e F additivo. Allora G è additivo*

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \to G$ isomorfismo. Allora $\forall f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$, $G(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1}$. Inoltre $\forall f, f' : X \to Y$,

$$\begin{aligned} G(f + f') = \alpha_Y \circ F(f + f') \circ \alpha_X^{-1} &= \alpha_Y \circ (F(f) + F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = \\ = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} + \alpha_Y \circ F(f') \circ \alpha_X^{-1} &= G(f) + G(f') \end{aligned}$$

□

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore pienamente fedele con $\mathcal{B}$ preadditiva. Allora esiste un'unica struttura preadditiva su $\mathcal{A}$ tale che F sia additivo

Dimostrazione. $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ voglio che $F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \to \mathcal{B}(F(X), F(Y))$ sia isomorfismo di gruppi, che è vero se e solo se $\forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$

$$f + f' = F^{-1}(F(f) + F(f'))$$

(verifica lasciata in esercizio) □

2.1.1 Prodotti, coprodotti, proprietà universali

Definizione 158: Prodotto

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, siano $X_\lambda \in \mathcal{C}$ con $\lambda \in \Lambda$ insieme. Un prodotto degli X_λ è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi morfismi $p_\lambda \in \mathcal{C}(X, X_\lambda)$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ tale che vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C},\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(Y, X_\lambda) \quad \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y) : f_\lambda = p_\lambda \circ f$$

o equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f_\mu"'] \arrow[rd, dashed, "\exists! f"] & \\
X_\mu & X \arrow[l, "p_\mu"]
\end{tikzcd}$$

Proposizione 159. *Siano* $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *e* $(X', \{p'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$*. due prodotti in* $\mathcal{C}$ *degli* X_λ*. Allora* $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$ *tale che* $p'_\lambda = p_\lambda \circ f$ *per ogni* λ *e* f *è isomorfismo.*

Viceversa se $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ *è un prodotto degli* X_λ *e* $f : X' \to X$ *è isomorfismo, anche* $(X', \{p_\lambda \circ f\}_{\lambda\in\Lambda})$ *è un prodotto degli* X_λ

Osservazione. Si dice che il prodotto è *unico a meno di unico isomorfismo*

Dimostrazione. (Prima parte) Esiste unico f per la proprietà universale, analogamente $\exists! f' \in \mathcal{C}(X, X')$ tale che $p_\lambda = p'_\lambda \circ f$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Dunque $p_\lambda = p'_\lambda \circ f' = p_\lambda \circ f \circ f' = p_\lambda \circ 1_X$. Ne consegue che $1_X = f \circ f'$ per la proprietà universale e analogamente $1_Y = f' \circ f$.

(Seconda parte) Dati $Y \in \mathcal{C}$ e $g_\lambda : Y \to X'_\lambda$ devo dimostrare che $\exists! g : Y \to X$ tale che $g_\lambda = f_\lambda \circ f \circ g$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ora per la proposizione universale di X $\exists! g : Y \to X$ tale che $g_\lambda = p_\lambda \circ g$. Voglio $g = f \circ g'$ cioè $g' = f^{-1} \circ g$ ☐

Nota (zione)*.* L'oggetto prodotto X si indica con

$$X =: \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

Esempio 160. In `Set` il prodotto di insiemi X_λ per $\lambda \in \Lambda$ è dato dall'usuale prodotto cartesiano con le proiezioni.

In categorie concrete come `Grp`, `Rng`, A–`Mod` un prodotto si ottiene dal prodotto in `Set` mettendo la struttura disgiuntiva componente per componente.

Esempio 161. In `FinSet` (la sottocategoria piena di `Set`) con oggetti insiemi finiti, non esiste $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ se $\#\Lambda = \infty$ e $\#X_\lambda > 1$ per ogni $\lambda \in \Lambda$

Infatti se per assurdo supponiamo il prodotto essere X per la proprietà universale $\forall Y \in \texttt{FinSet}$, $\infty > \#\texttt{Set}(Y, X) = \prod_{\lambda\in\Lambda} \#\texttt{Set}(Y, X_\lambda) = \infty$

Osservazione. Se $\#\Lambda = 1$ allora un prodotto di X_1 è $p_1 : X \to X_1$ in $\mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall f_1 : Y \to X_1$ $\exists! f : Y \to X$ tale che $f_1 = p_1 \circ f$

Questo è vero se p_1 è isomorfismo ($f = p_1^{-1} \circ f_1$). D'altra parte se p_1 non è isomorfismo non fattorizza unicamente ogni altro morfismo. Quindi un prodotto di $X \in \mathcal{C}$ è qualunque isomorfismo $X' \to X$ (in particolare 1_X).

Definizione 162: Oggetto terminale

Un oggetto terminale di una categoria $\mathcal{C}$ è un prodotto vuoto in $\mathcal{C}$, cioè $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ esiste un unico $Y \to X$ morfismo di $\mathcal{C}$, cioè $\#\mathcal{C}(Y, X) = 1$

Esempio 163. In `Set` X è terminale se e solo se $\#X = 1$. Analogamente in `Grp`, `Rng`, $A-$`Mod` è ogni gruppo anello o $A-$`Mod` banale.

Esempio 164. Se G è un monoide non banale, allora G (come categoria con un solo oggetto) non ha oggetto terminale.

Proposizione 165. *Una categoria $\mathcal{C}$ ha tutti i prodotti finiti se e solo se ha oggetto terminale e i prodotti di coppie di oggetti.*

Dimostrazione. Dimostro solo per induzione l'implicazione non ovvia.

Il passo base è dato dalla presenza dell'oggetto terminale. Per induzione supponiamo che esista il prodotto di $n-1$ oggetti $X' = \prod_{i=1}^{n-1} X_i$ con $p'_i : X' \to X_i$ per ogni i. Sia ora un elemento X_n e per ipotesi esiste $X = X' \times X_n$ con $p_n : X \to X_n, p' : X \to X'$. Allora X è prodotto di tutti gli $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ con $p_i := p'_i \circ p'$ per ogni $i < n$. □

Definizione 166: Coprodotto

Un coprodotto di X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ in una categoria $\mathcal{C}$ è un prodotto degli X_λ in $\mathcal{C}^{op}$, cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da morfismi $i_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, X)$ tali che vale la proprietà universale (duale di quella del prodotto)

$$\forall Y \in \mathcal{C},\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, Y), \quad \exists!\, f \in \mathcal{C}(X, Y) : f_\lambda = f \circ i_\lambda$$

e viene denotato

$$X =: \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Diagrammaticamente, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Y & \\
X_\lambda \arrow[u, "f_\lambda"] \arrow[r, "i_\lambda"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[ul, dashed, "\exists! f"']
\end{tikzcd}$$

commuta

Nelle categorie preadditive si può parlare di **somma diretta** invece di coprodotto e usare $\bigoplus$ invece di $\coprod$.

Esempio 167. In `Set` il coprodotto è l'unione disgiunta. In $A-$`Mod` è la somma diretta usuale. In `Grp` i coprodotti sono i **prodotti liberi**.

Definizione 168: Oggetto iniziale

Un *oggetto iniziale* di $\mathcal{C}$ è un coprodotto vuoto in $\mathcal{C}$, ossia $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$, $\#\mathcal{C}(X, Y) = 1$

Può succedere che uno stesso oggetto sia terminale che iniziale. In tal caso per entrambe le definizioni esiste un solo morfismo da uno all'altro. Se tale morfismo è un isomorfismo allora l'oggetto è sia iniziale che terminale.

Definizione 169: Oggetto nullo

Un oggetto sia iniziale che terminale si dice *nullo*

Esempio 170. In `Set`, $\varnothing$ è iniziale (non nullo). In `Grp`/$A-$`Mod` ogni *gruppo/modulo* banale è nullo. In `Rng`, $\mathbb{Z}$ è iniziale (non nullo)

Se $X \in \mathcal{C}$ è nullo allora $\forall Y, Z \in \mathcal{C}$ esiste il morfismo $0 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dato dalla composizione $Y \overset{\exists!}{\to} X \overset{\exists!}{\to} Z$. In tal caso abbiamo che effettivamente $f \circ 0 = 0$ e $0 \circ g = 0$ per ogni f, g componibili con 0.

Esempio 171. In $\mathcal{A}$ preadditiva (in cui esiste un oggetto nullo) il morfismo 0 di cui sopra coincide con 0 dello struttura preadditiva.

Definizione 172: Preservazione del prodotto

Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *preserva un prodotto* $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ di $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ se $(F(X), \{F(p_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli $F(X_\lambda)$ in $\mathcal{D}$.
Diremo inoltre che F *preserva i prodotti (o prodotti finiti)* se preserva tutti i prodotti (o prodotti finiti) che esistono in $\mathcal{C}$

Osservazione. Se F preserva un prodotto degli X_λ, allora li preserva tutti.

Definizione 173: Preservazione del coprodotto

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva un coprodotto di $\mathcal{C}$ se F^{op} preserva il corrispondente prodotto di $\mathcal{C}^{op}$

Esempio 174. I funtori dimenticanti $\texttt{Grp}/\texttt{Rng}/A\text{−}\texttt{Mod} \to \texttt{Set}$ preservano i prodotti ma non i coprodotti.

Ora vedremo in particolare cosa succede nelle categorie preadditive, in cui alcune valgono alcune simpatiche proprietà non ovvie.

Definizione 175: Biprodotto

Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva. Un *biprodotto* di $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$ è dato da $X \in \mathcal{A}$ e morfismi (in $\mathcal{A}$) $p_j : X \to X_j$ e $i_j : X_j \to X$, $\forall j = 1..n$. tali che

$$p_j \circ i_j = 1_{X_j} \quad ; \quad p_k \circ i_j = 0 \quad \forall j, k = 1..n \ \text{ con } j \neq k$$
$$\text{e } \sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j = 1_X$$

Osservazione. $(X, i_1, \dots, i_n, p_1, \dots, p_n)$ è un biprodotto di $X_1, \dots, X_n$ in $\mathcal{A}$ se e solo se $(X, p_1, \dots, p_n, i_1, \dots, i_n)$ è un biprodotto in $\mathcal{A}^{op}$

Se $n = 0$ la condizione diventa $1_X = 0$, dunque l'anello degli endomorfismi $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è banale.

Se $n = 1$ i_1 e p_1 sono isomorfismi e l'uno l'inverso dell'altro.

Osservazione. Basta verificare $p_k \circ i_j = 0$ per $j, k = 1..n-1$ e $j \neq k$ (dunque per $n = 2$) non è necessario verificare quella parte della definizione

Dimostrazione. Sia $k < n$. Allora supponendo che $p_k \circ i_j = 0$ se $k \neq j < n$,

$$p_n \circ i_k = p_n \circ 1_X \circ i_k = p_n \circ \left(\sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j \right) \circ i_k = \sum_{j=1}^{n} p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k =$$
$$= p_n \circ i_n \circ p_n \circ i_k + \sum_{j=1}^{n-1} p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k =$$
$$= 1_{X_n} \circ p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \circ 1_{X_k} = p_n \circ i_k + p_n \circ i_k$$

$\implies p_n \circ i_k = 0$ ☐

Proposizione 176. *Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva e siano $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $X \in \mathcal{A}$ è biprodotto di $X_1, \ldots, X_n$* se e solo se *X è un prodotto di $X_1, \ldots, X_n$* se e solo se *X è un coprodotto di $X_1, \ldots, X_n$.*

Più precisamente $X, p_1, \ldots, p_n$ è un prodotto di $X_1, \ldots, X_n$ se e solo se esistono (unici) $i_1, \ldots, \in$ tali che $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ sono un biprodotto di $X_1, \ldots, X_n$. Analogamente e dualmente per il coprodotto

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Per la proposizione universale del prodotto $\exists! i_j : X_j \to X$ per ogni $j = 1..n$ tali che

$$p_k \circ i_j = \begin{cases} 1_{X_j} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

Resta da dimostrare che

$$\sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j = 1_X \iff p_k \circ$$

$\Longleftarrow$ Dati $f_j : Y \to X_j$ devo dimostrare che $\exists!\, f : Y \to X$ tale che $f_j = p_j \circ f$ per ogni $j = 1..n$. Allora posso definire

$$f := \sum_{k=1}^{n} i_k \circ f_k : Y \to X \text{ e allora } p_j \circ f = \sum_{k=1}^{n} p_j \circ i_k \circ f_k = f_j$$

essa è unica poiché se $f' : Y \to X$ è tale che $\forall j,\ f_j = p_j \circ f'$, allora

$$f' = 1_X \circ f' = \sum_{j=1}^{n} i_j \circ p_j \circ f' = \sum_{j=1}^{n} i_j \circ f_j = f$$

□

Osservazione ($n = 0$). In una categoria preadditiva un oggetto
è terminale $\iff$ è iniziale $\iff$ è nullo $\iff$ $1_X = 0$

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore additivo e sia $X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n}$ un biprodotto di $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $(F(X), \{F(i_j)\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodtto di $F(X_1), \ldots, F(X_n)$ in $\mathcal{B}$

Corollario 177. *Un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ additivo preserva i prodotti e i coprodotti finiti.*

Nota (zione matriciale nelle categorie preadditive). Sia $\mathcal{A}$ una categoria preadditiva. Siano $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ in $\mathcal{A}$ tali che $\exists (X, i_j^X, p_j^X)$ biprodotto di $X_1, \ldots, X_n$ e Y, i_j^Y, p_j^Y biprodotto di $Y_1, \ldots, Y_n$. Dati $f_{j,k} : X_k \to Y_j$ morfismi di $\mathcal{A}$ indico con la matrice $m \times n$ $(f_{j,k})$ il morfismo $f : X \to Y$ definito da

$$f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} i_j^Y \circ f_{j,k} \circ p_k^X$$

Definizione 178: Categoria additiva

Una *categoria additiva* è una categoria preadditiva in cui esistono tutti i biprodotti.

Esempio 179. A−`Mod` è additiva per ogni anello A.

Esempio 180. A anello come categoria preadditiva con un solo oggetto è additiva se e solo se $A = 0$

Osservazione. Se $\mathcal{A}$ è additiva, allora anche $\mathcal{A}^{op}$ lo è.

Esempio 181. Le sottocategorie piene di $A-$`Mod` con oggetti i moduli *f.g. / f.p. / coerenti / noetheriani / artiniani / liberi* sono additive. Non vale per esempio per ciclici.

Proposizione 182. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore additivo essenzialmente suriettivo. Allora se $\mathcal{A}$ è additiva, anche $\mathcal{B}$ è additiva. In particolare $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ è additivo per ogni $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale.*

Dimostrazione. $\forall Y_1, \dots, Y_n$, se F è ess. suriettivo, allora $\exists X_j \in \mathcal{A}$ tale che $F(X_j) \cong Y_j$. A meno di cambiare F con $F' \cong F$ posso supporre $F(X_j) = Y_j$.

Allora se $\exists X$ biprodotto di $X_1, \dots, X_n$ in $\mathcal{A}$, $F(X)$ è biprodotto di $Y_1, \dots, Y_n$ □

Osservazione. Sia $\mathcal{C}$ una categoria (piccola) e $\mathcal{A}$ additiva. Allora $\texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva.

Dimostrazione. Dati $F_1, \dots, F_n \in \texttt{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ devo dimostrare che esiste il loro biprodotto. Per ogni $X \in \mathcal{C}$ esiste $F(X)$ biprodotto di $F_1(X), \dots, F_n(X)$ in $\mathcal{A}$.

$\forall f : X \to Y$ morfismo di C definisco $F(f)$ come il morfismo definito con la notazione matriciale da

$$F(X) = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(X) \overset{\begin{pmatrix} F_1(f) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & F_n(X) \end{pmatrix}}{\longrightarrow} F(Y) = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i(Y)$$

Allora $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ è un funtore e ci sono trasformazioni naturali $i_j : F_j \to F$ e $p_j : F \to F_j$ le cui componenti sono

$$(i_j)_X := i_j^X : F_j(X) \to F(X) \quad ; \quad (p_j)_X := p_j^X : F(X) \to F_j(X)$$

Poiché $\mathcal{C}$ è preadditiva, $\texttt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva. Poiché $F_1, \dots, F_n \in \texttt{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, allora $F = \bigoplus_{i=1}^{n}$ è additivo, infatti

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \begin{pmatrix} F_1(f+g) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & F_n(f+g) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_1(f) + F_1(g) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & F_n(f) + F_n(g) \end{pmatrix} = F(f) + F(g) \end{aligned}$$

□

Esempio 183. Se $\mathcal{A}$ è preadditiva (piccola), allora $\mathcal{A}-\texttt{Mod} := \texttt{AddFun}(\mathcal{A}, \texttt{Ab})$ è additiva.

Proposizione 184. *Sia $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore con $\mathcal{A}$ additiva, $\mathcal{B}$ preadditiva, F che preserva i prodotti (o coprodotti) finiti. Allora F è additivo*

Dimostrazione (idea). Sia $0 \in \mathcal{A}$ oggetto nullo, allora $F(0)$ è termianle, dunque $F(0)$ è nullo (perché B è preadditiva), ossia $F(0) = 0$.

Allora segue che F preserva i biprodotti. Infatti se $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $X_1, \dots, X_n$ in $\mathcal{A}$, allora $(X, p_1, \dots, p_n)$ è un prodotto di $X_1, \dots, X_n$ in $\mathcal{A}$ e dunque $F(X), \{F(p_j)\}_{j=1..n}$ è un prodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$ in $\mathcal{B}$. Allora

$\exists! i'_j : F(X_j) \to F(X)$ tali che $(F(X), \{i'_j\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$. Ma allora deve essere $i'_j = F(i_j)$ poiché

$$F(p_k \circ i_j) = F(p_k) \circ F(i_j) = F(p_k) \circ i'_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$
$$F(0 : Y \to Z) = 0 : F(Y) \to F(Z)$$

E allora se $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{A}$, allora $f + g$ è la composizione

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix}f & 0\\0 & g\end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}} Y$$

Allora $F(f+g)$ è la composizione

$$F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} F(X) \oplus F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix}F(f) & 0\\0 & F(g)\end{pmatrix}} F(Y) \oplus F(Y) \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}} F(Y)$$

che è $F(f) + F(g)$ ☐

Corollario 185. *Se $\mathcal{A}$ è additiva, allora $\mathcal{A}$ ha un'unica struttura preadditiva.*

Dimostrazione. Considero $\mathcal{B} := \mathcal{A}$ come categoria con una qualunque struttura preadditiva e $F = \text{id}$. Allora per la proposizione 184, F è additivo. Poiché F è pienamente fedele, esiste un'unica struttura preadditiva su $\mathcal{A}$ tale che $F = \text{id}$ è additivo, dunque la struttura di $\mathcal{B}$ coincide con quella di $\mathcal{A}$ ☐

Osservazione. Sia A un anello commutativo, $\mathcal{A}$ una categoria A-lineare e additiva. Allora *non necessariamente* la struttura A-lineare è unica. Data infatti una struttura A-lineare posso cambiarla su $\mathcal{A}(X,Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{A}$. Se è data da omomorfismi di anelli $A \overset{\varphi_{X,Y}}{\to} \text{End}(\mathcal{A}(X,Y))$ considero $A \overset{\alpha}{\to} A \overset{\varphi_{X,Y}}{\to} \text{End}(\mathcal{A}(X,Y))$ con α omomorfismo di anelli non banale.

Corollario 186. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono categorie equivalenti e $\mathcal{A}$ è additiva, allora B è additiva.*

Dimostrazione. So già che $\mathcal{B}$ è preadditiva. Allora $\exists F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ equivalenza, additivo per la proposizione 184. F è essenzialmente suriettivo, dunque $\mathcal{B}$ è additivo. ☐

2.2 Limiti e colimiti

L'obiettivo nostro è riuscire a generalizzare il concetto di ker e coker che era definito sui moduli. Vedremo che il giusto contesto sarà quello delle categorie *abeliane*. (probabilmente) A scopo di definire tale struttura, introduciamo i seguenti nuovi concetti

Definizione 187

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ un funtore (con $\mathcal{L}$ piccola).
Un *limite* di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : K_X \to I$ dove $K_X : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ è il funtore costante di valore X.

In altri termini, $\forall L \in \mathcal{L}$, $\alpha_L; X \to I(L)$ è tale che $\forall l : L \to L'$ in $\mathcal{L}$, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\alpha_L"'] \arrow[dr, "\alpha_{L'}"] & \\
I(L) \arrow[r, "I(l)"'] & I(L')
\end{tikzcd}$$

Inoltre, vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C},\ \forall \beta : K_Y \to I \text{ trasformazione naturale, } \exists!\, f \in \mathcal{C}(Y, X) \text{ t.c. } \beta = \alpha \circ K_f$$

dove $K_f : K_X \to K_Y$ è la trasformazione naturale definita da $(K_f)_L := f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$. In altre parole $\beta_L = \alpha_l \circ f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$

Esempio 188 (Prodotto)**.** Se $\mathcal{L} = \Lambda$ insieme (categoria discreta), allora I è dato dagli $I(\lambda) \in \mathcal{C}$ $(\lambda \in \Lambda)$, e un limite di I è un prodotto degli $I(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ perché un limite è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_\lambda : X \to I(\lambda)$ (qualunque) tali che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall \beta_\lambda : Y \to I(\lambda)$,

$$\exists!\, f \in \mathcal{C}(Y, X) : \beta_\lambda = \alpha_\lambda \circ f \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Esempio 189. Sia $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Allora I è dato da $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ in $\mathcal{C}$. Un limite di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_1 : X \to Y$ e $\alpha_2 : X \to Z$ tali che $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_1$ o equivalentemente $h : X \to Y$ tale che $f \circ h = g \circ h$.

La proprietà universale diventa:

$$\forall X' \in \mathcal{C},\ \forall h' : X' \to Y\ \exists!\, k : X' \to X : h' = h \circ k \quad \text{ossia} \quad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \\
X' \arrow[u, "\exists!\, k"] \arrow[ur, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

tale h si dice *equalizzatore* di f e g.

In `Set` si può prendere $X := \{y \in Y : f(y) = g(y)\} \hookrightarrow Y$. Analogamente in `Grp`, `Rng` e $A-$`Mod`.

Esempio 190. Sia $\mathcal{L} = (:\rightrightarrows \bullet)$. Allora I è dato da $\begin{tikzcd} & Y_2 \arrow[d, "g_2"'] \\ Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Z \end{tikzcd}$ in $\mathcal{C}$. Un limite di I è $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $f_1 : X \to Y_1$ e $f_2 : X \to Y_2$ $(h : X \to Z)$ tale che

$$(h =) g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$$

e la proprietà universale diventa: dati $f'_i : X' \to Y_i$ tali che $g_1 \circ f'_1 = g_2 \circ f'_2$, allora $\exists! f : X' \to X$ tale che $f'_1 = f_1 \circ f$. Equivalentemente si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, dashed, "\exists!\, f"'] \arrow[drr, bend left, "f'_2"] \arrow[ddr, bend right, "f'_1"'] & & \\
& X \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "f_1"] & Y_2 \arrow[d, "g_2"'] \\
& Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Z
\end{tikzcd}$$

In tal caso (X, f_1, f_2) si dice *prodotto fibrato* di g_1, g_2 (o *pullback*)

Esempio 191. `Set` (o altre categorie concrete) si può prendere $X := \{y_1, y_2 \in Y_1 \times Y_2 : g_1(y_1) = g_2(y_2)\}$

Definizione 192: Colimite

Un *colimite* di $I : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ è un limite di $I^{op} : \mathcal{L}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$, cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : I \to K_X$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$, $\forall \beta : I \to K_Y$ trasformazione naturale, $\exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $\beta = K_f \circ \alpha$ (cioè $\beta_L = f \circ \alpha_L$ per ogni $L \in \mathcal{L}$)

Esempio 193. Se $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$, allora un colimite di di I (dato da $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$) è dato da $h : Z \to X$ tale che $h \circ f = h \circ g$ tale che $\forall h' : Z \to X'$ tale che $h' \circ f = h' \circ g$, $\exists!\, k : X \to X'$ tale che $h' = k \circ h$. Equivalentemente il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & X \arrow[d, dashed, "\exists!\, k"] \\
& & X'
\end{tikzcd}$$

commuta e h si dice *coequalizzatore* di f e g.

Esercizio 194 Coprodotto fibrato o *pushout*

Definire il coprodotto fibrato, che è il duale del prodotto fibrato.

Esempio 195. In `Set` un coequalizzatore di $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ è dato dalla proiezione al quoziente $Z \to Z/_{\sim}$ dove $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza su Z che contiene $\{(f(y), g(y)) | y \in Y\} \subseteq Z \times Z$

Nota (zione). In alcuni casi invece di *limiti/colimiti* si può parlare di *limiti inversi/limiti diretti.*