

第四题

Matlab 代码（作业的附件里有源文件，可以直接运行）

% 提示：所需的函数作为局部函数定义在后面

% 下面是正式的试验部分

%% 首先对 5 阶，10 阶，15 阶的随机生成的对称矩阵使用 Jacobi 对角化，并展示其运行结果

```
for i = 1:3
    n = 5*i; % n 是阶数
    % 首先生成 n 阶对称实矩阵
    lambda=10*diag(rand(n,1));
    temp=rand(n,n);
    A=temp*lambda*temp';
    disp('阶数:');
    n
    disp('初始时 A 为: ')
    A %展示 A
    % 接下来进行 Jacobi 对角化过程
    while(1)
        [p,q,c,s] = find_max_offdiag_and_theta(A);
        Q = Jacobi_rotation(A,p,q,c,s);
        A_2 = Q'*A*Q;
        if F_norm_of_offdiag_entries(A_2) <= (n*(n-1))*(1e-16)
            A = A_2;
            break
        end
        A = A_2;
    end
    disp('Jacobi 对角化的结果为: ');
    A
end
```

%% 下面对阶数 n=20 的收敛过程进行可视化展示（用 off-diagonal 的平方和表示）

disp('以下通过观察非对角元 F 范数的收敛过程的方式来展现一个阶数 n=20 实对称矩阵的 Jacobi 对角化过程')

```
n = 20;
lambda=10*diag(rand(n,1));
temp=rand(n,n);
A=temp*lambda*temp';
disp('初始时的 A 如下')
A
```

```

er = [F_norm_of_offdiag_entries(A)];
count = 1;
while(1)
    count = count + 1;
    [p,q,c,s] = find_max_offdiag_and_theta(A);
    Q = Jacobi_rotation(A,p,q,c,s);
    A_2 = Q'*A*Q;
    E = F_norm_of_offdiag_entries(A_2);
    er(1,count) = E;
    if E <= (n*(n-1)/2)*(1e-15)
        A = A_2;
        break
    end
    A = A_2;
end
disp('Jacobi 对角化的结果为: ');
A
disp('非对角元的 F 范数收敛过程如下')
figure();
plot(er);
title('非对角元 F 范数收敛过程')
xlabel('迭代次数')
ylabel('非对角元 F 范数')

%% 下面对阶数 n=20 的收敛过程进行可视化展示 (entry_wise)
disp('以下通过可视化每个元素的变化的方式来可视化 Jacobi 对角化过程')
n = 20;
lambda=10*diag(rand(n,1));
temp=rand(n,n);
A=temp*lambda*temp';
disp('初始时的 A 如下')
A
figure()
imagesc(abs(A))
colorbar
title("初始时 A 的元素分布如下")
count = 0;
while(1)
    count = count + 1;
    [p,q,c,s] = find_max_offdiag_and_theta(A);
    Q = Jacobi_rotation(A,p,q,c,s);
    A_2 = Q'*A*Q;
    E = F_norm_of_offdiag_entries(A_2);
    if E <= (n*(n-1)/2)*(1e-16)

```

```

        A = A_2;
        break
    end
    if count==1 || count==3 || count==5 || count==7 || count==10 ||
count==15 || count==20
        figure()
        imagesc(abs(A_2))
        colorbar
        [t,s] = title('迭代次数为: ',count)

    end
    A = A_2;
end
disp('Jacobi 对角化的结果为: ');
A
figure()
imagesc(abs(A))
colorbar
title('Jacobi 对角化最终结果的分布情况')

```

% 正所谓，工欲善其事，必先利其器，首先准备好需要的函数，如下

```

function Jacobi_Q = Jacobi_rotation(A,p,q,c,s) % 返回一个 Jacobi 旋转阵
n = size(A);
n = n(1,1);
ep = zeros(n,1);
ep(p,1) = 1;
eq = zeros(n,1);
eq(q,1) = 1;
Jacobi_Q = eye(n)+(c-1)*(ep*ep'+eq*eq')+s*(ep*eq'-eq*ep');
end

```

```

function [p,q,c,s] = find_max_offdiag_and_theta(A) % 找到最大的非对角元并返回
cos(theta)&sin(theta)
n = size(A);
n = n(1,1);
p=1;
q=2;
max = abs(A(1,2));
for i = 1:n-1
    for j = i+1:n
        if abs(A(i,j))>abs(max)
            max = A(i,j);
            p = i;
            q = j;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
tao = (A(q,q)-A(p,p)) / (2*A(p,q));
t = sign(tao)/(abs(tao) + sqrt(1+tao*tao));
c = 1 / sqrt(1+t*t);
s = t*c;
end

function E = F_norm_of_offdiag_entries(A) % 返回所有非对角元的平方和
E_2 = norm(A,"fro")^2 - norm(diag(A),"fro")^2;
E = sqrt(E_2);
end

```

对 5,10,15 阶的运行结果如下：

阶数:

n = 5

初始时 A 为:

A =

10.0657	2.0675	3.4589	5.7087	5.5220
2.0675	1.2167	1.9648	2.5734	2.2613
3.4589	1.9648	5.2246	3.8279	3.5965
5.7087	2.5734	3.8279	6.5995	5.9239
5.5220	2.2613	3.5965	5.9239	5.3843

Jacobi 对角化的结果为:

A =

3.9248	0.0000	0	-0.0000	0.0000
0.0000	0.1566	0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	2.0922	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000	22.3165	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0007

阶数:

n = 10

初始时 A 为:

A =

14.4052	9.4628	5.8338	13.3564	9.0654	12.0295	10.5085	15.8924	5.2351
6.6246	9.4628	18.0165	5.5393	15.3413	10.1792	17.3359	12.2911	21.5017
6.5168	5.8338	5.5393	3.8750	6.2058	3.7893	8.6420	4.8243	9.2792
4.8417	13.3564	15.3413	6.2058	19.9257	12.1913	18.5634	11.5394	20.6214
6.3605	5.6030	9.0654	10.1792	3.7893	12.1913	11.0839	12.8898	7.9431
5.4903	4.0114	12.0295	17.3359	8.6420	18.5634	12.8898	26.5737	13.2070
10.1927	11.8670	10.5085	12.2911	4.8243	11.5394	7.9431	13.2070	12.7782
17.5316	8.1417	15.8924	21.5017	9.2792	20.6214	12.7033	25.3342	17.5316
30.8937	11.3131	12.1895	5.2351	8.2728	3.2460	6.3605	5.4903	10.1927
8.1417	11.3131	6.3582	6.6246	6.5168	4.8417	5.6030	4.0114	11.8670
8.7203	12.1895	6.9568	11.1411					

Jacobi 对角化的结果为:

A =

8.1474	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	6.4355	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.1934	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	1.5649	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	4.2008	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0319	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.7157	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	121.7894	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

0.0000
0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 -0.0000 0.0000 -0.0000
11.9724

阶数:

n = 15

初始时 A 为:

A =

列 1 至 13

28.3716	17.5844	21.2065	8.7524	21.0859	25.2335	26.8340	22.0761	21.4285
19.3352	21.8536	14.6255	13.9839					
17.5844	15.9124	13.3607	5.8666	15.4582	17.3028	19.6059	13.4488	16.5940
13.6336	14.4250	9.2698	8.0299					
21.2065	13.3607	27.1307	9.8064	18.8980	20.1732	23.4649	21.1865	17.8562
17.6541	23.3541	13.4920	16.0113					
8.7524	5.8666	9.8064	9.6858	8.6416	13.4735	11.1816	9.4353	11.2846
7.7305	9.8612	5.5791	10.1765					
21.0859	15.4582	18.8980	8.6416	23.7476	21.7716	26.4170	14.5887	18.7188
15.5124	16.8466	9.4774	15.4342					
25.2335	17.3028	20.1732	13.4735	21.7716	32.9705	29.1676	19.0212	24.2995
16.5615	21.2534	13.4208	16.3820					
26.8340	19.6059	23.4649	11.1816	26.4170	29.1676	34.9833	18.7655	23.6479
18.6194	23.6791	12.4332	19.9675					
22.0761	13.4488	21.1865	9.4353	14.5887	19.0212	18.7655	24.0239	17.3177
17.3249	22.1730	12.9844	11.9366					
21.4285	16.5940	17.8562	11.2846	18.7188	24.2995	23.6479	17.3177	24.3549
16.7263	18.1114	12.6327	14.3112					
19.3352	13.6336	17.6541	7.7305	15.5124	16.5615	18.6194	17.3249	16.7263
16.3320	16.7294	11.6004	11.3575					
21.8536	14.4250	23.3541	9.8612	16.8466	21.2534	23.6791	22.1730	18.1114
16.7294	23.9817	12.1699	14.7301					
14.6255	9.2698	13.4920	5.5791	9.4774	13.4208	12.4332	12.9844	12.6327
11.6004	12.1699	10.6108	7.4858					
13.9839	8.0299	16.0113	10.1765	15.4342	16.3820	19.9675	11.9366	14.3112
11.3575	14.7301	7.4858	18.0380					
21.6834	15.8420	22.5453	13.0063	23.7843	27.6819	29.5190	18.0098	20.7489
15.9274	21.9274	10.1077	18.9282					
22.4221	14.7926	21.4556	13.4232	22.5010	27.9427	27.6011	17.1176	20.1285
16.6839	19.5357	12.0041	17.5333					

列 14 至 15

21.6834	22.4221
15.8420	14.7926
22.5453	21.4556
13.0063	13.4232
23.7843	22.5010
27.6819	27.9427
29.5190	27.6011
18.0098	17.1176
20.7489	20.1285
15.9274	16.6839
21.9274	19.5357
10.1077	12.0041
18.9282	17.5333
30.2410	26.6574
26.6574	29.6710

Jacobi 对角化的结果为:

A =

列 1 至 13

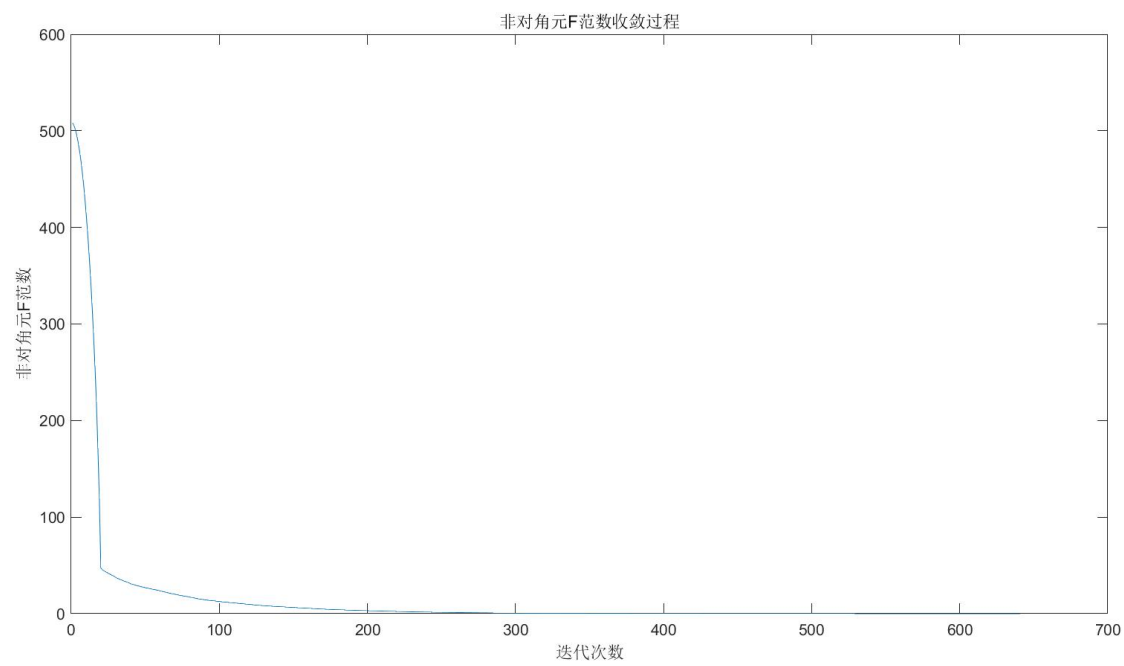
4.4529	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000				
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000									
0.0000	0.9228	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-			
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000									
-0.0000	0.0000	3.5751	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000			
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000									
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.2992	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000			
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000									
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0232	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000			
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000									
-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	10.9550	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000			
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000									
-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	276.0517	0.0000	0.0000	0.0000			
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000									
-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	23.3613	-0.0000	-			
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000									
0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	6.8578	-			
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000									
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000			

0.3804	0.0000	-0.0000	-0.0000						
0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	
0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000						
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-
0.0000	-0.0000	0.0732	0.0000						
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-
0.0000	-0.0000	0.0000	14.9909						
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000						
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-
0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000						

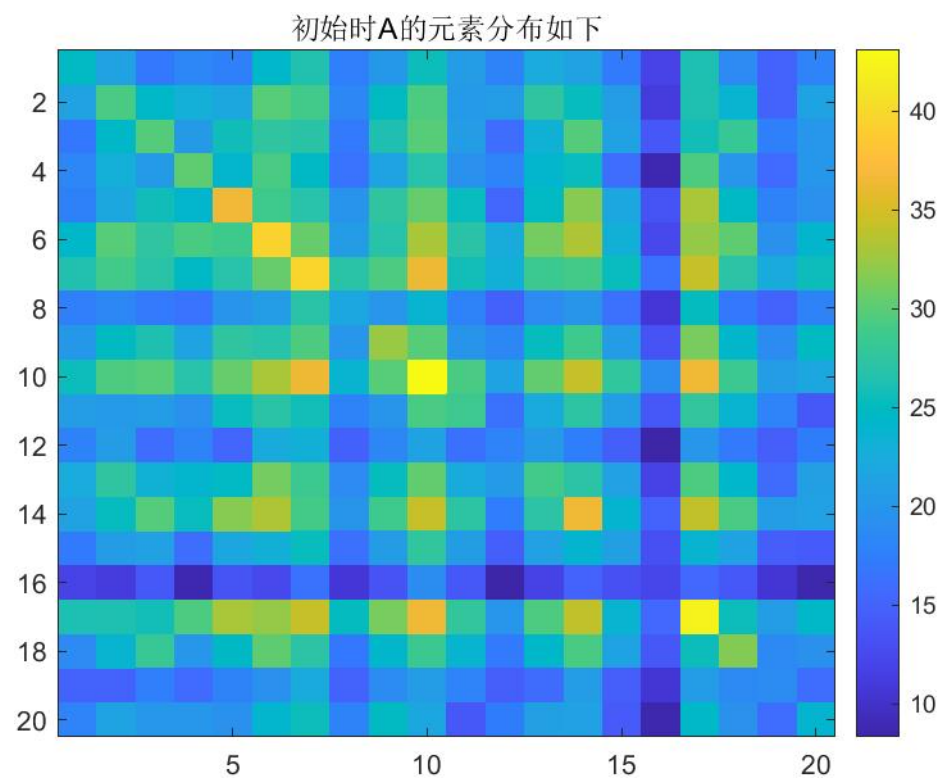
列 14 至 15

-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000
0	-0.0000
2.2516	-0.0000
-0.0000	5.8601

收敛过程可视化（方法一：用非对角元 F 范数表示）

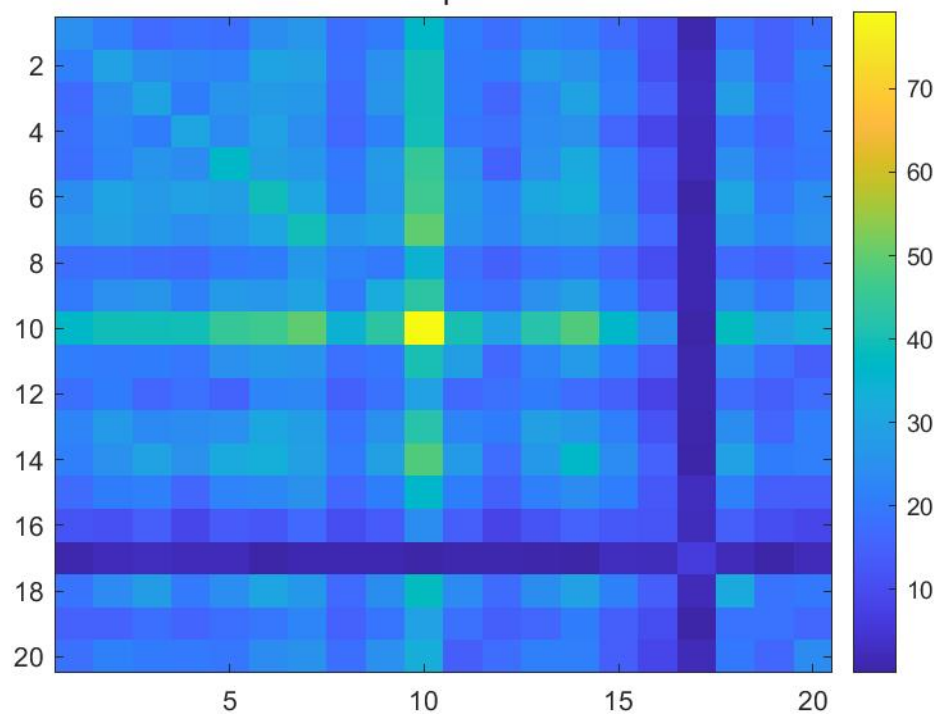


收敛过程可视化（方法二：对每个元素进行跟踪）



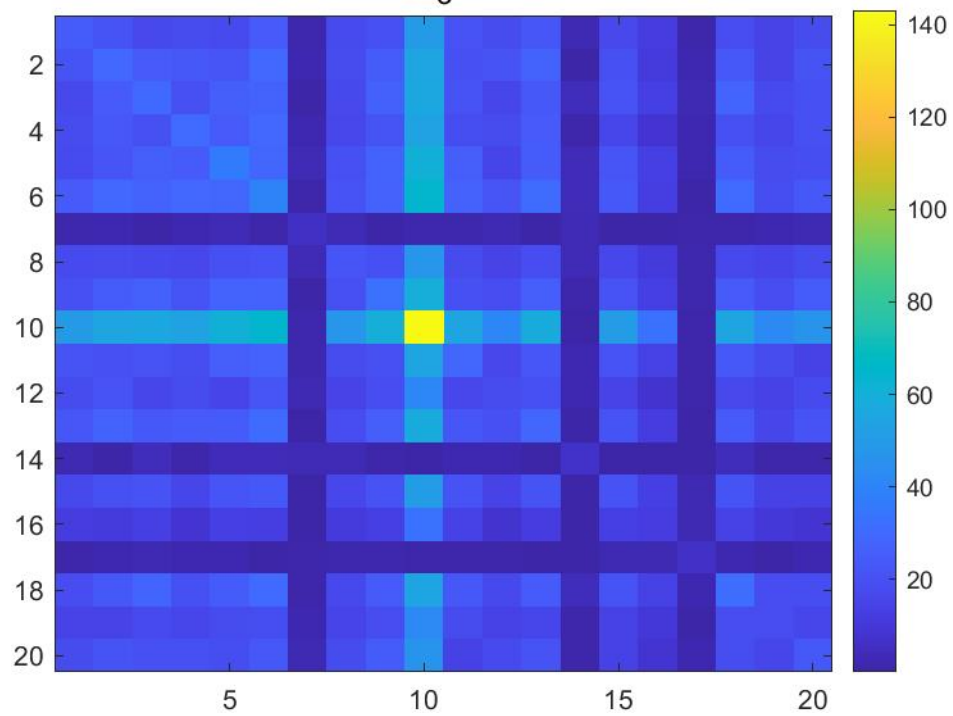
迭代次数为:

1



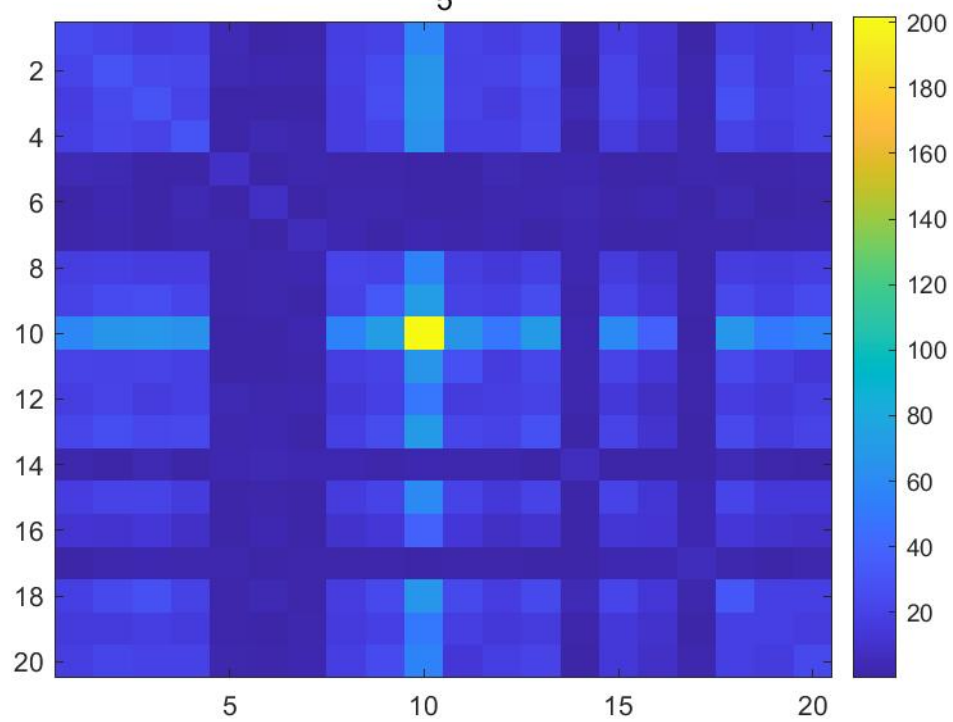
迭代次数为:

3



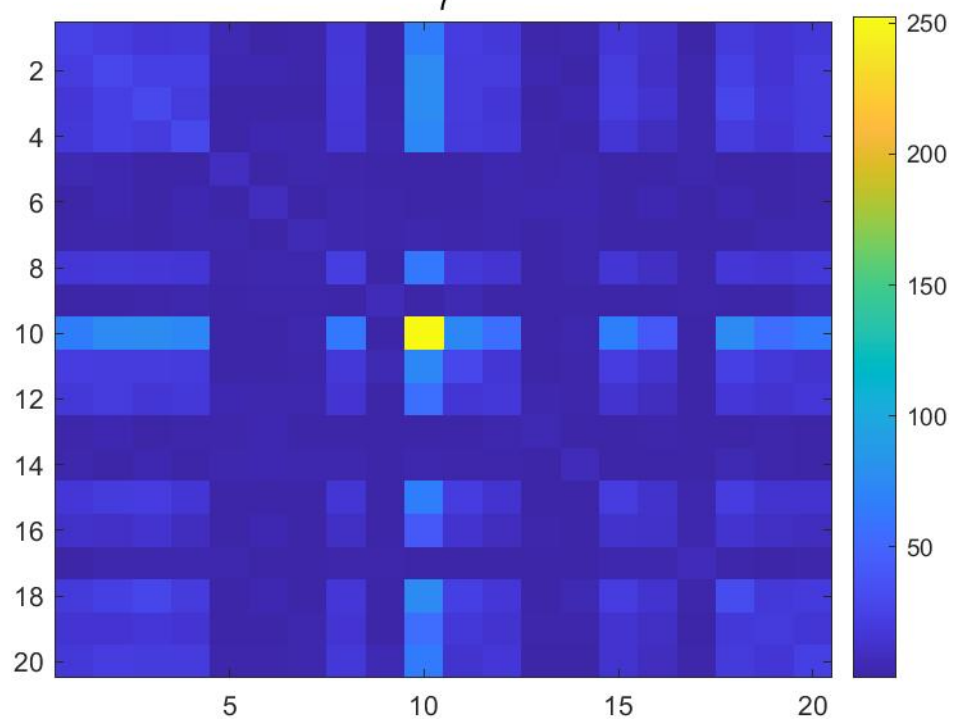
迭代次数为:

5



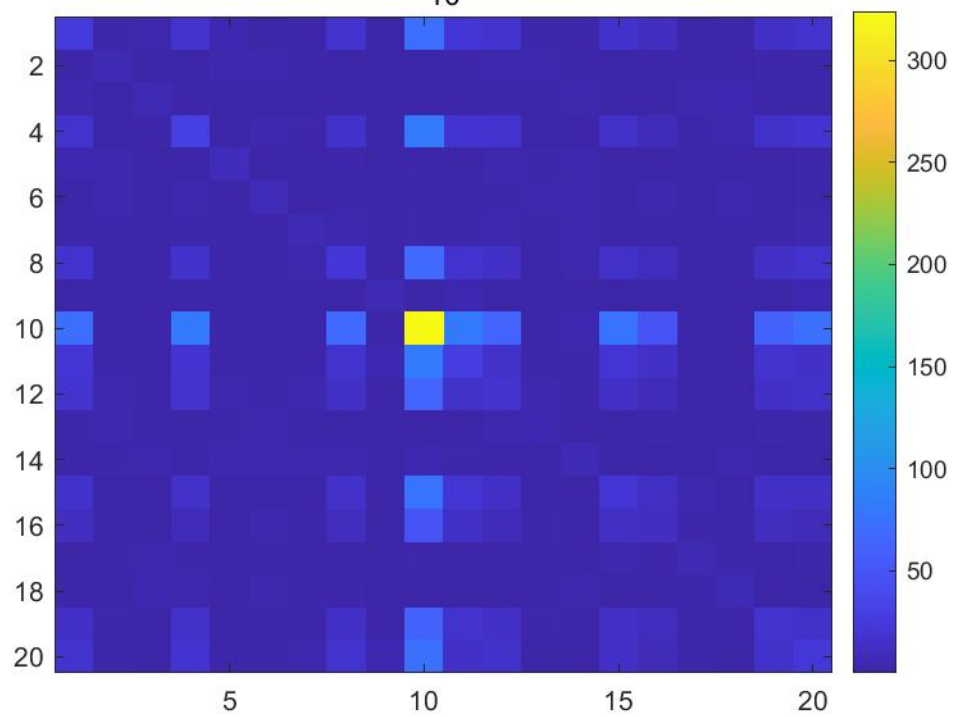
迭代次数为:

7



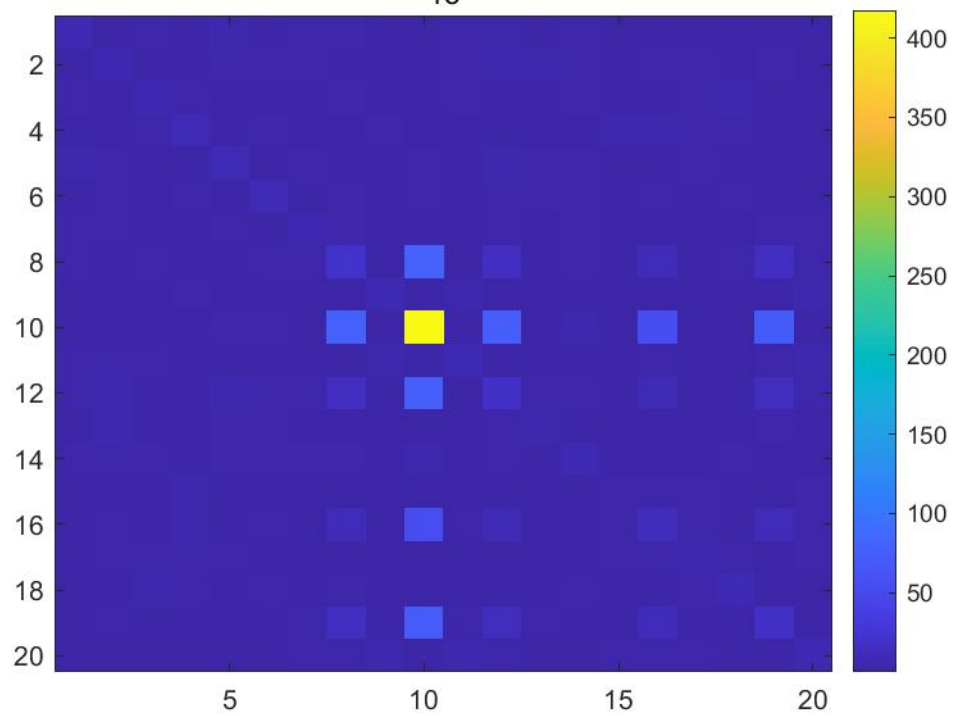
迭代次数为:

10

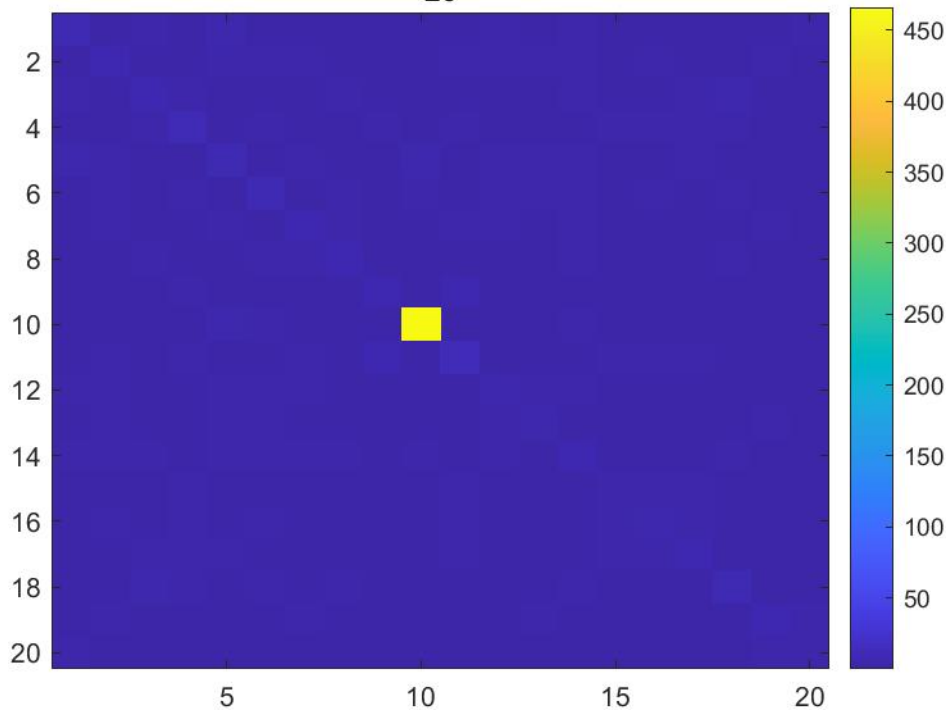


迭代次数为:

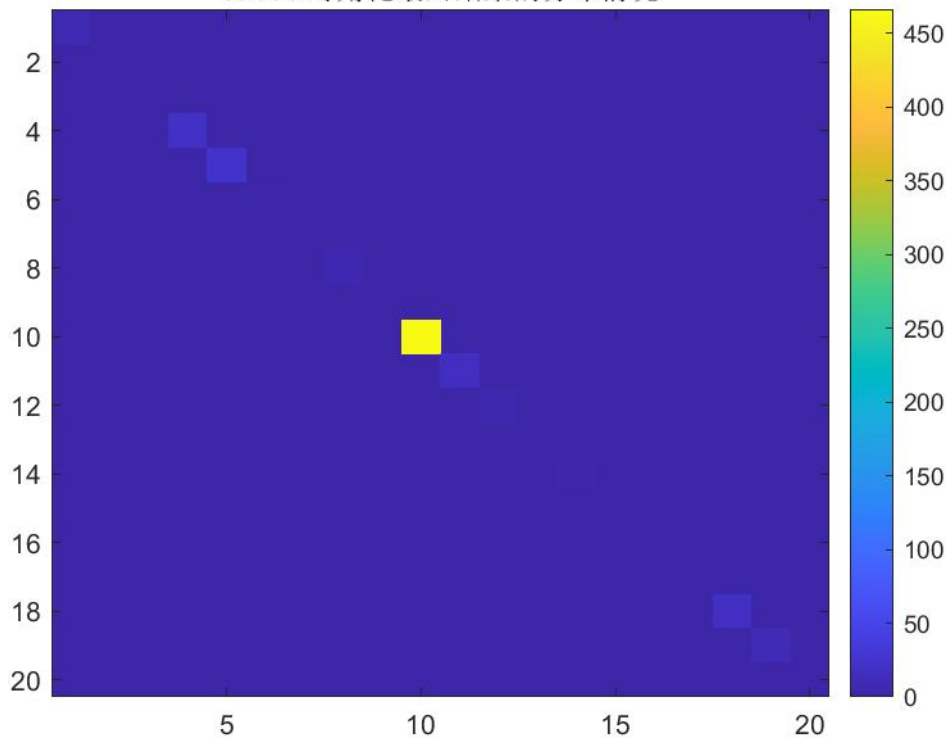
15



迭代次数为：
20



Jacobi对角化最终结果的分布情况



存在的待探讨问题

在收敛过程中，有一个黄色的斑块很刺眼，所对应的特征值误差非常大（准确值的几十倍），而且这个离谱的元素在迭代的一开始（迭代次数为 3 左右）就能明显地看出存在于对角元上！不知道这是为什么？