Vertex Enumeration と Facet Enumeration

尾山 大輔

2025 年 4 月 28 日

Minkowski-Weyl の定理

- ある $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と $b \in \mathbb{R}^m$ に対して

  $$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \tag{1}$$

  と書けている有界集合は，ある $V \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ に対して

  $$\{V'\lambda \mid \lambda \in \Delta_\ell\} \tag{2}$$

  と書ける.

  ただし，$\Delta_\ell = \{\lambda \in \mathbb{R}^\ell \mid \lambda \geq 0,\ \mathbf{1}'\lambda = 1\}$.
- また，(2) の形に書けている集合は (1) の形で書ける.
- (1) を H-representation，(2) を V-representation という.
- (1) の (A, b) から (2) の V を求めることを vertex enumeration,
  (2) の V から (1) の (A, b) を求めることを facet enumeration という.

Vertex Enumeration と Facet Enumeration

- 以下，facet enumeration を行うプログラムは vertex enumeration を行うプログラムとして使えることを説明する．
- 有界集合 P が
  $$P = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \geq \mathbf{0},\ Ax \leq \mathbf{1}\}$$
  と書けているとする．
- P を平行移動して
  $$\hat{P} = \{z \in \mathbb{R}^m \mid Dz \leq \mathbf{1}\}$$
  となるようにする．
- $0 \in \hat{P}$ である．

- 一般の集合 $K \subset \mathbb{R}^m$ にたいして

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x'y \leq \mathbf{1} \text{ (すべての } y \in K \text{ に対して)}\}$$

と定義する.

- $(K^*)^* = K^{**}$ と書く.
- 分離定理より，次が示せる：
  - K が閉凸集合で $0 \in K$ ならば $K^{**} = K$.
  - K が閉凸集合で K^* が有界ならば $0 \in \operatorname{int} K$.

- ここで,

$$K = \{D'\mu \in \mathbb{R}^m \mid \mu \in \Delta_n\}$$

  とおく.

  $\cdots$ D の行ベクトルたちの凸包

- $K^* = \hat{P}$ である.
- K は閉凸集合で $\hat{P}$ は有界なので, $K^{**} = K$ かつ $0 \in \operatorname{int} K$ である.

- いま，facet enumeration プログラムによって

$$K = \{y \in \mathbb{R}^m \mid Ey \leq c\}$$

と書けたとする ($E \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$, $c \in \mathbb{R}^{\ell}$).

ただし，E のどの行もゼロベクトルでないとする.

- $0 \in \operatorname{int} K$ だったので，$c \gg 0$ である.
- したがって，$Ey \leq c$ の各行を $c_i > 0$ で割ることで

$$K = \{y \in \mathbb{R}^m \mid Vy \leq \mathbf{1}\}$$

と書ける.

- ここで,

$$L = \{V'\lambda \mid \lambda \in \Delta_\ell\}$$

  とする.
- $L^* = K$ である.
- L は閉凸集合で L^* (= K) は有界なので, $L^{**} = L$ である.
- したがって,

$$L = L^{**} = K^* = \hat{P}$$

  である.
- つまり, L は $\hat{P}$ の V-representation である.