4月10日作业

1

1. Find

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}}\ \max_{-1\le x\le 2} |x^3+ax+b|$$

without programming.

解：先不妨猜测 $x_0=-1$ 与 $x_2=2$ 两个端点是 Chebyshev 交错点，

设中间的交错点为 x_1，其满足

$$(x_1^3+ax_1+b)' = 3x_1^2+a=0 \qquad ①$$

由 Chebyshev 交错点的定义可知：

$$x_0^3+ax_0+b = x_2^3+ax_2+b$$

即 $$-1-a+b = 8+2a+b \qquad ②$$

综合①与②得到：$a=-3$，$x_1=1$（-1 舍去）

再次利用交错点组的定义：

$$x_1^3+ax_1+b = -(x_0^3+ax_0+b)$$

即 $$1-3+b = -(-1+3+b)$$

$$\Rightarrow \quad b=0$$

令 $f(x)=x^3-3x$

$f(-1) = -1+3=2$ $\qquad f(2)=8-6=2$

令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

其中 $f(1) = 1 - 3 = -2$

$\Rightarrow x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ 确实是 $x^3 - 3x$ 的交错点组

$\Rightarrow P(x) = 3x$ 是对 $f(x) = x^3$ 在 $[-1, 2]$ 上的最佳一致逼近

$$\Rightarrow \min_{a,b} \max_{-1 \le x \le 2} |x^3 + ax + b| = 2$$

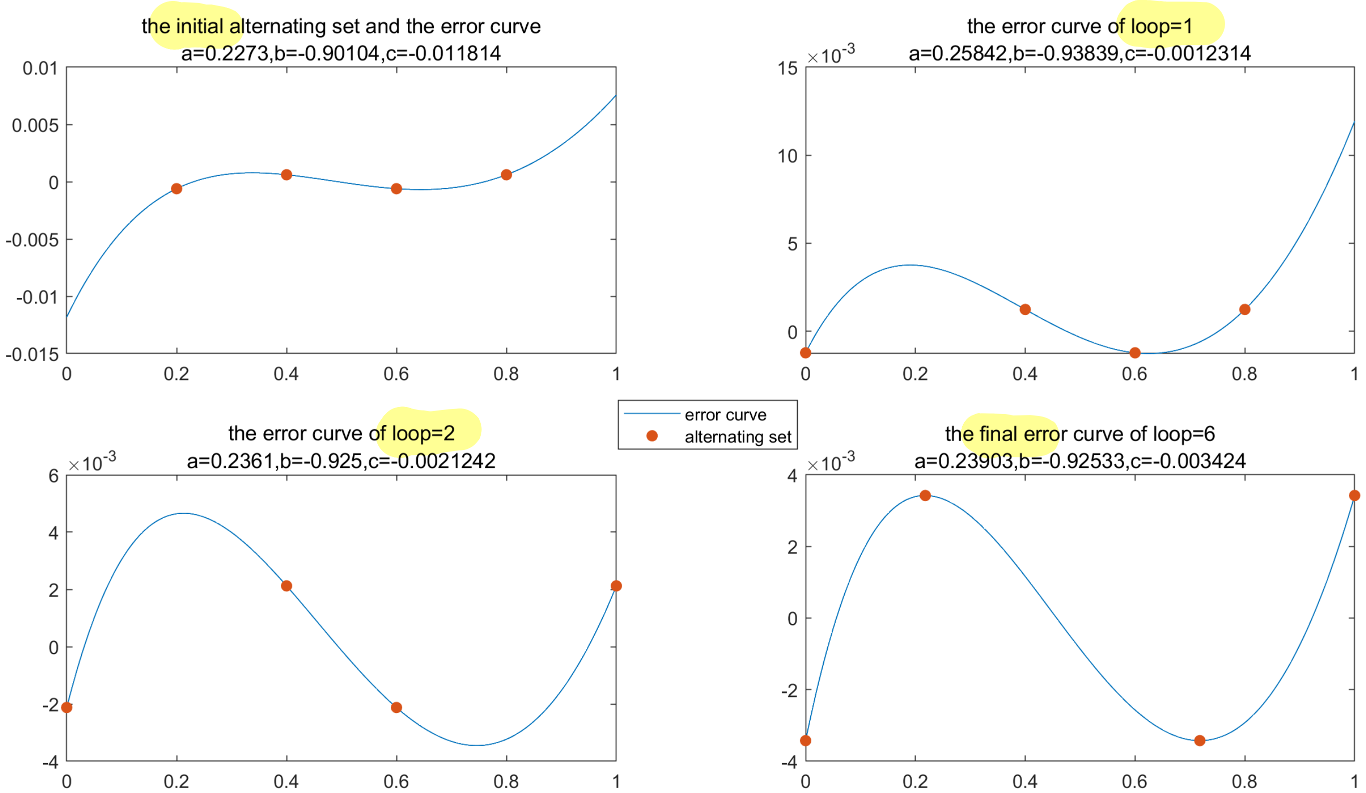
当且仅当 $a = -3,\ b = 0$ $\square$

2

2. Find

$$\min_{a,b,c} \max_{0 \le x \le 1} |\ln(1+x) + ax^2 + bx + c|$$

using Remez algorithm. Visualize the approximation error and the (nonuniform) alternating set by taking a few snapshots. (E.g., you may plot the error curve for the initial guess, two intermediate solutions, as well as the final solution.)



$\square$

3

3. Show that in each iterate of Remez algorithm, the linear system has a unique solution.

解：线性系统可以表示为：

$$f(x_i) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x_i^k = (-1)^i \eta \quad \text{，其中 } i = 0, 1, \cdots, n+1$$

其中 $a_0 \cdots, a_n, \eta$ 是 $n+2$ 个未知数，写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_0^n & \cdots & x_0, & 1, & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_{n+1}^n & \cdots & x_{n+1}, & 1, & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}_{(n+2)} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix}$$

(记矩阵为A)

注意到沿着第 $n+2$ 列(最后一列)进行展开时，所有的余子式都是Vandermonde行列式

记 $F(x_k) = \prod_{\substack{0 \le i < j \le n+1 \\ i, j \ne k}} (x_j - x_i) > 0$

$\Rightarrow \det A$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \left[1 \cdot F(x_0) + (-1)^1 \cdot F(x_1) + \cdots + (-1)^{n+1+n+1} \cdot F(x_{n+2}) \right]$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} F(x_k) \ne 0 \Rightarrow A \text{可逆} \Rightarrow \text{有唯一解}$$

□

4. Let $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ be a real polynomial such that

$$\max_{-1\le x\le 1} |p(x)| \le 1.$$

4

Show that $|a_n| \le 2^{n-1}$.

Remark: There was a mistake regarding the location of Chebyshev alternating set in today's lecture. You will be able to fix the mistake by solving this exercise.

解: $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$

$= a_n \cdot (x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n})$

$= a_n \cdot (x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0)$

其中 $b_i = \frac{a_i}{a_n}$, $a_n \neq 0$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

记 $\tilde{p}(x) = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0$

$\tilde{p}(x)$ 是 n阶首一多项式

$\Rightarrow \max\limits_{-1\le x\le 1} |p(x)| = |a_n| \cdot \max\limits_{-1\le x\le 1} |\tilde{p}(x)|$

则只需证明 $\max\limits_{-1\le x\le 1} |\tilde{p}(x)| \ge 2^{1-n}$ 即可

$\tilde{p}(x) = x^n + (b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0)$

$= x^n - P_{n-1}(x)$

其中 $P_{n-1}(x)$ 是不超过 n-1 次的多项式

那么只需证明:

$$\min_{P_{n-1}} \max_{-1\le x\le 1} |x^n - P_{n-1}(x)| \ge 2^{1-n}$$

也就是 $\|x^n - p_{n-1}^*(x)\|_\infty \geq 2^{1-n}$

其中 $p_{n-1}^*(x)$ 是对 x^n 的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式

记 n 次 Chebyshev 多项式为 $T_n(x)$，下面来说明，当：

$$x^n - p_{n-1}(x) = 2^{1-n} \cdot T_n(x) \text{ 时}$$

$p_{n-1}(x)$ 恰是 $n-1$ 次的最佳一致逼近

注意到 $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$

$\Rightarrow T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有 $n+1$ 个最值点：

$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,\cdots,n$$

且相邻最值点依次取 $1,-1,1,-1,\cdots$

此外，$2^{1-n} \cdot T_n(x)$ 是首一 n 阶多项式（$T_n(x)$ 最高次系数为 2^{n-1}）

则 $p_{n-1}^*(x) = x^n - 2^{1-n} \cdot T_n(x)$ 不超过 $n-1$ 次

则由 Chebyshev 定理，$x^n - p_{n-1}^*(x) = 2^{1-n} T_n(x)$ 时，

也即 $p_{n-1}^*(x) = x^n - 2^{1-n} \cdot T_n(x)$ 时

$p_{n-1}^*(x)$ 是 x^n 的不超过 $n-1$ 次最佳一致逼近

$$\Rightarrow \|x^n - p_{n-1}^*(x)\|_\infty = \|2^{1-n} T_n(x)\|_\infty = 2^{1-n}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{\|\tilde{p}(x)\|_\infty} \leq \frac{1}{\|x^n - p_{n-1}^*(x)\|_\infty} = 2^{n-1} \qquad \square$$