Appunti di Algebra Superiore

Github Repository: Oxke/appunti/AlgebraSuperiore

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

In topologia: sia X uno spazio topologico, allora omologia / coomologia (a coeff in A)

$$H_n(X, A)/H^n(X, A)$$

Ottenuti a partire da **complessi** di catene o cocatene, cioè successioni

$$C_n(X, A) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X, A) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

e $d_{n-1} \cdot d_n = 0$ (cioè $\mathrm{Im}(d_n) \subseteq \mathrm{Ker}(d_{n-1})$) e $H_n(X, A) := \frac{\mathrm{Ker}(d_{n-1})}{\mathrm{Im}(d_n)}$ In astratto introdurremo le categorie *abeliane* (che generalzzano le strutture dei moduli su un anello) e studieremo i "fattori derivati" di funtori (additivi) tra categorie abeliane.

I funtori derivati misureranno la mancanza di **esattezza** (ossia mandare successioni esatte in successioni esatte) del funtore di partenza.

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)

0.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 0.1.1: Anello

Un **anello** $A, +, \cdot$ è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide $A, \cdot$ (cn 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b + c) = ab + ac \quad ; \quad (b + c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione $\cdot$ è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 0.1.1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 0.1.2. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 0.1.3 (Anello Banale)**.** L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 0.1.4 (Non comm.)**.** A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dai l'anello banale non esiste davvero)

Esempio 0.1.5. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\mathrm{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ e $\cdot$ dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\mathrm{Hom(G', G)}$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G.

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 0.1.2: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ($aa' = 1$).
a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile $\iff$ invertibile a destra e sinistra)*.* solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$(a'a)a'' = a'(aa'')1a'' = a'' \qquad\qquad = a' = a'1$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili)*.* L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

Definizione 0.1.3: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \setminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 0.1.4: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \setminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ ($a'a = 0$)

Definizione 0.1.5: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 0.1.6. I campi, $\mathbb{Z}$, se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall\, 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

Definizione 0.1.6: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 0.1.7. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 0.1.8. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 0.1.7: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I, +) < (A, +)$ e $ab \in I$ $(ba \in I)$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.
Un **ideale** bilatero è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 0.1.9. Gli ideali in $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \varnothing$$

quindi A con divisione $\implies$ gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 0.1.8: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op}, con $(A^{op}, +) := (A, +)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 0.1.1 (Anello Quoziente)**.** *Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I, +$ è un anello con prodotto $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$, dove $\overline{a} := a + I \in A/I$*

Definizione 0.1.9: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \to B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

i) $f(a + a') = f(a) + f(a')$

ii) $f(aa') = f(a)f(a')$

iii) $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \to A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f' = \mathrm{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 0.1.2. *Se $f : A \to B$ è un omomorfismo allora*

1. *$A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.*
2. *$B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello*
3. *$J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\mathrm{Ker} f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale*
4. *f **suriettivo** e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale*

Osservazione. $f : A \to B$ è iniettivo $\iff \mathrm{Ker} f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \mathrm{Im} f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 0.1.3: Omomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \mathrm{Ker} f$. Allora

$$\exists! \overline{f} : A/I \to B \text{ omomorfismo tale che } \overline{f}(\overline{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/I \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre $\mathrm{im}\overline{f} = \mathrm{im} f$ e $\mathrm{Ker}\overline{f} = \mathrm{Ker} f/I$

Proposizione 0.1.4. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 0.1.5: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, allora $\mathrm{im} f \cong A/\mathrm{Ker} f$

Definizione 0.1.10

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i b_i : n \in N, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 0.1.11: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è a ideali principali.

Esempio 0.1.10. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 0.1.11. $\mathbb{Z}$ (con ideali $nZ = (n)$)

Esempio 0.1.12. $K[X]$ con K campo