

Appunti di Algebra Superiore

Github Repository: [Oxke/appunti/AlgebraSuperiore](#)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)

Indice

1	Prerequisiti	3
1.1	Richiami sugli Anelli	3
1.2	Richiami sui Moduli	6
1.2.1	Prodotti	8
1.2.2	restrizione degli scalari	10
2	Categorie	15
2.1	Categorie preadditive	28
2.1.1	Prodotti, coprodotti, proprietà universali	31
2.2	Limiti e colimiti	37

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 1: Anello

Un **anello** $A, +, \cdot$ è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide A, \cdot (con 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b + c) = ab + ac \quad ; \quad (b + c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione \cdot è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 3. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 4 (Anello Banale). L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 5 (Non comm.). A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dall'anello banale non esiste davvero)

Esempio 6. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\text{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ e \cdot dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\text{Hom}(G', G)$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G .

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 7: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ($aa' = 1$).

a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile \iff invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$\begin{aligned}(a'a)a'' &= a'(aa'') \\ 1a'' &= a'' = a' = a'1\end{aligned}$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

Definizione 8: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \setminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 9: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \setminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ ($a'a = 0$)

Osservazione. Divisore di zero a sinistra: $aa' = 0$. Invertibile a sinistra: $a'a = 1$

Definizione 10: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 11. I campi, \mathbb{Z} , se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

Definizione 12: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 13. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 14. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 15: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I, +) < (A, +)$ e $ab \in I$ ($ba \in I$), $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.

Un **ideale bilatero** è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 16. Gli ideali in \mathbb{Z} sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \emptyset$$

quindi A con divisione \implies gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 17: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op} , con $(A^{op}, +) := (A, +)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 18 (Anello Quoziente). *Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I, +$ è un anello con prodotto $\bar{a}\bar{b} := \overline{ab}$, dove $\bar{a} := a + I \in A/I$*

Definizione 19: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \rightarrow B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

$$\text{i) } f(a + a') = f(a) + f(a')$$

$$\text{ii) } f(aa') = f(a)f(a')$$

$$\text{iii) } f(1_A) = 1_B$$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \rightarrow A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ f' = \text{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 20. *Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo allora*

1. $A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.
2. $B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello
3. $J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\text{Ker } f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale
4. f **suriettivo** e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale

Osservazione. $f : A \rightarrow B$ è iniettivo $\iff \text{Ker } f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \text{Im } f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 21: Omomorfismo

$f : A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \text{Ker } f$. Allora

$$\exists! \bar{f} : A/I \rightarrow B \text{ omomorfismo tale che } \bar{f}(\bar{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \searrow \bar{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

Inoltre $\text{im } \bar{f} = \text{im } f$ e $\text{Ker } \bar{f} = \text{Ker } f / I$

Proposizione 22. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 23: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli, allora $\text{im} f \cong A/\text{Ker} f$

Definizione 24: Ideale massimale (sinistro / destro)

Un ideale J (sinistro/destro) di A è massimale se $\forall I$ ideale (sinistro/destro) tale che $J \subseteq I \subseteq A$, allora $I = J$ o $I = A$

Osservazione. Esiste sempre un ideale (sinistro/destro) massimale (*lemma di Zorn*)

Definizione 25

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i u_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 26: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è principale.

Esempio 27. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 28. \mathbb{Z} (con ideali $n\mathbb{Z} = (n)$)

Esempio 29. $K[X]$ con K campo

1.2 Richiami sui Moduli

Definizione 30: A-modulo

Un A -modulo (di default sinistro) M è un gruppo abeliano $(M, +)$ con una moltiplicazione per scalare definita da

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \in M \end{aligned}$$

e tale che, $\forall a, b \in A$ e $\forall x, y \in M$:

- 1) $a(x + y) = ax + ay$
- 2) $(a + b)x = ax + bx$
- 3) $(ab)x = a(bx)$
- 4) $1x = x$

Osservazione. Se \mathbb{K} è un campo, allora un \mathbb{K} -modulo è uno spazio vettoriale.

Osservazione. Se $(M, +)$ è un gruppo abeliano, data $f : A \times M \rightarrow M$ posso definire $\alpha : A \rightarrow M^M$ come $\alpha(a) = (x \mapsto ax)$, e quindi le proprietà precedenti si traducono in

1. $\alpha(a)(x + y) = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$ e dunque $\alpha(a)$ è omomorfismo di gruppi, dunque $\alpha(A) \subseteq \text{End}(M)$
2. $\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ dunque $\alpha : A \rightarrow \text{End}(M)$ è omomorfismo di gruppi
3. $\alpha(a) \circ \alpha(b) = \alpha(ab)$
4. $\alpha(1) = \text{id}_M$

Dalla 2,3,4 $\alpha : A \rightarrow \text{End}(M)$ è omomorfismo di anelli.

Teorema 31: Secondo teorema di isomorfismo

Sia M un modulo, con $M', M'' \subseteq M$ sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

Dimostrazione. Si prenda $f : M' \rightarrow (M' + M'')/M''$ composizione dell'inclusione di M' in $M' + M''$ e della proiezione a quoziente, dunque è un omomorfismo.

Allora $\text{Ker} f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$.

Preso $y \in (M' + M'')/M''$, $y = x' + x'' + M'' = x' + M'' = f(x')$ dunque f è suriettiva. Dal primo teorema di isomorfismo segue la tesi. \square

Teorema 32: Terzo teorema di isomorfismo

Dati $M'' \subseteq M' \subseteq M$ sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M'$$

Dimostrazione. Sia f la composizione delle due proiezioni a quoziente, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \text{Ker} f \iff \pi(x) \in \text{Ker} \pi' = M'/M''$$

dunque $\text{Ker} f = M'$ da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo. \square

Proposizione 33.

1. Sia A un anello, allora un A -modulo M è ciclico se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro tale che $M \cong A/I$
2. M è semplice se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro massimale tale che $M \cong A/I$

Dimostrazione. 1. (\Leftarrow) A/I è ciclico (generato da $\bar{1}$). Viceversa per (\Rightarrow) so che $M = Ax$ per un qualche $x \in M$. Considerata $f :_A A \rightarrow M$ data da $a \mapsto ax$, $\text{Ker} f$ è sottomodulo di A , ovvero ideale sinistro. Concludo per il primo teorema di isomorfismo.

2. Se M è semplice allora $\forall 0 \neq x \in M$, $M = Ax$, dunque M è ciclico e per il punto 1. esiste I ideale sinistro tale che $M \cong A/I$. La proposizione si riduce a dire che A/I è semplice se e solo se I è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $I \subseteq J \subseteq A$ ideale sinistro. Allora $A/I \neq 0 \iff I \neq A$ e gli unici sottomoduli di A/I sono I/I e A/I , ossia gli unici ideali sinistri J tali che $I \subseteq J \subseteq A$ sono I e A .

\square

Osservazione. Con il lemma di Zorn si dimostra che $A \neq 0 \implies$ esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

1.2.1 Prodotti

Definizione 34: Prodotto

Supponiamo di avere M_λ A -moduli, per $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è un } A\text{-modulo detto } \mathbf{prodotto} \text{ degli } M_\lambda$$

con $(x + y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$ e $(ax)_\lambda = ax_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $x, y \in M$.
 $\forall \mu \in \Lambda$ esiste $p_\mu : M \rightarrow M_\mu$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ che è A -lineare e suriettivo.

Proposizione 35 (Proprietà universale del prodotto).

Dati $f_\mu : N \rightarrow M_\mu$ A -lineari $\forall \mu \in \Lambda$, allora esiste unico $f : N \rightarrow M$ A -lineare tale che $f_\mu = p_\mu \circ f$

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ f_\mu \downarrow & \searrow \exists! f & \\ M_\mu & \xleftarrow{p_\mu} & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \end{array}$$

Esercizio 36

Dimostrare la proprietà universale del prodotto

Definizione 37: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli M_λ è

$$M' := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda = 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste

$$i_\mu : M_\mu \longrightarrow M'$$

$$x \mapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

che è A -lineare e iniettivo.

Proposizione 38 (Proprietà universale somma diretta).

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ f_\mu \uparrow & \nwarrow \exists! f & \\ M_\mu & \xrightarrow{i_\mu} & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \end{array}$$

Osservazione. Se $\#\Lambda < +\infty$ allora

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

Nota (zione). Se $M_\lambda = M$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si denota

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M =: M^\Lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M =: M^{(\Lambda)}$$

Dati $M_\lambda \subseteq M$ sottomoduli, con $\lambda \in \Lambda$, sia

$$f : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow M$$

l'omomorfismo indotto dalle inclusioni $M_\lambda \xrightarrow{i_\lambda} M$, allora

$$\text{im } f =: \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \subseteq M \text{ è sottomodulo}$$

Inoltre f è iniettiva se e solo se $M_\mu \cap \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\mu\}} M_\lambda = 0$ per ogni $\mu \in \Lambda$ e in tal caso f induce un isomorfismo tra $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ e $\sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ e si può scrivere $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ per indicare il sottomodulo di M

Definizione 39: Linearmente indipendente, base, modulo libero

Sia $U \subseteq M$ un insieme, con M A -modulo. Si dice che U è A -linearmente indipendente se dati $x_1, \dots, x_n \subseteq U$ distinti

$$a_1, \dots, a_n \in A \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

U è detta **base** di M se è linearmente indipendente e genera M , ossia $M = AU$. Si dice che M è **libero** se ammette una base

Esempio 40. Per ogni Λ , $A^{(\Lambda)}$ è libero con base $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dove, per ogni $\lambda \in \Lambda$,

$$(e_\lambda)_i = \begin{cases} 1 & \lambda = i \\ 0 & \lambda \neq i \end{cases}$$

Proposizione 41. Siano L, M A -moduli, con L libero con base $\{l_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tale che $l_\lambda \neq l_\mu$ se $\lambda \neq \mu$, allora

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \exists ! f : L \rightarrow M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(l_\lambda) = x_\lambda$$

Corollario 42. Un A -modulo è libero se e solo se è isomorfo a $A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ .
Dimostrazione.

\implies M libero con base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ con $x_\lambda \neq x_\mu$ se $\lambda \neq \mu$. Allora per la proposizione

$$\exists ! f : A^\Lambda \rightarrow M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(e_\lambda) = x_\lambda$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\text{im } f = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle_A = M$ e f è iniettivo perché gli x_λ sono linearmente indipendenti.

\Leftarrow ovvio

□

Corollario 43. Ogni A -modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero ($A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ).

Inoltre un A -modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n , $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Sia $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un insieme di generatori di un modulo M . Per la proposizione $\exists ! f : A^{(\Lambda)} \rightarrow M$ A -lineare tale che $fl_\lambda = x_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\text{Im } f = M$ e dunque per il primo teorema di isomorfismo $M \cong A^{(\Lambda)} / \ker f$.

Per la seconda parte se M è finitamente generato posso scegliere Λ finito e viceversa $M \cong A^n / N$ è finitamente generato perché A^n lo è e $\pi : A^n \rightarrow A^n / N$ è un omomorfismo suriettivo.

□

Proposizione 44. A è con divisione se e solo se ogni suo A -modulo è libero

Dimostrazione.

\implies (complementi di algebra)

\impliedby Sia M un A -modulo semplice. Per ipotesi è libero, allora $M \cong A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ . Ma se $\#\Lambda > 1$ allora $A^{(\Lambda)}$ non è semplice ($A \subseteq A^{(\Lambda)}$ è un sottomodulo non banale). Inoltre $\Lambda \neq \emptyset$ ($A^{(\emptyset)} = \{0\}$ non è semplice).

Ne consegue che $M \cong A$ e dunque A è con divisione

□

Esempio 45. Con $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non è libero

Si può dimostrare che se A è con divisione, allora tutte le basi di un A -modulo (libero) M hanno la stessa cardinalità, che viene detta rango e indicata con $\text{rk}_A M$.

In generale non tutte le basi di un A -modulo libero hanno la stessa cardinalità, esistono infatti anelli A non banali tali che $A \cong_A A^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 46. Sia $A = \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ con \mathbb{K} campo e $\dim_{\mathbb{K}}(V) = +\infty$

Si dimostra che se $A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli e il rango dei B -moduli liberi è ben definito allora anche il rango degli A -moduli liberi è ben definito. Di conseguenza se $A \neq 0$ è commutativo allora il rango degli A -moduli liberi è ben definito ($\exists I \subseteq A$ ideale massimale e $\pi : A \rightarrow A/I$ omomorfismo con A/I campo)

1.2.2 restrizione degli scalari

Siano A, B anelli, con $f : A \rightarrow B$ omomorfismo di anelli. Allora se M è un B -modulo allora M è anche un A -modulo con $ax := f(a)x$. Si dice allora che ${}_A M$ è ottenuto da ${}_B M$ per **restrizione degli scalari** attraverso f .

Inoltre se $M' \subseteq M$ è B -sottomodulo allora è anche un A -sottomodulo e se $g : M \rightarrow N$ è B -lineare allora g è anche A -lineare.

Prima della prossima definizione ricordiamo che il **centro** di un anello è sottoanello, con il centro l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri elementi e indicato con $Z(A)$,

$$Z(A) := \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$$

Definizione 47

Sia A commutativo. Allora una A -algebra è un omomorfismo di anelli $f : A \rightarrow B$ tale che $\text{im} f \subseteq Z(B)$

Se f è evidente si dice che B è una A -algebra

Esempio 48. $M_n(A)$ è una A -algebra con $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Esempio 49. Se $A = \mathbb{Z}$ per ogni B anello l'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \rightarrow B$ è una \mathbb{Z} -algebra. Infatti l'omomorfismo unico $\mathbb{Z} \rightarrow Z(B)$ deve essere lo stesso di $\mathbb{Z} \rightarrow B$

Definizione 50: Morfismo di A -algre

Siano $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow C$ A -algre. Un (omo/iso/...)morfismo di A -algre da f a g è $h : B \rightarrow C$ (omo/iso/...)morfismo di anelli tale che $h \circ f = g$

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ f \downarrow & \searrow g & \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

Esempio 51. Ogni omomorfismo di anelli è omomorfismo di \mathbb{Z} -algebre.

Esempio 52. Sia $f : A \rightarrow B$ una A -algebra. Allora $\forall I \subseteq B$ ideale B/I è A -algebra con $\pi \circ f$

Osservazione (motivazione della definizione). Se $f : A \rightarrow B$ A -algebra, allora B è un anello e A -modulo (per restrizione degli scalari) tale che

$$a(bb') = (ab)b' = b(ab')$$

Lemma 53. Sia $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ una successione esatta di A -moduli. Siano $f' : A^m \rightarrow M'$ e $f'' : A^n \rightarrow M''$ omomorfismi. Allora esiste un diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^m & \longrightarrow & A^{m+n} & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dimostrazione. □

Proposizione 54. Sia $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ esatta di A -moduli. Allora

1. $Mf.g. \implies M''f.g.$
2. $M', M''f.g. \implies Mf.g.$
3. $M', M''f.p. \implies Mf.p.$
4. $Mf.g., M''f.p. \implies M'f.g.$
5. $M'f.g., Mf.p. \implies M''f.g.$

Dimostrazione.

1. già visto
2. In esercizio la dimostrazione diretta. In alternativa possiamo applicare il lemma 53. Infatti esistono $f' : A^m \rightarrow M'$ e $f'' : A^n \rightarrow M''$ omomorfismi suriettivi e per il lemma 53 il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^m & \longrightarrow & A^{m+n} & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commuta. Applicando ora il lemma del serpente otteniamo la successione esatta

$$\text{coKer } f' = 0 \rightarrow \text{coKer } f \rightarrow 0 = \text{coKer } f'' \implies \text{coKer } f = 0 \implies Mf.g.$$

3. Si può fare una dimostrazione simile a quella precedente e applicando il lemma del serpente troviamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f' \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \rightarrow 0 = \text{coKer } f'$$

per il punto 1. M è finitamente generato e dunque M è finitamente presentato.

4. $M'' \text{ f.p.} \implies \exists$ successione esatta $A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{h} M'' \rightarrow 0$. Esiste dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A^m & \xrightarrow{g} & A^n & \xrightarrow{h} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

infatti voglio f tale che $p \circ f = h$ e posso come prima (esercizio). allora per il lemma del serpente trovo che

$$0 \rightarrow \text{coKer } f' \rightarrow \text{coKer } f \rightarrow 0 = \text{coKer}_{\text{id}_{M''}}$$

è una successione esatta, e dunque $\text{coKer } f' \cong \text{coKer } f = M/\text{Im } f$ per cui

$$0 \rightarrow \text{Im } f' \rightarrow M' \rightarrow \text{coKer } f' \rightarrow 0$$

è esatta. Concludiamo che $\text{Im } f' \cong A^m/\text{Ker } f'$ e dunque è f.g., da cui anche M' è finitamente generato per il punto 1.

5. M è finitamente generato, dunque M'' è finitamente generato per il punto 0. Come prima $\exists A^m \rightarrow A^n, A^n \rightarrow M''$ omomorfismi suriettivi e trovo il diagramma del lemma 53 e applicando il lemma del serpente ottengo la successione esatta

$$\text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f'' \rightarrow 0 = \text{coKer } f'$$

Sia ora $f : A^{m+n} \rightarrow M$ suriettiva, allora

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow A^{m+n} \rightarrow M \rightarrow 0$$

è esatta, A^{m+n} è finitamente generata, M è finitamente presentato, dunque $\text{Ker } f$ è f.g., quindi per il punto 3. $\text{Ker } f''$ è f.g. e per il punto 0. M è f.p.

□

Esercizio 55

Dimostrare il punto 1. della dimostrazione precedente direttamente.

Corollario 56. Sia $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Allora M è f.g. / f.p. se e solo se M_i è f.g. / f.p. per ogni i .

Dimostrazione. La successione $0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \rightarrow M \rightarrow M_n \rightarrow 0$ è esatta, dunque

\implies usando induzione su n e i punti 1. e 2. della proposizione precedente

$\Leftarrow M_n$ è f.g. per il punto 0., ed è f.p. per il punto 4.

□

Osservazione. per il punto 3., se M è f.p. allora ogni $A^n \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$ esatta si estende a

$$A^m \rightarrow A^n \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

Osservazione. Sia A non noetheriano. Allora $\exists M$ A -modulo f.g. non noetheriano, ad esempio $M = A$, ossia $\exists M' \subseteq M$ sottomodulo non f.g. e in tal caso anche quando M è finitamente presentato, ad esempio nel caso $M = A$, M/M' non è f.p. perché contraddirebbe il punto 3.

Uno può chiedersi dato un modulo se i suoi sottomoduli finitamente generati siano anche moduli finitamente presentati. Questo non è in generale vero ma motiva la seguente definizione

Definizione 57: Modulo coerente

Uno modulo M è detto **coerente** se è finitamente generato e tutti i suoi sottomoduli finitamente generati sono finitamente presentati.

Osservazione. Chiaramente essendo $M \subseteq M$ un sottomodulo, se è coerente è anche f.p.

Definizione 58: Anello coerente

Un anello A è **coerente** (a sinistra) se ${}_A A$ è A -modulo coerente (ossia tutti gli ideali sinistri f.g. di A sono f.p.)

Osservazione. Se A è noetheriano e M è un A -modulo, allora

$$M \text{ coerente} \iff M \text{ f.p.} \iff M \text{ f.g.} \iff M \text{ noetheriano}$$

in particolare A è coerente.

Dimostrazione. Sappiamo già che M noetheriano se e solo se M f.g. Resta da dimostrare dunque che M noetheriano se e solo se M è coerente. So che $M' \subseteq M$ f.g. è noetheriano (perché M lo è). Allora esiste la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker } p \rightarrow A^n \xrightarrow{p} M' \rightarrow 0$$

Ora poiché A è noetheriano, anche A^n lo è, e dunque $\text{Ker } p$ è noetheriano, dunque $\text{Ker } p$ è f.g. e infine M' è f.p. \square

Osservazione. Sia A coerente non noetheriano, allora ${}_A A$ è coerente non noetheriano

Esempio 59. Sia A non noetheriano, $I \subseteq A$ ideale sinistro non f.g., allora A/I è f.g. non f.p. e A/I può anche essere noetheriano.

Un esempio è $A = \mathbb{K}[X_n | n \in \mathbb{N}]$, $I = (X_n | n \in \mathbb{N})$, $A/I = \mathbb{K}$

Osservazione. Sia $f : M \rightarrow N$ A -lineare, con M, N finitamente generati. Allora $\text{Im } f \cong M/\text{Ker } f$ e $\text{coKer } f \cong N/\text{Im } f$ sono finitamente generati (punto 0. della proposizione) ma non necessariamente anche $\text{Ker } f$ se A è non noetheriano.

Proposizione 60. Sia $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ esatta di A -moduli.

1. M' f.g. e M coerente, allora M'' è coerente
2. M', M'' coerenti, allora M è coerente
3. M è coerente, M'' è f.p., allora M' è coerente

in particolare M', M, M'' sono coerenti se due di essi lo sono.

Dimostrazione. 1. M'' è f.g. per il punto 0. della proposizione 54. $N'' \subseteq M''$ è f.g., allora c'è una successione esatta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow N := p^{-1}(N'') \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

Allora N è f.g. per 1. di 54 e dunque N è f.p. perché M è coerente, da cui N'' è f.p. per 4. di 54

2. M è f.g. per 1. di 54, se $N \subseteq M$ sottomodulo finitamente generato, allora esiste la successione esatta

$$0 \rightarrow N' := i^{-1}(N) \rightarrow N \rightarrow N'' := p(N) \rightarrow 0$$

Allora N'' è f.g. per 0. di 54 da cui N'' è f.p. per la coerenza di M , dunque N' è f.g. per 3. di 54. Segue dalla coerenza di M' che N' è f.p. e dunque N lo è per 2. di 54

3. M' è f.g. per 3. di 54 dunque M' è coerente perché $M' \cong i(M') \subseteq M$ sottomodulo è f.g. e M è coerente. \square

Esercizio 61

mostrare che

$$\bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ coerente} \iff M_i \text{ coerente } \forall i$$

Corollario 62. Sia $f : M \rightarrow N$ A -lineare, M, N coerenti, allora $\text{Ker} f, \text{Im} f, \text{coKer} f$ sono coerenti.

Dimostrazione. $\text{Im} f \cong M/\text{Ker} f$ è f.g. per 0. di 54 \square

Corollario 63. Se A è coerente e M è un A -modulo f.p., allora M è coerente.

Dimostrazione. Basta osservare che per definizione esiste una successione esatta

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

e in particolare dunque $M \cong \text{coKer} f$ e poiché A^m e A^n sono coerenti, lo è pure M \square

Esempio 64. Sia A commutativo tale che $A[X_1, \dots, X_n]$ sia coerente $\forall n \in \mathbb{N}$ (ad esempio A noetheriano, per il teorema della base di Hilbert) Allora $A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda]$ è coerente $\forall \Lambda$, anche se non è noetheriano per $\#\Lambda = +\infty$ e $A \neq 0$.

Idea della dimostrazione. Sia $I \subseteq B$ ideale f.g., ossia $I = (f_1, \dots, f_n)$. Allora $\exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ finito tale che $f_1 \in B_0 := A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda_0]$ \square

Esempio 65 (Anello non coerente). Presi A e B come prima, ma supponiamo che $A = \mathbb{K}$ campo. Prendiamo dunque $J := (X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, con $\#\Lambda = +\infty$. Allora preso

$$C = B/J^2$$

non è coerente. Preso infatti ad esempio

$$I = C\overline{X_\lambda} \text{ con } \lambda \in \Lambda$$

è f.g. ma non f.p. perché c'è la successione esatta

$$0 \rightarrow J/J^2 \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow 0$$

e J/J^2 è C -modulo annullato da J/J^2 e come $C/(J/J^2) \cong B/J \cong \mathbb{K}$ -modulo ha dimensione ∞ con base $\{\overline{x_\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$

Capitolo 2

Categorie

Definizione 66: Categoria

Una **categoria** \mathcal{C} è data da una classe di oggetti $\text{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ da un insieme di morfismi da X a Y indicato con $\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ e da una azione composizione di morfismi, cioè $\forall X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ (anche scritto $X, Y, Z \in \mathcal{C}$) un'operazione

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)(f, g) \mapsto g \circ f$$

tale che

0. $\mathcal{C}(X, Y) \cap \mathcal{C}(X', Y') \neq \emptyset \implies X = X' \text{ e } Y = Y'$
1. \circ è associativa, cioè $\forall X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$ e $\forall f \in \mathcal{C}(X, Y)$ e $\forall g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ e $\forall h \in \mathcal{C}(Z, W)$ allora

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. $\forall X \in \mathcal{C}$ esiste $1_X = \text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ che è elemento neutro di X cioè $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall f \in \mathcal{C}(X, Y)$,

$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

Esempio 67. La categoria degli insiemi **Set** che ha come oggetti tutti gli insiemi e $\forall X, Y \in \mathbf{Set}$ i morfismi $\mathbf{Set}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y\}$ le funzioni e \circ la composizione di funzioni

Osservazione. Se ho \mathcal{C} tale che valgano solo 1. e 2. e non necessariamente 0. posso ottenere la categoria \mathcal{C}' che soddisfa anche 0. ponendo $\text{Ob}(\mathcal{C}') := \text{Ob}(\mathcal{C})$ e

$$\mathcal{C}'(X, Y) := \{X\} \times \mathcal{C}(X, Y) \times \{Y\}$$

Esempio 68. Le categorie concrete, in cui gli oggetti sono insiemi con qualche struttura e i morfismi sono funzioni tra insiemi che preservano la struttura (con \circ sempre la composizione di funzioni). In particolare:

- La categoria **Grp** dei gruppi, dove gli oggetti sono i gruppi e i morfismi gli omomorfismi di gruppi
- La categoria **Rng** degli anelli
- Dato un anello A , la categoria $A - \text{Mod} / \text{Mod} - A$ degli A -moduli sinistri / destri
- Dato un anello commutativo A , la categoria $A - \text{Alg}$ delle A -algebre

- La categoria **Top** degli spazi topologici (con funzioni continue come morfismi)

Nota. Dato $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ si può indicare con $f : X \rightarrow Y$ “come fosse una funzione”

Esempio 69. Le categorie discrete, cioè tali che gli unici morfismi sono 1_X per ogni $X \in \mathcal{C}$.

Esempio 70. \mathcal{C} tale che $\forall X, Y \in \mathcal{C}, \# \mathcal{C}(X, Y) \leq 1$, ottengo una relazione \preccurlyeq su $\text{Ob}(\mathcal{C})$ in cui

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathcal{C}(X, Y) \neq \emptyset$$

e \preccurlyeq è riflessivo (perché $\exists 1_X \in \mathcal{C}(X, X) \forall X \in \mathcal{C}$) e transitivo, perché $\exists \circ$. Ne consegue che \preccurlyeq è un *preordine*

Viceversa, data una relazione di preordine \preccurlyeq su un insieme (o una classe) S , ottengo una categoria \mathcal{C} con $\text{Ob}(\mathcal{C}) := S$ e $\forall X, Y \in S$,

$$\mathcal{C}(X, Y) := \begin{cases} \{f_{X,Y}\} & \text{se } X \preccurlyeq Y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con l'unica composizione possibile

Esempio 71 (Categoria Vuota). Prendendo $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \emptyset$

Osservazione. $\forall X \in \mathcal{C}$ con \mathcal{C} una categoria, $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X, X)$ è un monoide con \circ , ne consegue il prossimo esempio

Esempio 72 (Monoide). Una categoria con un solo oggetto è un monoide. Viceversa ogni monoide può essere visto come categoria di un solo oggetto.

Esempio 73 (Diagrammi). Possiamo definire categorie date da diagrammi, in cui si rappresentano i morfismi (non l'identità). Ad esempio:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \qquad \bullet \rightrightarrows \bullet \qquad \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

sono tre categorie diverse, rispettivamente con 2, 2, e 3 oggetti

Definizione 74: Categoria opposta

La **categoria opposta** di \mathcal{C} è denotata \mathcal{C}^{op} ed è definita da

$$\text{Ob}(\mathcal{C}^{op}) := \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad \mathcal{C}^{op}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$$

con composizione in \circ^{op} data da $f \circ^{op} g := g \circ f$

Osservazione.

$$(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$$

Esempio 75 (Categoria Prodotto). Siano \mathcal{C}_λ per $\lambda \in \Lambda$ delle categorie. Allora la categoria prodotto

$$\mathcal{C} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita da

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\mathcal{C}) &:= \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ob}(\mathcal{C}_\lambda) \\ \mathcal{C}((X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) &:= \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda) \\ (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \circ (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &:= (g_\lambda \circ f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}$$

Esempio 76 (Categoria Coprodotto). La categoria coprodotto

$$\mathcal{C} := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda$$

è definita con $\text{Ob}(\mathcal{C}) := \coprod_{\lambda \in \Lambda} \text{Ob}(\mathcal{C}_\lambda)$ l'unione disgiunta.

$$\forall X, Y \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C}(X, Y) := \begin{cases} \mathcal{C}_\lambda(X, Y) & \text{se } X, Y \in \mathcal{C}_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con \circ ovvia.

Definizione 77: Sottocategoria

Sia \mathcal{C} una categoria. Allora una sottocategoria \mathcal{C}' di \mathcal{C} è data da una sottoclasse $\text{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall X, Y \in \mathcal{C}'$ da un sottoinsieme $\mathcal{C}'(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ tale che \circ si restringe a \mathcal{C}' e $1_X \in \mathcal{C}'(X, X)$ per ogni $X \in \mathcal{C}'$.

In particolare \mathcal{C}' è una categoria.

Esempio 78. Se \mathcal{C} è un monoide (categoria di un oggetto), allora le sottocategorie non vuote di \mathcal{C} sono i sottomonoidi.

Definizione 79: Sottocategoria Piena

Una sottocategoria \mathcal{C}' di \mathcal{C} si dice **piena** se $\mathcal{C}'(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{C}'$

Osservazione. Una sottocategoria piena di \mathcal{C} equivale a dare una sottoclasse di $\text{Ob}(\mathcal{C})$

Esempio 80 (Gruppi Abeliani). $\mathbf{Ab} \subseteq \mathbf{Grp}$ sottocategoria piena dei gruppi abeliani. Similmente anche $\mathbf{CRng} \subseteq \mathbf{Rng}$ sottocategoria piena degli anelli commutativi.

Oltre alle sotto-strutture sono anche importanti i quozienti, e anche qui possiamo dare una definizione astratta

Definizione 81: Congruenza

Una congruenza \sim su una categoria \mathcal{C} è data da una relazione di equivalenza \sim su $\mathcal{C}(X, Y) \forall X, Y \in \mathcal{C}$ tale che

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{C}, \forall f, f' \in \mathcal{C}(X, Y) \forall g, g' \in \mathcal{C}(Y, Z) \quad f \sim f', g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f'$$

equivalentemente $g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f$ e $h \circ g \sim h \circ g'$

Definizione 82: Quoziente

Sia \sim una congruenza su \mathcal{C} , allora possiamo definire la categoria quoziente \mathcal{C}/\sim definita da

$$\text{Ob}(\mathcal{C}/\sim) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad (\mathcal{C}/\sim)(X, Y) := \mathcal{C}(X, Y)/\sim \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$$

e \circ è indotta da quella di \mathcal{C} , ossia

$$\bar{g} \circ \bar{f} := \overline{g \circ f}$$

Esempio 83 (Omotopia). Sia $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ e \sim_h l'omotopia, ossia $f, g : X \rightarrow Y$ sono omotope se $\exists H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue tali che

$$f(x) = H(x, 0), \quad g(x) = H(x, 1) \quad \forall x \in X$$

e si ottiene $\mathbf{Toph} := \mathbf{Top} / \sim_h$

Esempio 84 (Gruppo quoziente). Sia G un gruppo (visto come monoide, ossia categoria di un oggetto) e sia $H \triangleleft G$ e \sim su G data da $a \sim b \iff aH = bH$. Allora G/N è la categoria quoziente G/\sim . Viceversa ogni \sim congruenza su G si può scrivere in tal modo prendendo $H = \{a \in G : a \sim 1\} \triangleleft G$ (esercizio).

Definizione 85: morfismo invertibile

Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo in una categoria \mathcal{C} . Allora esso è invertibile a sinistra (destra) se $\exists f' : Y \rightarrow X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$).

Osservazione. f è invertibile a sinistra (destra) in \mathcal{C} , allora f è invertibile a destra (sinistra) in \mathcal{C}^{op}

Definizione 86: Isomorfismo

$f : X \rightarrow Y$ è un **isomorfismo** se $\exists f' : Y \rightarrow X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f' = 1_Y$

Osservazione. f è isomorfismo se e solo se f è invertibile a destra e a sinistra.

Dimostrazione.

\implies ovvio

\impliedby $\exists f', f''$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f'' = 1_Y$, allora

$$f' \circ (f \circ f'') = f' = f'' = (f' \circ f) \circ f''$$

e dunque f è invertibile.

In particolare dunque la f' della definizione di isomorfismo è unica e viene denotata f^{-1} \square

Definizione 87

Siano $X, Y \in \mathcal{C}$. Allora X e Y sono isomorfe ($X \cong Y$) se esiste un $f : X \rightarrow Y$ isomorfismo.

Osservazione. 1_X è isomorfismo e $1_X^{-1} = 1_X$. Se f isomorfismo allora f^{-1} isomorfismo e $(f^{-1})^{-1} = f$. Se f, g isomorfismi componibili, allora $g \circ f$ è isomorfismo e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Ne segue che \cong è una relazione di equivalenza su $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$

Definizione 88

Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} è detto **monomorfismo** se $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{C}(Z, X) &\longrightarrow \mathcal{C}(Z, Y) \\ g &\longmapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

è iniettiva

Definizione 89: Epimorfismo

f è un **epimorfismo** in \mathcal{C} se è monomorfismo in \mathcal{C}^{op} , ossia $\forall Z \in \mathcal{C}$ la funzione

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{C}(Y, Z) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

è iniettiva.

Proposizione 90. f è invertibile a sinistra (destra), allora f è monomorfismo (epimorfismo)

Dimostrazione. Basta dimostrare che se f è invertibile a sinistra, allora è mono.

Sappiamo che $\exists f' : Y \rightarrow X$ tale che $f' \circ f = 1_X$. Dobbiamo dimostrare che f_* è iniettiva. Siano $g, h \in \mathcal{C}(Z, X)$ tali che $f_*(g) = f_*(h)$. Allora $f \circ g = f \circ h$, da cui $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$ e dunque $g = h$ \square

Proposizione 91. Sia \mathcal{C} concreta. Allora

$$f \text{ invertibile a sinistra/destra} \implies f \text{ iniettiva/suriettiva} \implies f \text{ mono/epi}$$

Dimostrazione. Non possiamo usare il trick della categoria opposta, perché non è detto che \mathcal{C}^{op} sia ancora concreta.

Sia f' tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$), allora chiaramente f iniettiva (suriettiva) perché le composizioni 1_X e 1_Y sono biunivoche.

Se f è iniettiva, allora siano $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$. Dunque $\forall x \in X$

$$f(g_1(x)) = f(g_2(x)) \xrightarrow{f \text{ inj.}} g_1(x) = g_2(x)$$

ossia f_* è iniettiva, ossia f è monomorfismo.

se f è suriettiva, allora siano $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$. Sappiamo che $\forall y \in Y$ esiste $x_y \in X$ tale che $f(x_y) = y$. Allora abbiamo che, assumendo che $g_1 \circ f = g_2 \circ f$

$$g_1(y) = g_1(f(x_y)) = g_2(f(x_y)) = g_2(y) \quad \forall y \in Y$$

ossia f^* è iniettiva e dunque f è epimorfismo \square

In generale non vale nessuna delle \Leftarrow .

Esempio 92. In **Set** se $f : X \rightarrow Y$ è suriettiva, allora f è invertibile a sinistra. Infatti basta scegliere (AOC) $f'(y) \in f^{-1}\{y\}$ per ogni $y \in Y$. Inoltre se $X \neq \emptyset$ e $f : X \rightarrow Y$ è iniettiva, allora f è invertibile a sinistra.

Esercizio 93

In **A-Mod**, mostrare che $f : M \rightarrow N$ iniettiva è invertibile a sinistra se e solo se $\text{Im}(f) \subseteq N$ è addendo diretto.

Mostrare che $f : M \rightarrow N$ suriettiva è invertibile a destra se e solo se $\text{Ker}(f) \subseteq M$ è addendo diretto

Concludere che valgono sempre entrambe le implicazioni se e solo se A è semisemplice.

Esempio 94. In **Set**, se f è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti, poniamo per assurdo $f : X \rightarrow Y$ non iniettiva, dunque siano $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$. Allora preso $Z = \{z\}$ e $g, h : Z \rightarrow X$ tali che $g(z) = x$ e $h(z) = y$ abbiamo che $f \circ g = f \circ h$ da cui $g = h$ e dunque $x = y$

Supponiamo f non suriettiva, mostrare per esercizio $\exists g, h : Y \rightarrow Z$ tali che $g \neq h$ ma $g \circ f = h \circ f$

Esempio 95. In $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$ $f : M \rightarrow N$ è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti $i : \text{Ker} f \rightarrow M$ inclusione tale che $f \circ i = 0$ e anche $0 : \text{Ker} f \rightarrow M$ è tale che $f \circ 0 = 0$. Concludiamo che $i = 0$ e dunque $\text{Ker} f = 0$.

Similmente $\pi : N \rightarrow \text{coKer} f$ è tale che $\pi \circ f = 0$ e se f è epi allora $0 = \pi$ e dunque $\text{coKer} f = 0$ e dunque f è suriettiva.

Esempio 96. In \mathbf{Grp} f mono (epi), allora f iniettiva (suriettiva)

Per mono \implies iniettiva si può usare la stessa dei moduli, mentre per l'altra è un po' più complicato, ma si dimostra che è vero lo stesso

Esempio 97. In \mathbf{Rng} $f : A \rightarrow B$ mono, allora f iniettiva.

Tuttavia f epi **non implica** f suriettiva. Ad esempio preso $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è epi, infatti $\forall A$ anello esiste al più un omomorfismo $\mathbb{Q} \rightarrow A$ ($f : \mathbb{Q} \rightarrow A$ sia omomorfismo, allora $f|_{\mathbb{Z}}$ è l'unico omomorfismo e $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$). Chiaramente però non è suriettiva.

Definizione 98: Funtore

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tra 2 categorie è dato da una funzione $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ e $\forall X, X' \in \mathcal{C}$ una funzione $F = F_{X, X'} : \mathcal{C}(X, X') \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(X'))$ tale che

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(se f e g sono componibili in \mathcal{C}) e $F(1_X) = 1_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$

Proposizione 99. Sia F un funtore e f invertibile a sinistra (destra). Allora $F(f)$ è invertibile a sinistra (destra)

Dimostrazione. $\exists f'$ tale che $f' \circ f = 1_X$, allora $F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$. \square

Osservazione. Segue che f iso, allora $F(f)$ iso e $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$

Esempio 100. Sia $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria. Allora $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, $X \mapsto X$ e $f \mapsto f$ è un funtore

Esempio 101. Se \sim è una congruenza, allora $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ è un funtore, con $X \mapsto X$ e $f \mapsto \bar{f}$

Esempio 102 (Funtore dimenticante). $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ con \mathcal{C} categoria discreta e $X \mapsto X$, $f \mapsto f$ è un funtore, che “dimentica” la struttura aggiunta.

Analogamente anche $\mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Ab}$, con $(A, +, \cdot) \mapsto (A, +)$ è un funtore dimenticante.

Osservazione. Notare che il secondo funtore dimenticante non preserva gli epimorfismi. Sarebbe infatti $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ l'inclusione è un'epimorfismo in \mathbf{Rng} ma non in \mathbf{Ab}

Esempio 103. Sia $A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Allora la restrizione degli scalari è un funtore $\mathbf{B} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{A} - \mathbf{Mod}$

Esempio 104. Funtore tra 2 categorie discrete \mathcal{C} e \mathcal{D} è una funzione $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$

Esempio 105. Un funtore tra 2 preordini \mathcal{C} e \mathcal{D} è una funzione $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ che preserva la relazione di preordine.

Esempio 106. Un funtore tra 2 monoidi è un omomorfismo di monoidi.

Più in generale dato G un monoide e una categoria \mathcal{C} , un funtore $G \rightarrow \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da un omomorfismo di monoidi $G \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$

Se G è un gruppo un funtore $G \rightarrow \mathcal{C}$ è dato da $X \in \mathcal{C}$ e un omomorfismo di gruppi $G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Ad esempio se $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ il funtore dà un'azione di un gruppo su un insieme. Similmente se $\mathcal{C} = \mathbb{K}$ -spazi vettoriali ho una rappresentazione di G .

Esempio 107 (Funtore costante). Date \mathcal{C}, D categorie preso $Y \subseteq D$ si può considerare il funtore costante di valore Y , $\mathcal{C} \rightarrow D$, $X \mapsto Y$ e $f \mapsto 1_Y$

Esempio 108. Presa \mathbf{Top}_* la categoria degli spazi topologici puntati, il gruppo fondamentale

$$\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$$

è un funtore

Esempio 109. $\forall n \in \mathbb{N}$ ci sono funtori di omologia (singolare)

$$H_n : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

Teorema 110: Omomorfismo

Sia \sim una congruenza su \mathcal{C} e $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un funtore tale che se $f \sim f'$ in \mathcal{C} allora $F(f) = F(f')$. Allora esiste un unico funtore $\bar{F} : \mathcal{C}/\sim \rightarrow D$ tale che $\bar{F}(\bar{f}) = F(f)$ per ogni f morfismo di \mathcal{C}

Esempio 111. Negli esempi precedenti se f e f' sono omotope, allora $\pi_1(f) = \pi_1(f')$ e $H_n(f) = H_n(f')$, dunque inducono funtori

$$\pi_1 : \mathbf{Toph}_* \rightarrow \mathbf{Grp} \quad H_n : \mathbf{Toph} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

Nota. I funtori che abbiamo definito si dicono anche funtori covarianti

Definizione 112: funtore controvariante

Un funtore **controvariante** $\mathcal{C} \rightarrow D$ è un funtore (covariante) $\mathcal{C}^{op} \rightarrow D$.

Esempio 113. $\forall n \in \mathbb{N}$ i funtori di coomologia (singolare) sono funtori controvarianti $H^n : \mathbf{Top}(\mathbf{h})^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$

Esempio 114. Sia \mathcal{C} una categoria, $X \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ Y \mapsto \mathcal{C}(X, Y) \quad (f : Y \rightarrow Y') &\mapsto (f_* : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

è un funtore perché $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-, Y) : \mathcal{C}^{op} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ X \mapsto \mathcal{C}(X, Y) \quad (f : X \rightarrow X') &\mapsto (f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

è un funtore controvariante perché $(f' \circ f)^* = f'^* \circ f^*$

Osservazione. C'è anche un funtore

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-, =) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ (X, Y) &\mapsto \mathcal{C}(X, Y) \\ (f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y') &\mapsto (f^* : \mathcal{C}(X', Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y), g_* : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y')) \end{aligned}$$

Esempio 115. Per ogni gruppo G , preso il sottogruppo dei commutatori $[G, G]$, allora per ogni $f : G \rightarrow H$ omomorfismo di gruppi, $f([G, G]) \subseteq [H, H]$ quindi si ottiene un funtore

$$\begin{aligned} \mathbf{Grp} &\rightarrow \mathbf{Grp} \\ G &\mapsto [G, G] \\ (f : G \rightarrow H) &\mapsto (f|_{[G, G]} : [G, G] \rightarrow [H, H]) \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} \mathbf{Abel} : \mathbf{Grp} &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ G &\mapsto \frac{G}{[G, G]} \text{ (abelianizzato di } G \text{)} \\ (f : G \rightarrow H) &\mapsto \left(\bar{f} : \frac{G}{[G, G]} \rightarrow \frac{H}{[H, H]} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ \frac{G}{[G, G]} & \xrightarrow{\bar{f}} & \frac{H}{[H, H]} \end{array}$$

Esercizio 116

Indicando con $Z(X)$ il centro di X ,

- Mostrare che non esiste un funtore $F : \mathbf{Rng} \rightarrow \mathbf{Rng}$ tale che $\forall A \in \mathbf{Rng} \ F(A) = Z(A)$.
- Mostrare che non esiste un funtore $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ tale che $\forall G \in \mathbf{Grp} \ F(G) = Z(G)$.

Supponiamo l'esistenza di F .

- Se prendo $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$, allora $F(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ e $F(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$. A tal punto però $F(i) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ che non esiste perché altrimenti

$$-1 = F(i)(-1) = F(i)(i^2) = F(i)(i)^2$$

- Consideriamo

$$\{(1), (12)\} \xrightarrow{i} S_3 \xrightarrow{\varepsilon} \{\pm 1\}$$

Allora $\varepsilon \circ i = \text{Id}_{\mathcal{C}_2}$. Allora avremmo

$$0_{\text{End}(\mathcal{C}_2)} = F(\varepsilon) \circ F(i) = F(\varepsilon \circ i) = F(\text{id}_{\mathcal{C}_2}) = \text{id}_{\mathcal{C}_2}$$

L'identità

$$\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad X \mapsto X \quad f \mapsto f$$

è un funtore Si possono comporre i funtori. Dati ad esempio

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E$$

funtori, possiamo definire $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow E$ come $X \mapsto G(F(X))$ e $f \mapsto G(F(f))$ è un funtore.

La composizione è associativa e $F \circ \text{id}_{\mathcal{C}} = F = \text{id}_E \circ F$

In tal modo otteniamo una categoria \mathcal{Cat} delle categorie (piccole¹)

Definizione 117

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è un isomorfismo se lo è in \mathcal{Cat} , cioè se $\exists G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}} = F \circ G$

Definizione 118: iniettivo e suriettivo

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è *iniettivo/suriettivo* se $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ è *iniettivo/suriettivo*.

Nel caso in cui F sia sia iniettivo che suriettivo, è **biunivoco**.

Definizione 119: Fedele e pieno

F è detto **fedele (pieno)** se $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $F : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ è iniettivo (suriettivo).

Nel caso in cui F sia sia fedele che pieno, si dice che è **pienamente fedele**

Esercizio 120

F funtore è isomorfismo se e solo se F è pienamente fedele e biunivoco.

Esempio 121. Se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è una sottocategoria, allora il funtore di inclusione $i : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ è iniettivo e fedele ed è pieno se e solo se $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è piena.

Ad esempio se \sim è una congruenza in \mathcal{C} , allora il funtore quoziente $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ è biunivoco e pieno.

Esempio 122. Un omomorfismo di monoidi (categorie di un oggetto) è iniettivo (suriettivo) se e solo se come funtore è fedele (pieno). In ogni caso è biunivoco.

Esempio 123. I funtori dimenticanti $\mathbb{Z} - \text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$ e $\mathbb{Z} - \text{Alg} \rightarrow \text{Rng}$ sono isomorfismi.

Esempio 124. Anche $\text{Mod} - \mathbf{A} \cong \mathbf{A}^{\text{op}} - \text{Mod}$ ed esiste un isomorfismo (anche se non sono categorie piccole).

Definizione 125

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è **essenzialmente iniettivo/suriettivo** se la funzione ridotta

$$\text{Ob}(\mathcal{C})/\cong \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})/\cong$$

è *iniettivo/suriettivo*

Osservazione. Se F è suriettivo allora F è essenzialmente suriettivo. L'altra implicazione non vale. Ad esempio

$$(\bullet) \longrightarrow (\bullet \rightrightarrows \bullet)$$

Nessuna delle implicazioni tra iniettiva e essenzialmente iniettiva è vera. Basti considerare

$$(\bullet) \longleftarrow (\bullet \rightrightarrows \bullet)$$

¹si potrebbe anche fare di tutte le categorie, ma per motivi insiemistici/logici dovremmo introdurre gli universi di Grothendieck e fare le cose per bene. Al fine di evitare questo inutile sforzo, ci limitiamo a considerare le categorie piccole.

per essenzialmente iniettiva \nRightarrow iniettiva e

$$(\bullet \quad \bullet) \longrightarrow (\bullet \xleftrightarrow{\quad} \bullet)$$

per iniettiva \nRightarrow essenzialmente iniettiva.

Proposizione 126. *Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ un funtore pienamente fedele. Allora F è essenzialmente iniettivo*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathcal{C}$ tali che $F(X) \cong F(Y)$ in D . Devo dimostrare che $X \cong Y$ in \mathcal{C} .

Sappiamo che esiste $g : F(X) \rightarrow F(Y)$ isomorfismo in D . Poiché F è pieno esiste $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $F(f) = g$. Analogamente $\exists f' \in \mathcal{C}(Y, X)$ tale che $F(f') = g^{-1}$.

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) = g^{-1} \circ g = 1_{F(X)} = F(1_X)$$

Se F è fedele, allora $f' \circ f = 1_X$ e analogamente $f \circ f' = 1_Y$ da cui f è isomorfismo e dunque $X \cong Y$ \square

Definizione 127: Trasformazione naturale

Siano $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow D$ funtori.

Una **trasformazione naturale** $\alpha : F \rightarrow F'$ (si può anche scrivere $\alpha : F \Rightarrow F'$) è il dato di un morfismo

$$\alpha_X : F(X) \rightarrow F'(X) \text{ in } D \quad \forall X \in \mathcal{C}$$

tale che $\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di \mathcal{C} il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \alpha_X & & \downarrow \alpha_Y \\ F'(X) & \xrightarrow{F'(f)} & F'(Y) \end{array}$$

commuta in D , cioè $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$

Esempio 128. Consideriamo i due funtori $\text{Abel} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ e $\text{id} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$. C'è una trasformazione naturale $\alpha : \text{id} \rightarrow \text{Abel}$ definita per ogni $G \in \mathbf{Grp}$ da

$$\begin{aligned} \alpha_G : G &\longrightarrow \overline{[G, G]} \\ a &\longmapsto \alpha_G(a) = a[G, G] \end{aligned}$$

è naturale perché $\forall f : G \rightarrow H$ in \mathbf{Grp} il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow \alpha_G & & \downarrow \alpha_H \\ \overline{[G, G]} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{[H, H]} \end{array}$$

Esempio 129. Supponendo di avere $F, F' : G \rightarrow \mathbf{Set}$ funtori (G gruppo visto come categoria con un oggetto), cioè G -insiemi (azioni di G su insiemi). Allora una trasformazione naturale $\alpha : F \rightarrow F'$ è un morfismo di G -insiemi cioè una funzione $\alpha : F(G) \rightarrow F'(G)$ tale che $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in F(G)$.

Osservazione. $\forall F : \mathcal{C} \rightarrow D$, $\text{id}_F : F \rightarrow F$ data da $(\text{id}_F)_X = \text{id}_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathcal{C}$ è una trasformazione naturale.

Esercizio 130

Dati $F, F', F'' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtori, $\alpha : F \rightarrow F'$ e $\beta : F' \rightarrow F''$ trasformazioni naturali, allora la composizione $\beta \circ \alpha : F \rightarrow F''$ è definita da

$$\beta_X \circ \alpha_X =: (\beta \circ \alpha)_X : F(X) \rightarrow F''(X)$$

Mostrare che $\alpha \circ \beta$ è una trasformazione naturale

La composizione dell'esercizio precedente è anche detta *composizione verticale* di trasformazioni naturali, per via di questo disegno esplicativo:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow & \downarrow \alpha & \searrow \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \swarrow & \downarrow \beta & \searrow \\ & F'' & \end{array}$$

Considerando funtori e trasformazioni naturali, si ottiene (assumiamo sempre \mathcal{C} piccola) la categoria $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ (anche denotata $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$) con oggetti i funtori $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, morfismi le trasformazioni naturali e composizione la composizione verticale.

Definizione 131

Data una categoria \mathcal{C} , la categoria dei morfismi di \mathcal{C} è

$$\mathbf{Mor}(\mathcal{C}) := \mathbf{Fun}(\cdot \rightarrow \cdot, \mathcal{C})$$

che ha come oggetti esattamente $\{f : X \rightarrow Y \text{ morfismo di } \mathcal{C}\}$ e trasformazioni naturali date da $(X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$ è data da $(g : X \rightarrow X', h : Y \rightarrow Y')$ tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

Definizione 132

Date $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtori, $\alpha : F \rightarrow G$ trasformazione naturale, allora α è *isomorfismo* (naturale o di funtori) se è isomorfismo in $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ cioè se $\exists \beta : G \rightarrow F$ trasformazione naturale tale che $\beta \circ \alpha = \text{id}_F$, $\alpha \circ \beta = \text{id}_G$.
In tal caso F e G si dicono *isomorfi* (denotato $F \cong G$).

Osservazione. \cong di funtori è una relazione di equivalenza

Esempio 133. Il primo gruppo di omologia si può vedere come l'abelianizzato del gruppo fondamentale. In linguaggio categorico abbiamo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top}_* & \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{Grp} & \xrightarrow{\text{Abel}} \mathbf{Ab} \\ & \text{e} & \\ \mathbf{Top}_* & \rightarrow \mathbf{Top} & \xrightarrow{H_1} \mathbf{Ab} \\ (X, x_0) & \mapsto \text{comp. c.p.a. che contiene } x_0 & \end{array}$$

sono funtori isomorfi

Osservazione. $F \cong F'$ allora F e F' inducono la stessa funzione $\text{Ob}(\mathcal{C})/\cong \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})/\cong$ quindi F è essenzialmente *iniettiva* / *suriettiva* se e solo se F' lo è.

Esercizio 134

Mostrare che non necessariamente la precedente osservazione vale per le proprietà di iniettività e suriettività.

Proposizione 135. *Se $F \cong F'$ allora F è fedele/pieno se e solo se F' è fedele/pieno.*

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \rightarrow F'$ l'isomorfismo. Sia allora $\bar{\alpha} : \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \rightarrow \mathcal{D}(F'(X), F'(Y))$ definita da $\bar{\alpha}(g) := \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}$. Per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}(F(X), F(Y)) & \\ & \downarrow \bar{\alpha} & \\ \mathcal{C}(X, Y) & \begin{array}{c} \nearrow F \\ \searrow F' \end{array} & \mathcal{D}(F'(X), F'(Y)) \end{array}$$

commuta. Infatti preso $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, per la trasformazione naturale $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$ si ha che

$$(\bar{\alpha} \circ F)(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} = F'(f)$$

Inoltre $\bar{\alpha}$ è una biezione, infatti ha inversa $\bar{\alpha}^{-1}(h) = \alpha_Y^{-1} \circ h \circ \alpha_X$:

$$\bar{\alpha}(\bar{\alpha}^{-1} \circ \bar{\alpha})(g) = \bar{\alpha}^{-1}(\alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1}) = \alpha_Y^{-1} \circ \alpha_Y \circ g \circ \alpha_X^{-1} \circ \alpha_X = g$$

e similmente l'altra composizione. Allora chiaramente se F è fedele/pieno, allora $F' = \bar{\alpha} \circ F$ è iniettivo/suriettivo. \square

Proposizione 136. α, β trasformazioni naturali inducono una trasformazione naturale $\beta * \alpha : G \circ F \rightarrow G' \circ F'$

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{G(\alpha_X)} & G(F'(X)) \\ \downarrow \beta_{F(X)} & & \downarrow \beta_{F'(X)} \\ G'(F(X)) & \xrightarrow{G'(\alpha_X)} & G'(F'(X)) \end{array}$$

dunque $(\beta * \alpha)_X := \beta_{F'(X)} \circ G(\alpha_X) = G'(\alpha_X) \circ \beta_{F(X)}$.

Dimostrazione che è una trasformazione naturale. Vogliamo mostrare che $b * a$ è naturale, cioè $\forall f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{G(F(f))} & G(F(Y)) \\ \downarrow (\beta * \alpha)_X & & \downarrow (\beta * \alpha)_Y \\ G'(F(X)) & \xrightarrow{G'(F(f))} & G'(F(Y)) \end{array}$$

commuta. Ma questo è vero perché

$$\begin{aligned} G'(F(f)) \circ (\beta * \alpha)_X &= G'(F(f)) \circ G'(\alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = G'(F(f) \circ \alpha_X) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\stackrel{\alpha \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y \circ F(f)) \circ \beta_{F(X)} = G'(\alpha_Y) \circ G'(F(f)) \circ \beta_{F(X)} = \\ &\stackrel{\beta \text{ nat.}}{=} G'(\alpha_Y) \circ \beta_{F(Y)} \circ G(F(f)) = (\beta * \alpha)_Y \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

\square

Ovviamente è chiaro che si potrebbe definire allora la categoria delle trasformazioni naturali eccetera e andare avanti all'infinito. Per assiomatizzare queste cose in realtà bisognerebbe esplicitare che abbiamo definito le “2-frecce” e che quindi siamo in una *2-categoria*

Nota (zione). Se $\beta = \text{id}_G$ invece di $\text{id}_G * \alpha$ si scrive $G \circ \alpha$ (dunque con $(G \circ \alpha)_X = G(\alpha_X)$). Se $\alpha = \text{id}_F$ invece di $\beta * \text{id}_F$ si scrive $\beta \circ F$ (con $(\beta \circ F)_X = \beta_{F(X)}$). In generale

$$\beta * \alpha = (\beta \circ F') \circ (G \circ \alpha) = (G' \circ \alpha) \circ (\beta \circ F)$$

Osservazione. Se α, β sono isomorfismi, allora $\beta * \alpha$ è isomorfismo. Questo significa che se

$$F \cong F', \quad G \cong G' \implies G \circ F \cong G' \circ F'$$

cioè l'isomorfismo di funtori è una congruenza su \mathcal{Cat} e quindi si ottiene la categoria \mathcal{Cat}/\cong

Definizione 137: Equivalenza

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è un'equivalenza se $\exists G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtore tale che $G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$.

Un tale G si dice un *quasi-inverso* di F .

Osservazione. F è un'equivalenza se e solo se \overline{F} in \mathcal{Cat}/\cong è un isomorfismo.

Segue che se $F \cong F'$, allora F è un'equivalenza se e solo se F' è un'equivalenza e un quasi-inverso di F è unico a meno di isomorfismo e l'equivalente di categorie è una relazione di equivalenza su \mathcal{Cat}

Definizione 138: Scheletro

Una sottocategoria piena $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ è detta *scheletro* se $\forall X \in \mathcal{C}, \exists! X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$

Lemma 139. Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtore, e si supponga che $\forall X \in \mathcal{C}, \alpha_X : F(X) \rightarrow F'(X)$ sia un isomorfismo in \mathcal{D} . Allora $F' : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ si estende in modo unico a un funtore $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tale che $\alpha : F \rightarrow F'$ è isomorfismo.

Teorema 140: Finalmente un teorema

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ è un'equivalenza se e solo se F è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo

Osservazione. Non è necessario aggiungere l'ipotesi che F sia essenzialmente iniettivo perché come mostrato prima pienamente fedele implica essenzialmente iniettivo (ma non essenzialmente suriettivo).

Esempio 141. Supponiamo che $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sia una sottocategoria piena. Allora il funtore di inclusione $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ è pienamente fedele ed è essenzialmente suriettivo (quindi è un'equivalenza) se e solo se $\forall X \in \mathcal{C}$ esiste $X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$.

Dimostrazione.

\implies Sia $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un quasi-inverso di F . Allora $F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$ che è essenzialmente suriettivo, e dunque F è essenzialmente suriettivo. D'altra parte lo stesso $F \circ G$ è fedele, e dunque G è fedele.

Ora, per ogni $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{F_X, F_Y} \mathcal{D}(F(X), F(Y)) \xrightarrow{G_{F(X)}, G_{F(Y)}} \text{inj} \mathcal{C}(G(F(X)), G(F(Y)))$$

poiché la composizione è biunivoca e G è fedele, allora entrambi devono essere biunivoci, ossia in particolare F è pienamente fedele.

⇐ Consideriamo prima il caso di un'inclusione $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ sottocategoria piena tale che $\forall X \in \mathcal{C}$ esista $X' \in \mathcal{C}'$ tale che $X \cong X'$. Sia $I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ il funtore di inclusione (pienamente fedele e essenzialmente suriettivo).

Allora $\forall X \in \mathcal{C}$ scelto (AoC) un isomorfismo $\alpha_X : X \rightarrow \tilde{P}(X) \in \mathcal{C}'$ e se $X \in \mathcal{C}'$ in particolare prendiamo $\alpha_X = 1_X$. Applico ora il lemma 139 con $F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ e dunque $\exists!$ estensione di \tilde{P} a un funtore $\tilde{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tale che $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{P}$ è isomorfismo. Allora $\exists! P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ funtore tale che $\tilde{P} = I \circ P$ e P è un quasi-inverso di I poiché $I \circ P = \tilde{P} \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ e $P \circ I = \text{id}_{\mathcal{C}'}$.

In generale, dato $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ pienamente fedele. Siano allora $I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ e $J : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ due scheletri. Per il caso qui fatto I, J sono equivalenze e siano $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ quasi-inverso di I e $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ quasi-inverso di J .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ P \downarrow \uparrow I & & J \downarrow \uparrow Q \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{F'} & \mathcal{D}' \end{array}$$

Sia $F' := Q \circ F \circ I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$ come nel diagramma. Allora I, F, Q sono pienamente fedeli e essenzialmente suriettivi (I per definizione, F per ipotesi e Q perché è un'equivalenza e vale il punto (\implies)) dunque F' è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

F' è essenzialmente biunivoco, \mathcal{C}' e \mathcal{D}' sono scheletri, dunque F' è biunivoco, quindi isomorfismo e quindi equivalenza.

$$F = \text{id}_{\mathcal{D}} \circ F \circ \text{id}_{\mathcal{C}} \cong J \circ Q \circ F \circ I \circ P = J \circ F' \circ P$$

equivalenza perché lo sono J, F' e P

□

Esempio 142. Sia \sim una relazione d'equivalenza su un insieme X che vedo come categoria \mathcal{C} con $\text{Ob}(\mathcal{C}) = X$ e $\mathcal{C}(x, y) \neq \emptyset \iff x \sim y$.

Il funtore $\mathcal{C} \rightarrow X/\sim$ (categoria discreta) definito da $x \mapsto \bar{x}$ è un'equivalenza poiché pienamente fedele e essenzialmente suriettiva.

Esercizio 143

Mostrare che ogni categoria equivalente a una categoria discreta è una relazione di equivalenza, ossia una categoria dove $\forall X, Y \in \mathcal{C}, \mathcal{C}(X, Y) \neq \emptyset \iff x \sim y$ per una qualche \sim relazione di equivalenza.

2.1 Categorie preaddittive

Definizione 144: Categoria preadditiva

Una categoria *preadditiva* è una categoria \mathcal{A} con una struttura di gruppo abeliano (notazione: additivo) su $\mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ ed è tale che la composizione di morfismi sia \mathbb{Z} -bilineare, ossia

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{e} \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$ e $g, g' \in \mathcal{A}(Y, Z)$.

Osservazione. Si dice anche che \mathcal{A} è una **Ab-Categoria**. Si può studiare quando si può generare una categoria simile partendo da altre categorie invece di **Ab** ma non è argomento di questo corso.

Si può anche dire che \mathcal{A} è \mathbb{Z} -lineare. Più in generale \forall^2 anello commutativo A una categoria A -lineare è una categoria \mathcal{A} con una struttura di A -modulo su $\mathcal{A}(X, Y)$ tale che la composizione sia A -bilinare.

Proposizione 145. *Se A è non commutativo, allora $\forall a, b \in A$ e $\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di \mathcal{A} ,*

$$(ab)f = (ba)f$$

Dimostrazione.

$$(ab)f = a(bf) = a((bf) \circ 1_X) = (bf) \circ (a1_X) = f \circ (b(a1_X)) = f \circ (ba)1_X = (ba)f$$

□

Esempio 146. Sia A un anello, allora $A\text{-Mod}$ è preadditiva. Infatti per ogni $M, N \in (A\text{-Mod})$, $A\text{-Mod}(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)$ è un gruppo abeliano e \circ è \mathbb{Z} -bilinare. Se A è commutativo, allora $A\text{-Mod}$ è anche A -lineare. Più in generale se B è una A -algebra allora $B\text{-Mod}$ è A -lineare.

Osservazione. Sia $X \in \mathcal{A}$ categoria A -lineare (quindi A commutativo). Allora $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è una A -algebra. Infatti $(\text{End}_{\mathcal{A}}(X), \circ)$ è un monoide e $\text{End}_{\mathcal{A}}$ è A -modulo e \circ è A -lineare.

Quindi le categorie A -lineari con un solo oggetto sono A -algebre. In particolare le categorie preadditive con un solo oggetto sono anelli.

Osservazione. Sia \mathcal{A} preadditiva, allora \mathcal{A}^{op} è preadditiva con la stessa struttura di gruppo abeliano su $\mathcal{A}^{op}(X, Y) = \mathcal{A}(Y, X)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$.

Osservazione. Se \mathcal{A} è preadditiva, allora $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}'$, allora \mathcal{A}' è preadditiva. In particolare la condizione è sempre verificata per le categorie piene.

Sia \mathcal{A} preadditiva, \sim una congruenza tale che $\forall X, Y \in \mathcal{A}, \forall f, f', g \in \mathcal{A}(X, Y)$ allora $f \sim f' \implies f + g \sim f' + g$. In tale ipotesi \mathcal{A}/\sim è preadditiva con $\bar{f} + \bar{g} = \overline{f + g}$.

Data una tale congruenza, sia $\forall X, Y \in \mathcal{A}$

$$\mathfrak{I}(X, Y) = \{f \in \mathcal{A}(X, Y) : f \sim 0\}$$

e indichiamo con $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ la collezione di tutti gli $\mathfrak{I}(X, Y)$. Allora vale la proprietà di ideale, cioè dati f, g morfismi di \mathcal{A} componibili,

$$f \in \mathfrak{I} \circ g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

Se per esempio $f \in \mathfrak{I}$ ossia $f \sim 0$, allora $g \circ f \sim g \circ 0 = 0$ e dunque $g \circ f \in \mathfrak{I}$.

Arriviamo dunque alla seguente definizione

Definizione 147

Definiamo un ideale \mathfrak{I} in una categoria preadditiva \mathcal{A} come $\mathfrak{I}(X, Y) < \mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}$ tale che

$$f \in \mathfrak{I} \circ g \in \mathfrak{I} \implies g \circ f \in \mathfrak{I}$$

²normalmente in mezzo alla frase così avrei scritto esplicitamente “per ogni” ma trovavo divertente la quantità di \mathcal{A} e di A nella frase quindi ho valutato simpatico aggiungere anche un \forall

Viceversa, dato $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, si ottiene una congruenza \sim su \mathcal{A} definito da

$$f \sim f' \iff f' - f \in \mathfrak{I}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{A} \quad \forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$$

ed è tale che $f \sim f' \implies f + g \sim f' + g$.

In tali ipotesi si può anche denotare \mathcal{A}/\mathfrak{I} invece di \mathcal{A}/\sim .

Una categoria \mathcal{C} può non avere nessuna struttura di categoria preadditiva (ad esempio se $\exists X, Y \in \mathcal{C}$ tale che $\mathcal{C}(X, Y) = \emptyset$ o averne più di una.

Esempio 148. G Possiamo pensare ad anelli A e B tali che $(A, \cdot) \cong (B, \cdot)$ e $(A, +) \not\cong (B, +)$.

Ad esempio possiamo prendere $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2)$. Allora evidentemente

$$(A, +) \cong \mathcal{C}_4 \not\cong \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \cong B$$

ma gli elementi diversi da 0 e 1 di A sono $\bar{2}$ e $\bar{3}$ e sono tali che $\bar{2}^2 = \bar{0}$, $\bar{3}^2 = \bar{1}$ e $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2}$. Similmente in B abbiamo che $\bar{X}^2 = \bar{0}$, $\bar{1} + \bar{X}^2 = \bar{1}$ e $\bar{X} \cdot \bar{1} + \bar{X} = \bar{X}$

Definizione 149

Un funtore $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tra categorie preadditive è additivo se

$$F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(F(X), F(Y))$$

è omomorfismo di gruppi $\forall X, Y \in \mathcal{A}$.

Più in generale $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tra categorie A -lineari è detto A -lineare se $F_{X,Y}$ è A -lineare $\forall X, Y \in \mathcal{A}$.

Esempio 150. Sia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ sottocategoria tale che $\mathcal{A}'(X, Y) \subseteq \mathcal{A}(X, Y)$ per ogni $X, Y \in \mathcal{A}'$. Allora l'inclusione $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ è additivo.

Esempio 151. Se \mathcal{A} è preadditiva e $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale, allora il funtore $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{I}$ definito da $X \mapsto X$ e $f \mapsto \bar{f}$ è additivo.

Esercizio 152

Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ additivo tale che “ $\mathfrak{I} = \ker F$ ” cioè $F(f) = 0$, $\forall f \in \mathfrak{I}$, allora mostrare che esiste un unico $\bar{F} : \mathcal{A}/\mathfrak{I} \rightarrow \mathcal{B}$ funtore additivo tale che $F = \bar{F} \circ P$

Esempio 153. Siano A, B anelli (categorie preadditive con un solo oggetto), allora un funtore additivo $A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli.

Più in generale per ogni anello A e per ogni \mathcal{A} categoria preadditiva un funtore additivo $A \rightarrow \mathcal{A}$ è dato da un oggetto $X \in \mathcal{A}$ e un omomorfismo di anelli $A \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}}(X)$. Quindi un A -modulo è un funtore additivo $A \rightarrow \mathbf{Ab}$

Esempio 154. Sia $A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. Allora il funtore di restrizione degli scalari $B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ è additivo.

Esempio 155. Se \mathcal{A} preadditiva, allora $\forall X \in \mathcal{A}$ ci sono funtori additivi

$$\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab} \quad , \quad \mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

e in generale se \mathcal{A} è A -lineare, allora i due funtori hanno codominio $A\text{-Mod}$ e sono A -lineari

Notare che se $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ sono funtori additivi, allora $G \circ F$ è additivo. Inoltre $\text{id}_{\mathcal{A}}$ è additivo. Dunque si ottiene una categoria contenente le **categorie preadditive** (piccole) e morfismi i funtori additivi.

Sia \mathcal{C} una categoria (piccola) e \mathcal{A} una categoria preadditiva. Allora $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è preadditiva (in modo naturale) con la seguente struttura

$\forall F, G \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ e $\forall \alpha, \beta : F \rightarrow G$ trasformazioni naturali allora $\alpha + \beta : F \rightarrow G$ trasformazione naturale definita $\forall X \in \mathcal{C}$ da

$$(\alpha + \beta)_X := \alpha_X + \beta_X : F(X) \rightarrow G(X) \text{ in } \mathcal{A}$$

è naturale perché $\forall f : X \rightarrow Y$,

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \alpha_X + \beta_X & & \downarrow \alpha_Y + \beta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

commuta

Se anche \mathcal{C} è preadditiva sia

$$\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

la sottocategoria piena di $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ con oggetti i funtori additivi. Allora tale categoria è preadditiva.

Esempio 156. Se A è anello, allora gli A -moduli sono gli oggetti di $\text{AddFun}(A, \mathbf{Ab})$ (già visto) e in effetti $A\text{-Mod} \cong \text{AddFun}(A, \mathbf{Ab})$, poiché dati $M, N : A \rightarrow \mathbf{Ab}$ funtori (cioè $A \rightarrow \text{End}(M)$ e $A \rightarrow \text{End}(N)$ omomorfismi di anelli) la trasformazione naturale $\alpha : M \rightarrow N$ è data da $\alpha : M \rightarrow N$ in \mathbf{Ab} tale che $\forall a \in A$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{a} & N \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ N & \xrightarrow{a} & N \end{array}$$

commuta, cioè $a\alpha(x) = \alpha(ax)$ per ogni $x \in M$, ossia α è omomorfismo di A -moduli.

Osservazione. $\forall \mathcal{A}$ preadditiva (piccola) si può definire la categoria (preadditiva) $\mathcal{A}\text{-Mod} := \text{AddFun}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$.

Proposizione 157. Siano \mathcal{A}, \mathcal{B} preadditive, $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtori tali che $F \cong G$ e F additivo. Allora G è additivo

Dimostrazione. Sia $\alpha : F \rightarrow G$ isomorfismo. Allora $\forall f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} , $G(f) = \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1}$. Inoltre $\forall f, f' : X \rightarrow Y$,

$$\begin{aligned} G(f + f') &= \alpha_Y \circ F(f + f') \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ (F(f) + F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = \\ &= \alpha_Y \circ F(f) \circ \alpha_X^{-1} + \alpha_Y \circ F(f') \circ \alpha_X^{-1} = G(f) + G(f') \end{aligned}$$

□

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore pienamente fedele con \mathcal{B} preadditiva. Allora esiste un'unica struttura preadditiva su \mathcal{A} tale che F sia additivo

Dimostrazione. $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ voglio che $F_{X,Y} : \mathcal{A}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(F(X), F(Y))$ sia isomorfismo di gruppi (già è biettiva), che è vero se e solo se $\forall f, f' \in \mathcal{A}(X, Y)$

$$f + f' = F^{-1}(F(f) + F(f'))$$

Infatti è ovvio che se $+$ è così definita, allora F sia omomorfismo di gruppi. Viceversa, se F è omomorfismo di gruppi, allora anche F^{-1} è omomorfismo di gruppi, e dunque $F^{-1}(F(f) + F(f')) = F^{-1}(F(f)) + F^{-1}(F(f')) = f + f'$.

□

2.1.1 Prodotti, coprodotti, proprietà universali

Definizione 158: Prodotto

Sia \mathcal{C} una categoria, siano $X_\lambda \in \mathcal{C}$ con $\lambda \in \Lambda$ insieme. Un prodotto degli X_λ è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $p_\lambda \in \mathcal{C}(X, X_\lambda)$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ tale che vale la seguente proprietà universale:

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda, \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(Y, X_\lambda) \quad \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) : f_\lambda = p_\lambda \circ f$$

o equivalentemente i seguenti diagramma commutano :

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ f_\lambda \downarrow & \searrow \exists! f & \\ X_\lambda & \xleftarrow{p_\lambda} & X \end{array} \quad \text{al variare di } \lambda \in \Lambda$$

Proposizione 159. Siano $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ e $(X', \{p'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$. due prodotti in \mathcal{C} degli X_λ . Allora $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$ tale che $p'_\lambda = p_\lambda \circ f$ per ogni λ e f è isomorfismo.

Viceversa se $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli X_λ e $f : X' \rightarrow X$ è isomorfismo, anche $(X', \{p_\lambda \circ f\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli X_λ

Osservazione. Si dice che il prodotto è unico a meno di unico isomorfismo

Dimostrazione. (Prima parte) Esiste unico f per la proprietà universale, analogamente $\exists! f' \in \mathcal{C}(X, X')$ tale che $p_\lambda = p'_\lambda \circ f$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Dunque $p_\lambda = p'_\lambda \circ f' = p_\lambda \circ f \circ f' = p_\lambda \circ 1_X$. Ne consegue che $1_X = f \circ f'$ per la proprietà universale e analogamente $1_Y = f' \circ f$.

(Seconda parte) Dati $Y \in \mathcal{C}$ e $g_\lambda : Y \rightarrow X'_\lambda$ devo dimostrare che $\exists! g : Y \rightarrow X$ tale che $g_\lambda = f_\lambda \circ f \circ g$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ora per la proprietà universale di X $\exists! g : Y \rightarrow X$ tale che $g_\lambda = p_\lambda \circ g$. Voglio $g = f \circ g'$ cioè $g' = f^{-1} \circ g$ \square

Nota (zione). L'oggetto prodotto X si indica con

$$X =: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Esempio 160. In **Set** il prodotto di insiemi X_λ per $\lambda \in \Lambda$ è dato dall'usuale prodotto cartesiano con le proiezioni.

In categorie concrete come **Grp**, **Rng**, **A-Mod** un prodotto si ottiene dal prodotto in **Set** mettendo la struttura disgiuntiva componente per componente.

Esempio 161. In **FinSet** (la sottocategoria piena di **Set**) con oggetti insiemi finiti, non esiste $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ se $\#\Lambda = \infty$ e $\#X_\lambda > 1$ per ogni $\lambda \in \Lambda$

Infatti se per assurdo supponiamo il prodotto essere X per la proprietà universale $\forall Y \in \mathbf{FinSet}, \infty > \#\mathbf{Set}(Y, X) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \#\mathbf{Set}(Y, X_\lambda) = \infty$

Osservazione. Se $\#\Lambda = 1$ allora un prodotto di X_1 è $p_1 : X \rightarrow X_1$ in \mathcal{C} tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall f_1 : Y \rightarrow X_1$ $\exists! f : Y \rightarrow X$ tale che $f_1 = p_1 \circ f$

Questo è vero se p_1 è isomorfismo ($f = p_1^{-1} \circ f_1$). D'altra parte se p_1 non è isomorfismo non fattorizza unicamente ogni altro morfismo. Quindi un prodotto di $X \in \mathcal{C}$ è qualunque isomorfismo $X' \rightarrow X$ (in particolare 1_X).

Definizione 162: Oggetto terminale

Un oggetto terminale di una categoria \mathcal{C} è un prodotto vuoto in \mathcal{C} , cioè $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}$ esiste un unico $Y \rightarrow X$ morfismo di \mathcal{C} , cioè $\#\mathcal{C}(Y, X) = 1$

Esempio 163. In **Set** X è terminale se e solo se $\#X = 1$. Analogamente in **Grp**, **Rng**, **A-Mod** è ogni gruppo anello o **A-Mod** banale.

Esempio 164. Se G è un monoide non banale, allora G (come categoria con un solo oggetto) non ha oggetto terminale.

Proposizione 165. Una categoria \mathcal{C} ha tutti i prodotti finiti se e solo se ha oggetto terminale e i prodotti di coppie di oggetti.

Dimostrazione. Dimostro solo per induzione l'implicazione non ovvia.

Il passo base è dato dalla presenza dell'oggetto terminale. Per induzione supponiamo che esista il prodotto di $n - 1$ oggetti $X' = \prod_{i=1}^{n-1} X_i$ con $p'_i : X' \rightarrow X_i$ per ogni i . Sia ora un elemento X_n e per ipotesi esiste $X = X' \times X_n$ con $p_n : X \rightarrow X_n, p' : X \rightarrow X'$. Allora X è prodotto di tutti gli $\{X_i\}_{i=1}^n$ con $p_i := p'_i \circ p'$ per ogni $i < n$. \square

Definizione 166: Coprodotto

Un coprodotto di X_λ ($\lambda \in \Lambda$) in una categoria \mathcal{C} è un prodotto degli X_λ in \mathcal{C}^{op} , cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ e da morfismi $i_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, X)$ tali che vale la proprietà universale (duale di quella del prodotto)

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in \Lambda, \forall f_\lambda \in \mathcal{C}(X_\lambda, Y), \quad \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y) : f_\lambda = f \circ i_\lambda$$

e viene denotato

$$X =: \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Diagrammaticamente, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f_\lambda \uparrow & \nwarrow \exists! f & \\ X_\lambda & \xrightarrow{i_\lambda} & \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \end{array}$$

commuta

Nelle categorie preaddittive si può parlare di **somma diretta** invece di coprodotto e usare \oplus invece di \coprod .

Esempio 167. In **Set** il coprodotto è l'unione disgiunta. In **A-Mod** è la somma diretta usuale. In **Grp** i coprodotti sono i **prodotti liberi**.

Definizione 168: Oggetto iniziale

Un *oggetto iniziale* di \mathcal{C} è un coprodotto vuoto in \mathcal{C} , ossia $X \in \mathcal{C}$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}, \# \mathcal{C}(X, Y) = 1$

Può succedere che uno stesso oggetto sia terminale che iniziale. In tal caso per entrambe le definizioni esiste un solo morfismo da uno all'altro. Se tale morfismo è un isomorfismo allora l'oggetto è sia iniziale che terminale.

Definizione 169: Oggetto nullo

Un oggetto sia iniziale che terminale si dice *nullo*

Esempio 170. In **Set**, \emptyset è iniziale (non nullo). In **Grp/A-Mod** ogni *gruppo/modulo* banale è nullo. In **Rng**, \mathbb{Z} è iniziale (non nullo)

Se $X \in \mathcal{C}$ è nullo allora $\forall Y, Z \in \mathcal{C}$ esiste il morfismo $0 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dato dalla composizione $Y \xrightarrow{\exists!} X \xrightarrow{\exists!} Z$. In tal caso abbiamo che effettivamente $f \circ 0 = 0$ e $0 \circ g = 0$ per ogni f, g componibili con 0 .

Esempio 171. In \mathcal{A} preadditiva (in cui esiste un oggetto nullo) il morfismo 0 di cui sopra coincide con 0 dello struttura preadditiva.

Definizione 172: Preservazione del prodotto

Un funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ *preserva un prodotto* $(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$ di $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ se $(F(X), \{F(p_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ è un prodotto degli $F(X_\lambda)$ in \mathcal{D} . Diremo inoltre che F *preserva i prodotti* (o *prodotti finiti*) se preserva tutti i prodotti (o prodotti finiti) che esistono in \mathcal{C} .

Osservazione. Se F preserva un prodotto degli X_λ , allora li preserva tutti.

Definizione 173: Preservazione del coprodotto

$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ preserva un coprodotto di \mathcal{C} se F^{op} preserva il corrispondente prodotto di \mathcal{C}^{op} .

Esempio 174. I funtori dimenticanti $\mathbf{Grp}/\mathbf{Rng}/\mathbf{A-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ preservano i prodotti ma non i coprodotti.

Ora vedremo in particolare cosa succede nelle categorie preaddittive, in cui alcune valgono alcune simpatiche proprietà non ovvie.

Definizione 175: Biprodotto

Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva. Un *biprodotto* di $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$ è dato da $X \in \mathcal{A}$ e morfismi (in \mathcal{A}) $p_j : X \rightarrow X_j$ e $i_j : X_j \rightarrow X$, $\forall j = 1..n$. tali che

$$p_j \circ i_j = 1_{X_j} \quad ; \quad p_k \circ i_j = 0 \quad \forall j, k = 1..n \quad \text{con } j \neq k$$

$$\text{e } \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = 1_X$$

Osservazione. $(X, i_1, \dots, i_n, p_1, \dots, p_n)$ è un biprodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} se e solo se $(X, p_1, \dots, p_n, i_1, \dots, i_n)$ è un biprodotto in \mathcal{A}^{op} .

Se $n = 0$ la condizione diventa $1_X = 0$, dunque l'anello degli endomorfismi $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ è banale.

Se $n = 1$ i_1 e p_1 sono isomorfismi e l'uno l'inverso dell'altro.

Osservazione. Basta verificare $p_k \circ i_j = 0$ per $j, k = 1..n-1$ e $j \neq k$ (dunque per $n = 2$) non è necessario verificare quella parte della definizione

Dimostrazione. Sia $k < n$. Allora supponendo che $p_k \circ i_j = 0$ se $k \neq j < n$,

$$\begin{aligned} p_n \circ i_k &= p_n \circ 1_X \circ i_k = p_n \circ \left(\sum_{j=1}^n i_j \circ p_j \right) \circ i_k = \sum_{j=1}^n p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k = \\ &= p_n \circ i_n \circ p_n \circ i_k + \sum_{j=1}^{n-1} p_n \circ i_j \circ p_j \circ i_k = \\ &= 1_{X_n} \circ p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \circ 1_{X_k} = p_n \circ i_k + p_n \circ i_k \end{aligned}$$

$$\implies p_n \circ i_k = 0$$

□

Proposizione 176. Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva e siano $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $X \in \mathcal{A}$ è biprodotto di X_1, \dots, X_n se e solo se X è un prodotto di X_1, \dots, X_n se e solo se X è un coprodotto di X_1, \dots, X_n .

Più precisamente (X, p_1, \dots, p_n) è un prodotto di X_1, \dots, X_n se e solo se esistono (unici) i_1, \dots, i_n tali che $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di X_1, \dots, X_n . Analogamente e dualmente per il coprodotto.

Dimostrazione.

\Rightarrow Per la proprietà universale del prodotto $\exists! i_j : X_j \rightarrow X$ per ogni $j = 1..n$ tali che

$$p_k \circ i_j = (f_j =) \begin{cases} 1_{X_j} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} X_j & & \\ \delta_{kj} 1_{X_j} \downarrow & \searrow \exists! i_j & \\ X_k & \xleftarrow{p_k} & X \end{array}$$

Resta da dimostrare che

$$\sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = 1_X \iff \forall k, p_k \circ \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = p_k \text{ (proprietà universale)}$$

e effettivamente

$$p_k \circ \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = \sum_{j=1}^n p_k \circ i_j \circ p_j = \underbrace{p_k \circ i_k}_{1_{X_k}} \circ p_k = p_k$$

\Leftarrow Dati $f_j : Y \rightarrow X_j$ devo dimostrare che $\exists! f : Y \rightarrow X$ tale che $f_j = p_j \circ f$ per ogni $j = 1..n$. Allora posso definire

$$f := \sum_{k=1}^n i_k \circ f_k : Y \rightarrow X \text{ e allora } p_j \circ f = \sum_{k=1}^n p_j \circ i_k \circ f_k = f_j$$

essa è unica poiché se $f' : Y \rightarrow X$ è tale che $\forall j, f_j = p_j \circ f'$, allora

$$f' = 1_X \circ f' = \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j \circ f' = \sum_{j=1}^n i_j \circ f_j = f$$

□

Osservazione ($n = 0$). In una categoria preadditiva un oggetto

è terminale \iff è iniziale \iff è nullo $\iff 1_X = 0$

Osservazione. Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo e sia $X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n}$ un biprodotto di $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$. Allora $(F(X), \{F(i_j)\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$ in \mathcal{B}

Corollario 177. Un funtore $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ additivo preserva i prodotti e i coprodotti finiti.

Nota (zione matriciale nelle categorie preaddittive). Sia \mathcal{A} una categoria preadditiva. Siano X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_m in \mathcal{A} tali che $\exists (X, i_j^X, p_j^X)$ biprodotto di X_1, \dots, X_n e Y, i_j^Y, p_j^Y biprodotto di Y_1, \dots, Y_m . Dati $f_{j,k} : X_k \rightarrow Y_j$ morfismi di \mathcal{A} indico con la matrice $m \times n$ $(f_{j,k})$ il morfismo $f : X \rightarrow Y$ definito da

$$f = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n i_j^Y \circ f_{j,k} \circ p_k^X$$

Definizione 178: Categoria additiva

Una *categoria additiva* è una categoria preadditiva in cui esistono tutti i biprodotti.

Esempio 179. $A\text{-Mod}$ è additiva per ogni anello A .

Esempio 180. A anello come categoria preadditiva con un solo oggetto è additiva se e solo se $A = 0$

Osservazione. Se \mathcal{A} è additiva, allora anche \mathcal{A}^{op} lo è.

Esempio 181. Le sottocategorie piene di $A\text{-Mod}$ con oggetti i moduli *f.g. / f.p. / coerenti / noetheriani / artiniani / liberi* sono additive. Non vale per esempio per ciclici.

Proposizione 182. Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo essenzialmente suriettivo. Allora se \mathcal{A} è additiva, anche \mathcal{B} è additiva. In particolare \mathcal{A}/\mathfrak{I} è additivo per ogni $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{A}$ ideale.

Dimostrazione. $\forall Y_1, \dots, Y_n$, se F è ess. suriettivo, allora $\exists X_j \in \mathcal{A}$ tale che $F(X_j) \cong Y_j$. A meno di cambiare F con $F' \cong F$ posso supporre $F(X_j) = Y_j$.

Allora se $\exists X$ biprodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} , $F(X)$ è biprodotto di Y_1, \dots, Y_n \square

Osservazione. Sia \mathcal{C} una categoria (piccola) e \mathcal{A} additiva. Allora $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva.

Dimostrazione. Dati $F_1, \dots, F_n \in \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ devo dimostrare che esiste il loro biprodotto. Per ogni $X \in \mathcal{C}$ esiste $F(X)$ biprodotto di $F_1(X), \dots, F_n(X)$ in \mathcal{A} .

$\forall f : X \rightarrow Y$ morfismo di \mathcal{C} definisco $F(f)$ come il morfismo definito con la notazione matriciale da

$$F(X) = \bigoplus_{i=1}^n F_i(X) \begin{pmatrix} F_1(f) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & F_n(f) \end{pmatrix} \longrightarrow F(Y) = \bigoplus_{i=1}^n F_i(Y)$$

Allora $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ è un funtore e ci sono trasformazioni naturali $i_j : F_j \rightarrow F$ e $p_j : F \rightarrow F_j$ le cui componenti sono

$$(i_j)_X := i_j^X : F_j(X) \rightarrow F(X) \quad ; \quad (p_j)_X := p_j^X : F(X) \rightarrow F_j(X)$$

Poiché \mathcal{C} è preadditiva, $\text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ è additiva. Poiché $F_1, \dots, F_n \in \text{AddFun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, allora $F = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ è additivo, infatti

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \begin{pmatrix} F_1(f+g) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & F_n(f+g) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_1(f) + F_1(g) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & F_n(f) + F_n(g) \end{pmatrix} = F(f) + F(g) \end{aligned}$$

\square

Esempio 183. Se \mathcal{A} è preadditiva (piccola), allora $\mathcal{A}\text{-Mod} := \text{AddFun}(\mathcal{A}, \text{Ab})$ è additiva.

Proposizione 184. Sia $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtore con \mathcal{A} additiva, \mathcal{B} preadditiva, F che preserva i prodotti (o coprodotti) finiti. Allora F è additivo

Dimostrazione (idea). Sia $0 \in \mathcal{A}$ oggetto nullo, allora $F(0)$ è termianle, dunque $F(0)$ è nullo (perché B è preadditiva), ossia $F(0) = 0$.

Allora segue che F preserva i biprodotti. Infatti se $(X, \{i_j\}_{j=1..n}, \{p_j\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} , allora (X, p_1, \dots, p_n) è un prodotto di X_1, \dots, X_n in \mathcal{A} e dunque $F(X), \{F(p_j)\}_{j=1..n}$ è un prodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$ in \mathcal{B} . Allora $\exists! i'_j : F(X_j) \rightarrow F(X)$ tali che $(F(X), \{i'_j\}_{j=1..n}, \{F(p_j)\}_{j=1..n})$ è un biprodotto di $F(X_1), \dots, F(X_n)$. Ma allora deve essere $i'_j = F(i_j)$ poiché

$$F(p_k \circ i_j) = F(p_k) \circ F(i_j) = F(p_k) \circ i'_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

$$F(0 : Y \rightarrow Z) = 0 : F(Y) \rightarrow F(Z)$$

E allora se $f, g : X \rightarrow Y$ in \mathcal{A} , allora $f + g$ è la composizione

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} Y$$

Allora $F(f + g)$ è la composizione

$$F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} F(X) \oplus F(X) \xrightarrow{\begin{pmatrix} F(f) & 0 \\ 0 & F(g) \end{pmatrix}} F(Y) \oplus F(Y) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} F(Y)$$

che è $F(f) + F(g)$ □

Corollario 185. *Se \mathcal{A} è additiva, allora \mathcal{A} ha un'unica struttura preadditiva.*

Dimostrazione. Considero $\mathcal{B} := \mathcal{A}$ come categoria con una qualunque struttura preadditiva e $F = \text{id}$. Allora per la proposizione 184, F è additivo. Poiché F è pienamente fedele, esiste un'unica struttura preadditiva su \mathcal{A} tale che $F = \text{id}$ è additivo, dunque la struttura di \mathcal{B} coincide con quella di \mathcal{A} □

Osservazione. Sia \mathcal{A} un anello commutativo, \mathcal{A} una categoria \mathcal{A} -lineare e additiva. Allora *non necessariamente* la struttura \mathcal{A} -lineare è unica. Data infatti una struttura \mathcal{A} -lineare posso cambiarla su $\mathcal{A}(X, Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{A}$. Se è data da omomorfismi di anelli $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \text{End}(\mathcal{A}(X, Y))$ considero $\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \text{End}(\mathcal{A}(X, Y))$ con α omomorfismo di anelli non banale.

Corollario 186. *Se \mathcal{A} e \mathcal{B} sono categorie equivalenti e \mathcal{A} è additiva, allora \mathcal{B} è additiva.*

Dimostrazione. So già che \mathcal{B} è preadditiva. Allora $\exists F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ equivalenza, additivo per la proposizione 184. F è essenzialmente suriettivo, dunque \mathcal{B} è additivo. □

2.2 Limiti e colimiti

L'obiettivo nostro è riuscire a generalizzare il concetto di \ker e coker che era definito sui moduli. Vedremo che il giusto contesto sarà quello delle categorie *abeliane*. (probabilmente) A scopo di definire tale struttura, introduciamo i seguenti nuovi concetti

Definizione 187

Sia \mathcal{C} una categoria, $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtore (con \mathcal{L} piccola).

Un *limite* di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : K_X \rightarrow I$ dove

$K_X : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ è il funtore costante di valore X , ossia $\mathcal{L} \begin{array}{c} \xrightarrow{K_X} \\ \Downarrow \alpha \\ \xrightarrow{I} \end{array} \mathcal{C}$.

In altri termini, $\forall L \in \mathcal{L}, \alpha_L : X \rightarrow I(L)$ è tale che $\forall l : L \rightarrow L'$ in \mathcal{L} , il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \alpha_L \downarrow & \searrow \alpha_{L'} & \\ I(L) & \xrightarrow{I(l)} & I(L') \end{array}$$

Inoltre, vale la seguente proprietà universale:

$\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \beta : K_Y \rightarrow I$ trasformazione naturale, $\exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$ t.c. $\beta = \alpha \circ K_f$

dove $K_f : K_Y \rightarrow K_X$ è la trasformazione naturale definita da $(K_f)_L := f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$. In altre parole $\beta_L = \alpha_L \circ f$ per ogni $L \in \mathcal{L}$, ossia il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \nearrow \alpha_L & \downarrow \alpha_L & \searrow \alpha_{L'} \\ \exists! f & I(L) & \xrightarrow{I(l)} I(L') \\ \nwarrow \beta_L & \uparrow \beta_L & \nearrow \beta_{L'} \\ & Y & \end{array}$$

Esempio 188 (Prodotto). Se $\mathcal{L} = \Lambda$ insieme (categoria discreta), allora I è dato dagli $I(\lambda) := X_\lambda \in \mathcal{C}$ ($\lambda \in \Lambda$), e un limite di I è un prodotto degli $I(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) perché un limite è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ (qualunque, perché l può essere solo 1_λ) tali che $\forall Y \in \mathcal{C}$ e $\forall \beta_\lambda : Y \rightarrow X_\lambda$,

$$\exists! f \in \mathcal{C}(Y, X) : \beta_\lambda = \alpha_\lambda \circ f \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \nearrow \alpha_\lambda & \downarrow \alpha_\lambda & \searrow \alpha_\lambda \\ \exists! f & X_\lambda & \xrightarrow{1_\lambda} X_\lambda \\ \nwarrow \beta_\lambda & \uparrow \beta_\lambda & \nearrow \beta_\lambda \\ & Y & \end{array}$$

Esempio 189. Sia $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$. Allora I è dato da $I(\mathcal{L}) = Y \xrightarrow{f} Z$ in \mathcal{C} . Un limite di I è dato da $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $\alpha_1 : X \rightarrow Y$ e $\alpha_2 : X \rightarrow Z$ tali che $\alpha_2 = f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_1$ o equivalentemente $h : X \rightarrow Y$ tale che $f \circ h = g \circ h$.

La proprietà universale diventa:

$$\forall X' \in \mathcal{C}, \forall h' : X' \rightarrow Y \quad \exists! k : X' \rightarrow X : h' = h \circ k \quad \text{ossia} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \xrightarrow[f]{g} Z \\ \uparrow k & \nearrow h' & \\ X' & & \end{array}$$

tale h si dice *equalizzatore* di f e g .

In **Set** si può prendere $X := \{y \in Y : f(y) = g(y)\} \xrightarrow{i} Y$. Analogamente in **Grp**, **Rng** e **A-Mod** e sarà sottogruppo, sottoanello e sottomodulo come diagramma

abbiamo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ \uparrow \exists! k & \nearrow h' & \downarrow g \\ X' & & Z \end{array} \quad \begin{array}{c} f \\ \rightrightarrows \\ g \end{array}$$

Esempio 190 (Prodotto fibrato o *pullback*). Sia $\mathcal{L} = (\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet)$. Allora I è

dato da $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z$ in \mathcal{C} . Un limite di I è $X \in \mathcal{C}$ con morfismi $f_1 : X \rightarrow Y_1$ e $f_2 : X \rightarrow Y_2$ (e $h : X \rightarrow Z$) tale che

$$(h =) g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$$

e la proprietà universale diventa: dati $f'_i : X' \rightarrow Y_i$ tali che $g_1 \circ f'_1 = g_2 \circ f'_2$, allora $\exists! f : X' \rightarrow X$ tale che $f'_1 = f_1 \circ f$. Equivalentemente si ha che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} X' & & & & \\ & \searrow \exists! f & & \nearrow f'_2 & \\ & X & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \\ & \downarrow f_1 & & \downarrow g_2 & \\ & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z & \end{array}$$

In tal caso (X, f_1, f_2) si dice *prodotto fibrato* di g_1, g_2 (o *pullback*)

Esempio 191 (Prodotto fibrato su **Set**). **Set** (o altre categorie concrete) si può prendere $X := \{y_1, y_2 \in Y_1 \times Y_2 : g_1(y_1) = g_2(y_2)\}$

Esempio 192. Se prendiamo $\mathcal{L} = \emptyset$ e I il funtore vuoto, allora la definizione di limite diventa (notare l'assenza di α e β che sono funzioni vuote)

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$$

ossia X è oggetto terminale

Definizione 193: Colimite

Un *colimite* di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ è un limite di $I^{op} : \mathcal{L}^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$, cioè è dato da $X \in \mathcal{C}$ con una trasformazione naturale $\alpha : I \rightarrow K_X$ tale che $\forall Y \in \mathcal{C}, \forall \beta : I \rightarrow K_Y$ trasformazione naturale, $\exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $\beta = K_f \circ \alpha$ (cioè $\beta_L = f \circ \alpha_L$ per ogni $L \in \mathcal{L}$).

Equivalentemente, $L, L' \in \mathcal{L}, Y \in \mathcal{C}, \beta_L : I(L) \rightarrow Y$ e $\beta_{L'} : I(L') \rightarrow Y$, esiste unico $f : X \rightarrow Y$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \alpha_L \uparrow & & \alpha_{L'} \downarrow \\ \exists! f \circ \alpha_L & \xrightarrow{I(l)} & \alpha_{L'} \circ I(l) \\ \beta_L \downarrow & & \beta_{L'} \downarrow \\ Y & & \end{array}$$

Esempio 194. Se $\mathcal{L} = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$, allora un colimite di I (dato da $Y \xrightleftharpoons[g]{f} Z$) è dato da $h : Z \rightarrow X$ tale che $h \circ f = h \circ g$ tale che $\forall h' : Z \rightarrow X'$ tale che

$h' \circ f = h' \circ g$, $\exists! k : X \rightarrow X'$ tale che $h' = k \circ h$. Equivalentemente il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow[f]{g} & Z & \xrightarrow{h} & X \\ & & \searrow h' & \downarrow \exists! k & \downarrow \\ & & & X' & \end{array} \text{ commuta e } h \text{ si dice } \textit{coequalizzatore} \text{ di } f \text{ e } g.$$

Esercizio 195 Coprodotto fibrato o *pushout*

Definire il coprodotto fibrato, che è il duale del prodotto fibrato.

Sia $\mathcal{L} = (\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ (duale di quella del prodotto fibrato). Allora una colimite

$$\begin{array}{c} Y_2 \\ \uparrow g_2 \\ \end{array}$$

di I (la cui immagine in \mathcal{C} è $Y_1 \xleftarrow{g_1} Z$) è dato da $X \in \mathcal{C}$, $f_1 : Y_1 \rightarrow X$, $f_2 : Y_2 \rightarrow X$, $h : Z \rightarrow X$ morfismi tali che $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 (= h)$. Inoltre la proprietà universale dice che $\forall X' \in \mathcal{C}$, $f'_1 \in \mathcal{C}(Y_1, X')$ e $f'_2 \in \mathcal{C}(Y_2, X')$ tali che $f'_1 \circ g_1 = f'_2 \circ g_2$, allora $\exists! f : X \rightarrow X'$ tale che $f \circ f_i = f'_i$ per $i \in \{1, 2\}$.

Equivalentemente, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & \nwarrow f'_2 & \nwarrow \exists! f & \nwarrow f'_1 & \\ & & X & & \\ & \nearrow f_2 & \nearrow f_1 & \nearrow g_1 & \\ Y_2 & \xleftarrow{f_2} & X & \xleftarrow{f_1} & Y_1 \\ & \uparrow g_2 & \uparrow h & \uparrow g_1 & \\ & & Z & & \end{array}$$

In tal caso (X, f_1, f_2) si dice *prodotto cofibrato* di g_1, g_2 (o *pushout*)

Esempio 196. In **Set** un coequalizzatore di $Y \xrightarrow[f]{g} Z$ è dato dalla proiezione al quoziente $Z \rightarrow Z/\sim$ dove \sim è la più piccola relazione di equivalenza su Z che contiene $\{(f(y), g(y)) | y \in Y\} \subseteq Z \times Z$

Nota (zione). In alcuni casi invece di *limiti/colimiti* si può parlare di *limiti inversi/limiti diretti*.

Esempio 197. Similmente a prima, prendendo $\mathcal{L} = \emptyset$ e I il funtore vuoto, la definizione diventa

$$X \in \mathcal{C} : \forall Y \in \mathcal{C} \quad \exists! f \in \mathcal{C}(X, Y)$$

ossia X è un oggetto iniziale.

Proposizione 198 (Unicità del limite). *Se (X, α) limite esiste, allora è unico a meno di isomorfismo. In altre parole dati (X, α) e (Y, β) limiti di I , allora $\exists! f \in \mathcal{C}(X', X)$ tale che $\beta = \alpha \circ K_f$ e f è isomorfismo.*

Viceversa, se (X, α) è un limite di I e $f : Y \rightarrow X$ è isomorfismo, allora anche $(X', \alpha \circ K_f)$ è un limite di I

Esercizio 199 D

imostrare la proposizione 198

Nota (zione). Un limite di I si indica con $\lim I$ o $\varprojlim I$ e analogamente un colimite di I si indica con $\text{colim } I$ o $\varinjlim I$.

Un (co)equalizzatore di $f, g; Y \rightarrow Z$ si indica con $(\text{co})\text{eq}(f, g)$

Un prodotto fibrato di $Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \xleftarrow{g_2} Y_2$ si indica con $Y_1 \times_Z Y_2$. Similmente per i coprodotti fibrati si usa $Y_1 \coprod_Z Y_2$

Proposizione 200. Sia $\gamma : I \rightarrow I'$ una trasformazione naturale tra funtori $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ e sia $(\lim I)$ un limite di I . Allora

1. Se $(\lim I', \alpha')$ è un limite di I' allora $\exists! \lim \gamma \in \mathcal{C}(\lim I, \lim I')$ tale che $\alpha' \circ K_{\lim \gamma} = \gamma \circ \alpha$, inoltre se γ è isomorfismo, allora anche $\lim \gamma$ è isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} K_{\lim I} & \xrightarrow{K_{\lim \gamma}} & K_{\lim I'} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ I & \xrightarrow{\gamma} & I' \end{array}$$

2. Se γ è isomorfismo, allora $(\lim I, \gamma \circ \alpha)$ è un limite di I'

Dimostrazione. 1. Segue direttamente dal fatto che $(\lim I', \alpha')$ è un limite di I' e $\gamma \circ \alpha$ è una trasformazione naturale

2. Sia $Y \in \mathcal{C}$ e $\beta : K_Y \rightarrow I'$ trasformazione naturale. Allora $\gamma^{-1} \circ \beta : K_Y \rightarrow I$ è trasformazione naturale e dunque $\exists! f \in \mathcal{C}(Y, \lim I)$ tale che $\gamma^{-1} \circ \beta = \alpha \circ K_f$, da cui $\beta = \gamma \circ \alpha \circ K_f$

□

Teorema 201: Condizione sufficiente per l'esistenza dei limiti

Sia \mathcal{L} una categoria piccola. Allora esistono tutti i (co)limiti dei funtori $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ se in \mathcal{C} esistono tutti i (co)equalizzatori e tutti i (co)prodotti indicizzati dagli oggetti e dai morfismi di \mathcal{L} .

Più precisamente un (co)limite di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ è dato da (X, α) con

$$X = \text{eq} \left(\prod_{L \in \mathcal{L}} I(L) \xrightleftharpoons[h]{g} \prod_{(l:L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})} I(L') \right)$$

$$\text{dove } p_{(l:L \rightarrow L')} \circ g := p_{L'}, \quad p_{(l:L \rightarrow L')} \circ h := I(l) \circ p_L$$

Indicando con $i : X \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ il morfismo naturale,

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \alpha_L := p_L \circ i : X \rightarrow I(L)$$

idea di dimostrazione. α è naturale perché $g \circ i = h \circ i$. Più in generale, dato $j : Y \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ in \mathcal{C} , sia $\beta_L := p_L \circ j : Y \rightarrow I(L)$. Allora $\beta : K_Y \rightarrow I$ è una trasformazione naturale se e solo se $g \circ j = h \circ j$. Osservando questo, una qualunque trasformazione naturale $\beta : K_Y \rightarrow I$ è ottenuta da $j : Y \rightarrow \prod_{L \in \mathcal{L}} I(L)$ con $g \circ j = h \circ j$ ponendo $\beta_L = p_L \circ j$.

Per definizione di equalizzatore, $\exists! f \in \mathcal{C}(Y, X)$ tale che $j = i \circ f$ che è equivalente a $\beta_L = \alpha_L \circ f$ e $\beta = \alpha \circ K_f$.

β è naturale se e solo se $\forall l : L \rightarrow L'$ morfismo di \mathcal{L} , $I(l) \circ \beta_L = \beta_{L'}$ cioè $I(l) \circ p_L \circ j = p_{L'} \circ j \iff p_l \circ h \circ j = p_l \circ g \circ j \xrightarrow{\text{propr. univ. prodotto}} h \circ j = g \circ j$ □

Definizione 202

Sia \mathcal{C} una categoria.

\mathcal{C} ha i (co)limiti di forma \mathcal{L} se esistono i (co)limiti di tutti i funtori $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$.

\mathcal{C} è (co)completa se ha i (co)limiti di forma \mathcal{L} per ogni categoria piccola \mathcal{L} .

\mathcal{C} è *finitamente (co)completa* se ho i (co)limiti di forma \mathcal{L} per ogni categoria finita \mathcal{L} (ossia se $\text{Mor}\mathcal{L}$ è finito)

Corollario 203. \mathcal{C} categoria è (finitamente) (co)completa se e solo se ha (co)equalizzatori e (co)prodotti (finiti).

Esempio 204. Set è completa e cocompleta (anche Grp , Rng e $A\text{-Mod}$)

Definizione 205

Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtore. F preserva un (co)limite (X, α) di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ se $(F(X), F \circ \alpha^a)$ è un (co)limite di $F \circ I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$

^aComposizione orizzontale: $\alpha : K_X \rightarrow I \implies F \circ \alpha : F \circ K_X = K_{F(X)} \rightarrow F \circ I$

Osservazione. Se F preserva un limite di I , allora F preserva tutti i limiti di I .

F preserva i (co)limiti (finiti) se preserva i (co)limiti di forma \mathcal{L} per ogni \mathcal{L} categoria piccola (finita)

Corollario 206. Sia \mathcal{C} una categoria (finitamente) (co)completa. Allora F preserva i (co)limiti (finiti) se e solo se F preserva i (co)prodotti (finiti) e i (co)equalizzatori.

Esempio 207. I funtori dimenticanti $\text{Grp}, \text{Rng}, A\text{-Mod} \rightarrow \text{Set}$ preservano i limiti ma non i colimiti.

Esempio 208. $\forall X \in \mathcal{C}$ i funtori $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ e $\mathcal{C}(-, X) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

Analogamente se \mathcal{A} è una categoria preadditiva, allora $\forall X \in \mathcal{A}$ i funtori $\mathcal{A}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ e $\mathcal{A}(-, X) : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ preservano i limiti, ma in generale non i colimiti.

controesempio colimiti. Se $\mathcal{C} = \text{Set}$ e $\#X \geq 2$, allora $\mathcal{C}(X, -)$ non preserva i coprodotti. \square

$\mathcal{C}(X, -)$ preserva i limiti. Infatti sia $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ funtore con limite (Y, α) . Allora abbiamo che $\forall L \in \mathcal{L} \alpha_L \in \mathcal{C}(Y, I(L))$ tale che $\forall l : L \rightarrow L'$ morfismo di \mathcal{L} , $I(l) \circ \alpha_L = \alpha_{L'}$. Ma allora

$$(\alpha_L)_{L \in \mathcal{L}} \in \text{eq} \left(\prod_{L \in \mathcal{L}} \mathcal{C}(Y, I(L)) \xrightarrow[h]{g} \prod_{(l:L \rightarrow L') \in \text{Mor}(\mathcal{L})} \mathcal{C}(Y, I(L')) \right)$$

\square

Osservazione. Sia $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ con $F \cong F'$. Se F preserva un limite (X, α) di $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$, allora anche F' lo preserva.

Infatti $(F(X), F \circ \alpha)$ è un limite di $F \circ I$ e $\gamma : F \rightarrow F'$ è isomorfismo, dunque $\gamma \circ I : F \circ I \rightarrow F' \circ I$ è isomorfismo, dunque $(F(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha))$ è un limite di $F' \circ I$. Segue dunque che $(F'(X), (\gamma \circ I) \circ (F \circ \alpha) \circ K_{\gamma_X}^{-1} = F' \circ \alpha)$ dove l'ultima uguaglianza è perché α è naturale.

Osservazione. Vedremo che ogni equivalenza di categorie preserva sia i limiti che i colimiti.

Segue che se \mathcal{C} e \mathcal{D} sono equivalenti e \mathcal{C} ha i limiti di forma \mathcal{L} , lo stesso vale per \mathcal{D} . Infatti sia $I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}$ funtore e sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ equivalenza con quasi-inverso G . Allora $G \circ I : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ ha limite (X, α) e dunque anche $F \circ G \circ I \cong I$ ha limite