HOLOMATIC

禾多科技

规划控制相关知识分享

潘虎

目录

一、车辆运动学模型

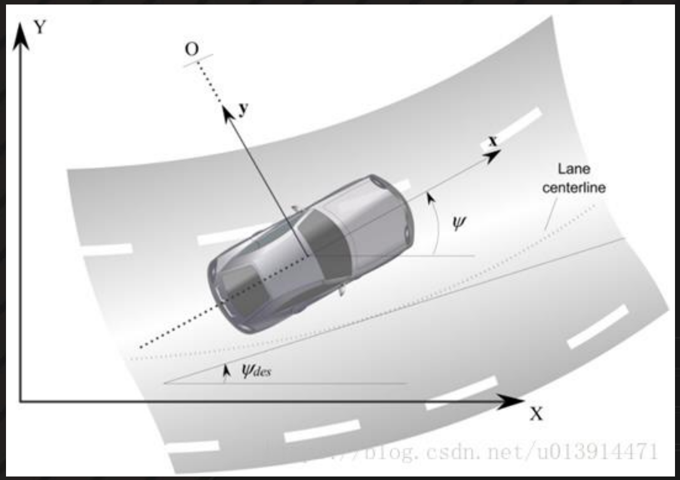
车辆的单车模型（简化模型）

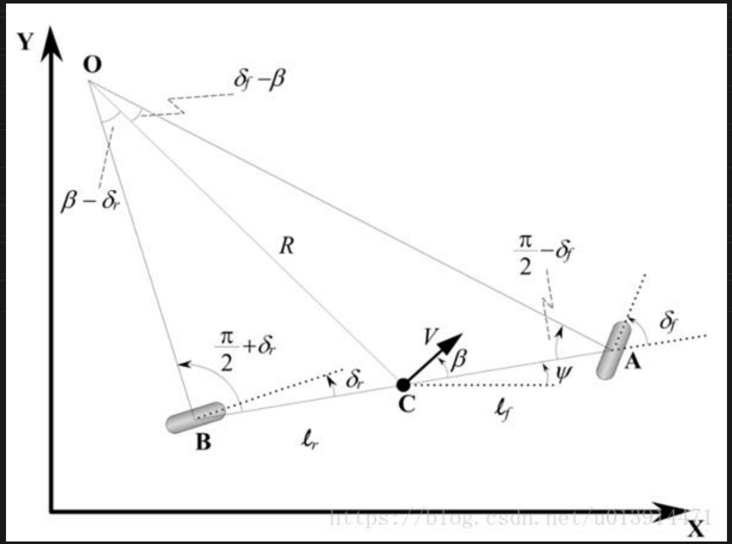
1. 不考虑车辆在Z轴方向的运动，只考虑XY水平面的运动，如图1所示；

2. 左右侧车轮转角一致，这样可将左右侧轮胎合并为一个轮胎，如图2所示；

3. 车辆行驶速度变化缓慢，忽略前后轴载荷的转移；

4. 车身及悬架系统是刚性的；





一、车辆运动学模型

$$\frac{\sin(\delta_f - \beta)}{\ell_f} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \delta_f)}{R} \qquad (1.1)$$

车辆的运动学模型

$$\frac{\sin(\beta - \delta_r)}{\ell_r} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \delta_r)}{R} \qquad (1.2)$$

联立1.1和1.2可以得到1.5公式

$$(\tan\delta_f - \tan\delta_r)\cos\beta = \frac{\ell_f + \ell_r}{R} \qquad (1.5)$$

低速环境下，车辆行驶路径的转弯半径变化缓慢，

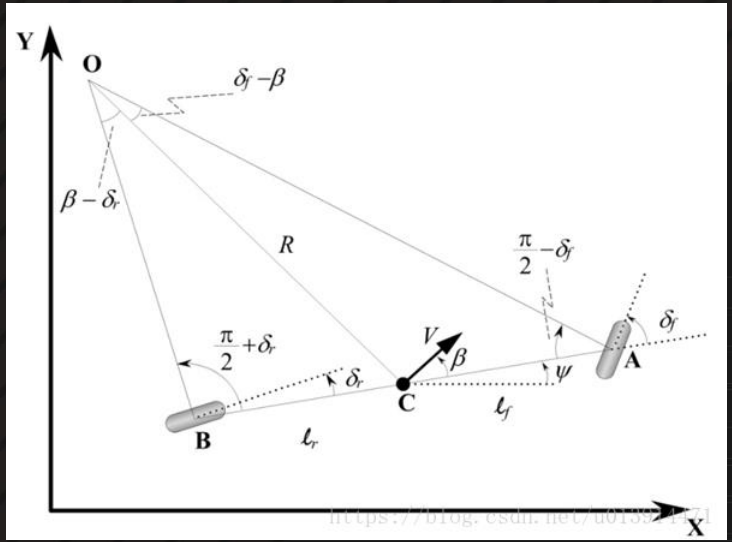
此时我们可以假设车辆的方向变化率等于车辆的角速度。

则车辆的角速度为

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R} \qquad (1.6)$$

$$\dot{\psi} = \frac{V\cos\beta}{\ell_f + \ell_r}(\tan\delta_f - \tan\delta_r) \qquad (1.7)$$

一、车辆运动学模型



车辆的运动学模型

在惯性坐标系XY下，可得到车辆的运动学模型：

$$\begin{cases} \dot{X} = V\cos(\psi+\beta) \\ \dot{Y} = V\sin(\psi+\beta) \\ \dot{\psi} = \frac{V\cos\beta}{\ell_f+\ell_r}(\tan\delta_f - \tan\delta_r) \end{cases} \tag{1.8}$$

这里假设后轮转角δr恒为0°，滑移角β极小，假设为0。

当状态量为ξ=[Xr,Yr,ψ]，被控量为u=[vr,δf]时，

公式(1.8)可转换为如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_r \\ \dot{Y}_r \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ \tan\delta_f/l \end{bmatrix} v_r \tag{1.15}$$

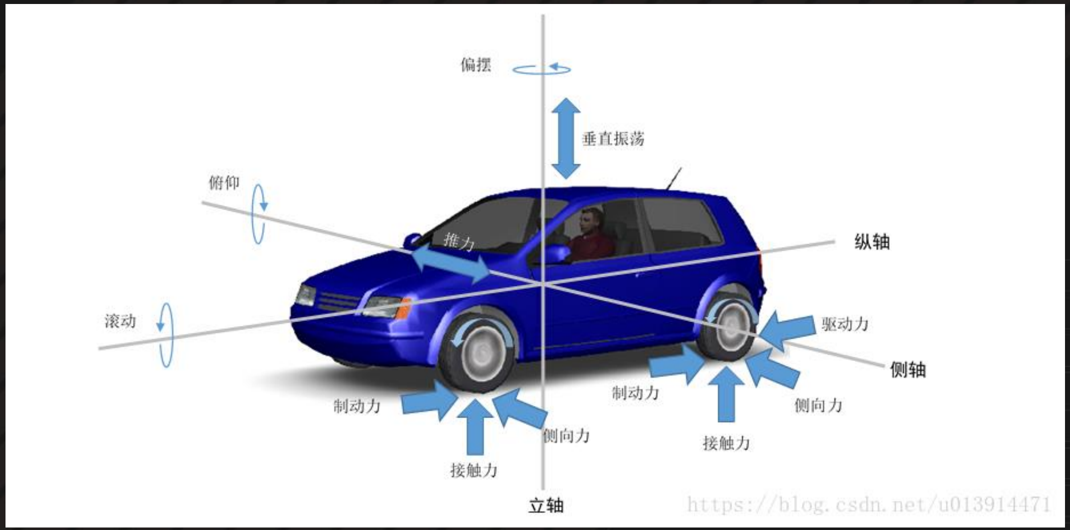
一、车辆动力学模型

正常情况下，车辆上的作用力沿着三个不同的轴分布：

1. 纵轴上的力包括驱动力和制动力，以及滚动阻力和拖拽阻力作滚摆运动；

2. 横轴上的力包括转向力、离心力和侧风力，汽车绕横轴作俯仰运动；

3. 立轴上的力包括车辆上下振荡施加的力，汽车绕立轴作偏摆或转向运动

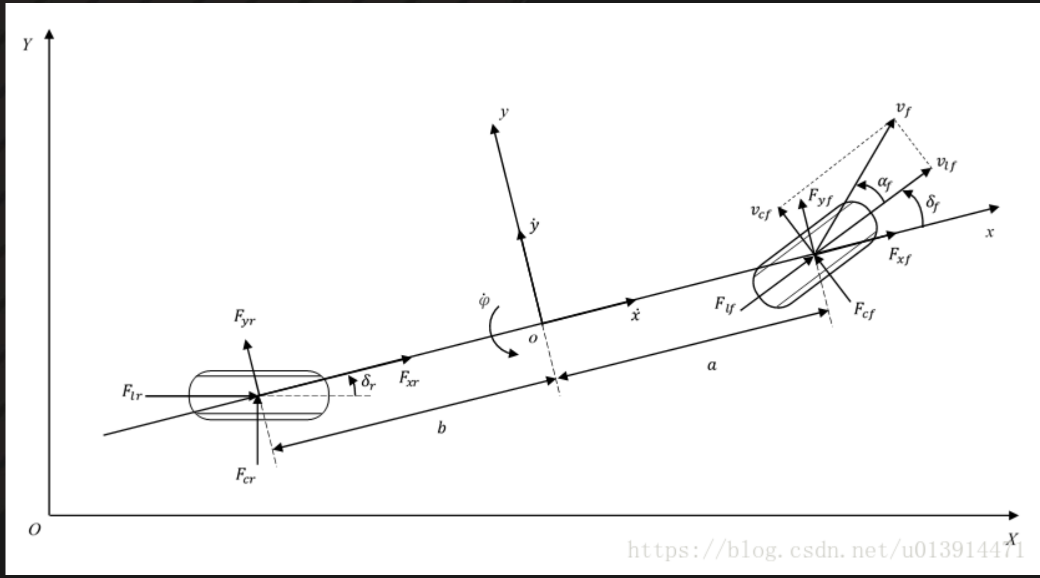


车辆的单车模型（简化模型）

1. 只考虑纯侧偏轮胎特性，忽略轮胎力的纵横向耦合关系；

2. 用单车模型来描述车辆的运动，不考虑载荷的左右转移；

3. 忽略横纵向空气动力学。



一、车辆动力学模型

根据牛顿第二定律，分别沿x轴，y轴和z轴作受力分析：

在X轴方向上：

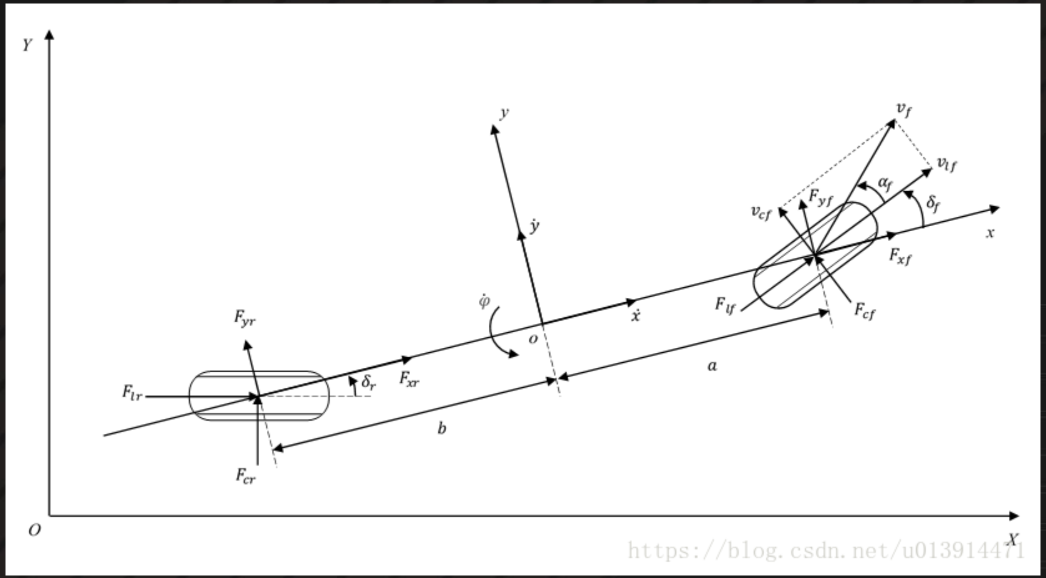
$$ma_x = F_{xf} + F_{xr} \tag{1}$$

在y轴方向上：

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} \tag{2}$$

在Z轴方向上：

$$I_z\ddot{\varphi} = aF_{yf} - bF_{yr} \tag{3}$$

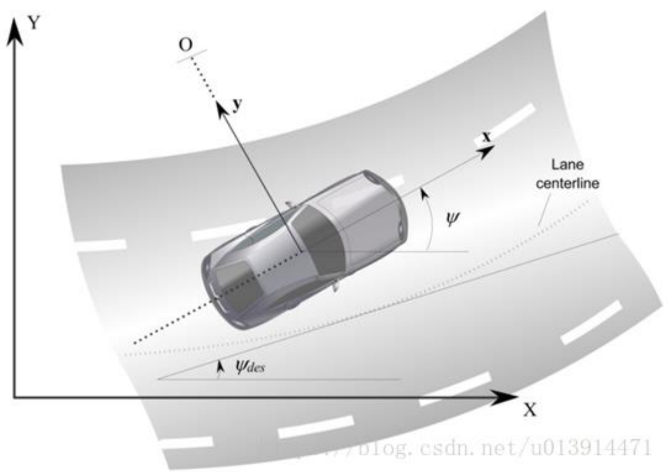


符号	定义
Flf, Flr	前、后轮胎受到的纵向力
Fcf, Fcr	前、后轮胎受到的侧向力
Fxf, Fxr	前、后轮胎受到的x x方向的力
Fyf, Fyr	前、后轮胎受到的y y方向的力
a	前悬长度
b	后悬长度
δf	前轮偏角
δr	后轮偏角
αf	前轮偏移角

二、车辆动力学模型

由车辆运动学可知：
y轴方向加速度ay由两部分构成：
y轴方向的位移相关的加速度y¨ 和向心加速度Vxφ

$$a_y = \ddot{y} + V_x\dot{\varphi}$$



公式2可以变成：

$$m(\ddot{y} + V_x\dot{\varphi}) = F_{yf} + F_{yr} \tag{4}$$

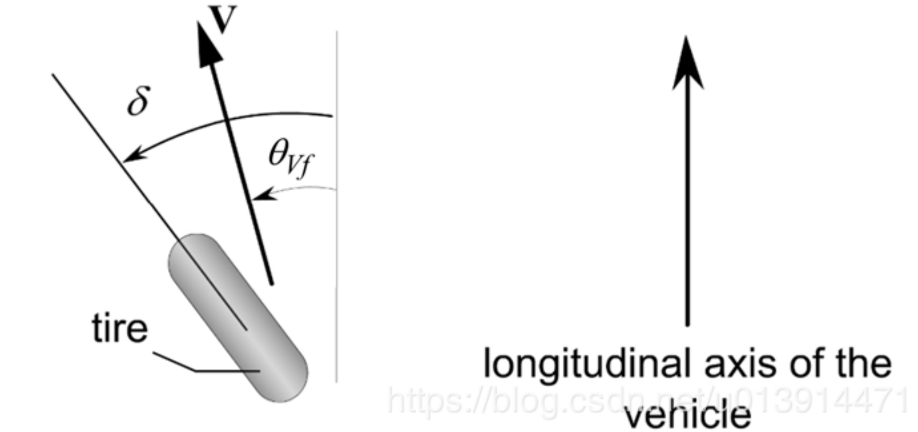
车辆轮胎模型：

前轮受到的横向力：

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{Vf}) \tag{7}$$

后轮受到的横向力：

$$F_{yr} = 2C_{\alpha r}(-\theta_{Vr}) \tag{8}$$

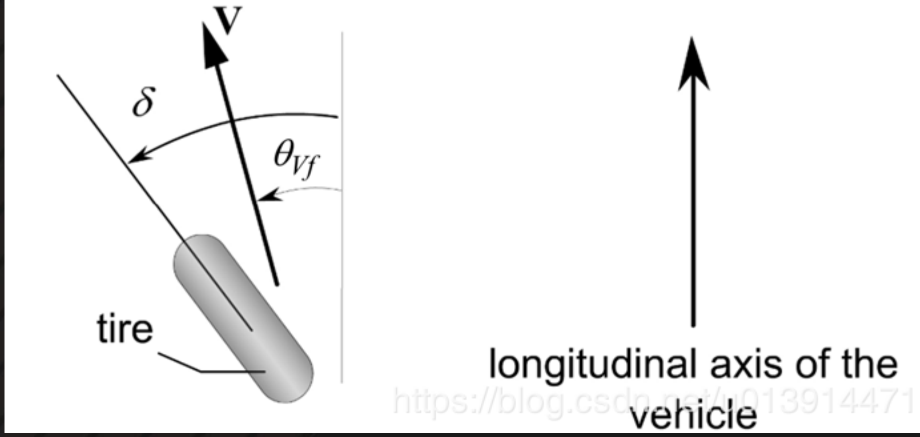


二、车辆动力学模型

由车辆轮胎模型可以得到：

$$\tan(\theta_{Vf}) = \frac{V_y + \ell_f \dot{\varphi}}{V_x} \tag{9}$$

$$\tan(\theta_{Vr}) = \frac{V_y - \ell_r \dot{\varphi}}{V_x} \tag{10}$$



由于车辆的前后轮转动角度较小，近似可以得到：

$$\theta_{Vf} = \frac{\dot{y} + \ell_f \dot{\varphi}}{V_x} \tag{11}$$

$$\theta_{Vr} = \frac{\dot{y} - \ell_r \dot{\varphi}}{V_x} \tag{12}$$

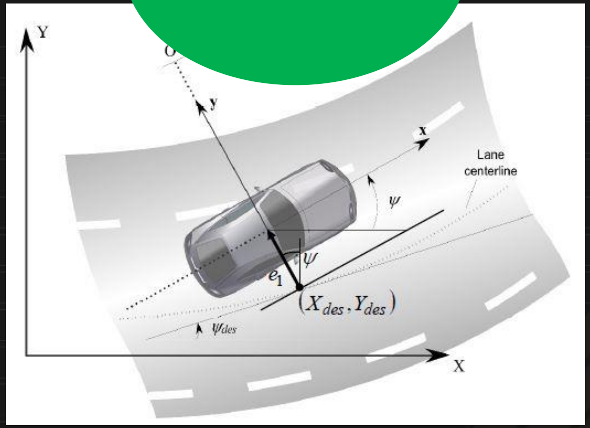
二、车辆动力学模型

将公式5、公式6、公式11、公式12代入公式2、公式3中可得动力学模型：

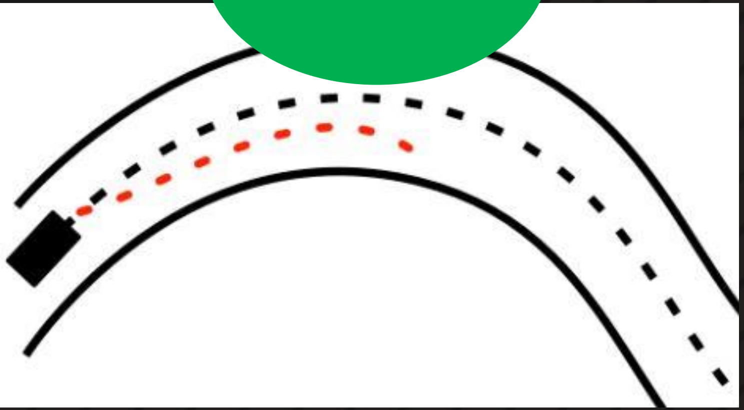
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{af}+2C_{ar}}{mV_x} & 0 & -V_x-\frac{2C_{af}\ell_f-2C_{ar}\ell_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{af}\ell_f-2C_{ar}\ell_r}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2C_{af}\ell_f^2+2C_{ar}\ell_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{af}}{m} \\ 0 \\ \frac{2\ell_f C_{af}}{I_z} \end{bmatrix} \delta \tag{13}$$

三、MPC控制算法

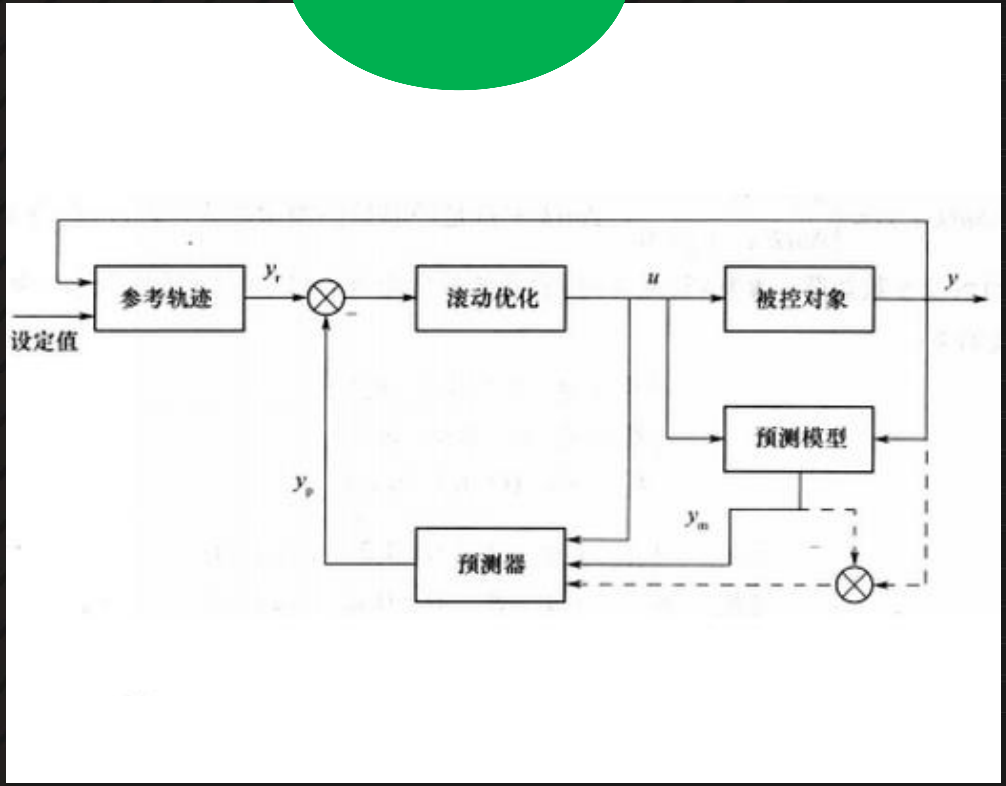
模型



预测



控制



三、MPC控制算法

方向盘控制模型：

横向控制主要通过控制轮胎转角实现，而对于驾驶员来说，可直接操控的是方向盘角度，因此在搭建车辆动力学模型时，可以以相对于道路的方向和距离误差为状态变量的动力学模型。

假设，e1 为横向误差，车辆质心距车道中心线的距离，e2 为航向误差，车辆纵向速度为Vx ，车辆转弯半径为R 。

车身转过期望角度所需转角速度：

$$\dot{\varphi}_{des} = \frac{V_x}{R} \tag{15}$$

所需的横向加速度：

$$a_{y_{des}} = \frac{V_x^2}{R} = V_x \dot{\varphi}_{des} \tag{16}$$

三、MPC控制算法

方向盘控制模型：

横向加速度误差：

$$\ddot{e}_1 = a_y - a_{y_{des}} = (\ddot{y} + V_x\dot{\varphi}) - \frac{V_x^2}{R} = \ddot{y} + V_x(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{des}) \tag{17}$$

横向速度误差：

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + V_x(\varphi - \varphi_{des}) \tag{18}$$

航向误差：

$$e_2 = \varphi - \varphi_{des} \tag{19}$$

将这些公式带入车辆的动力学模型公式中，可以得到方向盘控制的动力学模型：

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{af}+2C_{ar}}{mV_x} & \frac{2C_{af}+2C_{ar}}{m} & \frac{-2C_{af}\ell_f+2C_{ar}\ell_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2C_{af}\ell_f-2C_{ar}\ell_r}{I_zV_x} & \frac{2C_{af}\ell_f-2C_{ar}\ell_r}{I_z} & -\frac{2C_{af}\ell_f^2+2C_{ar}\ell_r^2}{I_zV_x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{af}}{m} \\ 0 \\ \frac{2C_{af}\ell_f}{I_z} \end{bmatrix}\delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{af}\ell_f-2C_{ar}\ell_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2C_{af}\ell_f^2+2C_{ar}\ell_r^2}{I_zV_x} \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{des}$$

三、MPC控制算法

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{mV_x} & \frac{2C_{\alpha f}+2C_{\alpha r}}{m} & -V_x-\frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2l_f C_{\alpha f}-2l_r C_{\alpha r}}{I_z V_x} & \frac{2C_{\alpha f}l_f-2C_{\alpha r}l_r}{I_z} & -\frac{2l_f^2 C_{\alpha f}+2l_r^2 C_{\alpha r}}{I_z V_x} \end{bmatrix}}_{At} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}
$$

$$
+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2l_f C_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix}}_{Bt} \delta + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}l_f - 2C_{\alpha r}l_r}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2C_{\alpha f}l_f^2 + 2C_{\alpha r}l_r^2}{I_z V_x} \end{bmatrix}}_{Ct} \dot{\psi}_{des} \tag{9}
$$

e_1 : lat error

e_2 : heading error

三、MPC控制算法

$$\dot{x} = A_t x + B_t u + C_t \tag{10}$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + C \tag{11}$$

三、MPC控制算法

预测过程：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + C \quad (12)$$

$$x(k+2) = A^2x(k) + ABu(k) + Bu(k+1) + AC + C$$

$$x(k+3) = A^3x(k) + A^2Bu(k) + ABu(k+1) + Bu(k+2) + A^2C + AC + C$$

$$\vdots$$

$$x(k+n) = A^nx(k) + A^{n-1}Bu(k) + \cdots + Bu(k+n-1) + A^{n-1}C + \cdots + AC + C$$

n: steps of prediction

$$\Downarrow$$

$$X = M + Ku + CC \quad (13)$$

三、MPC控制算法

预测过程：

$$X = M + Ku + CC; \qquad (13)$$

$$X = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \\ x(k+3) \\ \vdots \\ x(k+n) \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} Ax(k) \\ A^2x(k) \\ A^3x(k) \\ \vdots \\ A^nx(k) \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & 0 \\ A^2B & AB & B & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{n-1}B & \cdots & AB & B \end{bmatrix}$$

$$CC = \begin{bmatrix} C \\ AC + C \\ A^2C + AC + C \\ \vdots \\ A^{n-1}C + \cdots + AC + C \end{bmatrix}$$

三、MPC控制算法

滚动优化过程：

$$J = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u)dt \qquad (14)$$

x: State vector

u: Input vector

Substituting (13) $\mathrm{X} = \mathrm{M} + \mathrm{Ku} + \mathrm{CC}$ into the above equation (14):

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} [(Ku + M + CC)^T Q (Ku + M + CC) + u^T R u]\mathrm{d}t \qquad (15)$$

三、MPC控制算法

滚动优化过程：

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(Ku_i+M+CC)^TQ(Ku_i+M+CC)+{u_i}^TRu_i] \qquad (16)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[{u_i}^T(\mathrm{K}^TQK+R)u_i+(M+CC)^TQKu_i+{u_i}^T\mathrm{K}^TQ(M+CC)+\cancel{(M+CC)^TQ(M+CC)}] \qquad (17)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}{u_i}^T\underline{(\mathrm{K}^TQK+R)}u_i+{u_i}^T\underline{\mathrm{K}^TQ(M+CC)}] \qquad (18)$$

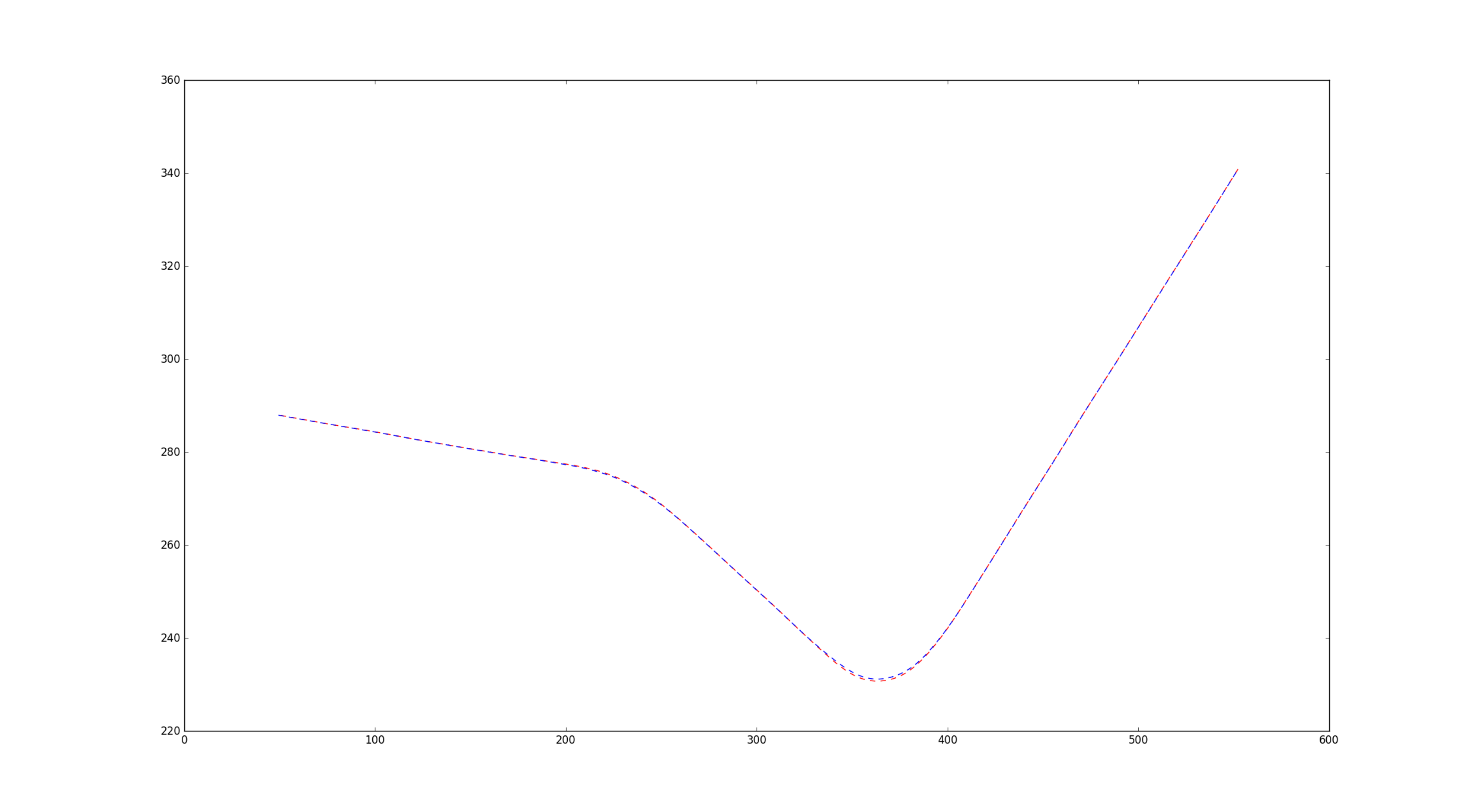
QP： $q(x)=\frac{1}{2}x^THx+x^T\mathrm{C}$

$$H=K^TQK+R$$
$$C=K^TQ(M+CC) \qquad (19)$$

三、MPC控制算法

模型预测控制器的一般工作步骤可以概括如下：
1、在t时刻，结合历史信息和当前状态以及预测模型，预测N步的系统输出；
2、结合约束条件等，设计目标函数，计算最优控制解u∗(t)，输入到被控车辆，使其在当前控制量下运动；
3、获取车辆状态x(t)，输入到状态估计器中，对那些无法直接用传感器获取或观测成本较高的的状态量进行估计，然后将x^(t))输入到MPC控制器，再次进行优化求解，以得到未来一段时间的预测控制序列；
4、然后在t+1时刻重复上述步骤，如此，滚动地实现带约束的优化问题，从而实现对被控对象的连续控制。

三、MPC控制算法仿真实例



参考文献

【1】Rajamani R. Vehicle Dynamics and Control[M]. Springer Science, 2006.
【2】龚建伟, 姜岩, 徐威. 无人驾驶车辆模型预测控制[M]. 北京理工大学出版社, 2014.

HOLOMATIC

禾多科技