

基于微分思想与数值模拟的多波束海底测深布线模型

2023 年 9 月 10 日

摘要

目录

1	问题背景重述	2
1.1	问题背景	2
1.2	问题重述	2
2	问题分析	2
2.1	问题一分析	2
2.2	问题二分析	2
2.3	问题三分析	2
2.4	问题四分析	2
3	模型假设	3
4	符号申明	3
5	模型建立与求解	4
5.1	问题一：沿等深线测深时的宽度与重叠率计算	4
5.1.1	利用正弦定理计算覆盖宽度 w	4
5.1.2	重叠率的计算公式推导	4
5.1.3	表格一的计算结果	5
5.2	问题二：与海底坡面法向在水平面投影成一定角度时的宽度计算	6
5.2.1	建立覆盖宽度 w 的通用计算模型	6
5.2.2	建立覆盖宽度 w 的第二问专用计算模型	7
5.3	问题三：矩形理想海域内最短布线规划	8
5.3.1	基于积分中值定理与贪心思想说明平行等深线测深时才可能得到最短总路径	8
5.3.2	建立与求解平行等深线测深时的最短路径优化模型	9
5.4	问题四：真实海域内多目标最优布线规划	12
6	模型优缺点评价	12

1 问题背景重述

1.1 问题背景

1.2 问题重述

2 问题分析

2.1 问题一分析

在问题一中，海底被假想为一个坡面，测量船沿着海底等深线方向探测，也即 $\beta = 90^\circ$ 的方向进行测深。在本问题中，我们规定覆盖宽度 w 投影到水平面上。首先，在已知坡度 α 、水深 D 和多波束换能器开角 θ 的前提下，利用正弦定理等平面几何知识，可得到覆盖宽度 w 。再者，在进一步知道两条相邻侧线的距离 d 的情况下，可得重叠率 η 。最后，将具体的 $\alpha = 1.5^\circ$, $D = 70m$, $\theta = 120^\circ$, $d = 200$ 代入我们建立的模型，即可得到表一结果。

2.2 问题二分析

问题二是问题一的推广，问题一是问题二在 $\beta = 90^\circ$ 时的特例。在问题二中，海底仍然被假想为一个坡面，但测量船的测量方向与海底坡面法向在水平面上的投影成一定的夹角 β 。我们仍规定覆盖宽度 w 投影到水平面上。首先，沿法向量在水平面上的投影、等深线以及竖直方向，我们建立了空间直角坐标系。其次，我们注意到多波束平面与海底坡面会形成一条交线，利用解析几何的知识，这条交线与水平面形成的线面角 γ 的大小只和 α 与 β 有关。在确定了 γ 之后，第二问即可转化为第一问。最后，第二问要求在不同的 β 以及不同的测量船距海域中心点距离 L 的条件下计算覆盖宽度 w ，我们根据空间几何关系，由 β 和 L 计算出水深 D ，将 D 和 β 带入第一问建立的模型求解，可得表二结果。

2.3 问题三分析

问题三建立在第二问所建立模型的基础上。第三问要求给出对某理想矩形海域全覆盖、且满足覆盖率要求的最优布线。首先，我们由第二问的模型，推断出在任何水深 D 的情况下， $\beta = 90^\circ$ 或者 $\beta = 180^\circ$ 的时候都有 w 取最大值。其次，我们基于贪心原则和积分中值定理的思想，认为在“充分利用”覆盖宽度的条件下才可能得到最短布线，且考虑到了斜线行驶很可能会引发角落处覆盖不全的难题，因此把可行域空间限制在测线平行于等深线的情况内。然后，在考虑平行等深线布线的情况下，以总测线长度为目标函数，以覆盖范围和重叠率为约束条件，可以建立最优化模型。最后，在测线条数 $n = 32 \sim 40$ 的情况下利用 matlab 分别找满足条件的布线最优解，在 $n = 34$ 时找到了最短路径，并给出了各条测线之间的重叠率。

2.4 问题四分析

本题提供了早期进行单波束测量时留下的网格化离散水深数据，但要求进行连续测线的规划。本题需要将前三问建立的理想坡度下的模型应用于真实世界中凹凸不平的海域，且同时要有多目标的优化。

首先，我们将海域深度数据可视化，发现该海域近似为一个马鞍面，起伏较大，无法直接套用理想坡度模型。其次，我们分析了题给的三个目标，并且根据地理测绘的实际需求，认为诸目标的优先次序从高到低应该是：提高覆盖面积（保证数据完整有效）、降低总长度（节省测量成本）、控制重叠率（降低冗余度）。

接着，我们基于类似有限差分的思想，利用最小二乘法，计算出网格上各点的局部坡度，并用法向量来表征局部坡度信息。我们通过 K-means 算法，综合考虑各个点的位置、水深和局部坡度法向量，将该区域剖分为多个坡度相近的矩形和梯形子区域。在剖分之后，我们利用图论算法，给出遍历这几个区域的可能顺序，并确定相邻区域的路线衔接点，也即各区域测线的起点和终点。

我们把每个子区域都转化为第三问的情况，把各子区域的海底视为理想的坡面，在每个子区域内部进行最优路线规划，在各子区域内尽可能减少路程和重叠率并增加覆盖面积，把各子区域路线连接起来得到总路线。然后，把待选的总测线运用于真实的海底中，通过数值积分的方式，测算路线长度、覆盖面积和高重叠率（ $\eta \geq 20\%$ ）的路线长度。最后，通过综合评价的方式，选出多目标规划下的最优路线。

3 模型假设

1. 覆盖宽度 w 指的是将坡度上的覆盖范围垂直投影到水平面后的宽度。
2. 与波束在海中的传播速度相比，探测船的运动速度忽略不计，也即认为发射声波与接收回声的时候，探测船处于相同的位置。
3. 探测船在海洋中摇晃所带来的精度损失忽略不计，一旦多波束换能器的开角 θ 确定且探测船的位置与行驶方向确定，多波束在某位置的覆盖宽度就确定。
4. 在规划布线时，测量船可以在目标海域内或目标海域外的任意一点开始或结束探测工作。
5. 在第三问中，测量船绕到目标海域外行驶，或者沿边界处行驶时（比如掉头），我们假设测量船会关闭多波束换能器。我们把此段路程算入测线的总长度中，但认为探测面积为 0，与其他部分测线的重叠率为 0。
6. 在第四问中，我们将目标海域分化为若干个子区域。我们假设测量船在测量完一个子区域之后，必须到达该子区域的其中一条边界，并且只能前往与该区域在此边界相交的下一个相邻区域。我们假设从上一个子区域的探测终点前往下一个相邻区域的探测起点的过程中测量船会关闭多波束换能器，我们不把此段路程算入测线总长度中，且认为探测面积为 0，与其他部分测线重叠率为 0。

4 符号申明

符号	含义
α	
β	
γ	
θ	
η	
w	
d	
D	
L	

5 模型建立与求解

5.1 问题一：沿等深线测深时的宽度与重叠率计算

5.1.1 利用正弦定理计算覆盖宽度 w

第一问的几何示意图如1所示。其中， S 为测量船， $D = SP$ 为测量船所在位置的水深。 $w = MN \cos \alpha$ 为测量宽度。

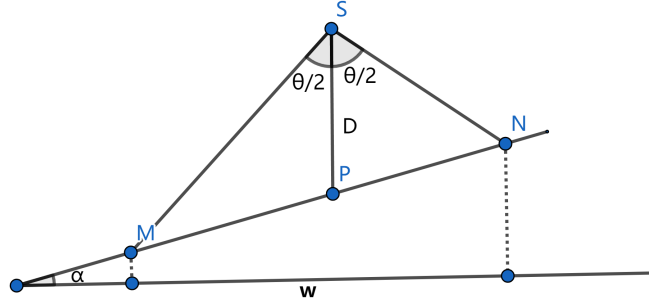


图 1: 第一问覆盖宽度的几何关系示意图

根据正弦定理，我们分别在 $\triangle MPS$ 和 $\triangle NPS$ 中分别可以得到如下的关系

$$\frac{MP}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha)}$$

$$\frac{NP}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{D}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} + \alpha)}$$

根据几何关系，我们可以得到：

$$MN = MP + NP \quad (1)$$

$$w = MN \cos \alpha \quad (2)$$

其中(1)与(2)是在第二问和第三问中依然成立的关系式，只不过其中的 α 需要替换成 γ (详后)。整理上述各关系式，我们求解得到：

$$w = w(D) = D \cos \alpha \left[\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \right] \quad (3)$$

5.1.2 重叠率的计算公式推导

下面我们推导重叠率的计算公式。重叠情况的示意图如图2所示：

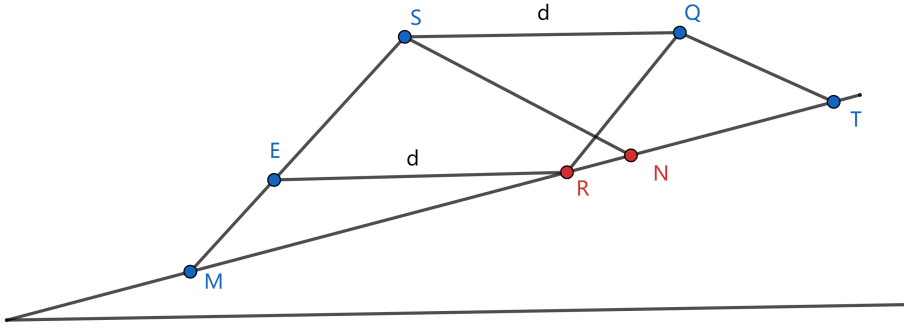


图 2: 第一问重叠率的计算示意图

类似题目中平坦的情况，我们把在坡度上的重叠率定义为

$$\eta = \frac{RN \cos \alpha}{w} \times 100\% = \frac{RN}{MN} \times 100\% \quad (4)$$

其中 MN 可以由(1)和(2)得到，而 RN 的计算方式如下：

$$RN = MN - MR \quad (5)$$

在 $\triangle MER$ 中，由正弦定理，我们可以得到：

$$\frac{d}{\sin(\frac{\pi-\theta}{2} - \alpha)} = \frac{MR}{\sin(\frac{\pi+\theta}{2})} \quad (6)$$

其中 d 是船 S 和船 Q 之间的距离，满足 $d = SQ = ER$ 。

由(4)到(6)可以得到：

$$\eta_{i+1} = \left[1 - \frac{d_{i+1} \cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha}{w_i \cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} \right] \times 100\% \quad (7)$$

其中 η_{i+1} 是第 i+1 条测线相对于第 i 条测线（这里指更深处的测线）的重叠率， d_{i+1} 是第 i+1 和第 i 条船的间距， w_i 是第 i 条测线的覆盖宽度。

5.1.3 表格一的计算结果

题目要求计算在不同测线距中心点处距离的情况下的覆盖宽度与重叠率。设测线距中心点处距离为 $S_i \in [-800, 800]$ ，则由简单的相似关系可以得到 $D_i = D_0 - S_i \sin \alpha$ 以及 $d_i = D_i - D_{i-1}$ ，其中 D_0 是中心点处的水深。将 D_i 带入公式(3)可以得到 w_i ，将 w_i 和 d_i 带入公式(7)可以得到 η_i 。具体的计算结果如表1所示

表 1: 问题 1 的计算结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0
海水深度/m	90.94156	85.70616898	80.47077932	75.23538966	70
覆盖宽度/m	315.6802	297.506882	279.3335758	261.1602696	242.9869634
与前一条测线的重叠率/%	——	33.63472105	29.58077605	24.99933568	19.7802798
测线距中心点处的距离/m	200	400	600	800	
海水深度/m	64.76461	59.52922068	54.29383102	49.05844135	
覆盖宽度/m	224.8137	206.6403509	188.4670447	170.2937385	
与前一条测线的重叠率/%	13.78054	6.810804913	-1.384863416	-11.16109869	

5.2 问题二：与海底坡面法向在水平面投影成一定角度时的宽度计算

5.2.1 建立覆盖宽度 w 的通用计算模型

第二问的几何关系如图3所示：

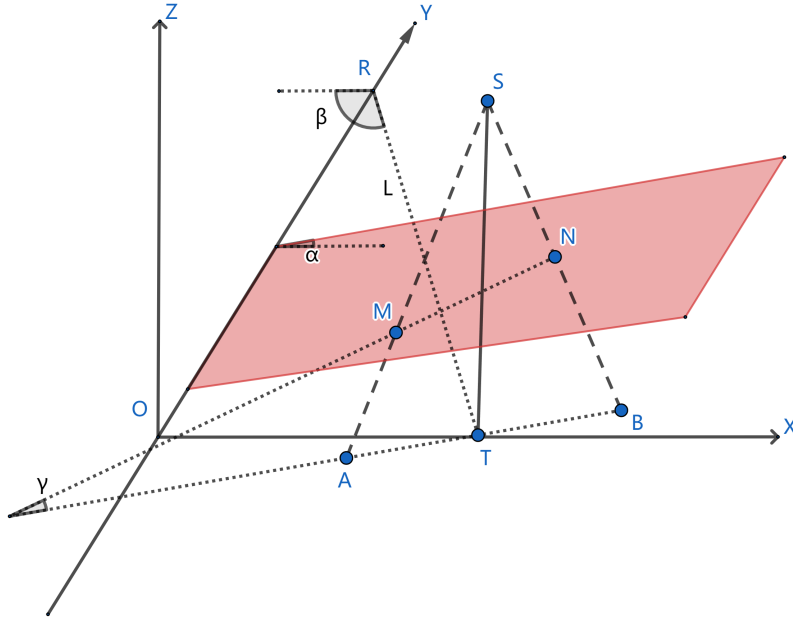


图 3: 第二问几何关系示意图

其中 S 是测量船所在的位置, T 是测量船位置在水平面上的投影, R 是海域中心点. $w = MN \cos \gamma$ 是覆盖宽度, γ 是 MN 与水平面形成的线面角. $L = RT$ 是测量船距海域中心点处的距离, β 是测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角. 我们以坡面法向量在水平面上的投影方向为 x 方向, 以等深线的方向为 y 方向, 以竖直方向为 z 方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$, 其中 x 轴经过 T 点, y 轴经过 R 点.

如上文所述, 第二问是第一问的延伸, 只要能够求出 γ , 就能够变成第一问的模型. 我们采用向量运算的方式来求解 γ .

MN 所在的直线是平面 SAB 和海底坡面的交线. 平面 SAB 的法向量为 $v_1 = [\cos \beta, \sin \beta, 0]^T$, 海底坡面的法向量为 $v_2 = [-\sin \alpha, 0, \cos \alpha]^T$, MN 直线的方向向量 v_3 需要满足:

$$v_3^T v_1 = v_3^T v_2 = 0 \quad (8)$$

而直线 AB 的方向向量可以表示为 $v_4 = [\sin \beta, -\cos \beta, 0]^\top$.

由于平面 SAB 垂直于水平面, 因此有

$$\gamma = \langle \vec{MN}, \vec{AB} \rangle \quad (9)$$

由式(8)(9)可以得到 $\gamma (< \frac{\pi}{2})$ 的余弦值和正弦值分别为

$$\cos \gamma = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}} \quad (10)$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}} \quad (11)$$

此时的覆盖宽度 w 的表达式为:

$$\begin{aligned} w &= w(D, \beta) \\ &= D \cos \gamma \left[\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)} \right] \\ &= D \cos \gamma \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \gamma - \sin \frac{\theta}{2} \sin \gamma} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \gamma + \sin \frac{\theta}{2} \sin \gamma} \right] \\ &= D \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta} \right] \\ &= 2D \cos^2 \alpha \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{(\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha)^2 - (\sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

注意到 w 在本质上只与水深 D 和测线的方向 β 有关。

5.2.2 建立覆盖宽度 w 的第二问专用计算模型

下面我们根据第二问表 2 的要求, 建立专用的计算模型。当测线方向夹角为 β , 测量船距海域中心点处距离为 L 时, 根据图3的几何关系, 可得水深

$$D = D_0 - L \sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \tan \alpha \quad (13)$$

其中 D_0 是海域中心点的水深。将式(13)再带入(12)可以得到专用于计算表 2 的公式:

$$\begin{aligned} w &= w(L, \beta) \\ &= [D_0 - L \sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \tan \alpha] \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta} \right] \\ &= 2 \left[D_0 - L \sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \tan \alpha \right] \cos^2 \alpha \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{(\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha)^2 - (\sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

将表 2 中提供的各 β 与 L 值带入, 取 $\theta = 120^\circ$, $\alpha = 1.5^\circ$, $D_0 = 120m$, 得到计算结果如表2:

表 2: 问题 2 的计算结果					
覆盖宽度/m	测量船距海域中心点处的距离/海里				
	0	0.3	0.6	0.9	
测线方向夹角/°	0	415.8347	466.2508	516.667	567.0831
	45	416.1915	451.8717	487.5519	523.232
	90	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491
	135	416.1915	380.5113	344.8311	309.151
	180	415.8347	365.4186	315.0024	264.5863
	225	416.1915	380.5113	344.8311	309.151
	270	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491
	315	416.1915	451.8717	487.5519	523.232
覆盖宽度/m	测量船距海域中心点处的距离/海里				
	1.2	1.5	1.8	2.1	
测线方向夹角/°	0	617.4992	667.9154	718.3315	768.7477
	45	558.9122	594.5924	630.2726	665.9528
	90	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491
	135	273.4708	237.7906	202.1104	166.4302
	180	214.1701	163.754	113.3379	62.92173
	225	273.4708	237.7906	202.1104	166.4302
	270	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491
	315	558.9122	594.5924	630.2726	665.9528

5.3 问题三：矩形理想海域内最短布线规划

5.3.1 基于积分中值定理与贪心思想说明平行等深线测深时才可能得到最短总路径

设测线的曲线参数方程为 $\Gamma(t)$ ，在某一节点的宽度为 $w(D(t), \beta(t))$ ，重叠率为 $\eta(t)$ ，曲线覆盖的总面积为 S ，那么由积分中值定理，应有如下关系：

$$S = \int_{\Gamma} (1 - \eta(t)) w(D(t), \beta(t)) dt = (1 - \eta(t^*)) w(D(t^*), \beta(t^*)) = (1 - \bar{\eta}) \bar{w} l$$

其中， t^* 为曲线中的某一点， $\bar{\eta}$ ， \bar{w} 分别为“平均”重叠率和“平均”覆盖宽度， l 为曲线总长度。

从实际探测工作经验出发， S 应该接近待测海域的总面积，多余测量的面积可以忽略不计；否则，当多余面积过多时，也显然不是长度最短的测线。若想要侧线总长度 l 最长，应该要求 $\bar{\eta}$ 尽可能小， \bar{w} 尽可能地大；从贪心算法的思想出发，这要求在全过程中，尽可能时刻使 $\eta(t)$ 小，而 $w(t)$ 尽可能大。

我们把上述要求拆分成两个步骤。

第一步，观察如何使 $w(t)$ 尽可能大。由式(12)可知，当船的坐标既定（也即水深 D 既定）， w 只与 $\sin \beta$ 有关。注意到 $-(\sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta)^2$ 这一项在分母上，并且在 $\alpha = 1.5^\circ, \theta = 120^\circ$ 时 $(\sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta)^2$ 显然小于 $(\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha)^2$ ；那么当 $|\sin \beta| = 1$ 时，也即 $\beta = 90^\circ$ 或者 $\beta = 270^\circ$ 时， w 能够取到最大值。我们绘制了 $f(\beta) = \frac{1}{(\cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha)^2 - (\sin \frac{\theta}{2} \sin \alpha \sin \beta)^2}$ 的函数图像4如下，也验证了我们的判断。这说明，从贪心算法的思想出发，船尽量沿着等深线测深，才有可能使 w 最大。

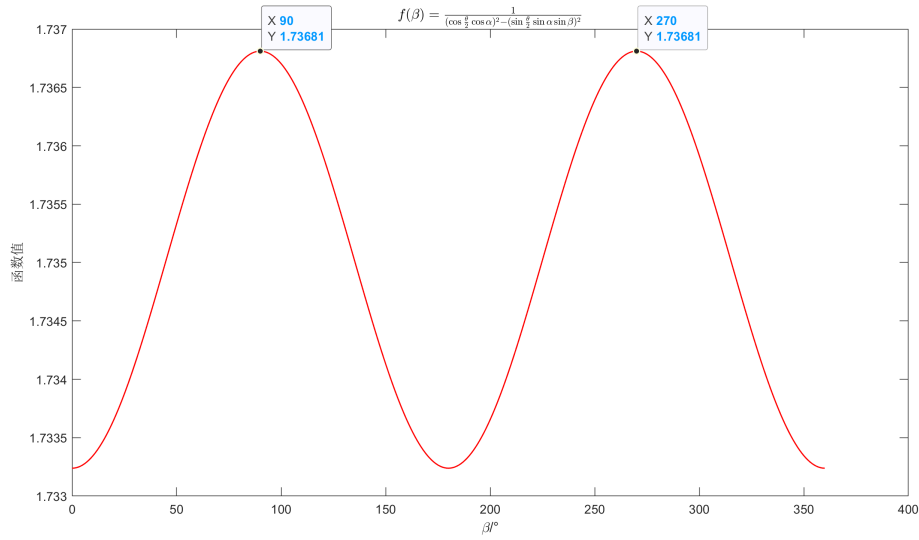


图 4: $f(\beta)$ 变化趋势图

5.3.2 建立与求解平行等深线测深时的最短路径优化模型

第二步，我们使 $\eta(t)$ 尽可能地小，即尽可能接近 10%。在控制测线之间沿等深线平行排布时，这意谓着在满足海域全覆盖的约束下，尽量增大测线间距。以海洋的最深处为起点，由西向东建立坐标系，如图5所示。其中，坐标轴方向为由西向东，虚线围成的部分为待测海域，实线为路线图，彩色的矩形为覆盖范围，彩色矩形之间有一定的重叠部分。在待测海域内部线路长度全部纳入考量，在待测海域外或者边缘的部分（掉头转弯），我们只考虑平行于坐标轴的部分。

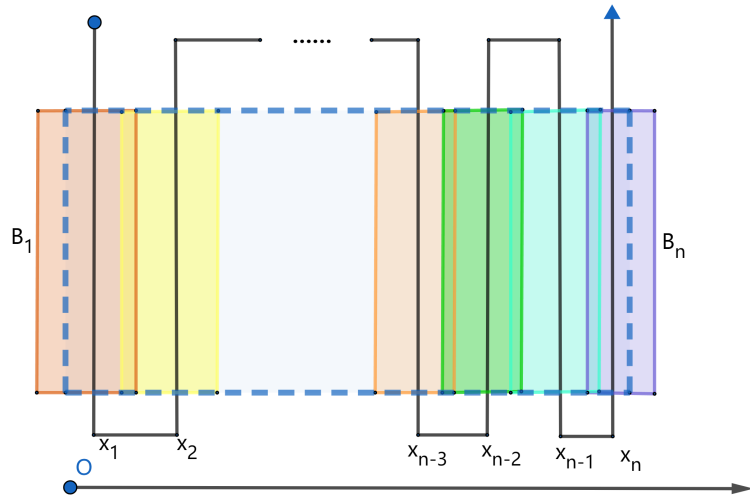


图 5: 问题三优化模型示意图

设有 n 条测线，每条测线离最深处的距离 x_i 作为决策变量。根据题意，约束条件包括：

1. 为保证全覆盖，第 1 条测线覆盖范围的最西端坐标 $B_1(x_1)$ 需要小于 0，第 n 条测线覆盖范围最东端坐标 $B_n(x_n)$ 必须大于 0;
2. 第 i 条和第 i-1 条测线的重叠率 $\eta_i(x_i, x_{i-1})$ 在 10% 20% 之间;
3. 所有的布线都应该在待测海域范围之内，否则必不是最优路线。

根据模型假设，总的路程应包括每条平行于等深线的测线（长度为 $2n$ ）以及所有掉头转弯的路程（长度为 $x_n - x_1$ ）。

依据以上分析，我们建立的优化模型如下：

$$\begin{aligned}
\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2n + (x_n - x_1) \\
s.t. \quad B_1(x_1) &\leq 0 \\
B_n(x_n) &\geq 4 \\
\eta_i(x_i, x_{i-1}) &\in [10\%, 20\%] \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, n \\
x_i &\in [0, 4] \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{15}$$

其中，根据图1和图2所示的几何关系，我们可以得到

$$\begin{aligned}
B_1(x_1) &= x_1 - \frac{D_1 \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\alpha + \frac{\theta}{2})} \\
B_n(x_n) &= x_n + \frac{D_n \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\alpha - \frac{\theta}{2})} \\
\eta_i(x_i, x_{i-1}) &= (1 - \frac{d_i \cos \frac{\theta}{2}}{w_{i-1} \cos(\alpha + \frac{\theta}{2})}) \times 100\%
\end{aligned}$$

D_1, D_n 分别是第 1 条和第 n 条测线处的水深， d_i 是第 i 条测线距离第 i-1 条测线的距离， w_i 是第 i 条测线的覆盖宽度，它们都是关于决策变量 x_i 的线性函数。

以上优化问题(15)可以用 matlab 的 optimization toolbox 中的 fmincon 函数求解。下面，我们在 $n=30 \sim 40$ 范围内依次寻找最优解，情况如下：

表 3: 寻找最优布线

布线条数 n	最短测线长度/海里
30	不可行
31	不可行
32	不可行
33	不可行
34	71.7942
35	73.7942
36	75.7942
37	77.7942
38	79.7942
39	81.8607
40	83.8064

当 n 大于 40 时， $x_n - x_1$ 已经几乎接近 2，总路程将随布线条数的增加而增加（每次大约增加 2 海里），没有必要再尝试求解。因此，我们可以判断测线条数 **n=34** 时，可得最短测线。我们给出 n=34 时的最优解的表格如下：

表 4: 第三问最优解

测线编号 i	测线距海域西侧边界的距离/海里	与上一条测线的重叠率/%
1	0.193586281	-
2	0.511803816	10.0002%
3	0.801593352	11.0972%
4	1.056683096	15.2007%
5	1.305547844	10.6989%
6	1.536924545	10.0000%
7	1.750228864	10.0010%
8	1.946877095	10.0000%
9	2.128167594	10.0000%
10	2.295298287	10.0008%
11	2.449372781	10.0030%
12	2.59141963	10.0000%
13	2.722361353	10.0080%
14	2.843088482	10.0000%
15	2.954387125	10.0000%
16	3.056993624	10.0000%
17	3.151576459	10.0099%
18	3.238782967	10.0000%
19	3.319169087	10.0109%
20	3.393027983	10.3146%
21	3.461377734	10.0000%
22	3.5243893	10.0003%
23	3.582475362	10.0073%
24	3.63602868	10.0018%
25	3.685370906	10.0543%
26	3.73088941	10.0000%
27	3.772853033	10.0000%
28	3.811539403	10.0000%
29	3.847200907	10.0090%
30	3.880080895	10.0000%
31	3.910393038	10.0000%
32	3.938337881	10.0000%
33	3.96409704	10.0114%
34	3.987835105	10.0479%

5.4 问题四：真实海域内多目标最优布线规划

6 模型优缺点评价

参考文献

附录