

## Exercice 1

**Question 1** Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives.

- (a) Les fonctions constantes  $c_a(n) = a$ .
- (b) La fonction *somme* définie par  $somme(n, m) = n + m$ .
- (c) La fonction *prédécesseur*  $p$  définie par  $p(n) = \max(0, n - 1)$ .
- (d) La fonction *prod* définie par  $prod(n, m) = nm$ .
- (e) La fonction *eq0* définie par  $eq0(m) = 1$  si  $m = 0$  et  $eq0(m) = 0$  sinon.
- (f) La fonction *eq* définie par  $eq(n, m) = 1$  si  $m = n$  et  $eq(n, m) = 0$  sinon.
- (g) Toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  à support fini :

$$\exists E \subseteq \mathbb{N}, |E| < \infty \quad x \notin E \implies f(x) = 0$$

(a) Soit  $a \in \mathbb{N}$ .

On montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_a(n) = s^a(\odot(n))$$

Avec  $s^a$   $s$  composé  $a$  fois.

Une récurrence sur  $a$  montre que  $s^a(0) = a$ .

Écrit sous cette forme on constate que  $c_a$  est récursive primitive par  $a + 1$  applications du schéma de composition.

■

(b) On définit *somme'* :

$$\begin{aligned} \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad & somme'(n, 0) = n \\ & somme'(n, m + 1) = (s \circ p_3^3)(n, m, somme'(n, m)) \end{aligned}$$

*somme'* est PR par application une fois du schéma de récurrence primitive :  $s \circ p_3^3$  est PR par composition.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on montre par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P}(m) : "somme'(n, m) = somme(n, m) = n + m"$$

—  $\mathbf{P}(0) : somme'(n, 0) = n = n + 0$

— **Hérédité** : Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{P}(m)$ , on a :

$$\begin{aligned} somme'(n, m + 1) &= (s \circ p_3^3)(n, m, somme'(n, m)) \\ &= s(somme'(n, m)) \\ &= s(n + m) \\ &= (n + m) + 1 \\ &= n + (m + 1) \end{aligned}$$

D'où  $\mathbf{P}(m + 1)$ .

Donc  $somme = somme'$  et  $somme$  est PR. ■

(c) L'énoncé est un peu ambigu comme soulevé dans la FAQ.

On considère malgré les définitions que les  $\mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}$  sont PR (les constantes sont PR, ça justifie).

Ainsi on peut définir des fonctions à une seule variable en schéma de récursion primitive.

On montre que  $p$  vérifie :

$\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad p(n + 1) &= p_1^2(n, p(n)) \end{aligned}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------

En effet,  $p(0) = \max(0, -1) = 0$  et pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$p(n + 1) = \max(0, n) = n = p_1^2(n, p(n))$$

Sous cette forme on constate que  $p$  est PR. ■

(d) On définit  $prod'$  :

$\begin{aligned} \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad prod'(n, 0) &= 0 \\ prod'(n, m + 1) &= somme_{13}(n, m, prod'(n, m)) \\ \text{avec : } somme_{13}(x_1, x_2, x_3) &= somme(p_1^3(x_1, x_2, x_3), p_3^3(x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$somme_{13}$  est PR par schéma de composition et 1b) donc  $prod'$  est PR par schéma de récurrence.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on montre par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P}(m) : "prod'(n, m) = prod(n, m) = n * m"$$

—  $\mathbf{P}(0) : prod'(n, 0) = 0 = n * 0$

— **Hérédité** : Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathbf{P}(m)$ , on a :

$$\begin{aligned} prod'(n, m+1) &= somme_{13}(n, m, prod'(n, m)) \\ &= n + prod'(n, m) \\ &= n + n * m \\ &= n * (m+1) \end{aligned}$$

D'où  $\mathbf{P}(m+1)$ .

Donc  $prod = prod'$  et  $prod$  est PR. ■

(e) On montre que  $eq0$  vérifie :

$$\begin{aligned} eq0(0) &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad eq0(n+1) &= (\odot \circ p_1^2)(n, eq0(n)) \end{aligned}$$

En effet,  $eq0(0) = 1$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n+1 \neq 0$  :

$$eq0(n+1) = 0 = \odot(n)$$

Sous cette forme on constate que  $eq0$  est PR. ■

(f) On montre que  $eq$  vérifie :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad eq(n, m) = (eq0 \circ somme)(sub(n, m), sub(m, n))$$

Avec :

$$\begin{aligned} sub(n, 0) &= n \\ \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad sub(n, m+1) &= (p \circ p_3^3)(n, m, sub(n, m)) \end{aligned}$$

On constate que  $sub$  est PR.

Une récurrence montre que  $sub(n, m) = \max(0, n - m)$ .

Soient  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  :

— Si  $n = m$ ,  $sub(n, m) = sub(m, n) = 0$  et donc :  
 $eq(n, m) = 1 = eq0(sub(n, m) + sub(m, n))$

— Si  $n \neq m$ , mettons  $n > m$ .

Alors  $sub(n, m) = n - m \neq 0$  et  $sub(m, n) = 0$  ainsi  $eq0(sub(n, m) + sub(m, n)) = 0$

Ainsi  $eq(n, m) = 0 = eq0(sub(n, m) + sub(m, n))$

Mis sous cette forme, on constate que  $eq$  est PR. ■

(g) Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  à support fini.

Il existe  $k \in \mathbb{N}$  et  $E \subseteq \mathbb{N} = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $|E| = k$ , tels que :

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x \notin E \implies f(x) = 0$$

Si  $k = 0$ ,  $f = \odot$  et le résultat est connu.

On suppose donc  $k \geq 1$ .

On note pour  $1 \leq i \leq k$   $y_i = f(x_i)$ .

On définit  $f'$  :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad f'(x) = \text{somme}_k(d_1(eq0(eq(x, x_1))), \dots, d_p(eq0(eq(x, x_p))))$$

Avec, pour  $1 \leq i \leq k$  :

$$\begin{aligned} d_i(0) &= y_i \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad d_i(n+1) &= (\odot \circ p_1^2)(n, d_i(n)) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \text{somme}_1 &= p_1^1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) &\in \mathbb{N}^{n+1}, \\ \text{somme}_{n+1} : \mathbb{N}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \text{somme}_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \text{somme}(p_1^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}), \text{Somme}_n(x_1, \dots, x_{n+1})) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{Somme}_n(x_1, \dots, x_{n+1}) = \text{somme}_n(p_2^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, p_{n+1}^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}))$$

Par récurrence, on obtient que :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{somme}_k$  est PR
- $\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$   $\forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ ,  $\text{somme}_k(x_1, \dots, x_k) = x_1 + \dots + x_k$

De plus les  $d_i$  sont PR donc  $f'$  est PR.

On constate que pour  $1 \leq i \leq k$  :

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x = x_i \Leftrightarrow d_i(eq0(eq(x, x_i))) = y_i$$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x \neq x_i \Rightarrow d_i(eq0(eq(x, x_i))) = 0$$

( $eq0$  agit comme un not logique ici).

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x \notin E \implies f'(x) = 0$$

(tous les termes de la somme sont nuls)

$$\forall 1 \leq i \leq k \quad f'(x_i) = y_i$$

(un seul terme non nul, les  $x_i$  sont nécessairement distincts puisque  $|E| = k$ ).

On en conclut  $f = f'$  et  $f$  est PR. ■

**Question 2** On définit la fonction d'Ackermann via la récurrence double suivante :

$$\begin{aligned} Ack(0, x) &= x + 2 \\ Ack(1, 0) &= 0 \\ Ack(n + 2, 0) &= 1 \\ Ack(n + 1, x + 1) &= Ack(n, Ack(n + 1, x)) \end{aligned}$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $Ack_n : x \mapsto Ack(n, x)$  est PR.

— **Cas  $n = 0$**  :  $Ack_0(x) = x + 2 = s(s(x)) = s^2(x)$ , PR par schéma de composition.

— **Cas  $n = 1$**  :

$$\begin{aligned} Ack_1(0) &= 0 \\ \forall x \in \mathbb{N}, \quad Ack_1(x + 1) &= Ack(1, x + 1) = Ack(0, Ack(1, x)) = (Ack_0 \circ p_2^2)(x, Ack_1(x)) \end{aligned}$$

PR par schémas de composition et de récurrence.

— **Cas  $n \geq 2$**  :

$$\begin{aligned} Ack_n(0) &= 1 \\ \forall x \in \mathbb{N}, \quad Ack_n(x + 1) &= Ack(n, x + 1) = (Ack_{n-1} \circ p_2^2)(x, Ack_n(x)) \end{aligned}$$

Par récurrence sur  $n \geq 2$  on obtient que les  $Ack_{n \geq 2}$  sont PR.

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $Ack_n : x \mapsto Ack(n, x)$  est PR. ■

**Question 3**

On veut montrer dans cette question que la fonction d'Ackermann n'est pas primitive réursive.

- (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}^*, Ack_n(x) > x$ . En déduire que pour tout entier  $n$ ,  $Ack_n$  est strictement croissante et que  $Ack$  est croissante en son premier argument :  $\forall x \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}, Ack(n, x) \leq Ack(n + 1, x)$

(a) On va procéder par induction bien fondée sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  muni de l'ordre lexicographique naturel (total et bien fondé). Il admet pour minimum :  $(0, 1)$ .

On veut montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}^* \mathbf{P}(n, x) : "Ack_n(x) > x"$$

—  $\mathbf{P}(0, 1) : Ack_0(1) = 3 > 1$

— **Induction** : Soit  $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  (et donc  $x > 0$ ), on suppose  $\mathbf{P}$  vraie pour tous les couples lexicographiquement strictement plus petits. Si  $n = 0$  on conclut car  $x + 2 > x$ , sinon :

$$Ack_n(x) = Ack_n((x - 1) + 1) = Ack_{n-1}(Ack_n(x - 1)) > Ack_n(x - 1) > x - 1$$

Ceci par hypothèse d'induction car  $\forall a \in \mathbb{N}^* (n, x) > (n - 1, a)$  et  $(n, x) > (n, x - 1)$ .  
Par les deux inégalités strictes on en conclut :

$$Ack_n(x) > x$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  on souhaite montrer :

$$\forall x \in \mathbb{N} Ack_n(x + 1) > Ack_n(x)$$

Si  $n = 0$  on constate que c'est vrai. On suppose  $n \geq 1$  :

Soit  $x \in \mathbb{N}$  :

$$Ack_n(x + 1) = Ack_{n-1}(Ack_n(x)) > Ack_n(x) > x$$

Ceci d'après la preuve précédente.

D'où le résultat.

On veut maintenant montrer que :

$$\forall x \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}, Ack_n(x) \leq Ack_{n+1}(x)$$

Soit  $x \geq 2$ , on peut appliquer le premier résultat à  $x - 1 \geq 1$ , soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$Ack_{n+1}(x - 1) > x - 1 \text{ donc } Ack_{n+1}(x - 1) \geq x.$$

Par croissance de  $Ack_n$  (précédent résultat) :

$$Ack_{n+1}(x) = Ack_n(Ack_{n+1}(x - 1)) \geq Ack_n(x)$$

D'où le résultat.

■

(b) On pose pour  $k$  entier,  $Ack_n^k = Ack_n \circ \dots \circ Ack_n$ , où la composition est prise  $k$  fois.  
Montrer que  $\forall n, k, x \in \mathbb{N} \quad Ack_n^k(x) \leq Ack_{n+1}(x + k)$ .

(b) Soient  $n, x \in \mathbb{N}$  on montre par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{P}(k) : "Ack_n^k(x) \leq Ack_{n+1}(x + k)"$$

—  $\mathbf{P}(0) : Ack_n^0(x) = x$  on doit donc montrer :

$$x \leq Ack_{n+1}(x)$$

Pour  $x \neq 0$  on sait déjà  $x < Ack_{n+1}(x)$  (par 3a) d'où le résultat.

Si  $x = 0$  :

- $Ack_0(0) = 2 > 0$
- $Ack_1(0) = 0 \geq 0$
- $Ack_{n>1}(0) = 1 > 0$

D'où le résultat dans tous les cas.

— **Hérédité** : Soit  $k \in \mathbb{N}$  on suppose  $\mathbf{P}(k)$ . On a :

$$Ack_n^{k+1}(x) = Ack_n(Ack_n^k(x)) \leq Ack_n(Ack_{n+1}(x + k))$$

Par croissance et hypothèse de récurrence.

Or  $Ack_n(Ack_{n+1}(x + k)) = Ack_{n+1}(x + k + 1)$ .

D'où  $\mathbf{P}(k + 1)$

D'où le résultat. ■

(c) Montrer que  $Ack_n^k$  est dominée par  $Ack_{n+1}$ .

(c) On procède en quatre étapes.

**Lemme 0**

- (a)  $\forall n \geq 0 \quad Ack_n(1) \geq 2$
- (b)  $\forall n \geq 0 \quad Ack_n(2) > 3$

**Preuve (a) :**

Par récurrence sur  $n$  :  $Ack_0(1) = 3 \geq 2$

$Ack_{n+1}(1) = Ack_n(Ack_{n+1}(0)) = Ack_n(1) \geq 2$  (par HR).

**Preuve (b) :** c'est analogue. ■

**Lemme 1** Soient  $k, n \in \mathbb{N}$  :  
 Soit  $x_0 > 0$  tel que  $Ack_n^k(x_0) \leq Ack_{n+1}(x_0)$   
 Alors :  $\forall x \geq x_0 \quad Ack_n^k(x) \leq Ack_{n+1}(x)$

**Preuve**

On se donne un tel  $x_0$ .

Il suffit de montrer :  $Ack_n^k(x_0 + 1) \leq Ack_{n+1}(x_0 + 1)$

Si  $n = 0$  et  $k = 0$  c'est connu par 3a.

On a :

$$Ack_n^k(x_0 + 1) = Ack_n^{k-1}(Ack_{n-1}(Ack_n(x_0))) \leq Ack_n^{k-1}(Ack_n(Ack_n(x_0)))$$

En effet,  $Ack_n(x_0) \geq Ack_n(1) \geq 2$  par le **Lemme 0 (a)** et on conclut par croissance de  $Ack$  en le premier argument (3a) et par croissance de  $Ack_n^{k-1}$  (récurrence sur  $k$ ). Donc :

$$Ack_n^k(x_0 + 1) \leq Ack_n(Ack_n^k(x_0)) \leq Ack_n(Ack_{n+1}(x_0)) = Ack_{n+1}(x_0 + 1)$$

D'où le résultat. ■

**Lemme 2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_{n,k} \in \mathbb{N} \quad Ack_n(x_{n,k}) > x_{n,k} + k + 1$$

Par récurrence sur  $k$  :

- $k = 0$  : par le **Lemme 0 (b)**  $x_{n,0} = 2$  convient.
- **Hérédité** ( $n \neq 0$ ) :  $Ack_n(x_{n,k} + 1) = Ack_{n-1}(Ack_n(x_{n,k})) > Ack_{n-1}(x_{n,k} + k + 1)$  par HR. On a alors :

$$\begin{aligned} Ack_n(x_{n,k} + 1) &> Ack_{n-1}(x_{n,k} + k + 1) > x_{n,k} + k + 1 \\ Ack_n(x_{n,k} + 1) &> x_{n,k} + k + 2 \end{aligned}$$

$x_{n,k+1} = x_{n,k} + 1$  convient donc.

D'où le résultat. ■



On peut maintenant répondre à la question en démontrant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} \exists C_{n,k} \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \text{Ack}_n^k(x) \leq \text{Ack}_{n+1}(\max(x, C_{n,k}))$$

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ .

— Si  $n \neq 0$ , on se donne un  $x_{n,k}$  du **Lemme 2**, d'après **3b** et le **Lemme 2** :

$$\text{Ack}_n^k(x_{n,k} + k + 1) < \text{Ack}_n^k(\text{Ack}_n(x_{n,k})) \leq \text{Ack}_{n+1}(x_{n,k} + k + 1)$$

On pose  $C_{n,k} = x_{n,k} + k + 1 > 0$  En application du **Lemme 1** à  $C_{n,k}$  on a :

$$\forall x \geq C_{n,k} \quad \text{Ack}_n^k(x) \leq \text{Ack}_{n+1}(x)$$

De plus, par croissance de  $\text{Ack}_n^k$  :

$$\text{Ack}_{n+1}(C_{n,k}) \geq \text{Ack}_n^k(C_{n,k}) \implies \forall x \leq C_{n,k} \quad \text{Ack}_{n+1}(C_{n,k}) \geq \text{Ack}_n^k(x)$$

C'est ce qu'on voulait.

— Si  $n = 0$  on ne peut pas se servir du **Lemme 2** mais on a par récurrence :

$$\text{Ack}_0^k(x) = x + 2k$$

Alors par récurrence sur  $k$ , on montre l'existence d'un  $x_{0,k} \neq 0$  tel que :

$$x_{0,k} + 2k \leq \text{Ack}_1(x_{0,k})$$

Pour  $k = 0$  tout  $x \neq 0$  convient par (3a).

L'argument d'hérédité est le même que pour le lemme 2,  $x_{0,k+1} = x_{0,k} + 1$  convient.

Muni de cela on peut conclure comme dans le cas  $n \neq 0$  en prenant  $C_{0,k} = x_{0,k}$ .

D'où le résultat. (ouf!!) ■

(d) Montrer que si  $f$  PR est définie avec  $n$  utilisations du schéma de récurrence , alors  $\text{Ack}_{n+1}$  domine  $f$ .

(d) On procède par récurrence sur  $n$ . En montrant la propriété :

$$\mathbf{P}(n) : "\forall f \text{ PR } f \text{ construite avec } n \text{ utilisations du SR} \implies \exists k \in \mathbb{N} \text{ Ack}_n^k \text{ domine } f"$$

- $n = 0$  : on vérifie que  $\odot, s$  et les  $p_i^k$  sont dominées par  $Ack_1^1$  (on utilise 3a). Ensuite, par distinction de multiples cas on constate que  $f$  définie par schéma de composition avec  $h$  et  $g_1 \dots g_p$  des fonctions de base est dominée par  $Ack_1$ .
- **Hérédité** : On suppose la propriété vraie pour les fonctions définies à l'aide de  $k \leq n$  utilisations du schéma de récurrence. Soit  $f$  définie à l'aide de  $n + 1$  utilisations, on peut supposer sans perte de généralité que :

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_p, 0) &= g(a_1, \dots, a_p) \\ f(a_1, \dots, a_p, x + 1) &= h(a_1, \dots, a_p, x, f(a_1, \dots, a_p, x)) \end{aligned}$$

Avec  $h$  et  $g$  PR définie avec au plus  $n$  utilisations du schémas de récurrence. En effet car si  $f$  est en étape finale contruite par schéma de composition on ramène l'étude aux fonctions qui interviennent.

Par HR on a l'existence de  $k_1, C_1$  et  $k_2, C_2$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall a_1, \dots, a_p \quad g(a_1, \dots, a_p) &\leq Ack_n^{k_1}(sup(a_1, \dots, a_p, C_1)) \\ \forall a_1, \dots, a_{p+1}, a_{p+2} \quad h(a_1, \dots, a_{p+1}, a_{p+2}) &\leq Ack_n^{k_2}(sup(a_1, \dots, a_{p+1}, a_{p+2}, C_2)) \end{aligned}$$

En effet si  $g$  ou  $h$  sont construits avec moins de  $n$  applications du SR, la croissance de  $Ack$  en le premier argument permet quand même d'établir l'inégalité.

Par récurrence sur  $x$  on montre qu'on a alors :

$$f(a_1, \dots, a_p, x) \leq Ack_n^{k_1+xk_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2))$$

- $x = 0$  :  $C_2 \leq C_1$ , c'est connu.  $C_2 > C_1$  par croissance.

— **Hérédité** :

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_p, x + 1) &\leq Ack_n^{k_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, f(a_1, \dots, a_p, x))) \\ &\leq Ack_n^{k_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, Ack_n^{k_1+xk_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2)))) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} Ack_n^{k_1+xk_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2)) &\geq Ack_n^{k_1+xk_2}(a_1) \geq a_1 \\ &\vdots \\ Ack_n^{k_1+xk_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2)) &\geq Ack_n^{k_1+xk_2}(x) \geq x \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_p, x + 1) &\leq Ack_n^{k_2}(Ack_n^{k_1+xk_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2))) \\ &\leq Ack_n^{k_1+(x+1)k_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2)) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

D'où :

$$\begin{aligned}
f(a_1, \dots, a_p, x) &\leq Ack_n^{k_1+xk_2}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2)) \\
&\leq Ack_{n+1}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_1, C_2) + k_1 + xk_2) \\
&\leq Ack_{n+1}(Ack_2^h(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_3))) \\
&\leq Ack_{n+1}^{h+1}(sup(a_1, \dots, a_p, x, C_3))
\end{aligned}$$

Car on montre que *somme*, *sup* et  $x \mapsto kx$  sont toutes dominées par  $Ack_2^h$  pour un certain  $h$ .

D'où le résultat. ■

(e) Conclure.

(e) Supposons par l'absurde que  $Ack$  est PR. Alors :  $f : n \mapsto Ack(n, n+1)$  est PR par composition. Supposons  $f$  construite avec  $m$  utilisations du SR.

On a montré précédemment qu'alors il existe  $C$  tel que  $\forall n > C$  :

$$Ack(n, n+1) \leq Ack_{m+1}(n)$$

Maintenant, si  $n > m+1$  par 3a on a :

$$Ack_{m+1}(n) < Ack_{m+1}(n+1) \leq Ack_n(n+1) = Ack(n, n+1)$$

Absurde en prenant  $n > sup(n, C)$ .

D'où le résultat. ■

■

**Question 4**

On définit l'ensemble  $R$  des fonctions récursives comme le plus petit ensemble de fonctions, éventuellement partielle, qui contient PR et qui est clos par le *schéma de minimisation non-borné* : si  $f : A \subseteq \mathbb{N}^{p+1} \rightarrow \mathbb{N}$  est dans  $R$ , alors la fonction  $g : B \subseteq \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$  est dans  $R$ , où  $g$  est définie par :

$$g(a_1, \dots, a_p) = \min \{z : f(a_1, \dots, a_p, z) = 0\} \text{ si non vide}$$

Quelle est la cardinalité de  $R$  ? Exhiber une fonction qui n'est pas dans  $R$ .

Si on pose :

$$\begin{aligned} R_0 &= \{\odot, p_i^k, s\} \\ R_{n+1} &= \\ &R_n \cup (\cup_p \cup_m \{SC(h, g_1, \dots, g_p) \mid h \in N_p \cap R_n, g_{i \leq p} \in N_m \cap R_n\}) \\ &\cup (\cup_p \{SR(g, h) \mid g \in N_p \cap R_n, h \in N_{p+2} \cap R_n\}) \\ &\cup (\cup_p \{SMNB(f) \mid f \in N_{p+1} \cap R_n\}) \end{aligned}$$

Avec  $N_p$  les fonctions (pouvant être partielles) de  $\mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ . Et  $SC, SR, SMNB$  les différents schémas introduits. Alors d'après la théorie des ensembles inductifs (PROG) on sait que :

$$R = \cup_n R_n$$

Par récurrence on a que les  $R_n$  sont dénombrables par réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ( $N_p \cap R_n$  dénombrable).

Ainsi  $R$  est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables :  $R$  est dénombrable.

Par argument de cardinalité on a donc l'existence de fonctions non  $R$ . On peut en exhiber une par argument diagonal.

On pose  $R = \{f_n\}$  et :

$$g(n) = f_n(n) + 1$$

Supposons par l'absurde que  $g$  est  $R$ . Il existe  $m$  tel que  $g = f_m$  et alors :

$$g(m) = f_m(m) + 1 \neq f_m(m)$$

Absurde. ■

**Question 5** Montrer que si  $f$  est  $R$ , alors  $f$  est calculable par une machine de Turing.

On raisonne par induction structurelle (on prend des entrées en binaire, machine à deux rubans I/O) :

- **Cas  $\odot$**  : une machine qui écrit 0 quelque soit l'entrée.
- **Cas  $p_i^k$**  : on sépare les différents paramètre d'un espace sur le ruban, il suffit de maintenir un compteur pour atteindre  $i$  et recopier l'entrée sur la sortie.
- **Cas  $s$**  : on sait ajouter  $+1$  avec une MT en binaire (cf TD).
- **Cas  $SC$**  : soit  $h \in N_p \cap R$  et  $g_1, \dots, g_p \in N_n \cap R$ . On considère  $f = SC(h, g_1, \dots, g_p)$ . Par hypothèse d'induction, on dispose de  $M_0$  qui calcule  $h$  et  $M_1, \dots, M_p$  qui simulent  $g_1, \dots, g_p$ . Il suffit de composer ces machines en faisant écrire les résultats de  $M_1, \dots, M_p$  (sur  $x_1, \dots, x_n$ ) séparés d'un espace sur le ruban d'entrée de  $M_0$  et appliquer  $M_0$ .
- **Cas  $SR$**  : Soit  $f = SR(g, h)$ ,  $M_0 = M(f)$  et  $M_1 = M(h)$ . Pour calculer  $f$  il faut simuler la stack comme sur un ordi, on empile sur le ruban les arguments successifs jusqu'à  $x = 0$  auquel cas on calcul avec  $M_0$  et après on remonte tant que le ruban n'est pas vide en appliquant  $M_1$  et en utilisant le résultat comme paramètre manquant de l'appel d'après.
- **Cas  $SMNB$**  : Soit  $g = SMNB(f)$  et  $M_0 = M(f)$ . On interprète la non définition d'une fonction en un point comme la non terminaison sur cette entrée de la machine qui calcule  $f$ . Muni de cette définition on construit une machine qui teste tous les  $z$  dans l'ordre croissant en utilisant le calcul de  $M_0$ . Si un tel  $z$  existe on l'écrit sur le ruban sinon le calcul ne termine pas :  $g$  n'est pas définie.

■

**Question 6** On s'intéresse maintenant à la réciproque : soit  $f$  calculée par une machine de Turing  $M$ , qu'on suppose déterministe, avec un seul état d'acceptation  $q^+$ , qui ne bloque jamais, avec un seul ruban bi-infini.

- (a) On suppose que les états de  $M$  sont les entiers  $\{0, \dots, n-1\}$  et que les symboles de bande sont les entiers  $\{0, \dots, m-1\}$ , le symbole blanc étant l'entier 0. Proposer un codage d'un bout de ruban semi-infini (à support fini), ie à  $u = u_0 u_1 u_2 \dots$  ou  $u = \dots u_2 u_1 u_0$  on associe  $\langle u \rangle \in \mathbb{N}$  tel que  $\langle . \rangle$  soit injective.

a) Comme les  $u_i$  sont bornés par  $m$  on va prendre le codage en base  $m$  modifié un petit peu pour différencier ruban semi infini gauche et droit. Si  $u = u_0 \dots u_p$  on pose :

$$\langle u \rangle = 2 \sum_{k=0}^p u_k m^k$$

Si  $u = u_p \dots u_0$  on pose :

$$\langle u \rangle = 2 \sum_{k=0}^p u_k m^k + 1$$

C'est injectif.

■

(b) On considère :  $F : \langle u \rangle \mapsto u_0$ . Montrer que  $F$  est PR.

b) On a :

$$F(\langle u \rangle) = \text{mod}(\text{div}(\langle u \rangle, 2), m)$$

$$\begin{aligned} \text{div}(0, m) &= 0 \\ \text{div}(n+1, m) &= \text{div}(n, m) + \text{eq}(m * (1 + \text{div}(n, m)), n+1) \end{aligned}$$

$$\text{mod}(n, m) = n - m * \text{div}(n, m)$$

Par récurrence on montre que  $\text{div}$  et  $\text{mod}$  correspondent bien à la division entière et au modulo. Elles sont PR car on peut les réécrire sous une forme explicitement PR à l'aide de *prod*, *somme*, *sub* et des schémas PR.

Alors  $F$  est bien PR (on peut la réécrire explicitement PR en utilisant  $c_2$  et  $c_m$ ).

■

(c) Soit  $(q, a, q', b, d) \in \delta(M)$ . Montrer que  $\delta\text{State}(q, a) = q'$ ,  $\delta\text{Write}(q, a) = b$  et  $\delta\text{Move}(q, a) = d$  sont PR.

c) Pour être PR on a besoin de fonctions totales. On prend la convention que les transitions invalides entraînent la nullité de la fonction considérée.

Alors  $\delta\text{State}$ ,  $\delta\text{Write}$  et  $\delta\text{Move}$  sont à support fini et donc PR d'après **1g**).

■

(d) Montrer que les fonctions suivantes peuvent être définies par récurrence mutuelle :  $State(< w >, t), Left(< w >, t), Right(< w >, t)$ . Qui donnent respectivement l'état de la machine, le contenu à gauche (exclu) de la tête et à droite (inclus) après  $t$  étapes de calcul.

d) On suppose que le mot  $<w>$  est donné initialement en forme semi-ruban droit.

$$\begin{aligned} State(< w >, 0) &= 0 \\ Left(< w >, 0) &= 0 \\ Right(< w >, 0) &= < w > \end{aligned}$$

$$q_t = State(< w >, t) \quad u_t = F(Right(< w >, t))$$

$$State(< w >, t+1) = \delta State(q_t, u_t)$$

Si  $\delta Move(q_t, u_t) = R$  :

$$\begin{aligned} Left(< w >, t+1) &= 2 * \left( m \frac{Left(< w >, t) - 1}{2} + \delta Write(q_t, u_t) \right) + 1 \\ Right(< w >, t+1) &= 2 * \frac{\frac{Right(< w >, t)}{2} - u_t}{m} \end{aligned}$$

Si  $\delta Move(q_t, u_t) = L$  :

$$\begin{aligned} Left(< w >, t+1) &= 2 * \frac{\frac{Left(< w >, t) - 1}{2} - u_t}{m} + 1 \\ Right(< w >, t+1) &= 2 * \left( m \frac{Right(< w >, t)}{2} + \delta Write(q_t, u_t) \right) \end{aligned}$$

Ce qu'on a fait ici c'est d'attribuer les codages correspondant à chaque mouvement. ■

(e) Conclure  $f \in R$ .

e) On suppose qu'avant d'arriver en  $q^+$  la machine a remis la tête de lecture au début du mot, quitte à le faire nous même en  $q^+$  et à le connecter à un nouvel état  $q^{++}$ .

Alors on a :

$$f(w) = \text{Right}(< w >, \min\{t : \text{eq0}(\text{eq}(\text{State}(< w >, t), q^+)) = 0\})$$

On assimile ici le codage d'entrée de  $f$ , pour passer de  $n \in \mathbb{N}$  à un mot en entrée de  $M$ , à cet l'entier  $n$ . De même  $\text{Right}(\dots)$  est le codage d'un mot  $\alpha$  par  $< >$ , on l'assimile à la valeur que représente ce  $\alpha$  selon le codage d'entrée. Ainsi l'expression a du sens.

$\text{State}$ ,  $\text{Left}$  et  $\text{Right}$  sont PR : on peut rendre le schéma de récurrence mutuelle en schéma de récurrence simple en regroupant ces 3 fonctions dans une seule avec un paramètre en plus qui raccorde à la fonction voulue.

C'est aussi comme ça qu'on peut gérer la condition  $L/R$  avec un paramètre en plus et en utilisant  $\text{eq0}$  pour sélectionner l'expression qu'on désire. Après toutes les fonctions utilisées par composition sont PR ( $\text{prod}$ ,  $\text{div}$ ,  $s$ ,  $F$ ,  $\delta\text{State}$ ,  $\delta\text{Write}$  et  $\delta\text{Move}$ ).

Enfin on recourt à une utilisation couplée du schéma de composition et de minimisation non bornée. Tout cela est donc R.

Donc  $f \in R$ .

■

### Question 7

(e) En déduire que toute fonction de  $R$  peut s'exprimer à l'aide d'au plus un schéma de minimisation non-bornée.

Si  $f$  est R, avec 5 on construit une machine de Turing  $M$  qui calcule  $f$ . Et avec 6 on ré-exprime  $f$  avec une seule occurrence du SMNB (voir la construction).

D'où le résultat.

■



### Exercice 3

On s'intéresse aux formules de l'arithmétique de Presburger, ie les formules qui quantifient sur des entiers et qui utilisent comme prédicat l'addition et l'égalité. Étant donnée une formule de l'arithmétique de Presburger, on s'intéresse à la vérité d'une telle formule. On va montrer que cette propriété est décidable

**Question 1** Montrer que pour toute formule  $\phi$ , il existe une formule  $\psi$  qui est vraie si et seulement si  $\phi$  est vraie et qui est sous forme prénex, ie  $\psi = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\hat{\psi}$  avec  $Q_i$  des quantificateurs et  $\hat{\psi}$  une formule sans quantificateur.

On le démontre par récurrence sur le nombre  $n$  de variables liées dans la formule (i.e : variable assujétie à un quantificateur). On s'autorise des variables libres dans la formule.

- $n = 0$  : l'absence de variable liée implique l'absence de quantificateur et donc  $\phi$  est sous forme prénex.
- **Hérédité** :  $\phi = \phi'c(Q_1x_1\phi'')$  avec  $\phi'$  ne possédant pas de variable liée,  $c$  un connecteur binaire ( $\phi'$  peut être vide et  $c$  inexistant) et  $\phi''$  en possédant  $n$ . Comme aucune variable liée n'apparaît dans  $\phi'$  (en particulier  $x_1$ ),  $\phi$  est équivalente à  $Q_1x_1(\phi'c\phi'')$ .  $(\phi'c\phi'')$  possède toujours  $n$  variables liées, par HR elle est équivalente à  $\phi_1$  en forme prénex.  
Finalement  $\phi$  est équivalente à  $Q_1x_1\phi_1$  qui est sous forme prénex.

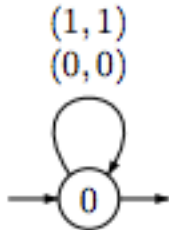
■

**Question 2** On considère un codage usuel des entiers en binaire avec le bit de poids fort à gauche, avec éventuellement des zéros en tête pour ajuster les longueurs. On se placera donc sur un alphabet  $\Sigma = 0, 1^p$ , pour  $p$  que l'on fixera en fonction de la formule à décider. Montrer que les langages suivant sont rationnels :

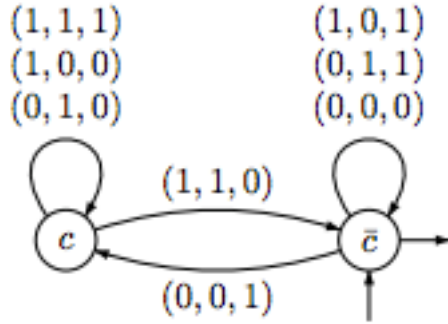
$$L_+ = \{(n_1, n_2, n_3) \mid n_1 + n_2 = n_3\}$$

$$L_- = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2\}$$

En prenant comme alphabet  $0, 1^2$  et en représentant 2 nombres comme les couples successifs de leurs bits on a pour  $L_-$  l'automate :



Et pour  $L_+$  en utilisant des triplets :



Cet automate vérifie l'addition "à l'envers". L'état  $c$  correspondant à la retenue et l'autre à l'absence de retenue.

■

**Question 3** En déduire que pour tout  $\phi$  formule sans quantificateurs avec  $p$  variables libres l'ensemble suivant est rationnel :

$$L_\phi = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \mid \phi(n_1, n_2, \dots, n_p) \text{ vraie}\}$$

On a vu que les composants atomiques de  $\phi$  donnent des langages rationnels. On va récupérer  $L_\phi$  par intersection, union ou complémentation des sous langages correspondant à ces formes atomiques (on peut les étendre à  $p$  variables en ignorant les  $p - 2$  ou  $p - 3$  composantes qui ne servent à rien). Ça reste rationnel.

■

**Question 4** Étant donnée une formule  $\psi$  sous forme prénexe  $\psi = Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\hat{\psi}$ , on définit  $\psi_k = Q_{k+1}x_{k+1} \dots Q_nx_n\hat{\psi}$ . Montrer par récurrence que les langages suivant sont rationnels :

$$X_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ vraie}\}$$

On suppose ici que  $\psi$  ne possède pas de variables libres (elle est close).

Par définition  $\psi_k$  possède  $k$  variables libres. On procède par récurrence descendante. Par convention :  $\psi_0 = \psi$  et  $\psi_n = \hat{\psi}$ .

—  $k = n$  :  $X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \hat{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ vraie}\}$  est rationnel par **Question 3** puisque  $\hat{\psi}$  est sans quantificateur.

— **Hérédité** : Soit  $0 \leq k < n$  on suppose  $X_{k+1}$  rationnel.

On a donc un AFD  $\mathcal{A}_{k+1}$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}^{k+1}$  qui reconnaît  $X_{k+1}$ .

On va construire  $\mathcal{A}_k$  sur  $\{0, 1\}^k$  qui reconnaît  $X_k$ .

$\psi_k = Q_{k+1}x_{k+1}\psi_{k+1}$ . Deux cas :

—  $Q_{k+1} = \exists$  :

La formule devient :  $\psi_k = \exists x_{k+1}\psi_{k+1}$ . Et alors si pour  $\mathcal{A}_k$  on prend  $\mathcal{A}_{k+1}$  où l'on supprime la dernière composante de chaque transition, on trouve un automate non déterministe où l'acceptance d'un mot  $(x_1, \dots, x_k)$  revient à l'existence d'un  $x_{k+1}$  (formé par un certain choix de la composante qu'on a enlevé sur chaque transition) tel que  $\mathcal{A}_{k+1}$  accepte  $(x_1, \dots, x_{k+1})$ . La réciproque est vraie, si  $\mathcal{A}_{k+1}$  accepte  $(x_1, \dots, x_{k+1})$  en prenant le même chemin,  $\mathcal{A}_k$  accepte  $(x_1, \dots, x_k)$ .  $\mathcal{A}_k$  convient donc et  $X_k$  est rationnel.

—  $Q_{k+1} = \forall$  :

On se ramène au cas précédent par équivalence de  $\psi_k$  avec  $\neg \exists x_{k+1} \neg \psi_{k+1}$ . On conclut par stabilité des langages rationnels par passage au complémentaire.

D'où le résultat. ■

**Question 5** Conclure en considérant  $X_0$ .

On a  $\psi_0 = \psi$ .

— Si  $\psi = \forall x_1 \psi_1(x_1)$  on doit vérifier que  $X_1 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \{0, 1\}^*$

— Si  $\psi = \exists x_1 \psi_1(x_1)$  on doit vérifier que  $X_1 = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \neq \emptyset$

Ces deux problèmes sont décidables.

On peut aussi conclure avec  $\mathcal{A}_0$  associé à  $X_0$  :  $\mathcal{A}_0$  est un graphe orienté.

Par la construction des  $\mathcal{A}_k$  il suffit désormais de tester l'accessibilité d'un état final à partir d'un état initial (on conclut en fonction de  $Q_1$ ) ce qui est décidable.

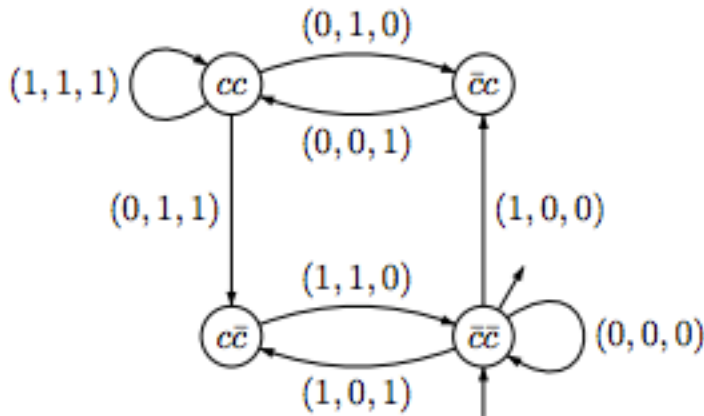
D'où le résultat. ■

**Question 6** Faites tourner l'algorithme sur les formules :

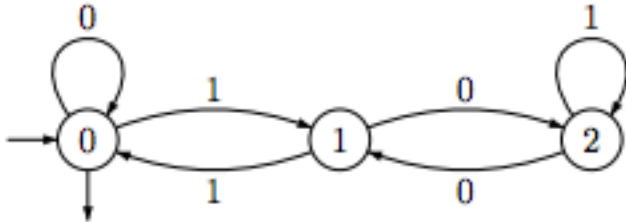
$$\begin{aligned}\psi_0(x) &\equiv \exists y, \exists z, x = y + z \wedge z = y + y \\ \psi_1 &\equiv \forall x, \psi_0(x)\end{aligned}$$

La première formule est équivalente à l'équation  $x \equiv 0 \pmod 3$ , on veut donc montrer que  $\psi_1$  est fausse.

Pour  $x = y + z \wedge z = y + y$  on propose l'automate suivant :



On utilise l'algorithme pour trouver l'automate associé à  $\psi_0$ , on trouve :



On se rend compte que la formule est fausse puisque 1 n'est pas dans le langage de cet automate (voir première conclusion **Question 5**).

D'où le résultat. ■