Appunti di Algebra Superiore

Github Repository: Oxke/appunti/AlgebraSuperiore

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)

0.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 0.1.1: Anello

Un **anello** $A, +, \cdot$ è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide $A, \cdot$ (cn 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b+c) = ab + ac \quad ; \quad (b+c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione $\cdot$ è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 0.1.1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 0.1.2. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 0.1.3 (Anello Banale)**.** L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 0.1.4 (Non comm.)**.** A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dai l'anello banale non esiste davvero)

Esempio 0.1.5. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\mathrm{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ e $\cdot$ dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\mathrm{Hom}(\mathrm{G}', \mathrm{G})$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G.

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 0.1.2: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ($aa' = 1$).
a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile $\iff$ invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$(a'a)a'' = a'(aa'')$$
$$1a'' = a'' = a' = a'1$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

Definizione 0.1.3: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \setminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 0.1.4: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \setminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ ($a'a = 0$)

Osservazione. Divisore di zero a sinistra: $aa' = 0$. Invertibile a sinistra: $a'a = 1$

Definizione 0.1.5: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 0.1.6. I campi, $\mathbb{Z}$, se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall\, 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

Definizione 0.1.6: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 0.1.7. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 0.1.8. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 0.1.7: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I,+) < (A,+)$ e $ab \in I$ ($ba \in I$), $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.
Un **ideale** bilatero è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 0.1.9. Gli ideali in $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \varnothing$$

quindi A con divisione $\implies$ gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 0.1.8: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op}, con $(A^{op},+) := (A,+)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 0.1.1 (Anello Quoziente)**.** *Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I,+$ è un anello con prodotto $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$, dove $\overline{a} := a + I \in A/I$*

Definizione 0.1.9: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \to B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

i) $f(a + a') = f(a) + f(a')$

ii) $f(aa') = f(a)f(a')$

iii) $f(1_A) = 1_B$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \to A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f' = \mathrm{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 0.1.2. *Se $f : A \to B$ è un omomorfismo allora*

1. *$A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.*
2. *$B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello*
3. *$J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\mathrm{Ker} f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale*
4. *f **suriettivo** e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale*

Osservazione. $f : A \to B$ è iniettivo $\iff \mathrm{Ker} f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \mathrm{Im} f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 0.1.3: Omomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \mathrm{Ker} f$. Allora

$$\exists! \overline{f} : A/I \to B \text{ omomorfismo tale che } \overline{f}(\overline{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\
A/I \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Inoltre $\mathrm{im}\overline{f} = \mathrm{im} f$ e $\mathrm{Ker}\overline{f} = \mathrm{Ker} f/I$

Proposizione 0.1.4. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 0.1.5: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \to B$ è omomorfismo di anelli, allora $\mathrm{im} f \cong A/\mathrm{Ker} f$

Definizione 0.1.10: Ideale massimale (sinistro / destro)

Un ideale J (sinistro/destro) di A è massimale se $\forall I$ ideale (sinistro/destro) tale che $J \subseteq I \subseteq A$, allora $I = J$ o $I = A$

Osservazione. Esiste sempre un ideale (sinistro/destro) massimale (*lemma di Zorn*)

Definizione 0.1.11

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AUA := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i b_i : n \in N, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 0.1.12: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è principale.

Esempio 0.1.10. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 0.1.11. $\mathbb{Z}$ (con ideali $nZ = (n)$)

Esempio 0.1.12. $K[X]$ con K campo

0.2 Richiami sui Moduli

Definizione 0.2.1: A-modulo

Un A-modulo (di default sinistro) M è un gruppo abeliano $(M, +)$ con una moltiplicazione per scalare definita da

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M &\longrightarrow M \\ (a, x) &\longmapsto ax \in M \end{aligned}$$

e tale che, $\forall a, b \in A$ e $\forall x, y \in M$:

1) $a(x+y) = ax + ay$

2) $(a+b)x = ax + bx$

3) $(ab)x = a(bx)$

4) $1x = x$

Osservazione. Se $\mathbb{K}$ è un campo, allora un $\mathbb{K}$-modulo è uno spazio vettoriale.

Osservazione. Se $(M, +)$ è un gruppo abeliano, data $f : A \times M \to M$ posso definire $\alpha : A \to M^M$ come $\alpha(a) = (x \mapsto ax)$, e quindi le proprietà precedenti si traducono in

1. $\alpha(a)(x+y) = \alpha(a)(x) + \alpha(a)(y)$ e dunque $\alpha(a)$ è omomorfismo di gruppi, dunque $\alpha(A) \subseteq \mathrm{End}(M)$
2. $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ dunque $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di gruppi
3. $\alpha(a) \circ \alpha(b) = \alpha(ab)$
4. $\alpha(1) = \mathrm{id}_M$

Dalla 2,3,4 $\alpha : A \to \mathrm{End}(M)$ è omomorfismo di anelli.

Teorema 0.2.1: Secondo teorema di isomorfismo

Sia M un modulo, con $M', M'' \subseteq M$ sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

Dimostrazione. Si prenda $f : M' \to (M' + M'')/M''$ composizione dell'inclusione di M' in $M' + M''$ e della proiezione a quoziente, dunque è un omomorfismo.

Allora $\mathrm{Ker} f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$.

Preso $y \in (M' + M'')/M''$, $y = x' + x'' + M'' = x' + M'' = f(x')$ dunque f è suriettiva. Dal primo teorema di isomorfismo segue la tesi. □

Teorema 0.2.2: Terzo teorema di isomorfismo

Dati $M'' \subseteq M' \subseteq M$ sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M'$$

Dimostrazione. Sia f la composizione delle due proiezioni a quoziente, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \mathrm{Ker} f \iff \pi(x) \in \mathrm{Ker}\pi' = M'/M''$$

dunque $\mathrm{Ker} f = M'$ da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo. □

Proposizione 0.2.3.

1. *Sia A un anello, allora un A-modulo M è ciclico se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro tale che $M \cong A/I$*
2. *M è semplice se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro massimale tale che $M \cong A/I$*

Dimostrazione. 1. $(\Longleftarrow)$ A/I è ciclico (generato da $\overline{1}$). Viceversa per $(\Longrightarrow)$ so che $M = Ax$ per un qualche $x \in M$. Considerata $f :_A A \to M$ data da $a \mapsto ax$, $\mathrm{Ker} f$ è sottomodulo di A, ovvero ideale sinistro. Concludo per il primo teorema di isomorfismo.

2. Se M è semplice allora $\forall 0 \neq x \in M$, $M = Ax$, dunque M è ciclico e per il punto 1. esiste I ideale sinistro tale che $M \cong A/I$. La proposizione si riduce a dire che A/I è semplice se e solo se I è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $I \subseteq J \subseteq A$ ideale sinistro. Allora $A/I \neq 0 \iff I \neq A$ e gli unici sottomoduli di A/I sono I/I e A/I, ossia gli unici ideali sinistri J tali che $I \subseteq J \subseteq A$ sono I e A.

$\square$

Osservazione. Con il lemma di Zorn si dimostra che $A \neq 0 \implies$ esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

0.2.1 Prodotti

Definizione 0.2.2: Prodotto

Supponiamo di avere M_λ A-moduli, per $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è un } A\text{-modulo detto } \textbf{prodotto} \text{ degli } M_\lambda$$

con $(x+y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$ e $(ax)_\lambda = ax_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $x, y \in M$.
$\forall \mu \in \Lambda$ esiste $p_\mu : M \to M_\mu$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ che è A-lineare e suriettivo.

Proposizione 0.2.4 (Proprietà universale del prodotto)**.**
Dati $f_\mu : N \to M_\mu$ A-lineari $\forall \mu \in \Lambda$, allora esiste unico $f : N \to M$ A-lineare tale che $f_\mu = p_\mu \circ f$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "f_\mu"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\
M_\mu & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \arrow[l, "p_\mu"]
\end{tikzcd}$$

Esercizio 0.2.1

Dimostrare la proprietà universale del prodotto

Definizione 0.2.3: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli M_λ è

$$M' := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda > 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste

$$\begin{aligned} i_\mu : M_\mu &\longrightarrow M' \\ x &\longmapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

che è A-lineare e iniettivo.

Proposizione 0.2.5 (Proprietà universale somma diretta)**.**

$$\begin{tikzcd} N & \\ M_\mu \arrow[u, "f_\mu"] \arrow[r, "i_\mu"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[ul, dashed, "\exists! f"'] \end{tikzcd}$$

Osservazione. Se $\#\Lambda < +\infty$ allora

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

Nota (zione)*.* Se $M_\lambda = M$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, si denota

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M =: M^\Lambda \quad \text{e} \quad \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M =: M^{(\Lambda)}$$

Dati $M_\lambda \subseteq M$ sottomoduli, con $\lambda \in \Lambda$, sia

$$f : \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$$

l'omomorfismo indotto dalle inclusioni $M_\lambda \overset{i_\lambda}{\hookrightarrow} M$, allora

$$\mathrm{im} f =: \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \subseteq M \text{ è sottomodulo}$$

Inoltre f è iniettiva se e solo se $M_\mu \cap \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\mu\}} = 0$ per ogni $\mu \in \Lambda$ e in tal caso f induce un isomorfismo tra $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e si può scrivere $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ per indicare il sottomodulo di M

Definizione 0.2.4: Linearmente indipendente, base, modulo libero

Sia $U \subseteq M$ un insieme, con M A-modulo. Si dice che U è A-linearmente indipendente se dati $x_1, \dots, x_n \subseteq U$ distinti

$$a_1, \dots, a_n \in A \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \implies a_1 = \cdots = a_n = 0$$

U è detta **base** di M se è linearmente indipendente e genera M, ossia $M = AU$. Si dice che M è **libero** se ammette una base

Esempio 0.2.1. Per ogni Λ, $A^{(\Lambda)}$ è libero con base $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dove, per ogni $\lambda \in \Lambda$,

$$(e_\lambda)_i = \begin{cases} 1 & \lambda = i \\ 0 & \lambda \neq i \end{cases}$$

Proposizione 0.2.6. *Siano L, M A-moduli, con L libero con base $\{l_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tale che $l_\lambda \neq l_\mu$ se $\lambda \neq \mu$, allora*

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \exists! f : L \to M \ A\text{-lineare t.c. } f(l_\lambda) = x_\lambda$$

Corollario 0.2.6.1. *Un A-modulo è libero se e solo se è isomorfo a $A^{(\Lambda)}$ per qualche Λ*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ M libero con base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ con $x_\lambda \neq x_\mu$ se $\lambda \neq \mu$. Allora per la proposizione

$$\exists! f : A^\Lambda \to M \text{ } A\text{-lineare t.c. } f(e_\lambda) = x_\lambda$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\mathrm{im} f = \langle x_\lambda : \lambda \in \Lambda \rangle_A = M$ e f è iniettivo perché gli x_λ sono linearmente indipendenti.

$\Longleftarrow$ ovvio

$\square$

Corollario 0.2.6.2. *Ogni A-modulo è insomorfo a un quoziente di un modulo libero ($A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ).*

Inoltre un A-modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n, $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. Sia $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un insieme di generatori di un modulo M. Per la proposizione $\exists! f : A^{(\Lambda)} \to M$ A-lineare tale che $\mathrm{f} l_\lambda = x_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora $\mathrm{Im} f = M$ e dunque per il primo teorema di isomorfismo $M \neq A^{(\Lambda)}/\mathrm{ker} f$.

Per la seconda parte se M è finitamente generato posso scegliere Λ finito e viceversa $M \neq A^n/N$ è finitamente generato perché A^n lo è e $\pi : A^n \to A^n/N$ è un omomorfismo suriettivo.

$\square$

Proposizione 0.2.7. *A è con divisione se e solo se ogni suo A-modulo è libero*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ (complementi di algebra)

$\Longleftarrow$ Sia M un A-modulo semplice. Per ipotesi è libero, allora $M \cong A^{(\Lambda)}$ per un qualche Λ. Ma se $\#\Lambda > 1$ allora $A^{(\Lambda)}$ non è semplice ($A \subseteq A^{(\Lambda)}$ è un sottomodulo non banale). Inoltre $\Lambda \neq \varnothing$ ($A^{(\varnothing)} = \{0\}$ non è semplice).

Ne consegue che $M \cong A$ e dunque A è con divisione

$\square$

Esempio 0.2.2. Con $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non è libero

Si può dimostrare che se A è con divisione, allora tutte le basi di un A-modulo (libero) M hanno la stessa cardinalità, che viene detta rango e indicata con $\mathrm{rk}_A M$.

In generale non tutte le basi di un A-modulo libero hanno la stessa cardinalità, esistono infatti anelli A non banali tali che ${}_A^A \cong {}_A A^n$ per *ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 0.2.3. Sia $A = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ con $\mathbb{K}$ campo e $\dim_{\mathbb{K}}(V) = +\infty$

Si dimostra che se $A \to B$ è omomorfismo di anelli e il rango dei B-modulli liberi è ben definito allora anche il rango degli A-moduli liberi è ben definito. Di conseguenza se $A \neq 0$ è commutativo allora il rango degli A-moduli liberi è ben definito ($\exists I \subseteq A$ ideale massimale e $\pi : A \to A/I$ omomorfismo con A/I campo)

0.2.2 restrizione degli scalari

Siano A, B anelli, con $f : A \to B$ omomorfismo di anelli. Allora se M è un B-modulo allora M è anche un A-modulo con $ax := f(a)x$. Si dice allora che ${}_A M$ è ottenuto da ${}_B M$ per **restrizione degli scalari** attraverso f.

Inoltre se $M' \subseteq M$ è B-sottomodulo allora è anche un A-sottomodulo e se $g : M \to N$ è B-lineare allora g è anche A-lineare.

Prima della prossima definizione ricordiamo che il **centro** di un anello è sottoanello, con il centro l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli altri elementi e indicato con $Z(A)$,

$$Z(A) := \{z \in A : za = az \ \forall a \in A\}$$

Definizione 0.2.5

Sia A commutativo. Allora una A-algebra è un omomorfismo di anelli $f : A \to B$ tale che $\mathrm{im} f \subseteq Z(B)$

Se f è evidente si dice che B è una A-algebra

Esempio 0.2.4. $M_n(A)$ è una A-algebra con $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Esempio 0.2.5. Se $A = \mathbb{Z}$ per ogni B anello l'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z} \to B$ è una $\mathbb{Z}$-algebra. Infatti l'omomorfismo unico $\mathbb{Z} \to Z(B)$ deve essere lo stesso di $\mathbb{Z} \to B$

Definizione 0.2.6: Morfismo di A-algebre

Siano $f : A \to B$, $g : A \to C$ A-algebre. Un (omo/iso/...)morfismo di A-algebre da f a g è $h : B \to C$ (omo/iso/...)morfismo di anelli tale che $h \circ f = g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Esempio 0.2.6. Ogni omomorfismo di anelli è omomorfismo di $\mathbb{Z}$-algebre.

Esempio 0.2.7. Sia $f : A \to B$ una A-algebra. Allora $\forall I \subseteq B$ ideale B/I è A-algebra con $\pi \circ f$

Osservazione (**motivazione della definizione**). Se $f : A \to B$ A-algebra, allora B è un anello e A-modulo (per restrizione degli scalari) tale che

$$a(bb') = (ab)b' = b(ab')$$

Lemma 0.2.8. *Sia* $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *una successione esatta di* A*-moduli. Siano* $f' : A^m \to M'$ *e* $f'' : A^n \to M''$ *omomorfismi. Allora esiste un diagramma commutativo con righe esatte*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. $\square$

Proposizione 0.2.9. *Sia* $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *esatta di* A*-moduli. Allora*

1. $M f.g. \implies M'' f.g.$
2. $M', M'' f.g. \implies M f.g.$
3. $M', M'' f.p. \implies M f.p.$

4. *M f.g., M'' f.p. $\implies$ M' f.g.*
5. *M' f.g., M f.p. $\implies$ M'' f.g.*

Dimostrazione.

1. già visto
2. In esercizio la dimostrazione diretta. In alternativa possiamo applicare il lemma 0.2.2. Infatti esistono $f' : A^m \to M'$ e $f'' : A^n \to M''$ omomorfismi suriettivi e per il lemma 0.2.2 il diagramma
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
commuta. Applicando ora il lemma del serpente otteniamo la successione esatta
$$\mathrm{coKer} f' = 0 \to \mathrm{coKer} f \to 0 = \mathrm{coKer} f'' \implies \mathrm{coKer} f = 0 \implies M f.g.$$
3. Si può fare una dimostrazione simile a quella precedente e applicando il lemma del serpente troviamo la successione esatta
$$0 \to \mathrm{Ker} f' \to \mathrm{Ker} f \to \mathrm{Ker} f'' \to 0 = \mathrm{coKer} f'$$
per il punto 1. M è finitamente generato e dunque M è finitamente presentato.
4. M'' *f.p.* $\implies$ $\exists$ successione esatta $A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{h} M'' \to 0$. Esiste dunque il diagramma commutativo
$$\begin{tikzcd} & A^m \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & A^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
infatti voglio f tale che $p \circ f = h$ e posso come prima (esercizio). allora per il lemma del serpente trovo che
$$0 \to \mathrm{coKer} f' \to \mathrm{coKer} f \to 0 = \mathrm{coKer}_{\mathrm{id}_{M''}}$$
è una successione esatta, e dunque $\mathrm{coKer} f' \cong \mathrm{coKer} f = M/\mathrm{Im} f$ per cui
$$0 \to \mathrm{Im} f' \to M' \to \mathrm{coKer} f' \to 0$$
è esatta. Concludiamo che $\mathrm{Im} f' \cong A^m/\mathrm{Ker} f'$ e dunque è *f.g.*, da cui anche M' è finitamente generato per il punto 1.
5. M è finitamente generato, dunque M'' è finitamente generato per il punto 0. Come prima $\exists\ A^m \to A^n, A^n \to M''$ omomorfismi suriettivi e trovo il diagramma del lemma 0.2.2 e applicando il lemma del serpente ottengo la successione esatta
$$\mathrm{Ker} f \to \mathrm{Ker} f'' \to 0 = \mathrm{coKer} f'$$
Sia ora $f : A^{m+n} \to M$ suriettiva, allora
$$0 \to \mathrm{Ker} f \to A^{m+n} \to M \to 0$$
è esatta, A^{m+n} è finitamente generata, M è finitamente presentato, dunque $\mathrm{Ker} f$ è f.g., quindi per il punto 3. $\mathrm{Ker} f''$ è f.g. e per il punto 0. M è f.p.

□

Esercizio 0.2.2

Dimostrare il punto 1. della dimostrazione precedente direttamente.

Corollario 0.2.9.1. *Sia* $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$*. Allora* M *è f.g. / f.p. se e solo se* M_i *è f.g. / f.p. per ogni* i*.*

Dimostrazione. La successione $0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to M \to M_n \to 0$ è esatta, dunque

$\Longrightarrow$ unsando induzione su n e i punti 1. e 2. della proposizione precedente

$\Longleftarrow$ M_n è f.g. per il punto 0., ed è f.p. per il punto 4.

□

Osservazione. per il punto 3., se M è f.p. allora ogni $A^n \xrightarrow{p} M \to 0$ esatta si estende a

$$A^m \to A^n \xrightarrow{p} M \to 0$$

Osservazione. Sia A non noetheriano. Allora $\exists M$ A-modulo f.g. non noetheriamo, ad esempio $M = A$, ossia $\exists M' \subseteq M$ sottomodulo non f.g. e in tal caso anche quando M è finitamente presentato, ad esempio nel caso $M = A$, M/M' non è f.p. perché contraddirrebbe il punto 3.

Uno può chiedersi dato un modulo se i suoi sottomoduli finitamente generati siano anche moduli finitamente presentati. Quessto non è in generale vero ma motiva la seguente definizione

Definizione 0.2.7: Modulo coerente

Uno modulo M è detto **coerente** se è finitamente generato e tutti i suoi sottomoduli finitamente generati sono finitamente presentati.

Osservazione. Chiaramente essendo $M \subseteq M$ un sottomodulo, se è coerente è anche f.p.

Definizione 0.2.8: Anello coerente

Un anello A è **coerente** (a sinistra) se ${}_AA$ è A-modulo coerente (ossia tutti gli ideali sinistri f.g. di A sono f.p.)

Osservazione. Se A è noetheriano e M è un A-modulo, allora

$$M \text{ coerente} \iff M \text{ f.p.} \iff M \text{ f.g.} \iff M \text{ noetheriano}$$

in particolare A è coerente.

Dimostrazione. Sappiamo già che M noetheriano se e solo se M f.g. Resta da dimostrare dunque che M noetheriano se e solo se M è coerente. So che $M' \subseteq M$ f.g. è noetheriano (perché M lo è). Allora esiste la successione esatta

$$0 \to \mathrm{Ker} p \to A^n \xrightarrow{p} M' \to 0$$

Ora poiché A è noetheriano, anche A^n lo è, e dunque $\mathrm{Ker} p$ è noetheriano, dunque $\mathrm{Ker} p$ è f.g. e infine M' è f.p. □

Osservazione. Sia A coerente non noetheriano, allora ${}_AA$ è coerente non noetheriano

Esempio 0.2.8. Sia A non noetheriano, $I \subseteq A$ ideale sinistro non f.g., allora A/I è f.g. non f.p. e A/I può anche essere notheriano.

Un esempio è $A = \mathbb{K}[X_n | n \in \mathbb{N}]$, $I = (X_n | n \in \mathbb{N})$, $A/I = \mathbb{K}$

Osservazione. Sia $f : M \to N$ A-lineare, con M, N finitamente generati. Allora $\text{Im}f \cong M/\text{Ker}f$ e $\text{coKer}f \cong N/\text{Im}f$ sono finitamente generati (punto 0. della proposizione) ma non necessariamente anche $\text{Ker}f$ se A è non noetheriano.

Proposizione 0.2.10. *Sia $0 \to M' \xrightarrow{i} m \xrightarrow{p} M'' \to 0$ esatta di A-moduli.*

1. *M' f.g. e M coerente, allora M'' è coerente*
2. *M', M'' coerenti, allora M è coerente*
3. *M è coerente, M'' è f.p., allora M' è coerente*

in particolare M', M, M'' sono coerenti se due di essi lo sono.

Dimostrazione.

1. M'' è f.g. per il punto 0. della proposizione 0.2.2. $N'' \subseteq M''$ è f.g., allora c'è una successione esatta
$$0 \to M' \to N := p^{-1}(N'') \to N'' \to 0$$
Allora N è f.g. per 1. di 0.2.2 e dunque N è f.p. perché M è coerente, da cui N'' è f.p. per 4. di 0.2.2
2. M è f.g. per 1. di 0.2.2, se $N \subseteq M$ sottomodulo finitamente generato, allora esiste la successione esatta
$$0 \to N' := i^{-1}(N) \to N \to N'' := p(N) \to 0$$
Allora N'' è f.g. per 0. di 0.2.2 da cui N'' è f.p. per la coerenza di M, dunque N' è f.g. per 3. di 0.2.2. Segue dalla oerenza di M' che N' è f.p. e dunque N lo è per 2. di 0.2.2
3. M' è f.g. per 3. di 0.2.2 dunque M' è coerente perché $M' \cong i(M') \subseteq M$ sottomodulo è f.g. e M è coerente.

$\square$

Esercizio 0.2.3

mostrare che
$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \text{ coerente} \iff M_i \text{ coerente } \forall i$$

Corollario 0.2.10.1. *Sia $f : M \to N$ A-lineare, M, N coerenti, allora $\text{Ker}f, \text{Im}f, \text{coKer}f$ sono coerenti.*

Dimostrazione. $\text{Im}f \cong M/\text{Ker}f$ è f.g. per 0. di 0.2.2 $\square$

Corollario 0.2.10.2. *Se A è coerente e M è un A-modulo f.p., allora M è coerente.*

Dimostrazione. Basta osservare che per definizione esiste una successione esatta
$$A^m \xrightarrow{f} A^n \to M \to 0$$
e in particolare dunque $M \cong \text{coKer}f$ e poiché A^m e A^n sono coerenti, lo è pure M $\square$

Esempio 0.2.9. Sia A commutativo tale che $A[X_1, \dots, X_n]$ sia coerente $\forall n \in \mathbb{N}$ (ad esempio A noetheriano, per il teorema della base di Hilbert) Allora $A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda]$ è coerente $\forall \Lambda$, anche se non è noetheriano per $\#\Lambda = +\infty$ e $A \neq 0$.

Idea della dimostrazione. Sia $I \subseteq B$ ideale f.g., ossia $I = (f_1, \ldots, f_n)$. Allora $\exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ finito tale che $f_1 \in B_0 := A[X_\lambda | \lambda \in \Lambda_0]$ $\square$

Esempio 0.2.10 (Anello non coerente)**.** Presi A e B come prima, ma supponiamo che $A = \mathbb{K}$ campo. Prendiamo dunque $J := (X_\lambda | \lambda \in \Lambda)$, con $\#\Lambda = +\infty$. Allora preso

$$C = B/J^2$$

non è coerente. Preso infatti ad esempio

$$I = C\overline{X_\lambda} \text{ con } \lambda \in \Lambda$$

è f.g. ma non f.p. perché c'è la successione esatta

$$0 \to J/J^2 \to C \to I \to 0$$

e J/J^2 è C-modulo annullato da J/J^2 e come $C/(J/J^2) \cong B/J \cong \mathbb{K}$-modulo ha dimensione ∞ con base $\{\overline{x_\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$

Capitolo 1

Categorie

Definizione 1.0.1: Categoria

Una **categoria** C è data da una classe di oggetti $\mathrm{Ob}(C)$ e $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ da un insieme di morfismi da X a Y indicato con $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y) = C(X,Y)$ e da una azione composizione di morfismi, cioè $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ (anche scritto $X, Y, Z \in C$) un'operazione

$$C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)(f,g) \qquad \mapsto g \circ f$$

tale che

0. $C(X,Y) \cap C(X',Y') \neq \varnothing \implies X = X'$ e $Y = Y'$
1. $\circ$ è associativa, cioè $\forall X, Y, Z, W \in C$ e $\forall f \in C(X,Y)$ e $\forall g \in C(Y,Z)$ e $\forall h \in C(Z,W)$ allora
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
2. $\forall X \in C$ esiste $1_X = \mathrm{id}_X \in C(X,X)$ che è eleemento neutro di X cioè $\forall Y \in C$ e $\forall f \in C(X,Y)$,
$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

Esempio 1.0.1. La categoria degli insiemi `Set` che ha come oggetti tutti gli insiemi e $\forall X, Y \in \mathtt{Set}$ i morfismi $\mathtt{Set}(X,Y) = \{f : X \to Y\}$ le funzioni e $\circ$ la composizione di funzioni

Osservazione. Se ho C tale che valgano solo 1. e 2. e non necessariamente 0. posso ottenere la categoria C' che soddisfa anche 0. ponendo $\mathrm{Ob}(C') := \mathrm{Ob}(C)$ e

$$C'(X,Y) := \{X\} \times C(X,Y) \times \{Y\}$$

Esempio 1.0.2. Le categorie concrete, in cui gli oggetti sono insiemi con qualche struttura e i morfismi sono funzioni tra insiemi che preservano la struttura (con $\circ$ sempre la composizione di funzioni). In particolare:

- La categoria `Grp` dei gruppi, dove gli oggetti sono i gruppi e i morfismi gli omomorfismi di gruppi
- La categoria `Rng` degli anelli
- Dato un anello A, la categoria $\mathtt{A-Mod}$ / $\mathtt{Mod-A}$ degli A-moduli sinistri / destri

- Dato un anello commutativo A, la categoria $\texttt{A}-\texttt{Alg}$ delle A-algebre
- La categoria $\texttt{Top}$ degli spazi topologici (con funzioni continue come morfismi)

Nota. Dato $f \in C(X,Y)$ si può indicare con $f : X \to Y$ "come fosse una funzione"

Esempio 1.0.3. Le categorie discrete, cioè tali che gli unici morfismi sono 1_X per ogni $X \in C$.

Esempio 1.0.4. C tale che $\forall X, Y \in C$, $\#C(X,Y) = 1$, ottengo una relazione $\preccurlyeq$ su $\mathrm{Ob}(C)$ in cui

$$X \preccurlyeq Y \iff C(X,Y) \neq \varnothing$$

e $\preccurlyeq$ è riflessivo (perché $\exists 1_X \in C(X,X) \forall X \in C$) e transitivo, perché $\exists \circ$. Ne consegue che $\preccurlyeq$ è un *preordine*

Viceversa, data una relazione di preordine $\preccurlyeq$ su un insieme (o una classe) S, ottengo una categoria C con $\mathrm{Ob}(C) := S$ e $\forall X, Y \in S$,

$$C(X,Y) := \begin{cases} \{f_{X,Y}\} & \text{se } X \preccurlyeq Y \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con l'unica composizione possibile

Esempio 1.0.5 (Categoria Vuota)**.** Prendendo $\mathrm{Ob}(C) = \varnothing$

Osservazione. $\forall X \in C$ con C una categoria, $\mathrm{End}_C(X) := C(X,X)$ è un monoide con $\circ$, ne consegue il prossimo esempio

Esempio 1.0.6 (Monoide)**.** Una categoria con un solo oggetto è un monoide. Viceversa ogni monoide può essere visto come categoria di un solo oggetto.

Esempio 1.0.7 (Diagrammi)**.** Possiamo definire categorie date da diagrammi, in cui si rappresentano i morfismi (non l'identità). Ad esempio:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \qquad \bullet \rightrightarrows \bullet \qquad \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

sono tre categorie diverse, rispettivamente con 2, 2, e 3 oggetti

Definizione 1.0.2: Categoria opposta

La **categoria opposta** di C è denotata C^{op} ed è definita da

$$\mathrm{Ob}(C^{op}) := \mathrm{Ob}(C) \quad C^{op}(X,Y) := C(Y,X)$$

con composizione in $\circ^{op}$ data da $f \circ^{op} g := g \circ f$

Osservazione.

$$(C^{op})^{op} = C$$

Esempio 1.0.8 (Categoria Prodotto)**.** Siano C_λ per $\lambda \in \Lambda$ delle categorie. Allora la categoria prodotto

$$C := \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

è definita da

$$\mathrm{Ob}(C) := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ob}(C_\lambda)$$
$$C((X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda)$$
$$(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \circ (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} := (g_\lambda \circ f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

Esempio 1.0.9 (Cateogoria Coprodotto)**.** La categoria coprodotto

$$C := \coprod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

è definita con $\mathrm{Ob}(C) := \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ob}(C_\lambda)$ l'unione disgiunta.

$$\forall X, Y \in C \quad C(X,Y) := \begin{cases} C_\lambda(X,Y) & \text{se } X, Y \in C_\lambda \text{ per qualche } \lambda \in \Lambda \\ \varnothing & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $\circ$ ovvia.

Definizione 1.0.3: Sottocategoria

Sia C una categoria. Allora una sottocategoria C' di C è data da una sottoclasse $\mathrm{Ob}(C') \subseteq \mathrm{Ob}(C)$ e $\forall X, Y \in C'$ da un sottoinsieme $C'(X,Y) \subseteq C(X,Y)$ tale che $\circ$ si restringe a C' e $1_X \in C'(X,X)$ per ogni $X \in C'$.
In particolare C' è una categoria.

Esempio 1.0.10. Se C è un monoide (cateogoria di un oggetto), allora le sottocategorie non vuote di C sono i sottomonoidi.

Definizione 1.0.4: Sottocategoria Piena

Una sottocategoria C' di C si dice **piena** se $C'(X,Y) = C(X,Y)$ per ogni $X, Y \in C'$

Osservazione. Una sottocategoria piena di C equivale a dare una sottoclasse di $\mathrm{Ob}(C)$

Esempio 1.0.11 (Gruppi Abeliani)**.** `Ab` $\subseteq$ `Grp` sottocategoria piena dei gruppi abeliani. Similmente anche `CRng` $\subseteq$ `Rng` sottocategoria piena degli anelli commutativi.

Oltre alle sotto-strutture sono anche importanti i quozienti, e anche qui possiamo dare una definizione astratta

Definizione 1.0.5: Congruenza

Una congruenza $\sim$ su una categoria C è data da una relazione di equivalenza $\sim$ su $C(X,Y)$ $\forall X, Y \in C$ tale che

$$\forall X, Y, Z \in C, \forall f, f' \in C(X,Y) \forall g, g' \in C(Y,Z) \quad f \sim f', g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f'$$

equivalentemente $g \sim g' \implies g \circ f \sim g' \circ f$ e $h \circ g \sim h \circ g'$

Definizione 1.0.6: Quoziente

Sia $\sim$ una congruenza su C, allora possiamo definire la categoria quoziente $C/\sim$ definita da

$$\mathrm{Ob}(C/\sim) = \mathrm{Ob}(C) \quad (C/\sim)(X,Y) := C(X,Y)/\sim \quad \forall X, Y \in C$$

e $\circ$ è indotta da quella di C, ossia

$$\overline{g} \circ \overline{f} := \overline{g \circ f}$$

Esempio 1.0.12 (Omotopia)**.** Sia $C = \texttt{Top}$ e $\sim_h$ l'omotopia, ossia $f, g : X \to Y$ sono omotope se $\exists H : X \times [0,1] \to Y$ continue tali che

$$f(x) = H(x,0), \quad g(x) = H(x,1) \quad \forall x \in X$$

e si ottiene $\texttt{Toph} := \texttt{Top}/\sim_h$

Esempio 1.0.13 (Gruppo quoziente)**.** Sia G un gruppo (visto come monoide, ossia categoria di un oggetto) e sia $H \lhd G$ e $\sim$ su G data da $a \sim b \iff aH = bH$. Viceversa ogni $\sim$ congruenza su G si può scrivere in tal modo prendendo $H = \{a \in G : a \sim 1\} \lhd G$ (esercizio).

Definizione 1.0.7: morfismo invertibile

Sia $f : X \to Y$ un morfismo in una categoria C. Allora esso è invertibile a sinistra (destra) se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$).

Osservazione. f è invertibile a sinistra (destra) in C, allora f è invertibile a destra (sinistra) in C^{op}

Definizione 1.0.8: Isomorfismo

$f : X \to Y$ è un **isomorfismo** se $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f' = 1_Y$

Osservazione. f è isomorfismo se e solo se f è invertibile a destra e a sinistra.

Dimostrazione.

$\implies$ ovvio

$\impliedby$ $\exists f', f''$ tale che $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f'' = 1_Y$, allora

$$f' \circ (f \circ f'') = f' = f'' = (f' \circ f) \circ f''$$

e dunque f è invertibile.

In particolare dunque la f' della definizione di isomorfismo è unica e viene denotata f^{-1} □

Definizione 1.0.9

Siano $X, Y \in C$. Allora X e Y sono isomorfe ($X \cong Y$) se esiste un $f : X \to Y$ isomorfismo.

Osservazione. 1_X è isomorfismo e $1_X^{-1} = 1_X$. Se f isomorfismo allora f^{-1} isomorfismo e $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Se f, g isomorfismi componibili, allora $g \circ f$ è isomorfismo e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Ne segue che $\cong$ è una relazione di equivalenza su $\mathrm{Ob}(C)$

Definizione 1.0.10

Un morfismo $f : X \to Y$ in C è detto **monomorfismo** se $\forall Z \in C$ la funzione

$$\begin{aligned} f_* : C(Z,X) &\longrightarrow C(Z,Y) \\ g &\longmapsto f_*(g) = f \circ g \end{aligned}$$

è iniettiva

Definizione 1.0.11: Epimorfismo

f è un **epimorfismo** in C se è monomorfismo in C^{op}, ossia $\forall Z \in C$ la funzione

$$\begin{aligned} f^* : C(Y,Z) &\longrightarrow C(X,Z) \\ g &\longmapsto f^*(g) = g \circ f \end{aligned}$$

è iniettiva.

Proposizione 1.0.1. *f è invertibile a sinistra (destra), allora f è monomorfismo (epimorfismo)*

Dimostrazione. Basta dimostrare che se f è invertibile a sinistra, allora è mono.

Sappiamo che $\exists f' : Y \to X$ tale che $f' \circ f = 1_X$. Dobbiamo dimostrare che f_* è iniettiva. Siano $g, h \in C(Z, X)$ tali che $f_*(g) = f_*(h)$. Allora $f \circ g = f \circ g$, da cui $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ h$ e dunque $g = h$ □

Proposizione 1.0.2. *Sia C concreta. Allora*

$$f \text{ invertibile a sinistra (destra)} \implies f \text{ iniettiva (suriettiva)} \implies f \text{ mono (epi)}$$

Dimostrazione. Non possiamo usare il trick della categoria opposta, perché non è detto che C^{op} sia ancora concreta.

Sia f' tale che $f' \circ f = 1_X$ ($f \circ f' = 1_Y$), allora chiaramente f iniettiva (suriettiva) perché le composizioni 1_X e 1_Y sono biunivoche.

Se f è iniettiva, allora se f è suriettiva, allora □

In generale non vale nessuna delle $\impliedby$.

Esempio 1.0.14. In $\mathtt{Set}$ se $f : X \to Y$ è suriettiva, allora f è invertibile a sinistra. Infatti basta scegliere (AOC) $f'(y) \in f^{-1}\{y\}$ per ogni $y \in Y$. Inoltre se $X \neq \varnothing$ e $f : X \to Y$ è iniettiva, allora f è invertibile a sinistra.

Esercizio 1.0.1

In $\mathtt{A} - \mathtt{Mod}$, mostrare che $f : M \to N$ iniettiva è invertibile a sinistra se e solo se $\mathrm{Im}(f) \subseteq N$ è addendo diretto.
Mostrare che $f : M \to N$ suriettiva è invertibile a destra se e solo se $\mathrm{Ker}(f) \subseteq M$ è addendo diretto
Concludere che valgono sempre entrambe le implicazioni se e solo se A è semisemplice.

Esempio 1.0.15. In $\mathtt{Set}$, se f è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti, poniamo per assurdo $f : X \to Y$ non iniettiva, dunque siano $x, y \in X$ tali che $f(x) = f(y)$. Allora preso $Z = \{z\}$ e $g, h : Z \to X$ tali che $g(z) = x$ e $h(z) = y$ abbiamo che $f \circ g = f \circ h$ da cui $g = h$ e dunque $x = y$

Supponiamo f non suriettiva, mostrare *per esercizio* $\exists g, h : Y \to Z$ tali che $g \neq h$ ma $g \circ f = h \circ f$

Esempio 1.0.16. In $\mathtt{A} - \mathtt{Mod}$ $f : M \to N$ è mono (epi), allora f è iniettiva (suriettiva).

Infatti $i : \mathrm{Ker} f \to M$ inclusione tale che $f \circ i = 0$ e anche $0 : \mathrm{Ker} f \to M$ è tale che $f \circ 0 = 0$. Concludiamo che $i = 0$ e dunque $\mathrm{Ker} f = 0$.

Similmente $\pi : N \to \mathrm{coKer} f$ è tale che $\pi \circ f = 0$ e se f è epi allora $0 = \pi$ e dunque $\mathrm{coKer} f = 0$ e dunque f è suriettiva.

Esempio 1.0.17. In $\texttt{Grp}$ f mono (epi), allora f iniettiva (suriettiva)

Per mono $\implies$ iniettiva si può usare la stessa dei moduli, mentre per l'altra è un po' più complicato, ma si dimostra che è vero lo stesso

Esempio 1.0.18. In $\texttt{Rng}$ $f : A \to B$ mono, allora f iniettiva.

Tuttavia f epi **non implica** f suriettiva. Ad esempio preso $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è epi, infatti $\forall A$ anello esiste al più un omomorfismo $\mathbb{Q} \to A$ ($f : \mathbb{Q} \to A$ sia omomorfismo, allora $f|_{\mathbb{Z}}$ è l'unico omomorfismo e $f(\frac{a}{b}) = f(a)f(b)^{-1}$). Chiaramente però non è suriettiva.

Definizione 1.0.12: Funtore

Un funtore $F : C \to D$ tra 2 categorie è dato da una funzione $F : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ e $\forall X, X' \in C$ una funzione $F = F_{X,X'} : C(X, X') \to D(F(X), F(X'))$ tale che

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(se f e g sono componibili in C) e $F(1_X) = 1_{F(X)}$ per ogni $X \in C$

Proposizione 1.0.3. *Sia F un funtore e f invertibile a sinistra (destra). Allora $F(f)$ è invertibile a sinistra (destra)*

Dimostrazione. $\exists f'$ tale che $f' \circ f = 1_X$, allora $F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$. ☐

Osservazione. Segue che f iso, allora $F(f)$ iso e $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$

Esempio 1.0.19. Sia $C' \subseteq C$ sottocategoria. Allora $C' \to C$, $x \mapsto x$ e $f \mapsto f$ è un funtore

Esempio 1.0.20. Se $\sim$ è una congruenza, allora $C \to C/\sim$ è un funtore, con $x \mapsto x$ e $f \mapsto \overline{f}$

Esempio 1.0.21 (Funtore dimenticante)**.** $C \to \texttt{Set}$ con C categoria discreta e $x \mapsto x$, $f \mapsto f$ è un funtore, che "dimentica" la struttura aggiunta.

Analogamente anche $\texttt{Rng} \to \texttt{Ab}$, con $(A, +, \cdot) \to (A, +)$ è un funtore dimenticante.

Esempio 1.0.22. Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli. Allora la restrizione degli scalare è un funtore $\texttt{B} - \texttt{Mod} \to \texttt{A} - \texttt{Mod}$

Esempio 1.0.23. Funtore tra 2 categorie discrete C e D è una funzione $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$

Esempio 1.0.24. Un funtore tra 2 preordini C e D è una funzione $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ che preserva la relazione di preordine.

Esempio 1.0.25. Un funtore tra 2 monoidi è un omomorfismo di monoidi.

Più in generale dato un monoide e una categoria C , un funtore $G \to C$ è dato da $X \in C$ e da un omomorfismo di monoidi $G \to \mathrm{End}_C(X)$

Se G è un gruppo un funtore $G \to C$ è dato da $X \in C$ e un omomorfismo di gruppi $G \to \mathrm{Aut}_C(X)$. Ad esempio se $C = \texttt{Set}$ il funtore dà un'azione di un gruppo su un insieme.

Esempio 1.0.26 (Funtore continuo)**.** Date C, D categorie preso $Y \subseteq D$ si può considerare il funtore costante di valore Y, $C \to D$, $X \mapsto Y$ e $f \mapsto 1_Y$

Esempio 1.0.27. Presa $\texttt{Top}_*$ la categoria degli spazi topologici puntati, il gruppo fondamentale
$$\pi_1 : \texttt{Top}_* \to \texttt{Grp}$$
è un funtore

Esempio 1.0.28. $\forall n \in \mathbb{N}$ ci sono funtori di omologia (singolare)
$$H_n : \texttt{Top} \to \texttt{Ab}$$

> **Esercizio 1.0.2**
>
> Sia $\sim$ una congruenza su C e $F : C \to D$ un funtore tale che se $f \sim f'$ in C allora $F(f) = F(f')$. Allora esiste unico un funtore $\overline{F} : \frac{C}{\sim} \to D$ tale che $\overline{F}(\overline{f}) = F(f)$ per ogni f morfismo di C

Esempio 1.0.29. Negli esempi precedenti se f e f' sono omotope, allora $\pi_1(f) = \pi_1(f')$ e $H_n(f) = H_n(f')$, dunque inducono funtori
$$\pi_1 : \texttt{Toph}_* \to \texttt{Grp} \quad H_n : \texttt{Toph} \to \texttt{Ab}$$

Osservazione. I funtori che abbiamo definito si dicono anche funtori covarianti

> **Definizione 1.0.13**
>
> Un funtore **controvariante** $C \to D$ è un funtore (covariante) $C^{op} \to D$. Esplicitamente si ha che $\forall X \in Css$

Esempio 1.0.30. $\forall n \in \mathbb{N}$ i funori di coomologia (singolare) sono funtori controvarianti $H^n : \texttt{Top(h)}^{op} \to \texttt{Ab}$

Esempio 1.0.31. Sia C una categoria, $X \in C$
$$\begin{gathered} C(X,-) : C \to \texttt{Set} \\ Y \mapsto C(X,Y) \quad g \mapsto f \circ g \end{gathered}$$
è un funtore perché $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$

Analogamente
$$\begin{gathered} C(-,X) : C^{op} \to \texttt{Set} \\ Y \mapsto C(Y,X) \quad (f : Y \to Y') \mapsto (f^* : C(Y',X) \to C(Y,X)) \\ g \mapsto g \circ f \end{gathered}$$

Osservazione. C' è anche un funtore
$$\begin{gathered} C(-,=) : C^{op} \times C \to \texttt{Set} \\ (X,Y) \mapsto C(X,Y) \\ (f : X \to X', g : Y \to Y') \mapsto \dots \end{gathered}$$

Esempio 1.0.32. Per ogni gruppo G, preso il sottogruppo dei commutatori $[G,G]$, allora per ogni $f : G \to H$ omomorfismo di gruppi, $f([G,G]) \subseteq [H,H]$ quindi si ottiene un funtore
$$\begin{gathered} \texttt{Grp} \to \texttt{Grp} \\ G \mapsto [G,G] \\ (f : G \to H) \to (f|_{[G,G]} : [G,G] \to [H,H]) \end{gathered}$$

e anche

$$\begin{aligned} \text{Abel} : \texttt{Grp} &\to \texttt{Ab} \\ G &\mapsto \frac{G}{[G,G]} \text{ (abelianizzato di } G \text{)} \end{aligned}$$

Esercizio 1.0.3

Indicando con $Z(X)$ il centro di X,
Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Rng} \to \texttt{Rng}$ tale che $\forall A \in \texttt{Rng}\ F(A) = Z(A)$.
Mostrare che non esiste un funtore $F : \texttt{Grp} \to \texttt{Ab}$ tale che $\forall G \in \texttt{Grp}\ F(G) = Z(G)$.

L'identità

$$\text{id}_C : C \to C \quad X \mapsto X \quad f \mapsto f$$

è un funtore Si possono comporre i funtori. Dati ad esempio

$$C \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E$$

funtori, possiamo definire $G \circ F : C \to E$ come $X \mapsto G(F(X))$ e $f \mapsto G(F(f))$ è un funtore.

La composizione è associativa e $F \circ \text{id}_C = F = \text{id}_C \circ F$

In tal modo otteniamo una categoria $\texttt{Cat}$ delle categorie (piccole[1])

Definizione 1.0.14

Un funtore $F : C \to D$ è un isomorfismo se lo è in $\texttt{Cat}$, cioè se $\exists G : D \to C$ funtore tale che $G \circ F = \text{id}_C = F \circ G$

Definizione 1.0.15

Un funtore $F : C \to D$ è iniettivo (suriettivo) se $F : \text{Ob}(C) \to \text{Ob}(D)$ è iniettivo (suriettivo).
Nel caso in cui f sia sia iniettivo che suriettivo, è biunivoco.

Definizione 1.0.16

F è detto **fedele** (**pieno**) se $\forall X, Y \in C$, $F : C(X,Y) \to D(F(X), F(Y))$ è iniettivo (suriettivo).
Nel caso in cui f sia sia fedele che pieno, si dice che è **pienamente fedele**

Esercizio 1.0.4

F funtore è isomorfismo se e solo se F è pienamente fedele e biunivoco.

Esempio 1.0.33. Se $C' \subseteq C$ è una sottocategoria, allora il funtore di inclusione $i : C' \to C$ è iniettivo e fedele ed è pieno se e solo se $C' \subseteq C$ è piena.

Ad esempio se $\sim$ è una congruenza in C , allora il funtore quoziente $C \to C/\sim$ è biunivoco e pieno.

Esempio 1.0.34. Un omomorfismo di monoidi (categorie di un oggetto) è iniettivo (suriettivo) se e solo se come funtore è fedele (pieno). In ogni caso è biunivoco.

[1] si potrebbe anche fare di tutte le categorie, ma per motivi insiemistici/logici dovremmo introdurre gli universi di Grothendieck e fare le cose per bene. Al fine di evitare questo inutile sforzo, ci limitiamo a considerare le categorie piccole.

Esempio 1.0.35. I funtori dimenticanti $\mathbb{Z}-\mathtt{Mod} \to \mathtt{Ab}$ e $\mathbb{Z}-\mathtt{Alg} \to \mathtt{Rng}$ sono isomorfismi.

Esempio 1.0.36. Anche $\mathtt{Mod}-\mathtt{A} \cong \mathtt{A}^{\mathtt{op}}-\mathtt{Mod}$ ed esiste un isomorfismo (anche se non sono categorie piccole).

Definizione 1.0.17

Un funtore $F : C \to D$ è **essenzialmente *iniettivo/suriettivo*** se la funzione ridotta

$$\mathrm{Ob}(C)/\cong \to \mathrm{Ob}(D)/\cong$$

è *suriettivo/iniettivo*

Osservazione. Se F è suriettivo allora F è essenzialmente suriettivo. L'altra implicazione non vale. Ad esempio

$$(\bullet) \longrightarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

Nessuna delle implicazioni tra iniettiva e essenzialmente iniettiva è vera. Basti considerare

$$(\bullet) \longleftarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

per essenzialmente iniettiva $\not\Longrightarrow$ iniettiva e

$$(\bullet \qquad \bullet) \longrightarrow (\bullet \rightleftarrows \bullet)$$

per iniettiva $\not\Longrightarrow$ essenzialmente iniettiva.

Proposizione 1.0.4. *Sia $F : C \to D$ un funtore pienamente fedele. Allora F è essenzialmente iniettivo*

Dimostrazione. Siano $X, Y \in C$ tali che $F(X) \cong F(Y)$ in D. Devo dimostrare che $X \cong Y$ in C.

Sappiamo che esiste $g : F(X) \to F(Y)$ isomorfismo in D. Poiché F è pieno esiste $f \in C(X, Y)$ tale che $F(f) = g$. Analogamente $\exists f' \in C(Y, X)$ tale che $F(f') = g^{-1}$.

$$F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f) = g^{-1} \circ g = 1_{F(X)=F(1_X)}$$

Se F è fedele, allora $f' \circ f = 1_X$ e analogamente $f \circ f' = 1_Y$ da cui f è isomorfismo e duque $X \cong Y$ $\square$

Definizione 1.0.18: Trasformazione naturale

Siano $F, F' : C \to D$ funtori.
Una **trasformazione naturale** $\alpha : F \to F'$ (si può anche scrivere $\alpha : F \implies F'$) è il dato di un morfismo

$$\alpha_X : F(X) \to F'(X) \text{ in } D \ \forall X \in C$$

tale che $\forall f : X \to Y$ morfismo di C il diagramma

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
F'(X) \arrow[r, "F'(f)"'] & F'(Y)
\end{tikzcd}$$

commuta in D, cioè $\alpha_Y \circ F(f) = F'(f) \circ \alpha_X$

Esempio 1.0.37. Consideriamo i due funtori Abel : $\mathtt{Grp} \to \mathtt{Grp}$ e id : $\mathtt{Grp} \to \mathtt{Grp}$. C'è una trasformazione naturale $\alpha : \mathrm{id} \to \mathrm{Abel}$ definita per ogni $G \in \mathtt{Grp}$ da

$$\begin{aligned} \alpha_G : G &\longrightarrow \frac{G}{[G,G]} \\ a &\longmapsto \alpha_G(a) = a[G,G] \end{aligned}$$

è naturale perché $\forall f : G \to H$ in $\mathtt{Grp}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_G"] & H \arrow[d, "\alpha_H"] \\ \frac{G}{[G,G]} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{H}{[H,H]} \end{tikzcd}$$

Esempio 1.0.38. Supponendo di avere $F, F' : G \to \mathtt{Set}$ funtori (G gruppo visto come categoria con un oggetto), cioè G-insiemi (azioni di G su insiemi). Allora una trasformazione naturale $\alpha : F \to F'$ è un morfismo di G-insiemi cioè una funzione $\alpha : F(G) \to F'(G)$ tale che $\alpha(gx) = g\alpha(x)$ per ogni $g \in G$ e per ogni $x \in F(G)$.

Osservazione. $\forall F : C \to D$, $\mathrm{id}_F : F \to F$ data da $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ per ogni $X \in C$ è una trasformazione naturale.

Esercizio 1.0.5

Dati $F, F', F'' : C \to D$ funtori, $\alpha : F \to F'$ e $\beta : F' \to F''$ trasformazioni naturali, allora la composizione $\beta \circ \alpha : F \to F''$ è definita da

$$\beta_X \circ \alpha_X =: (\beta \circ \alpha)_X : F(X) \to F''(X)$$

Mostrare che $\alpha \circ \beta$ è una trasformazione naturale

La composizione dell'esercizio precedente è anche detta composizione verticale di trasformazioni naturali, per via di questo disegno esplicativo:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U}] \arrow[r, "F"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "F''"'{name=L}] & D \arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=M, to=L, phantom, "\Downarrow\beta"] \end{tikzcd}$$

Considerando funtori e trasformazioni naturali, si ottiene (assumiamo sempre C piccola) la categoria $\mathtt{Fun}(C, D)$ (anche denotata D^C) con oggetti i funtori $C \to D$, morfismi le trasformazioni naturali e composizione la composizione verticale.

Definizione 1.0.19

Data una categoria C, la categoria dei morfismi di C è

$$\mathtt{Mor}(C) := \mathtt{Fun}(\cdot \to \cdot, C)$$

che ha come oggetti esattamente $\{f :\to X - Y : f \text{ morfismo di } C\}$ e trasformazioni naturali date da $(X \xrightarrow{f} Y) \to (X' \xrightarrow{f'} Y')$ è data da $(g : X \to X', h : Y \to Y')$ tale che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$