Appunti di Geometria 2

Github Repository: 0xke/appunti/Geo2

Secondo semestre, 2024 - 2025, prof. Lidia Stoppino e Leone Slavich

Il corso è diviso in due parti: geometria differenziale (tenuto da Slavich) e gruppo fondamentale (tenuto dalla Stoppino). Ci sono esercitazioni di geometria differenziale. Ci sono vari libri consigliati:

– Abate - Tovena, *Curve e superfici*, Springer

– M. D. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall

– E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri

– Dispense del prof. Ghigi (sulle quali è stato disegnato il corso, almeno per la parte di geometria differenziale)

Capitolo 1

Geometria Differenziale

Il corso di geometria differenziale studierà curve e superfici in $\mathbb{R}^3$ definiti **analiticamente** tramite funzione C^∞ *(lisce)*. Studiamo la **geometria locale** e infine (verso la fine del corso) la **geometria globale**, in particolare il teorema di Gauss-Bonnet.

1.1 Definizioni e proprietà iniziali

1.1.1 Funzioni lisce

Sia $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto (anche possibilmente $a = -\infty$ o $b = +\infty$). Sia

$$C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ è continua}^{1} \text{ su } I\}$$

Definizione 1.1.1: Derivabile

Diciamo che $f \in C^0(I)$ è derivabile se $\forall x_0 \in I$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c =: f'(x_0) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Ora procediamo definendo ricorsivamente le funzioni $C^k(I)$.

Definizione 1.1.2: Classe C^k

Per ogni $k \geq 1$, diciamo che $f \in C^k(I)$ se f è derivabile e $f' \in C^{k-1}(I)$

Dunque, ad esempio $f \in C^1(I)$ se f è derivabile su I e la sua derivata f' è continua su I. Detto più colloquialmente, una funzione $f \in C^k(I)$ è una funzione derivabile (almeno) k volte, e tale che la sua derivata i-esima $f^{(i)}$ è continua per ogni $i = 0, \ldots, k$.

Osservazione.

$$C_0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \cdots \supset C^i \supset C^{i+1} \supseteq \ldots$$

Definizione 1.1.3: funzioni lisce

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I) = \text{insieme delle } \textbf{funzioni lisce}$$

Teorema 1.1.1: Proprietà delle classi C^k

Sia $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Se $f, g \in C^k(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

1. $f + g \in C^k(I)$
2. $\lambda f \in C^k(I)$
3. $f \cdot g \in C^k(I)$

Dimostrazione. 1. e 2. sono semplici. Per 3. si procede per induzione su k.

Nel caso base $k = 0$ il prodotto di due funzioni continue è anch'esso una funzione continua, che è vero.

Supponiamo ora che 3. valga per $k-1$. Siano $f, g \in C^k(I)$. Allora $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ che è somma di funzioni C^{k-1} per ipotesi induttiva e perché $C^k \subset C^{k-1}$, e dunque $(f \cdot g)' \in C^{k-1}$ da cui segue che $f \cdot g \in C^k$.

Infine possiamo concludere per $k = +\infty$ perché vale per tutti i $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Dal teorema 1.1.1 segue che $C^k(I)$ è uno spazio vettoriale (con operazione di somma e moltiplicazione per scalare) e inoltre $C^k(I)$ contiene le funzioni costanti e allora $C^k(i)$ con operazioni di somma e moltiplicazione puntuale è un anello. Da queste due segue che $C^k(I)$ è una $\mathbb{R}$-algebra.

Esempio 1.1.1. Esistono funzioni **lisce** che **non** sono **analitiche**. In particolare esistono funzioni lisce che sono nulle su un aperto ma non nulle dappertutto (differentemente da quanto succede sulle funzioni olomorfe). Un esempio di tale funzione è

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Questa è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ che non può essere analitica perché contraddirebbe il teorema del prolungamento. Similmente si possono costruire funzioni costanti in

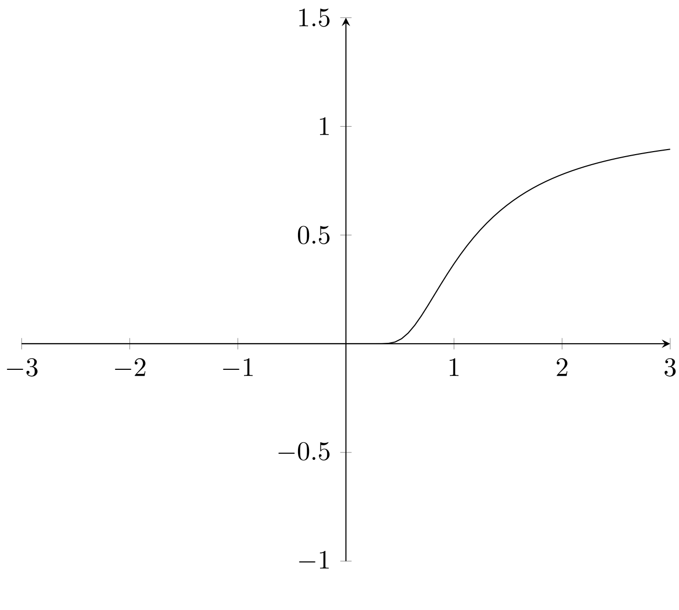

Figura 1.1: Grafico della funzione $f(x)$ dell'esempio 1.1.1

aperti, raccordate in modo C^∞ e ovviamente non analitiche.

Proposizione 1.1.2 (Composizione)**.** *La composizione di funzioni C^∞ è C^∞. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$. Allora se $f \in C^\infty(I)$ e $g \in C^\infty(J)$ e $f(I) \subseteq J$ (ossia si possono comporre), allora $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è ben definita e*

$$g \circ f \in C^\infty(I)$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo per $k \in \mathbb{N}$ invece che $k = \infty$, segue naturalmente il caso enunciato. Per $k = 0$ è ovvio.

Supponiamo che valga per $k - 1$. Allora siano $f, g \in C^k$ e tali che $f(I) \subseteq J$. Allora $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ che è prodotto di funzioni C^{k-1} per ipotesi induttiva e per il teorema 1.1.1 segue che $g \circ f \in C^k(I)$. □

1.1.2 Diffeomorfismi

Definizione 1.1.4: Diffeomorfismo

Un diffeomorfismo è un isomorfismo nella categoria delle funzioni lisce (su $\mathbb{R}$ nel nostro caso).

Informalmente, un diffeomorfismo è un omeomorfismo C^∞.

Definizione 1.1.5: Diffeomorfismo

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti in $\mathbb{R}$. Allora $f : I \to J$ è un **diffeomorfismo** se

1. $f \in C^\infty(I)$
2. f è biettiva
3. $f^{-1} \in C^\infty(J)$

Osservazione. La terza condizione **non** è ridondante. Infatti sia $I = J = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^3$ che è chiaramente C^∞ e biunivoca. Tuttavia $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0, poiché $f'(0) = 0$ e ${f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ se $f(x) = y$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che ${f^{-1}}'(y)$ sia ben definita.

Osservazione. Se I e J sono intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e $f : I \to J$ è diffeomorfismo, allora $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Infatti sappiamo che

$${f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad ; \quad f(x) = y \quad \forall x \in J \tag{1.1.1}$$

dunque $f'(x)$ non può essere nullo, poiché significherebbe che f^{-1} non è derivabile in $y = f^{-1}(x)$.

Lemma 1.1.3. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Allora $f(I) = J$ è un intervallo aperto e $f : I \to J$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia f come nell'enunciato. Allora $f' : I \to \mathbb{R}$ è continua su I e non si annulla mai. Segue che f' ha segno costante su I ($f' > 0$ oppure $f' < 0$).

Assumiamo $f' > 0$ su I. Allora f è strettamente crescente e dunque iniettiva. Allora $f : I \to f(I) =: J$ è biettiva. Inoltre J è un intervallo aperto in $\mathbb{R}$. Infatti è chiaramente intervallo (è connesso) in quanto immagine continua di un connesso (intervallo). Sia ora $y_0 \in J$ e sia $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = y_0$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$. Poiché f è strettamente crescente, segue che

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$$

sapendo già che J è un intervallo, segue che

$$I \supseteq [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)] \text{ è un intorno di } y_0$$

Rimane solo da vedere che la funzione $f^{-1} : J \to I$ è C^∞. Notiamo intento che f^{-1} è continua, poiché f è aperta. Inoltre sappiamo che f^{-1} è derivabile poiché è l'inversa di una funzione derivabile con derivata e vale l'equazione (1.1.1) per ogni $y \in J$.

Sia $u : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definita da $u(x) = 1/x$ è un diffeomorfismo e da 1.1.1 abbiamo che

$$f^{-1'} = u \circ f' \circ f^{-1}$$

e quindi se assumiamo induttivamente che se $f^{-1} \in C^k$ allora ne consegue dalla proposizione 1.1.2 che $f^{-1'} \in C^k$ e dunque $f^{-1} \in C^{k+1}$

□

1.1.3 Curve

Definizione 1.1.6: Curva parametrizzata

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una funzione $t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ con I intervallo aperto. Allora se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono funzioni lisce la funzione α è detta **curva** parametrizzata in $\mathbb{R}^3$

In generale se una funzione $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ verrà chiamata *funzione vettoriale* e ha come componenti n *funzioni scalari* $a_i : I \to \mathbb{R}$. Con questa terminologia allora una curva parametrizzata è una funzione vettoriale in $\mathbb{R}^3$ con componenti $C^\infty(I)$.

Esempio 1.1.2 (Retta in $\mathbb{R}^3$)**.** Ovviamente in forma parametrica

$$\alpha(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \quad ; \quad \mathbf{p}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ fissati e } t \in \mathbb{R}$$

e dunque $\alpha_1(t) = p_{0_1} + tv_1$ e simili per le altre due componenti, e sono tutte funzioni lisce.

Esempio 1.1.3. In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ è una circonferenza di raggio $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Una possibile parametrizzazione è

$$\alpha(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

In questo caso avremmo potuto prendere anche $I = [0, 2\pi]$, non è un problema che α non sia iniettiva

La definizione 1.1.6 è molto generale e non richiede che la curva sia come ci piacerebbe immaginarcela. Infatti anche se la curva è C^∞, possiamo costruirne una che abbia un punto angoloso, anche se ha parametrizzazione C^∞. Un esempio è visto nell'esempio 1.1.5. Inoltre vorremmo avere una definizione più bella di curva, che dipenda meno dalla parametrizzazione scelta.

Definizione 1.1.7: Vettore tangente

Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, fissato un punto $t \in I$, definiamo il **vettore tangente** ad α al tempo t come

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \\ \alpha_3'(t) \end{pmatrix}$$

Osservazione. Intuitivamente (nella visione cinematica della curva parametrizzata), il vettore tangente rappresenta la velocità della particella che si muove lungo la curva

Osservazione. Una retta ha tante parametrizzazioni diverse

Fissiamo due diverse parametrizzazioni della stessa retta r:

$$\alpha(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \quad ; \quad \beta(t) = \mathbf{q}_0 + t\mathbf{w}$$

Allora α e β definiscono la stessa retta se e solo se $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w} \parallel \mathbf{q}_0 - \mathbf{p}_0$ sono paralleli. Equivalentemente

$$\mathbf{q}_0 = \alpha(t_0) \quad e \quad \mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$$

ma allora

$$\beta(s) = \mathbf{q}_0 + s\mathbf{w} = \alpha(t_0) + s(\lambda\mathbf{v}) = \mathbf{p}_0 + t_0\mathbf{v} + \lambda s\mathbf{v} = \mathbf{p}_0 + (t_0 + \lambda s)\mathbf{v} = \alpha(t_0 + \lambda s)$$

ossia $\beta = \alpha \circ h$ con $h(s) = t_0 + \lambda s$ è una funzione liscia con derivata mai nulla, dunque un diffeomorfismo. Questo motiva la seguente definizione

Definizione 1.1.8: Riparametrizzazione

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e $h : J \to I$ un diffeomorfismo. Allora $\beta := \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^3$ è una **riparametrizzazione** di α

Osservazione. $h' = 0$ significa che $\dot{\beta}(t) = 0 \iff \dot{\alpha}(t) = 0$. Se $h' > 0$ allora la curva viene percorsa nello stesso verso.

A noi interessano le curve parametrizzate *a meno di riparametrizzazione*. Questo suggerisce di introdurre una classe di equivalenza sulle curve parametrizzate

Definizione 1.1.9: Equivalenza tra curve

Siano $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ curve parametrizzate. Allora α e β sono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo $h : J \to I$ tale che $\beta = \alpha \circ h$. In altre parole α e β sono **equivalenti** se e solo se β è una riparametrizzazione di α.
La notazione che si usa è allora $\alpha \sim \beta$

Nota. La relazione di equivalenza $\sim$ è una relazione di equivalenza. Infatti è ovviamente simmetrica per il diffeomorfismo $t \mapsto t$, è simmetrica mediante il diffeomorfismo h^{-1} ed è transitiva perché la composizione di due diffeomorfismi è un diffeomorfismo.

Definizione 1.1.10: Curve geometriche

L'insieme delle curve geometriche è l'insieme delle classi di equivalenza delle curve parametrizzate rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ di riparametrizzazione.

Per ogni curva geometrica, vogliamo trovare una curva parametrizzata in parametrizzazione "canonica".

Definizione 1.1.11: Parametrizzazione per lunghezza d'arco

Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, α è detta **parametrizzata per lunghezza d'arco** (o *parametrizzata per ascissa curvilinea*) se

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$$

Ora la questione è capire se è possibile riparametrizzare una curva in modo che abbia parametrizzazione per lunghezza d'arco. Per quanto osservato prima è necessario che $\dot{\alpha}(t) \neq \mathbf{0}$, infatti $\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(t) \cdot h'(s)$. Vogliamo ora mostrare che questa condizione è sufficiente.

Definizione 1.1.12: Curva regolare

Una curva parametrizzata $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ si dice **regolare** se $\alpha(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$

Teorema 1.1.4: regolare $\iff$ $\exists$ riparam. per lunghezza d'arco

Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata regolare. Allora $\exists h : J \to I$ diffeomorfismo tale che $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}$ è una parametrizzazione per lunghezza d'arco.

Prima di procedere alla dimostrazione facciamo una piccola digressione sulle lunghezze di una curva. Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata. Fisso $[c, d] \subseteq I$ intervallo chiuso. Allora l'*arco di curva* $\alpha|_{[c,d]} : [c, d] \to \mathbb{R}$ ha lunghezza che si calcola come

$$L(\alpha|_{[c,d]}) = \int_c^d \|\dot{\alpha}(\tau)\| \, d\tau$$

per continuità della norma l'integranda è continua e dunque integrabile. In particolare le somme di Riemann di questo integrale corrispondono alle lunghezza delle curve poligonali che approssimano la curva, il sup di esse è dunque il valore cercato.

Dimostrazione del teorema 1.1.3. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Fisso $t_0 \in I$ e definisco $h : I \to \mathbb{R}$ tramite

$$h(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(\tau)\| \, d\tau$$

allora $h(I) = J \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Inoltre $h : I \to J$ è un diffeomorfismo e $\beta = \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^3$ è una riparametrizzazione con ascissa curvilinea.

Infatti:

1. h è C^∞. Infatti $t \mapsto \|\dot{\alpha}(t)\|$ è C^∞ in quanto composizione di funzioni lisce. Infatti è radice di un valore che non è mai nullo, dunque la radice è definibile da $(0, +\infty)$ e allora C^∞.

   Allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale, h è C^∞

2. $h'(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0$, dunque h è diffeomorfismo e J è aperto.

3. $\beta = \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^3$ è C^∞ e

   $$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(h^{-1}(s)) \cdot (h^{-1})'(s) = \frac{\dot{\alpha}(h^{-1}(s))}{h'(h^{-1}(s))} = \frac{\dot{\alpha}(h^{-1}(s))}{\|\dot{\alpha}(h^{-1}(s))\|}$$

   e dunque $\|\dot{\beta}\| = 1$

□

Il teorema 1.1.3 è la motivazione per cui sceglieremo di lavorare con curve regolari.

Esempio 1.1.4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$ è l'unione dei semiassi positivi. Allora due fatti sono veri:

1. È possibile trovare una curva parametrizzata liscia con $\alpha : I \to R^2$ tale che $\alpha(I) = C$

2. Non esiste una curva regolare tale che $\alpha(I) = C$

dunque le curve regolari sono l'oggetto giusto per studiare la geometria delle curve che appaiono geometricamente lisce.

Esempio 1.1.5 (Curva liscia con punto angoloso)**.** Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ definita da

Capitolo 2

Geometria algebrica

Definizione 2.0.1: Omotopia

Siano X e Y spazi topologici. Siano $\alpha, \beta : X \to Y$ funzioni continue. Diciamo che α e β sono **omotope** se esiste una funzione continua $H : X \times I \to Y$ tale che

$$H(x, 0) = \alpha(x)$$
$$H(x, 1) = \beta(x)$$

Proposizione 2.0.1. *Siano X, Y, Z spazi topologici. Esistano quattro applicazioni $f_i : X \to Y$ e $g_i : X \to Y$ con $i = 0, 1$ continue tali che $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$. Allora $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$*

Dimostrazione. Siano $H_0 : X \times I \to Y$ e $H_1 : Y \times I \to Z$ le omotopie tra f_i e g_i. Vogliamo trovare $H : X \times I \to Z$ omotopia. La funzione $H(x, t) = H_1(H_0(x, t), t)$ è tale funzione. È infatti continua e chiaramente □

Definizione 2.0.2: Spazi omotopicamente equivalenti

Siano X e Y spazi topologici. Diciamo che X è omotopicamente equivalente a Y (denotato $X \approx Y$) se esistono due applicazioni $\varphi : X \to Y$ e $\psi : Y \to X$ continue tali che $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{Id}_X$ e $\varphi \circ \psi \sim \mathrm{Id}_Y$

Osservazione. Chiaramente $X \overset{omeo}{=} Y \implies X \approx Y$. Infatti preso l'omeomorfismo φ e φ^{-1} come funzioni φ e ψ allora le loro composizioni sono proprio le identità degli spazi.

Osservazione. L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza

Esempio 2.0.1. D^2 e $\{P\}$ sono omotopicamente equivalenti. $\varphi : D^2 \to \{P\}$ è per forza l'applicazione costante. Mentre $\psi : P \mapsto (0, 0)$ (potrei scegliere qualsiasi altro punto per convessità, è per comodità che ne scegliamo il centro). Chiaramente non si tratta di omeomorfismi ma abbiamo che $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\{P\}}$ dunque ok, mentre $\psi \circ \varphi : D^2 \to D^2$ è l'applicazione costante in $(0, 0)$. Poiché possiamo prendere l'applicazione $H : D^2 \times I : D^2$ data da $H(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x}$ che è un'omotopia, ne segue che $D^2 \approx \{P\}$

Esempio 2.0.2. Una generalizzazione semplice del precedente esempio. Ogni convesso X di $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente al punto (singoletto). Basta infatti prendere come funzione quella tale che ogni $H(x, \cdot)$ sia un segmento da x a un punto di X.

Più genericamente si può prendere uno stellato, e l'equivalenza omotopica vale soltanto per la funzione costante che manda ogni x in $\overline{x}$, con $\overline{x}$ il punto tale per cui X è stellato.

Ne consegue che tutti i sottospazi stellati di $\mathbb{R}^n$ sono omotopicamente equivalenti.

Definizione 2.0.3: Contraibilità

Uno spazio si dice **contraibile** se è omotopicamente equivalente a un punto.

Nota. In tutti gli esempi fatti finora di spazi contraibili (convessi e stellati di $\mathbb{R}^n$), l'omotopia tra Id_X e $C_{\overline{x}}$ è relativa a $\overline{x}$, che rimane costante lungo l'omotopia.

Una buona parte del corso sarà dimostrare che alcuni spazi **non** sono contraibili. Con strumenti molto più potenti arriveremo a dimostrare in modo veloce, ad esempio, che S^1 non è contraibile.

Esempio 2.0.3. $C = [-1,1] \times S^1$ è omotopicamente equivalente a S^1. Prendiamo $\varphi : C \to \{0\} \times S^1$ come $(x, y, z) \mapsto (0, y, z)$ invece per ψ prendiamo l'inclusione. Una composizione è l'identità, e l'altra è la proiezione, la cui omotopia è chiaramente $H(x, y, z, t) = (tx, y, z)$. Chiaramente S^1 è omeomorfo a $\{0\} \times S_1$ come sottospazio di C.

Esercizio 2.0.1

Verificare che il nastro di Möbius è omotopicamente equivalente a S^1.

Osservazione. Ne consegue dall'esercizio e dall'esempio precedenti che il cilindro e il nastro di Möbius sono omotopicamente equivalenti.

Definizione 2.0.4: Proprietà omotopica

Una proprietà di spazi topologici si dice omotopica se è costante sulle classi di equivalenza omotopica.
In altre parole, se $X \approx Y$ e $P(X)$ allora $P(Y)$

$\mathbb{R}$ è convesso, dunque è omotopicamente equivalente al punto. Poiché il primo non è compatto ma il secondo sì, la compattezza non è una proprietà omotopica.

Definizione 2.0.5: lcpa

Lo spazio topologico X si dice **localmente connesso per archi** se per ogni punto $x \in X$ esiste un sistema fondamentale di intorni aperti di X connessi per archi.

Nota. cioè per ogni $x \in X$ e $\forall U$ intorno di x esiste A aperto connesso per archi tale che $x \in A \subseteq U$

Esercizio 2.0.2

Mostrare che cpa non implica lcpa.
In particolare mostrare che $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \vee \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}\} \cup \{(0, 0)\}$ è cpa ma non lcpa.

Proposizione 2.0.2. *Sia $\alpha : I \to X$ un laccio, dunque $\alpha(0) = \alpha(1)$. Allora α*

induce un'applicazione continua $\overline{\alpha} : S^1 \to X$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ I/\{0,1\} \overset{omeo}{\approx} S^1 \arrow[ur, dashed, "\overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

Questo per la proprietà universale della topologia quoziente.

Vogliamo $\overline{F} : S^1 \times I \to X$ *un omotopia tra* $\overline{\alpha}$ *e* c_{x_0}

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi\times\mathrm{Id}_I"'] & X \\ S^1 \times I \arrow[ur, dashed, "\overline{F}"'] & \end{tikzcd}$$

e di nuovo esiste continua per la proprietà universale. Per la commutatività dei due diagrammi, abbiamo che $\overline{F}(x,0) = \overline{\alpha}(x)$ *e* $\overline{F}(x,1) \equiv x_0$.

Proposizione 2.0.3. *Viceversa, se ho* $f : S^1 \to X$ *applicazione e* $p \in S^1$ *tale che* $f \approx_p c_{f(p)}$ *con* $c_{f(p)}$ *l'applicazione costante in* $f(p)$*, allora esiste un cammino* $\alpha : I \to X$ *tale che* $a(I) = S^1$, $a(0) = a(1) = p$ *e* $\varepsilon\alpha \sim \varepsilon_{f(p)}$

Proposizione 2.0.4. *Sia* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *un convesso. Allora* $\forall f : X \to C$ *applicazione continua, con* X *uno spazio topologico qualsiasi e* $\forall \overline{y} \in C$ *allora* $f \approx c_{\overline{y}} : X \to C$.

Dimostrazione. Costruiamo esplicitamente l'omotopia. $F(x,t) = (1-t)f(x) + t\overline{y}$. Per convessità sta in C ed è chiaramente continua. Inoltre $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = \overline{y}$ $\square$

Similmente per uno spazio S stellato, esiste un punto $\overline{y} \in S$ tale che la stessa formula funzioni.

Ne consegue una potente proprietà:

Lemma 2.0.5. *Sia* X *uno spazio topologico e* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *uno stellato con centro* $\overline{y}$. *Sia* $f : X \to S$ *continua. Allora* f *è omotopa a* $c_{\overline{y}}$.

Corollario 2.0.5.1. *Prendendo* $X = S$ *e* $f = \mathrm{Id}_S$ *otteniamo che* S *è contraibile*

Esercizio 2.0.3 ⋆

1. Mostrare che la contraibilità è una proprietà topologica.
2. Mostrare che se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una funzione continua, allora $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = f(x)\}$ è contraibile

Esercizio 2.0.4

Mostrare che il nastro di Möbius è omotopicamente equivalente a S^1

$M = [-1,1]^2/\sim$ con $(x,y) \sim (x',y')$ se e solo se $(x,y) = (x',y')$ oppure $\{x,x'\} = \{1,-1\}$ e $y = -y'$.
Scegliamo $F : [-1,1]^2 \times I \to [-1,1]^2$ data da $F(x,y,t) = (x,ty)$ che è un'omotopia tra $\mathrm{Id}_{[-1,1]^2}$ e $r : [-1,1]^2 \to [-1,1] \times \{0\}$, $r(x,y) = (x,0)$.

Vogliamo ora vedere $\pi \circ F$ è costante sulle fibre di $\pi \times \mathrm{Id}_I$.

$$\begin{tikzcd}
{[-1,1]^2 \times I} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi\times\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, "\pi\circ F"] & {[-1,1]^2} \arrow[d, "\pi"] \\
M \times I \arrow[r, "\overline{F}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Proposizione 2.0.6. *Se uno spazio topologico X è localmente connesso per archi allora le sue componenti connesse per archi sono aperte.*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia X lcpa. Allora sia $x \in C$, con C una componente connessa per archi di X. Allora esiste un sistema fondamentale di intorni aperti di x connessi per archi.

Sia A un intorno aperto cpa di x. Allora per ogni $y \in A$, y è connesse a x da un arco. Poiché $A \subseteq C$, C è aperto.

Se le componenti cpa sono aperte è vero che $\forall x \in X$ esiste A aperto cpa intorno di x (basti prendere la componente cpa che contiene x). Non è detto però che X sia lcpa.

□

Proposizione 2.0.7. *Sia X lcpa. Allora le componenti connesse coincidono con le componenti connesse per archi.*

Dimostrazione. Sia C una componente connessa per archi di X. Per la proposizione 2.0.6 C è aperta. Inoltre ovviamente è connessa. Poiché è unione disgiunta delle componenti connesse per archi, $C = X \setminus \coprod_{\alpha \in A} C_\alpha$ e dunque C è anche chiusa. Ne consegue che C è componente connessa. □

Teorema 2.0.8

Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Allora X è connesso per archi

Dimostrazione. X è l'unica componente connessa e per la proposizione 2.0.7 è l'unica componente connessa per archi. Dunque X è connessa per archi. □

Proposizione 2.0.9. *Se X è contraibile, allora è connesso per archi*

Dimostrazione. Sia $X \approx \{P\}$. Allora sia $\varphi : X \to \{P\}$ e $\psi : \{P\} \to X$ tale che $\varphi \circ \psi \approx \mathrm{Id}_P$ e $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$. Dunque esiste $\overline{x} \in X$ tale che $c_{\overline{x}} : X \to X$ è omotopa a Id_X. Abbiamo dunque che esiste $F : X \times I \to X$ continua tale che $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = \overline{x}$ per ogni $x \in X$.

Vogliamo mostrare ora che ogni punto $x \in X$ è connesso per archi a $\overline{x}$. Possiamo prendere $\alpha(t) := F(x, t)$ che è esattamente un arco da x a $\overline{x}$. □

Teorema 2.0.10

Siano X e Y spazi topologici omotopicamente equivalente e sia $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica[a].
Allora f induce una biiezione dall'insieme delle componenti connesse per archi di X all'insieme delle componenti connesse per archi di Y.

[a]Si dice che f è un'equivalenza omotopica se rappresenta una delle due funzioni φ o ψ nella definizione di equivalenza omotopica.

Nota. Indicata con $\sim$ la relazione di equivalenza della connessione per archi, l'insieme delle componenti connesse per archi di X si indica $\pi_0(X) = X/\sim$

Lemma 2.0.11. *Siano X, Y, Z spazi topologici e f, g applicazioni continue. Allora $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$*

Dimostrazione. Sia C una componente connessa per archi di X, cioè $C \in \pi_0(X)$. Allora $f_\#(C)$ è la componente cpa di Y che contiene $f(C)$. La componente $g_\#(f_\#(C))$ è la componente di Z che contiene l'immagine di g della componente connessa di Y che contiene $f(C)$. Ma allora se contiene tutta la componente connessa necessariamente deve contenere $g(f(C))$. Ne consegue la tesi. □

Lemma 2.0.12. *Siano X e Y due spazi topologici. Allora se $f, g : Z \to W$ sono due applicazioni con $f \approx g$, allora $f_\# = g_\#$*

Dimostrazione. Sia $F : X \times I \to Y$ l'omotopia, quindi $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. Sia $C \in \pi_0(X)$, allora $C \times I$ è prodotto di connessi per archi e dunque è connesso per archi. Ma allora $f(C), g(C) \subseteq F(C \times I) \subseteq Y$ che è connesso per archi ma allora necessariamente $f_\#(C) = F_\#(C \times I) = g_\#(C)$. □

Dimostrazione del teorema 2. Usando f vogliamo definire un'applicazione $f_\# : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$. Sia C una componente cpa di X. Allora $f(C) \subseteq Y$ è un cpa in Y, ed è dunque contenuto in esattamente una componente connessa per archi di Y, che quindi usiamo per definire $f_\#(C)$. Vogliamo vedere che $f_\#$ è iniettiva e suriettiva. Sappiamo che esiste $g : Y \to X$ tale che $f \circ g \approx \mathrm{Id}_Y$ e $g \circ f \approx \mathrm{Id}_X$.

Usando i lemmi, abbiamo che $\mathrm{Id}_{\pi_0(X)} = (\mathrm{Id}_X)_\# \overset{2.0.12}{=} (g \circ f)_\# \overset{2.0.11}{=} g_\# \circ f_\#$ da cui necessariamente $f_\#$ è iniettiva. Prendendo la composizione al contrario, abbiamo invece che $f_\#$ è suriettiva. □