9.20 作业

林子开 21307110161

1. Find the exact LU factorization of the $n \times n$ matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1

Set $A = LU$

Take following Gaussian elimination steps:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & 0 & \\ -1 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -1 & & 0 & & 1 & \\ -1 & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & & 2 \\ 0 & -1 & 1 & & & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & 0 & \\ -1 & -1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ -1 & -1 & 0 & & 1 & \\ -1 & -1 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & & 2 \\ 0 & 0 & 1 & & & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

……

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & 0 & \\ -1 & -1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -1 & -1 & -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 2 \\ & & 1 & \cdots & 4 \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Therefore :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & 0 & \\ -1 & -1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -1 & -1 & -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 1 & 0 & \cdots & 2 \\ & 0 & 1 & \cdots & 4 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Q.

2. Find the exact Cholesky factor of the $n \times n$ Pascal matrix

$$\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{bmatrix}.$$

解: 先尝试 4×4 的 Pascal Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

作 LU 分解:

(把 L 保存在左下方)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

发现所得 LU 正好是 LL^T

且 L 的各行系数恰是二项式系数

猜测:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\ \vdots & & & & \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

对于 Pascal matrix

$$a_{ij} = \binom{i+j-2}{i-1} = \binom{i+j-2}{j-1}$$

对于 $LL^* = A'$ 要求为对称阵

则 $a'_{ij} = a'_{ji}$，不妨设 $i \le j$

有 $a'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} l_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{i} l_{ik} l_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k}\binom{j-1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{j} \binom{i-1}{i-1-k} \cdot \binom{j-1}{k}$$

$$= \binom{i+j-2}{i-1}$$

$\therefore a_{ij} = a_{ij}'$

$\therefore$ 上述的 L 与 L^* 是 Pascal matrix 的 cholesky 分解

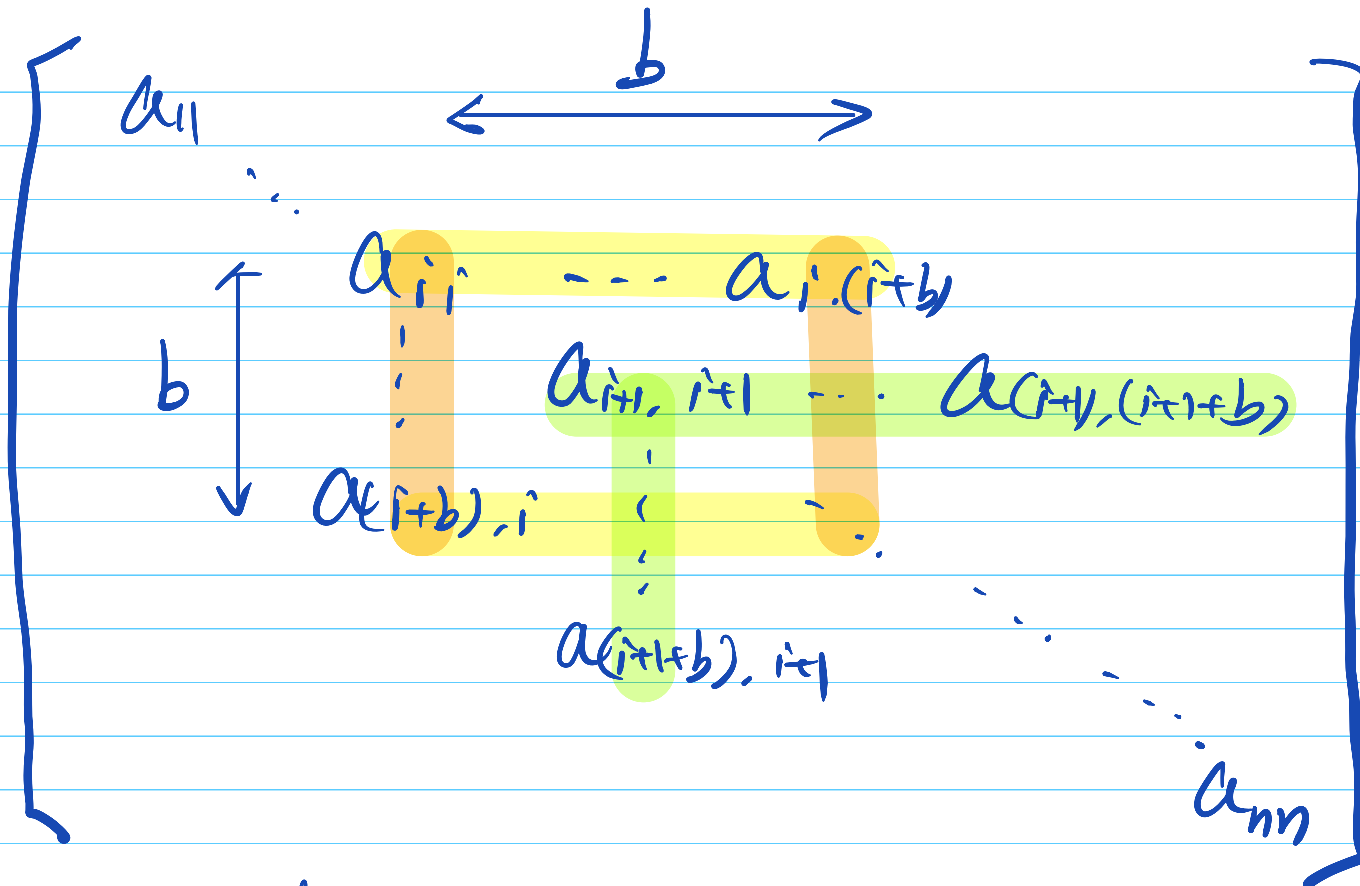
③

3. Let $A = (a_{ij})$ be a square banded matrix with bandwidth $2b+1$ (i.e., $a_{ij} = 0$ if $|i-j| > b$). Suppose that all leading principal minors of A are nonzero such that A admits an LU factorization $A = LU$. Show that L and U are also banded, and determine their bandwidths.

解：L 与 U 也都是 $2b+1$ 的 bandwidth

在对 A 进行 Gauss 消元时

例如消到 a_{ii}



此时只需对 $A(i+1:i+b,\ i+1:i+b)$ 部分进行消元

对属于 $A(i+1:i+b,\ i+1:i+b)$ 部分的元素而言，若位于对角线上方，则其距离其所在行主元距离必小于或等于 $|(i+b)-(i+1)| = b-1$

同理，位于对角线下方的元素，距离其所在列主元的距离也是小于或等于 $b-1$

而由题意可知，这部分元素本就处于 bandwidth 之内

也就是 Gauss 消元时不会对 bandwidth 之外本来就是 0 的元素进行改动

$\therefore$ L 与 U 的 bandwidth 也是 $2b+1$

4.

4. Implement LU factorization without and with partial pivoting. Test your implementation with a few examples.

Remark: Make sure your implementation works fine with rectangular matrices also.

对于含有 36 个元素的方阵、长方形矩阵分别使用两种不同的 LU 分解，然后计算其 F 范数

首先**令 m=6，n=6**

Matlab 代码如下：

```
m=6;
n=6;
%方法一：采用 partial pivoting，用 matlab 自带的 LU 分解即可实现
A=randn(m,n);
[L1,U1,P1]=lu(A);

%方法二：直接进行 LU 分解，用自己写的程序完成
last=min(m,n);
for j=1:last
        A(j+1:m,j)=A(j+1:m,j)./A(j,j);%把第 j 列变成各行之间的"系数之比"
        A(j+1:m,j+1:n)=A(j+1:m,j+1:n)-A(j+1:m,j)*A(j,j+1:n);%对 Schur
complement 进行消元操作
end
v=ones(max(m,n));
%需要保证自己写的 L2 和 U2 矩阵的大小和 Matlab 给出的 L1 与 U1 的大小是一致的，方便后
面计算 F 范数
if n>=m
    U2=zeros(m,n);
    L2=zeros(m,m);
end
if n<=m
    U2=zeros(n,n);
    L2=zeros(m,n);
end

for i=1:m
    for j=1:n
        if j>=i
            U2(i,j)=A(i,j);
        end
        if j<i
            L2(i,j)=A(i,j);
        end
        if i==j
            L2(i,j)=1;%L 的对角线上的元素设置为 1
        end
    end
end

A
norm(L1-L2)%计算 L1-L2 的 F 范数
```

```
norm(U1-U2)%计算 U1-U2 的 F 范数
```

测试结果如下:

A =

0.9914	0.3947	-0.1802	-0.3623	-0.1102	0.2411
1.0864	-0.4239	-0.0121	0.4547	1.6921	0.4927
0.7835	-0.3012	1.0343	0.6375	1.1564	-0.3325
-2.2794	-4.7877	-0.0542	-0.0122	7.4924	3.3490
-0.5692	-0.8927	0.4198	-9.0671	68.7431	32.8380
0.9093	2.6360	0.3320	12.5323	-1.4389	4.8045

norm(L1-L2) =
16.4167

norm(U1-U2)=
74.9590

现在令 **m=3,n=12,** 再进行一次测试，得到:

A =

0.8253	0.2426	-1.5144	2.0783	0.0006	-0.7939	-1.6394	1.1458	0.6878	-0.8939	0.1496	0.5458
-0.9873	0.1388	-0.4690	-0.1700	-0.7556	0.0760	-4.0434	1.3125	-0.7144	-0.8448	-1.7969	2.5488
-0.6473	-10.5744	-6.6983	-0.0033	-7.5855	0.3565	-44.1010	14.6743	-5.6834	-9.8750	-17.3799	28.7222

norm(L1-L2) =
10.4853

norm(U1-U2)=
53.8478

现在**令 m=12,n=3,** 再进行测试，得到:

A =

0.0115	-0.2351	-0.3068
-81.7940	-17.3529	-26.1089
-151.4641	2.0170	5.9506
1.4782	-0.0137	-0.0651
19.0894	-0.2746	-0.2757
91.0941	-1.2392	-0.6603
-82.8334	1.1123	0.5873
69.2292	-0.9641	-0.7604
6.2217	-0.0495	0.0290
-67.3904	0.9590	0.5106
67.4318	-0.9344	-0.7673
23.1393	-0.4221	-0.8965

norm(L1-L2) =
245.0350

norm(U1-U2)=

31.9715

分析上述测试结果中的 norm 可以发现，对矩阵进行 LU 分解时，使用与不使用 partial pivoting 之间存在着较大差异。

5. (optional) Find the exact Cholesky factor of the $n \times n$ positive definite matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5

解：由第3题的结论

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ & l_{32} & l_{33} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & l_{n-1,n-2} & l_{n-1,n-1} & \\ & & & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

由 $LL^* = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$l_{i,i-1}^2 + l_{ii}^2 = 2 \quad (i \geq 2) \quad \text{--- ①}$

$l_{ii} \cdot l_{i+1,i} = 1 \quad \text{--- ②}$

$i=1$ 时有 $l_{11}^2 = 2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{2}$

由①②两式可递推得到

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & & & & \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & & & & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} & & & & \\ & & \sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{5}{4}} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \sqrt{\frac{n-2}{n-1}} & \sqrt{\frac{n}{n-1}} & \\ & & & & & \sqrt{\frac{n-1}{n}} & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix}$$

6

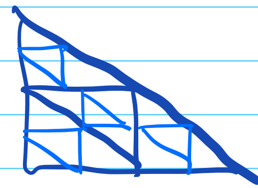
6. (optional) Suppose that you are given a strange linear algebra package with no GEMM (i.e., matrix–matrix multiplication). However, it contains a subroutine for computing the LU factorization of a matrix. Can you use this subroutine (as a black box) to implement GEMM?

助教老师,这题我只有模糊的猜测。我姑且先写下来(但不知道思路的对不对)

先把 A 作 LU 分解: $A = L\,U$

同样对B作LU分解: $B = L\,U$

然后再继续在 △ 与 ▽ 进行分块，再作LU分解

大概这样：

直到每个小三角阵都再也无法分块

也就是每个三角阵都长成形如：

$$\begin{bmatrix}1&0\\a&1\end{bmatrix} \text{与} \begin{bmatrix}b&c\\0&d\end{bmatrix}$$

自己觉得到这里变得过于牵强 → 然后再进行人为定义 2×2 的 L与L, L与U, U与U 的乘法规则（存疑）

能够计算每个小 L, U 相乘之后

再按分块矩阵乘法规则"拼起来"即可

分块乘法这里也有点牵强……