11月1日作业

林研　21307110161

1. Investigate the behavior of the power method applied to the following matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix},$$

where $\lambda \in \mathbb{C}$ is a given constant.

解：A的特征值为 λ．B的特征值为 $\lambda, -\lambda$

A的特征向量为 $(1,0)^T$

B的特征向量为 $(1,0)^T$, $(1, -2\lambda)^T$

若 $\lambda=0$，则 $n\geqslant 2$ 时 $A^n=0$, $B^n=0$

若 $\lambda\neq 0$，先讨论A的情况：

假设 $A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ 对 $n-1$ 成立

当 $k=n$ 时，$A^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ 成立

设 $x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A^n x = c_1 \cdot \lambda^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \lambda^n \begin{pmatrix} \frac{n}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$$

若 $c_2 = 0$

则 $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n x}{\lambda^n} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

即 $A^n x$ 会保持在 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 所在方向上

若 $c_2 \neq 0$

$$A^n x = \lambda^n n \left(c_1 \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 1/n \end{pmatrix} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n x}{\lambda^n n} = c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$$

即 $A^n x$ 会收敛到与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 共线的方向上

∴ 对任意不为零的向量 x，都可使用如下迭代过程来求出特征向量与特征值

Loop:

$\{ \; y = Ax$

$\lambda = \frac{x^* A x}{x^* x}$

$x = y / \|y\|_\infty \; \}$

再讨论 B 的情况：

B 可以进行对角化：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2a} \\ 0 & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix}$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

$$B^n x = c_1 \cdot a^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 (-a)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

$$\frac{B^n x}{a^n} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2a \end{pmatrix}$$

当 $c_1 = 0$ or $c_2 = 0$，则为特征向量

方向不变

但是若 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 \neq 0$，则 $\frac{B^n x}{a^n}$ 方向不会收敛

则无法使用乘幂迭代的方法得到特征向量

因为即使对 x 进行归一化，$y = Ax$ 的方向

仍旧会动来动去

$\therefore$ $B^n x$ 的结果将是一系列方向无法收敛

的向量

2

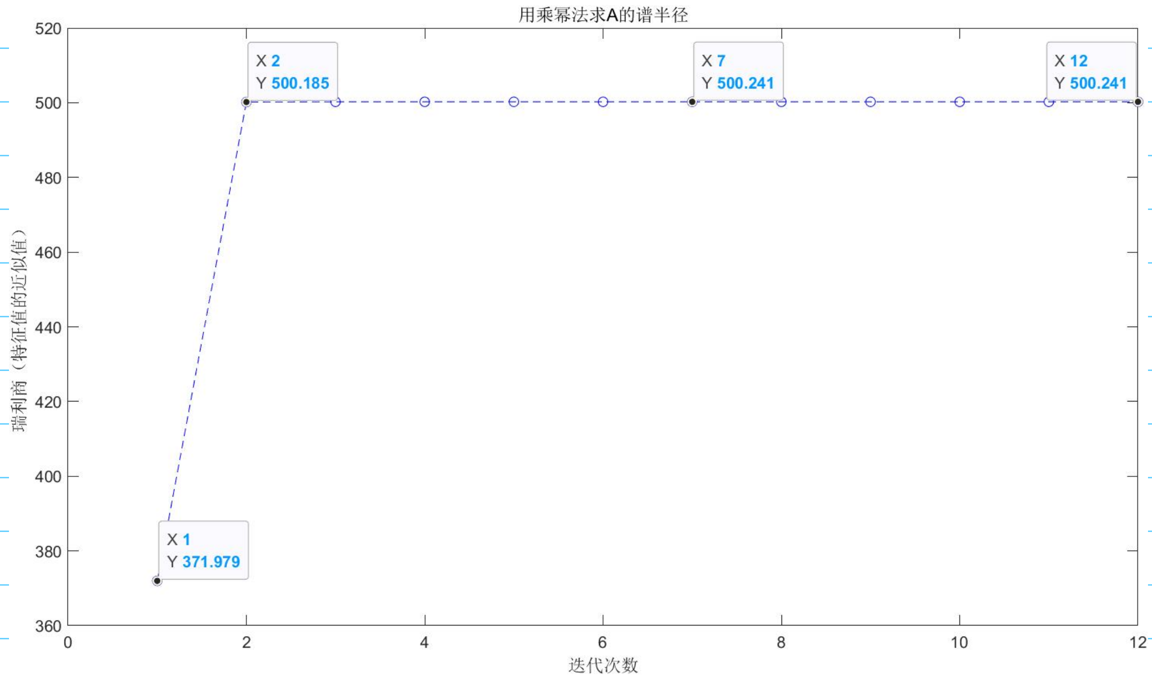
2. Randomly generate a 1000×1000 matrix A with positive entries. Use the power method to compute $\rho(A)$. Visualize the convergence history.

第二题

➢ 使用以下 matlab 代码:

```
format long;
A=rand(1000,1000);
x=rand(1000,1);
norm_of_A=norm(A);
x=x/norm(x);%输入的 x 进行归一化
flg=0;
count=0;
lambda_list=zeros(10^3,1);
for i=1:(10^3) %迭代次数保护
    count=count+1;
    y=A*x;
    L_square=x'*x;
    lambda=(x'*y)/L_square; %瑞利商
    lambda_list(count,1)=lambda;%记录一下本次获得的特征值的近似值
    r=y-lambda*x;%残差
    x=y/norm(y);%使用 2-范数进行归一化，得到单位化的 x 进入下一轮循环
    if norm(r)<=(norm_of_A+abs(lambda))*(10^-16)%
        % 10^-16 是机器精度，这个 tolerance 是相对 A 与 lambda 而变化的
        norm(r) %显示一下 r 的 2-范数
        disp("r 足够小，结束迭代")
        flg=1;
        break;
    end
end
if flg==0
    disp("触发迭代保护而退出")
end
plot([1:count],lambda_list(1:count,1),'b--o');
title("用乘幂法求 A 的谱半径")
xlabel("迭代次数")
ylabel("瑞利商（特征值的近似值）")
```

➢ 得到的收敛过程如下：



➢ 迭代次数为 12 次。

3 第三题

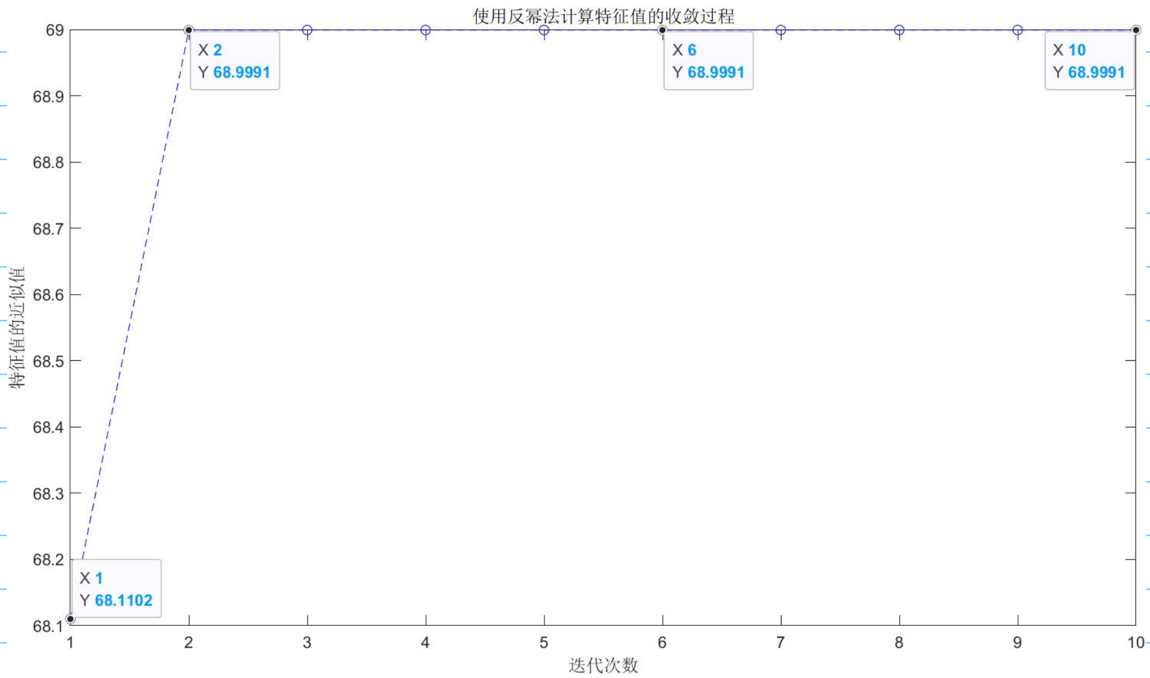
3. Randomly generate a 200×200 real symmetric matrix A with known spectrum (e.g., $A = Q\Lambda Q^{\top}$, where Λ is known and Q is a randomly generated orthogonal matrix). Choose one eigenvalue of A, and use inverse iteration and Rayleigh quotient iteration to this eigenvalue. Visualize the convergence history and report the execution time (preferably with detailed profiling).

➢ 使用以下 matlab 代码，选择 69 作为本次实验的对象

```
%先随机产生一个实对称矩阵
Q = orth(rand(200,200));
D = diag([1:200]);
A = Q*D*Q';
%选择 lambda=69 作为试验对象
offset=0.0001;
[l,u,p] = lu(A-(69+offset)*eye(200));%距离 69+offset 最近的特征值是 69
N=norm(inv(A-(69+offset)*eye(200)));
x = rand(200,1);
x = x/norm(x);%归一化
flg=0;
count=0;
lambda_list=zeros(10^4,1);
for i = 1:(10^4)%迭代次数保护
    count=count+1;
    y = u\(l\(p'*x));
   %y=(A-(69+offset)*eye(200))\x;
```

```
    t=(y'*x)/(x'*x);%瑞利商
    lambda=1/t+(69+offset);
    lambda_list(count,1)=lambda;
    r=y-t*x;%计算残差
    x=y/norm(y);%归一化，以备进入下一轮循环
    if norm(r)<=(N+abs(t))*(10^-16)
        disp("残差 r 足够小，结束反幂法迭代")
        flg=1;
        break
    end
end
if flg==0
    disp("触发迭代保护")
end
if flg==1
    plot([1:count],lambda_list(1:count,1),'b--o');
    title("使用反幂法计算特征值的收敛过程")
    xlabel("迭代次数")
    ylabel("特征值的近似值")
end
```

- 收敛过程如下：



- 迭代次数为 10 次，可以观察到瑞利商迅速收敛到 69 附近。

➢ 运行的时间为 0.182，每一行代码运行时间的详细报告如下：

函数列表

时间	调用次数	行	
0.013	1	2	Q = orth(rand(200,200));
< 0.001	1	3	D = diag([1:200]);
< 0.001	1	4	A = Q*D*Q';
		5	%选择lambda=69作为试验对象
< 0.001	1	6	offset=0.0001;
0.002	1	7	[l,u,p] = lu(A-(69+offset)*eye(200));%距离69+offset最近的特征值
0.006	1	8	N=norm(inv(A-(69+offset)*eye(200)));
< 0.001	1	9	x = rand(200,1);
< 0.001	1	10	x = x/norm(x);%归一化
< 0.001	1	11	flg=0;
< 0.001	1	12	count=0;
< 0.001	1	13	lambda_list=zeros(10^4,1);
< 0.001	1	14	for i = 1:(10^4)%迭代保护
< 0.001	10	15	count=count+1;
0.002	10	16	y = u\(l\(p'*x));
		17	%y=(A-(69+offset)*eye(200))\x;
< 0.001	10	18	t=(y'*x)/(x'*x);%瑞利商
< 0.001	10	19	lambda=1/t+(69+offset);
< 0.001	10	20	lambda_list(count,1)=lambda;
< 0.001	10	21	r=y-t*x;%计算残差
< 0.001	10	22	x=y/norm(y);%归一化，以备进入下一轮循环
< 0.001	10	23	if norm(r)<=(N+abs(t))*(10^-16)
< 0.001	1	24	disp("残差r足够小，结束反幂法迭代")
< 0.001	1	25	flg=1;
< 0.001	1	26	break
< 0.001	9	27	end
< 0.001	9	28	end
< 0.001	1	29	if flg==0
		30	disp("触发迭代保护")
< 0.001	1	31	end
< 0.001	1	32	if flg==1
0.110	1	33	plot([1:count],lambda_list(1:count,1),'b--o');
0.026	1	34	title("使用反幂法计算特征值的收敛过程")
0.011	1	35	xlabel("迭代次数")
0.007	1	36	ylabel("特征值的近似值")

➢ 除去一开始随机生成正交基、对（A-λI）进行 LU 分解，以及最后绘图占用的大部分时间，在迭代过程中，占用最多的是解方程组（A-λI）*y=x 的步骤。

4

4. Have a quick glance at the paper "From Random Polygon to Ellipse: An Eigenanalysis" by A. N. Elmachtoub and C. F. Van Loan (available on eLearning). Reproduce the experiments in this paper.

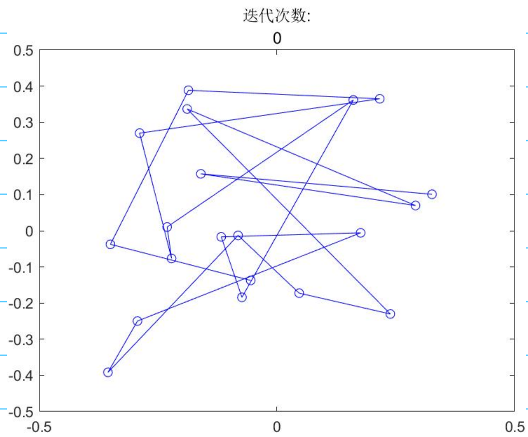
第四题

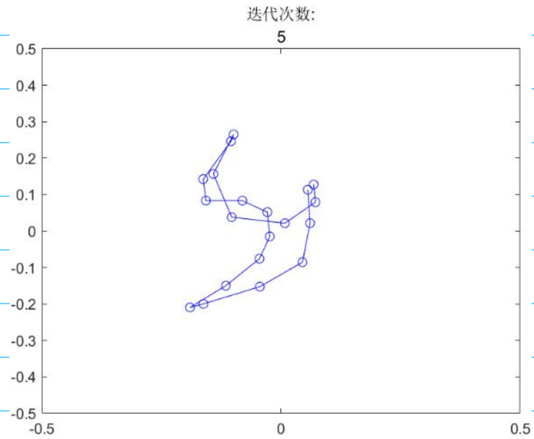
实验一（数据点趋向“平均点”）

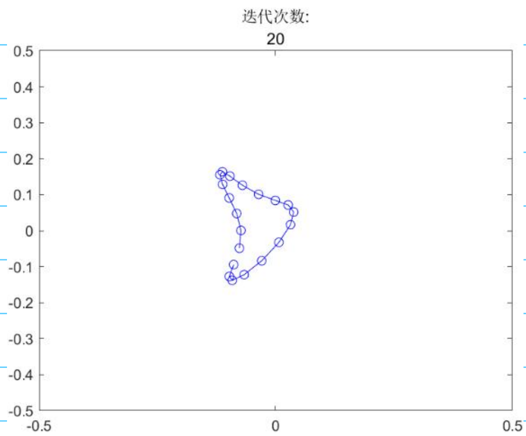
- Matlab 代码如下

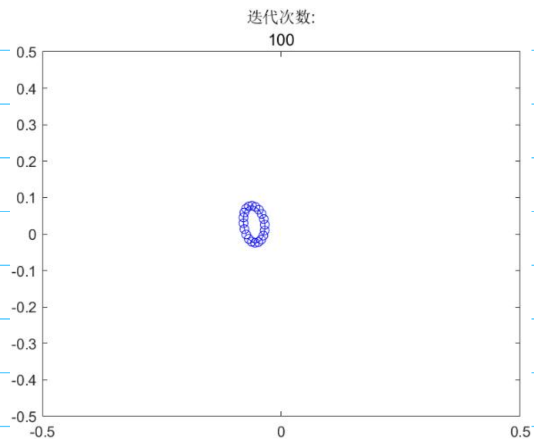
```
n = 20;
M=diag(ones(n,1))+diag(ones(n-1,1),1);
M(n,1)=1;
M=0.5*M;
x = -0.5+rand(n,1);
x = x/norm(x);
y = -0.5+rand(n,1);
y = y/norm(y);
figure();%初始状态
plot(x,y,'b-o');
lim=0.5;
xlim([-lim,lim]);
ylim([-lim,lim]);
title(["迭代次数:",0]);
for k = 1:200
    x=M*x;
    y=M*y;
    if k==5 || k==20 || k==100 ||k==200
        figure();
        plot(x,y,'b-o')
        xlim([-lim,lim]);
        ylim([-lim,lim]);
        title(["迭代次数:",k]);
    end
end
```

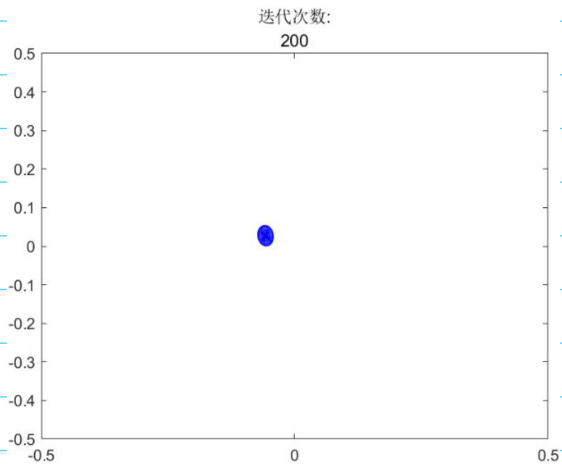
➢ 取 n=20，当迭代次数为 0，5，20，100，200 时，试验结果如下：











➢ 可以观察到数据点逐渐向“平均点”靠近

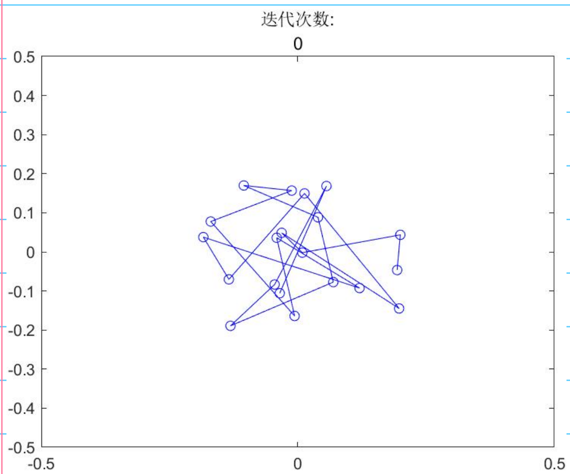
试验二（每轮迭代进行归一化，并且坐标平均值为 0）

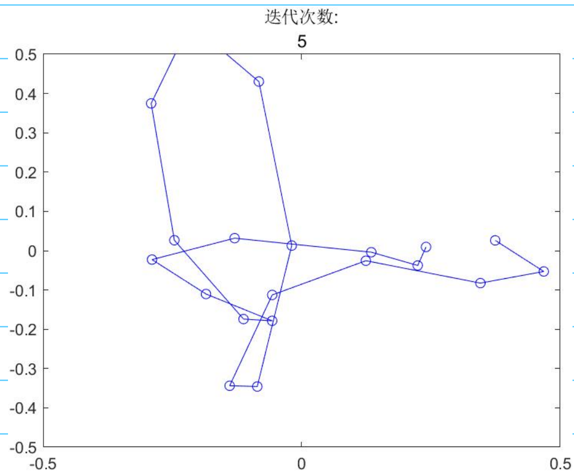
➢ Matlab 代码如下：

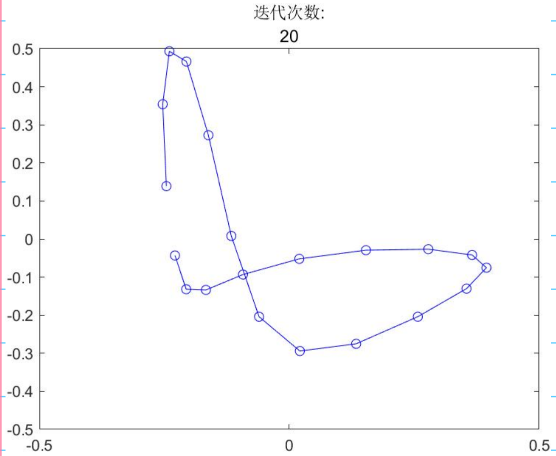
```
n = 20;
M=diag(ones(n,1))+diag(ones(n-1,1),1);
M(n,1)=1;
M=0.5*M;
```

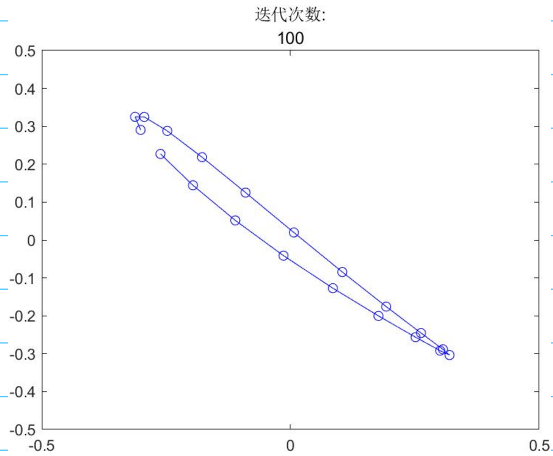
```
x = rand(n,1);
x = x/norm(x);
y = rand(n,1);
y = y/norm(y);
x=x-sum(x)/n;
y=y-sum(y)/n;
figure();%初始状态
plot(x,y,'b-o');
lim=0.5;
xlim([-lim,lim]);
ylim([-lim,lim]);
title(["迭代次数:",0]);
for k = 1:200
    x=M*x;
    x=x/norm(x);
    y=M*y;
    y=y/norm(y);
    if k==5 || k==20 || k==100 ||k==200
        figure();
        plot(x,y,'b-o')
        xlim([-lim,lim]);
        ylim([-lim,lim]);
        title(["迭代次数:",k]);
    end
end
```

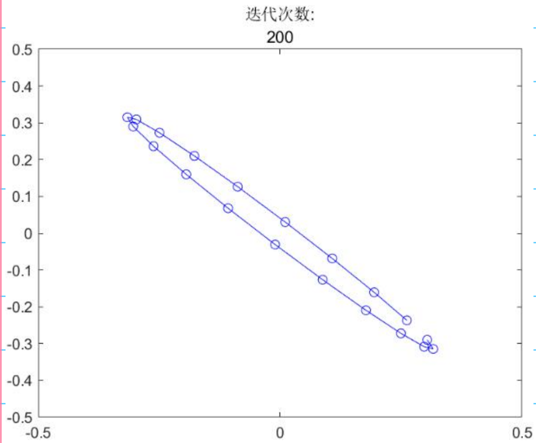
➢ 试验结果如下











- 可以观察到，数据点逐渐趋向于分布在倾角为 45°的椭圆上

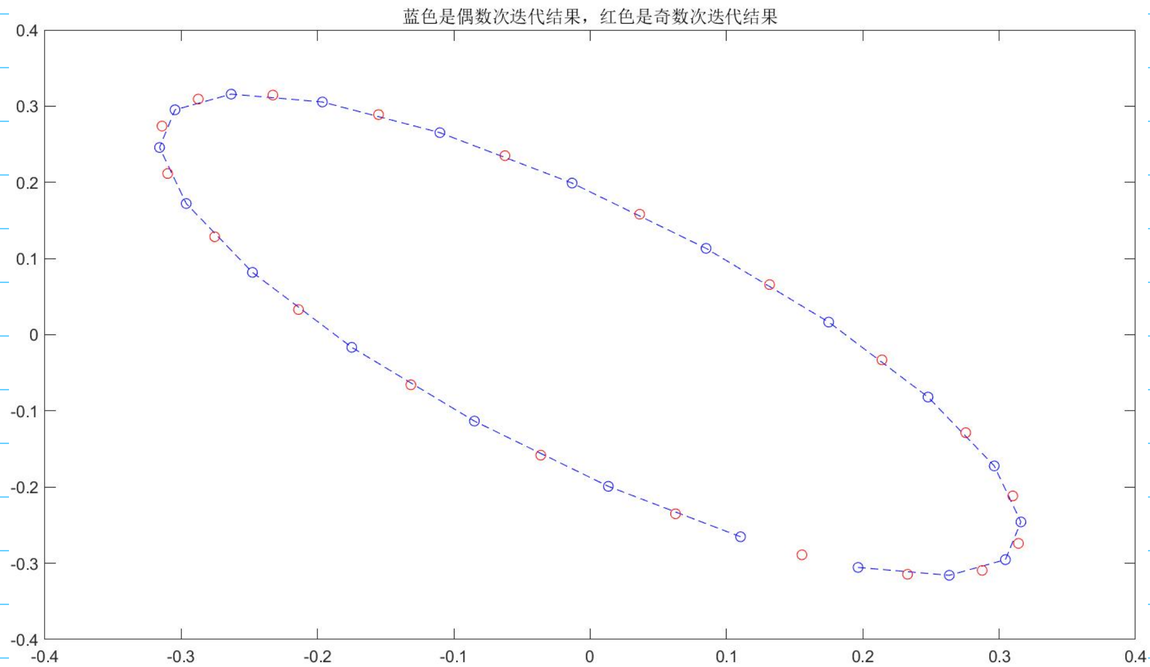
实验三（c 与 s 落在不变子空间中）

- Matlab 代码如下

```
n = 20;
M=diag(ones(n,1))+diag(ones(n-1,1),1);
M(n,1)=1;
M=0.5*M;
for j =1:n
    tao(j,1)=2*pi/n*(j-1);
end
c=sqrt(2/n)*cos(tao);
s=sqrt(2/n)*sin(tao);
theta1=10*rand();
theta2=10*rand();
x = cos(theta1)*c + sin(theta1)*s;
y = cos(theta2)*c + sin(theta2)*s;
figure();%初始状态
plot(x,y,'b--o');
lim=0.4;
xlim([-lim,lim]);
```

```
ylim([-lim,lim]);
hold on
for k = 1:10
    x=M*x;
    x=x/norm(x);
    y=M*y;
    y=y/norm(y);
    if mod(k,2)==0
        scatter(x,y,'b')
        hold on
    end
    if mod(k,2)==1
        scatter(x,y,'r')
        hold on
    end
end
title("蓝色是偶数次迭代结果，红色是奇数次迭代结果")
```

- 试验结果如下：



- 可以观察到，奇数次的迭代结果是相同的，偶数次的迭代结果也是相同的。这是因为 c 和 s 都落在了矩阵 M 的不变子空间中。

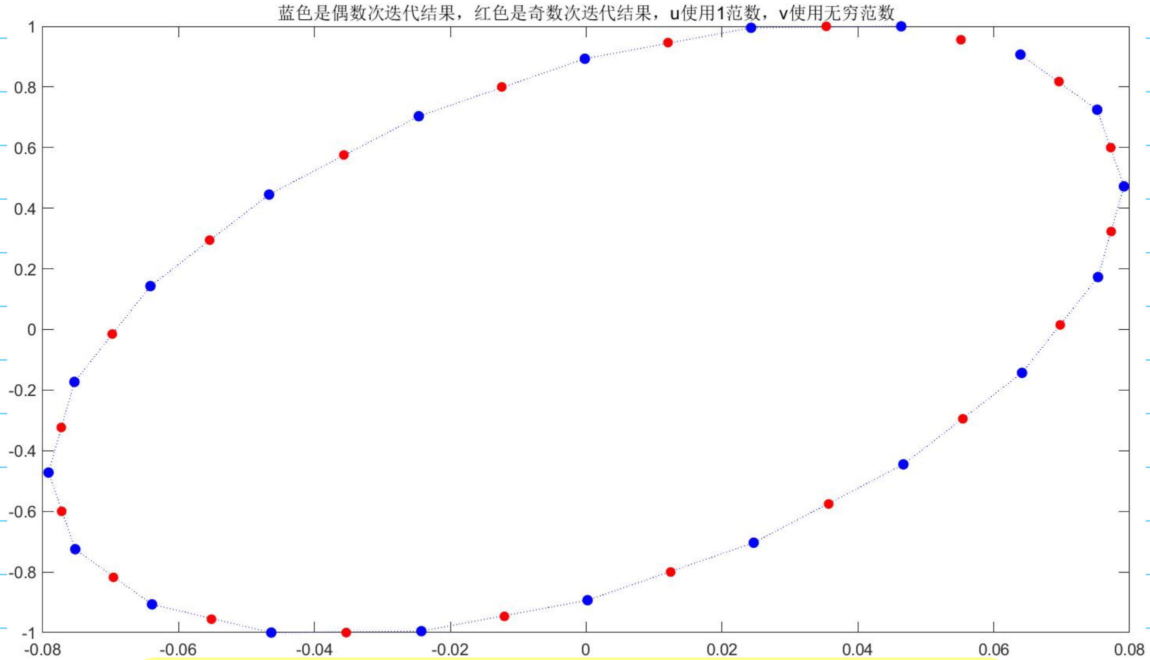
实验四（重复实验三，但使用其他范数）

➢ Matlab 代码如下

```
n = 20;
M=diag(ones(n,1))+diag(ones(n-1,1),1);
M(n,1)=1;
M=0.5*M;
for j =1:n
    tao(j,1)=2*pi/n*(j-1);
end
c=sqrt(2/n)*cos(tao);
s=sqrt(2/n)*sin(tao);
theta1=10*rand();
theta2=10*rand();
u = cos(theta1)*c + sin(theta1)*s;
v = cos(theta2)*c + sin(theta2)*s;
u = u/norm(u,1);
v = v/norm(v,"inf");

figure();%初始状态
plot(u,v,'b:o');
lim=0.4;
hold on
for k = 1:5
    u=M*u;
    v=M*v;
    u = u/norm(u,1);
    v = v/norm(v,"inf");
    if mod(k,2)==0
        scatter(u,v,'b','filled')
    end
    if mod(k,2)==1
        scatter(u,v,'r','filled')
    end
end
title("蓝色是偶数次迭代结果，红色是奇数次迭代结果，u 使用 1 范数，v 使用无穷范数")
```

- 试验结果如下



- 本实验中，向量 u 使用 1-norm 进行归一化，向量 v 使用∞-norm 进行归一化。
- 同样可以看到，数据点分布在椭圆上，并且奇数次迭代结果相同，偶数次迭代结果也相同。