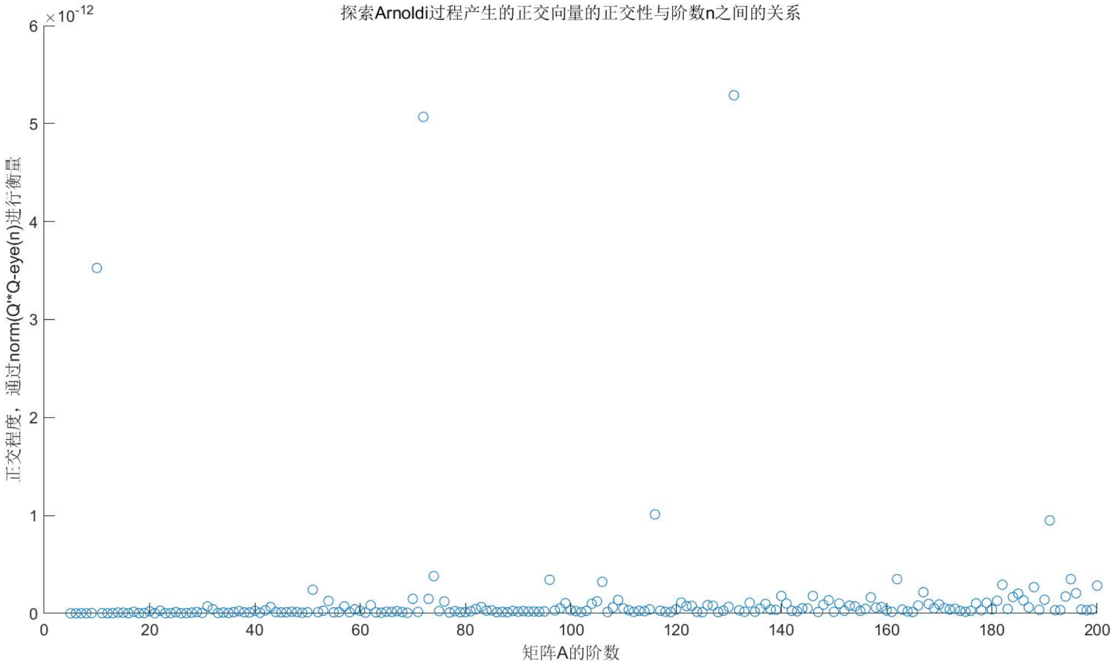
第四题

Matlab 代码

```
%% 探索不同阶数的 Arnodi procedure 产生的向量的正交性
begin = 5;
ending = 200;
depature = zeros((ending - begin + 1),1);
for n = begin:ending
    flg = 0; %用于标记是否因 H(i+1,i)足够小而提前终止
    A = rand(n);
    r = rand(n,1);
    Q = zeros(n,n); %用于存储 Krylov 子空间中的正交基向量
    H = zeros(n,n);
    Q(1:n,1) = r./norm(r);
    for i = 1:n-1
        y = A*Q(1:n,i); % y=A*q_i
        for j = 1:i
            H(j,i) = Q(1:n,j)'*y; % 向前 i 个正交基向量上投影
            y = y - H(j,i)*Q(1:n,j);
        end
        H(i+1,i) = norm(y);
        norm(y)
        if abs(H(i+1,i)) < 1e-16 %若 H(i,i+1)足够小
            flg = 1;
            disp("提前终止，因为 H(i,i+1)足够小，认为 r 已经完全落在 i 维 Krylov 子
空间中")
            break
        end
        Q(1:n,i+1) = y./H(i+1,i); %生成第 i+1 个正交基向量
    end
    if flg ==1 %如果是提前终止的
        depature(n-begin+1,1) = norm(Q(1:n,1:i)'*Q(1:n,1:i)-eye(i));
    else
        depature(n-begin+1,1) = norm(Q'*Q-eye(n));
    end
end
figure();
scatter([begin:ending],depature);
xlabel("矩阵 A 的阶数");
ylabel("正交程度，通过 norm(Q'*Q-eye(n))进行衡量");
```

```
title("探索Arnoldi过程产生的正交向量的正交性与阶数n之间的关系");
```

对 Arnoldi 过程产生的向量的正交程度随矩阵阶数的变化情况进行可视化，结果如下



第五题

用于对非对称矩阵进行 GMRES 的 Matlab 代码如下

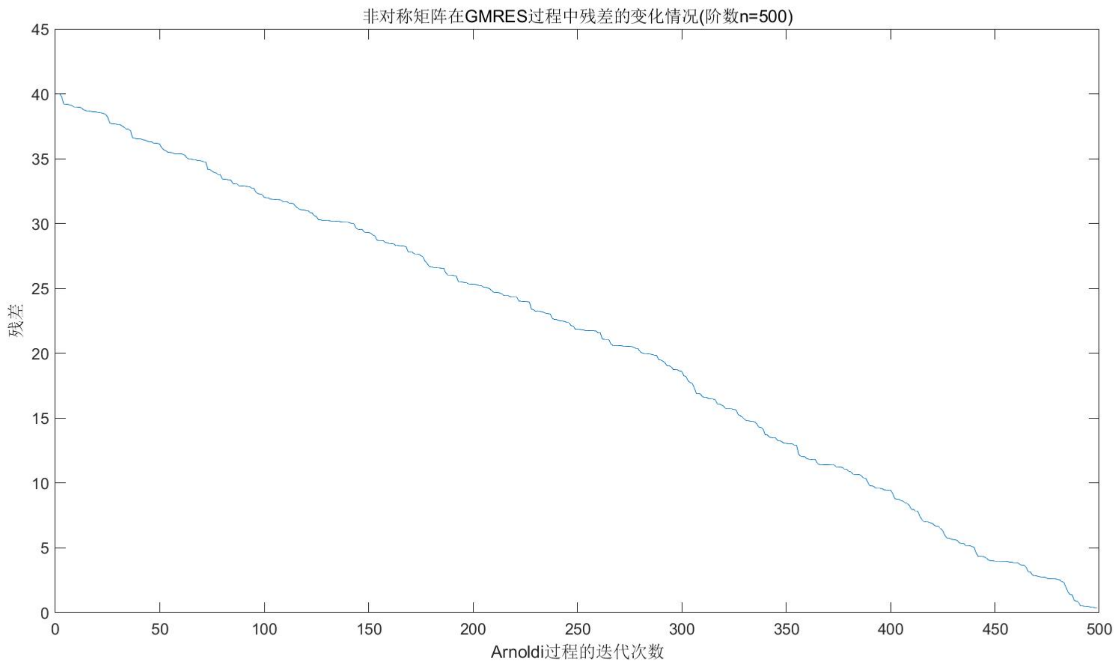
```
%% GMRES Solver for nonsymmetric coefficient matrix
n = 500;
residuals = zeros(n-1,1); %用于记录残差的变化情况
A = rand(n); %系数矩阵A
b = rand(n,1);
x_real = A\b; %真实的解x_real
x_ori = rand(n,1); %初始向量
r = b-A*x_ori;%初始残差
residuals(1,1) = norm(r);
Q = zeros(n,n); %用于存储Krylov子空间的正交基
H = zeros(n,n); %用于存储A*q_k的在q_1至q_k+1的投影
Q(1:n,1) = r./norm(r);
flg = 0; %用于标记是否因H(i+1,i)足够小而提前终止
```

```
for i = 1:n-1 %由于用于表示A^-1的A的多项式次数不会超过n-1，故外循环次数最多n-1次
    y = A*Q(1:n,i); %y=A*q_i
    for j = 1:i
        H(j,i) = Q(1:n,j)'*y; %向q_1至q_i进行投影
        y = y - H(j,i)*Q(1:n,j); %减去相应的分量
    end
    H(i+1,i) = norm(y);
    if abs(H(i+1,i)) < 1e-16 %若H(i+1,i)足够小
        flg = 1;
        disp("提前终止，因为H(i,i+1)足够小，认为A^-1*r已经完全落在i维Krylov子空间中")
        break
    end
    Q(1:n,i+1) = y./H(i+1,i); %生成第i+1个正交基向量
    r_2 = zeros(i+1,1);
    r_2(1,1) = norm(r);
    [c,res] = least_square(H(1:i+1,1:i),r_2); %最小二乘问题的局部函数（详后）
    %注意：尽管此步骤已经把q_i+1生成出来，但此处的c是对q_1到q_i的线性组合
    %如果没有提前终止Arnoldi过程，对于最后一次循环，c是对q_1到q_n-1的线性组合，即仍然不是精确解
    %精确解应该是x_ori加上q_1到q_n的某个线性组合
    residuals(i,1) = res; %res是残差
end
if flg ==0
    figure()
    plot([1:n-1],residuals);
    xlabel("Arnoldi过程的迭代次数");
    ylabel("残差");
    title("非对称矩阵在GMRES过程中残差的变化情况(阶数n=500)")
    %这里补充一个步骤，通过对Q的各列进行线性组合得到x，并与通过x=A\b得到的x_real进行比较
    y= A*Q(1:n,n);
    for k = 1:n
    H(k,n) = Q(1:n,k)'*y; %向q_1至q_n进行投影
    end
    r_2 = zeros(n,1);
    r_2(1,1) = norm(r);
    c = H\r_2;
    x_add = Q*c;
    x = x_ori + x_add;
    er = norm(x-x_real)
end
if flg==1
```

```
    %如果提前结束，那么 q_1 至 q_i 的某个线性组合就能得到 x_add
    figure()
    plot([1:i-1],residuals(1:i-1,1));
    xlabel("迭代次数");
    ylabel("残差");
    title("非对称矩阵在 GMRES 过程中残差的变化情况(阶数 n=500)")
end

% 用于处理最小二乘问题并返回最优解与残差
function [x,res] = least_square(A,b)
[q,r] = qr(A,0);%精简 QR 分解
x = r\(q'*b); %条件数比较小的求解最小二乘问题的算法
res = norm(A*x-b);
end
```

非对称矩阵在 GMRES 过程中残差收敛情况可视化

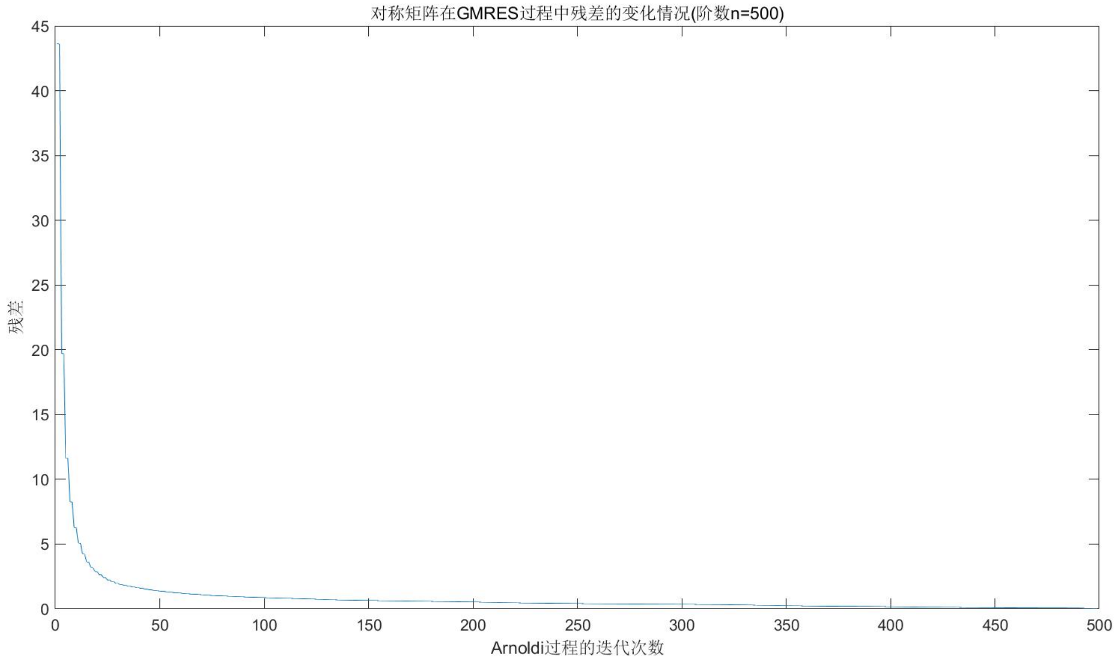


用于对称矩阵的 GMRES 的 Matlab 代码

说明：处理过程是一样的，只是生成系数矩阵 A 的过程不同，如下：

```
A = rand(n);
for i = 1:n
    for j = 1:i
        A(i,j)=A(j,i);
    end
end
```

对称矩阵在 GMRES 过程中残差收敛情况可视化



PS：GMRES 过程中，对称矩阵的残差收敛速度比非对称矩阵的残差收敛速度快。