

Appunti di Algebra Superiore

Github Repository: [Oxke/appunti/AlgebraSuperiore](#)

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Alberto Canonaco

Libri utili

- Per la parte di algebra omologica Hilton-Stammbach, Osborne e Weibel.
- Dispense sui moduli (su KIRO) utili
- Aluffi, *Algebra Chapter 0*

Il corso è di 60 ore, non perché sia più pesante ma perché dovrebbero esserci ore di esercitazioni (non sarà necessariamente vero ma Canonaco cercherà di andare un po' nel dettaglio, fornire esempi e controesempi per quanto possibile)

0.1 Richiami sugli Anelli

Per convenzione, parlando di **anelli** si parlerà sempre di **anelli con unità**

Definizione 0.1.1: Anello

Un **anello** A , $+$, \cdot è un gruppo abeliano $A, +$ (con 0 elemento neutro) e contemporaneamente un monoide A, \cdot (con 1 elemento neutro). Inoltre le due operazioni sono legate dalle proprietà distributive

$$a(b + c) = ab + ac \quad ; \quad (b + c)a = ba + ca$$

Diremo che l'anello è **commutativo** se l'operazione \cdot è commutativa

Per quasi tutto ciò che si vedrà in questo corso non è necessario andare a disturbare anelli non commutativi, dunque si useranno quasi sempre anelli commutativi.

Esempio 0.1.1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Esempio 0.1.2. Se A è un anello (commutativo), allora i polinomi a coefficienti in A e con variabili in Λ costituiscono l'anello $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$

Esempio 0.1.3 (Anello Banale). L'anello composto da un solo elemento $\{0 = 1\}$

Esempio 0.1.4 (Non comm.). A anello, allora l'anello $M_n(A)$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in A non è commutativo se $n > 1$ (e se non è l'anello banale ma dall'anello banale non esiste davvero)

Esempio 0.1.5. Endomorfismi Se $(G, +)$ è un gruppo abeliano, allora $\text{End}(G)$ è anello con $+$ determinato da $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ e \cdot dato dalla composizione $(f \circ g)(a) = f(g(a))$

In generale se G, G' sono gruppi con $(G, +)$ abeliano, allora l'insieme $\text{Hom}(G', G)$ degli omomorfismi da G' a G è un sottogruppo di $G^{G'}$ il gruppo delle funzioni da G' a G .

Infatti se X è un insieme allora G^X è un gruppo con $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

Definizione 0.1.2: Invertibile

$a \in A$ è invertibile a sinistra (destra) se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ($aa' = 1$).
 a viene detto **invertibile** se $\exists a' \in A$ tale che $a'a = aa' = 1$

Osservazione (invertibile \iff invertibile a destra e sinistra). solo una implicazione non è ovvia. Se $a', a'' \in A$ sono tali che $a'a = aa'' = 1$ allora

$$(a'a)a'' = a'(aa'')1a'' = a'' \quad \quad \quad = a' = a'1$$

quindi a è invertibile e $a^{-1} = a' = a''$

Osservazione (Gruppo degli invertibili). L'insieme degli elementi invertibili forma un gruppo con l'operazione di prodotto e si indica con A^*

In generale, se $1 \neq 0$, allora $A^* \subseteq A \setminus \{0\}$

Definizione 0.1.3: Anello con Divisione

A si dice **anello con divisione** se $A^* = A \setminus \{0\}$. Un campo è un anello con divisione commutativo.

Definizione 0.1.4: Divisore di zero

$a \in A$ è detto **divisore di zero** a sinistra (destra) se $\exists a' \in A \setminus \{0\}$ tale che $aa' = 0$ ($a'a = 0$)

Definizione 0.1.5: Dominio

A viene detto **dominio** se $A \neq 0$ e A non ha divisori di zero. Viene inoltre chiamato **dominio di integrità** se è commutativo.

Esempio 0.1.6. I campi, \mathbb{Z} , se A dominio d'integrità, allora anche $A[x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$ è dominio d'integrità.

Osservazione. $A \neq 0$ tale che $\forall 0 \neq a \in A$ è invertibile a sinistra, allora A è un anello con divisione.

Dimostrazione. $\exists a' \in A$ tale che $a'a = 1$ ma anche $\exists a'' \in A : a''a' = 1$. Allora a' è invertibile a sinistra e a destra, infatti

$$a'^{-1} = a = a'' \implies a \in A^*$$

□

Definizione 0.1.6: Sottoanello

$A' \subseteq A$ è **sottoanello** di A se $(A', +) < (A, +)$, $ab \in A'$ per ogni $a, b \in A'$ e $1 \in A'$

Esempio 0.1.7. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ sono tutti sottoanelli

Esempio 0.1.8. $A \subseteq A[X]$ sottoanello

Definizione 0.1.7: Ideale

$I \subseteq A$ è un'ideale sinistro (destro) se $(I, +) < (A, +)$ e $ab \in I$ ($ba \in I$), $\forall a \in A$ e $\forall b \in I$.

Un **ideale bilatero** è un ideale sia sinistro che destro.

Esempio 0.1.9. Gli ideali in \mathbb{Z} sono tutti e soli della forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$

Osservazione. Se I è un ideale sinistro o destro allora

$$I = A \iff I \cap A^* \neq \emptyset$$

quindi A con divisione \implies gli unici ideali sinistri o destri sono $\{0\}$ e A

Definizione 0.1.8: Anello opposto

L'**anello opposto** di un anello A è A^{op} , con $(A^{op}, +) := (A, +)$ e con prodotto ab in A^{op} definito come ba in A

Osservazione. $(A^{op})^{op} = A$ e $A^{op} = A \iff A$ commutativo

Proposizione 0.1.1 (Anello Quoziente). Se $I \subseteq A$ ideale, allora il gruppo abeliano $A/I, +$ è un anello con prodotto $\bar{a}\bar{b} := \overline{ab}$, dove $\bar{a} := a + I \in A/I$

Definizione 0.1.9: omomorfismo di anelli

Siano A, B anelli. $f : A \rightarrow B$ è **omomorfismo** di anelli se, $\forall a, a' \in A$

$$\text{i) } f(a + a') = f(a) + f(a')$$

$$\text{ii) } f(aa') = f(a)f(a')$$

$$\text{iii) } f(1_A) = 1_B$$

ed è **isomorfismo** se è un omomorfismo biunivoco

Osservazione. f omomorfismo è isomorfismo $\iff \exists f' : B \rightarrow A$ omomorfismo tale che $f' \circ f = \text{id}_A$ e $f \circ f' = \text{id}_B$

Indicheremo $A \cong B$ se esiste un isomorfismo tra A e B

Proposizione 0.1.2. Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo allora

1. $A' \subseteq A$ è sottoanello $\implies f(A') \subseteq B$ è sottoanello.
2. $B' \subseteq B$ sottoanello $\implies f^{-1}(B') \subseteq A$ è sottoanello
3. $J \subseteq B$ è ideale (sinistro / destro) $\implies f^{-1}(J) \subseteq A$ è ideale (sinistro / destro). In particolare $\text{Ker } f := f^{-1}(0_B) \subseteq A$ è ideale
4. f **suriettivo** e $I \subseteq A$ ideale $\implies f(I) \subseteq B$ è ideale

Osservazione. $f : A \rightarrow B$ è iniettivo $\iff \text{Ker } f = \{0_A\}$ e in tal caso $A \cong \text{Im } f := f(A)$ che dunque è sottoanello di B

Teorema 0.1.3: Omomorfismo

$f : A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli, $I \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq \text{Ker } f$. Allora

$$\exists ! \bar{f} : A/I \rightarrow B \text{ omomorfismo tale che } \bar{f}(\bar{a}) = f(a) \quad \forall a \in A$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

Inoltre $\text{im } \bar{f} = \text{im } f$ e $\text{Ker } \bar{f} = \text{Ker } f / I$

Proposizione 0.1.4. *Gli ideali di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $J \subseteq A$ ideale tale che $I \subseteq J$*

Teorema 0.1.5: Primo teorema di isomorfismo

$f : A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli, allora $\text{im} f \cong A/\text{Ker} f$

Definizione 0.1.10

L'ideale generato da $U \subseteq A$ è il più piccolo ideale di A che contiene $U = \bigcap_{U \subseteq I \subseteq A \text{ ideale}} I$ ed esplicitamente è

$$AU A := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i u_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in A, u_i \in U \right\}$$

Osservazione. Se A è commutativo e $U = \{u\}$ allora $A\{u\}A = Au = \{au : a \in A\}$ (ideale principale)

Definizione 0.1.11: PID

A è un dominio (d'integrità) a ideali principali (PID) se ogni ideale di A è a ideali principali.

Esempio 0.1.10. Campi (non ci sono ideali propri)

Esempio 0.1.11. \mathbb{Z} (con ideali $n\mathbb{Z} = (n)$)

Esempio 0.1.12. $K[X]$ con K campo

0.2 Richiami sui Moduli

Teorema 0.2.1: Secondo teorema di isomorfismo

Sia M un modulo, con $M', M'' \subseteq M$ sottomoduli. Allora

$$M'/(M' \cap M'') \cong (M' + M'')/M''$$

Dimostrazione. Si prenda $f : M' \rightarrow (M' + M'')/M''$ composizione dell'inclusione di M' in $M' + M''$ e della proiezione a quoziente, dunque è un omomorfismo.

Allora $\text{Ker} f = \{x \in M' : x + M'' = M''\} = M' \cap M''$ □

Teorema 0.2.2: Terzo teorema di isomorfismo

Dati $M'' \subseteq M' \subseteq M$ sottomoduli e modulo, allora

$$(M/M')/(M'/M'') \cong M/M'$$

Dimostrazione. Sia f la composizione delle due proiezioni a quoziente, dunque è suriettiva. Allora

$$x \in \text{Ker} f \iff \pi(x) \in \text{Ker} \pi' = M'/M''$$

dunque $\text{Ker} f = M'$ da cui la tesi per il primo teorema di isomorfismo. □

Definizione 0.2.1: Ideale massimale (sinistro / destro)

Un ideale J (sinistro / destro)

Proposizione 0.2.3.

1. Sia A un anello, allora un A -modulo M è ciclico se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro tale che $M \cong A/I$
2. M è semplice se e solo se $\exists I \subseteq A$ ideale sinistro massimale tale che $M \cong A/I$

Dimostrazione. 1.

2. Se M è semplice allora $\forall 0 \neq x \in M, M = Ax$, dunque M è ciclico e per il punto 1. esiste I ideale sinistro tale che $M \cong A/I$. La proposizione si riduce a dire che A/I è semplice se e solo se I è massimale. Sappiamo che i sottomoduli di A/I sono tutti e soli della forma J/I con $I \subseteq J \subseteq A$ ideale sinistro. Allora $A/I \neq 0 \iff I \neq A$ e gli unici sottomoduli di A/I sono I/I e A/I , ossia gli unici ideali sinistri J tali che $I \subseteq J \subseteq A$ sono I e A .

□

Osservazione. Con il lemma di Zorn si dimostra che $A \neq 0 \implies$ esiste un ideale sinistro massimale (e dunque esiste un sottomodulo semplice)

0.2.1 Prodotti

Definizione 0.2.2: Prodotto

Supponiamo di avere M_λ A -moduli, per $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$M := \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ è un } A\text{-modulo detto } \mathbf{prodotto} \text{ degli } M_\lambda$$

con $(x + y)_\lambda := x_\lambda + y_\lambda$ e $(ax)_\lambda = ax_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e $x, y \in M$.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste $p_\mu : M \rightarrow M_\mu, (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\mu$ che è A -lineare e suriettivo.

Proposizione 0.2.4 (Proprietà universale del prodotto). *Dati $l_\mu : N \rightarrow M_\mu$ A -lineari, $\forall \mu \in \Lambda$ esiste unico $f : N \rightarrow M$ A -lineare tale che $f_\mu = l_\mu \circ f$*

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ l_\mu \downarrow & \searrow \exists! f & \\ M_\mu & \xleftarrow{f_\mu} & M \end{array}$$

Dimostrazione.

□

Definizione 0.2.3: Somma diretta

La **somma diretta** (o coprodotto) degli M_λ è

$$M' = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M : x_\lambda = 0 \text{ per finiti } \lambda \subseteq M\}$$

è sottomodulo.

$\forall \mu \in \Lambda$ esiste

$$i_\mu : M_\mu \longrightarrow M'$$

$$x \longmapsto i_\mu(x) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \quad x_\lambda := \begin{cases} x & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

che è A -lineare e iniettivo.

Proposizione 0.2.5 (Proprietà universale somma diretta).

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ l_\mu \uparrow & \nwarrow \exists! f & \\ M_\mu & \xrightarrow{i_\mu} & M' \end{array}$$