

Project-3 CarTracking 报告（书面部分）

陈笑宇 21340246003 林子开 21307110161

2023 年 12 月 16 日

目录

1 问题 1: 贝叶斯网络基础	1
1.1 计算后验概率 $\mathbb{P}(C_2 = 1 D_2 = 0)$	1
1.2 计算后验概率 $\mathbb{P}(C_2 = 1 D_2 = 0, D_3 = 1)$	2
1.3 带入 $\epsilon = 0.1, \eta = 0.2$ 计算并讨论	2
2 问题 2: 发射概率	3
3 问题 3: 转移概率	3
4 问题 4: 粒子滤波	3

1 问题 1: 贝叶斯网络基础

1.1 计算后验概率 $\mathbb{P}(C_2 = 1|D_2 = 0)$

注意到 $\mathbb{P}(C_2 = 1|D_2 = 0) \propto \mathbb{P}(C_2 = 1, D_2 = 0)$, $\mathbb{P}(C_2 = 0|D_2 = 0) \propto \mathbb{P}(C_2 = 0, D_2 = 0)$, 因此需要先计算联合分布。

其中:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2 = 1, D_2 = 0) &= \mathbb{P}(C_2 = 1) \times \mathbb{P}(D_2 = 0|C_2 = 1) \\ &= [\mathbb{P}(C_1 = 0) \times \mathbb{P}(C_2 = 1|C_1 = 0) + \mathbb{P}(C_1 = 1) \times \mathbb{P}(C_2 = 1|C_1 = 1)] \times \mathbb{P}(D_2 = 0|C_2 = 1) \\ &= [0.5 \times (1 - \epsilon) + 0.5 \times \epsilon] \times \eta \\ &= 0.5\eta \\ \mathbb{P}(C_2 = 0, D_2 = 0) &= \mathbb{P}(C_2 = 0) \times \mathbb{P}(D_2 = 0|C_2 = 0) \\ &= [\mathbb{P}(C_1 = 0) \times \mathbb{P}(C_2 = 0|C_1 = 0) + \mathbb{P}(C_1 = 1) \times \mathbb{P}(C_2 = 0|C_1 = 1)] \times \mathbb{P}(D_2 = 0|C_2 = 0) \\ &= [0.5 \times \epsilon + 0.5 \times (1 - \epsilon)] \times (1 - \eta) \\ &= 0.5(1 - \eta)\end{aligned}$$

最后进行归一化:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2 = 1|D_2 = 0) &= \frac{\mathbb{P}(C_2 = 1, D_2 = 0)}{\mathbb{P}(C_2 = 1, D_2 = 0) + \mathbb{P}(C_2 = 0, D_2 = 0)} \\ &= \frac{0.5\eta}{0.5\eta + 0.5(1 - \eta)}\end{aligned}$$

$$= \eta$$

1.2 计算后验概率 $\mathbb{P}(C_2 = 1|D_2 = 0, D_3 = 1)$

使用连接和消元的思想，可以得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2|C_2 = 0, D_3 = 1) &\propto \sum_{C_1, D_1, C_3} \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(D_1|C_1)\mathbb{P}(C_2|C_1)\mathbb{P}(D_2 = 0|C_2)\mathbb{P}(C_3|C_2)\mathbb{P}(D_3 = 1|C_3) \\ &\propto \mathbb{P}(D_2 = 0|C_2) \left[\sum_{C_1} \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2|C_1) \right] \left[\sum_{C_3} \mathbb{P}(C_3|C_2)\mathbb{P}(D_3 = 1|C_3) \right]\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2 = 1|C_2 = 0, D_3 = 1) &\propto \mathbb{P}(D_2 = 0|C_2 = 1) \left[\sum_{C_1} \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2 = 1|C_1) \right] \left[\sum_{C_3} \mathbb{P}(C_3|C_2 = 1)\mathbb{P}(D_3 = 1|C_3) \right] \\ &\propto \eta[0.5 \times \epsilon + 0.5 \times (1 - \epsilon)][\epsilon \times \eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)] \\ &\propto 0.5\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)] \\ \mathbb{P}(C_2 = 0|C_2 = 0, D_3 = 1) &\propto \mathbb{P}(D_2 = 0|C_2 = 0) \left[\sum_{C_1} \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2 = 0|C_1) \right] \left[\sum_{C_3} \mathbb{P}(C_3|C_2 = 0)\mathbb{P}(D_3 = 1|C_3) \right] \\ &\propto (1 - \eta)[0.5 \times (1 - \epsilon) + 0.5 \times \epsilon][\epsilon \times \eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)] \\ &\propto 0.5(1 - \eta)[(1 - \epsilon)\eta + \epsilon(1 - \eta)]\end{aligned}$$

最后进行归一化：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2 = 1|D_2 = 0, D_3 = 1) &= \frac{\mathbb{P}(C_2 = 1|C_2 = 0, D_3 = 1)}{\mathbb{P}(C_2 = 1|C_2 = 0, D_3 = 1) + \mathbb{P}(C_2 = 0|C_2 = 0, D_3 = 1)} \\ &= \frac{0.5\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)]}{0.5\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)] + 0.5(1 - \eta)[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)]} \\ &= \frac{\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)]}{\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)] + (1 - \eta)[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)]}\end{aligned}$$

1.3 带入 $\epsilon = 0.1, \eta = 0.2$ 计算并讨论

当 $\epsilon = 0.1, \eta = 0.2$ 时

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2 = 1|D_2 = 0) &= \eta \\ &= 0.2000\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2 = 1|D_2 = 0, D_3 = 1) &= \frac{\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)]}{\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)] + (1 - \eta)[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)]} \\ &= 0.4157\end{aligned}$$

加入 $D_3 = 1$ 这个证据变量，增加了 $C_2 = 1$ 的概率。注意到传感器满足 $\mathbb{P}(D_3 = 1|C_3 = 1) = 1 - \eta = 0.8$ ，可以认为 D_3 与 C_3 是高度相关的。当观测到 $D_3 = 1$ 时， $C_3 = 1$ 的概率也会较大。又注意到汽车移动的规律满足 $\mathbb{P}(C_3 = 1|C_2 = 1) = 1 - \epsilon = 0.9$ ，当 $C_3 = 1$ 时， $C_2 = 1$ 的概率也会较大。因此，增加 $D_3 = 1$ 这个条件，能够增加 $C_2 = 1$ 的概率。

现在保持 $\eta = 0.2$ ，求解以下方程：

$$\mathbb{P}(C_2 = 1 | D_2 = 0) = \mathbb{P}(C_2 = 1 | D_2 = 0, D_3 = 1) \quad (1)$$

即

$$\eta = \frac{\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)]}{\eta[\epsilon\eta + (1 - \epsilon)(1 - \eta)] + (1 - \eta)[(1 - \epsilon)\eta + \epsilon(1 - \eta)]}$$

也即

$$0.2 = \frac{0.2[\epsilon \times 0.2 + (1 - \epsilon)(1 - 0.2)]}{0.2[\epsilon \times 0.2 + (1 - \epsilon)(1 - 0.2)] + (1 - 0.2)[(1 - \epsilon)0.2 + \epsilon(1 - 0.2)]}$$

求解得到 $\epsilon = 0.5$ 。注意到等式(1)意味着观测到 $D_3 = 1$ 对于判断 C_3 的取值没有任何帮助。由于 D_3 的分布只依赖于 C_3 的取值，当 $\epsilon = 0.5$ 时，汽车从状态 C_{i-1} 转移到状态 C_i 的随机性达到最大，在这种情况下， D_3 分布的随机性也达到最大，无法为 C_3 的分布提供更多的信息。

2 问题 2：发射概率

请参见 `submission.py` 文件。

3 问题 3：转移概率

请参见 `submission.py` 文件。

4 问题 4：粒子滤波

请参见 `submission.py` 文件。