Predicados e Quantificadores

Matemática Discreta

Prof. Emanuel Estrada

centro de ciências computacionais

Predicados e Quantificadores

- A lógica proposicional não consegue expressar adequadamente o significado de proposições em matemática e em linguagem natural

“Existe um computador na rede sob ataque de um cracker.”

- **Lógica de predicados**: usada para expressar o significado de um amplo grupo de proposições em matemática e em ciência da computação

Predicados

- Generalização de proposições – ***função proposicional*** ou ***predicado***
- Predicados tornam-se proposições quando a variável recebe um valor do *Domínio* ou quando é quantificada

  “$x > 3$”, “$x = y + 3$”, “$x + y = z$”

  “computador *x* está sob ataque de um hacker”

  “computador *x* está funcionando apropriadamente”
- Não são **verdadeiras** nem **falsas**

Predicados

- A declaração “**x é maior que 3**” tem duas partes:
  - A variável *x*: sujeito da declaração
  - “é maior que 3”: **predicado** – propriedade que o sujeito pode ter
- $P(x)$: “*x* é maior que 3”
- Uma vez atribuído um valor para *x*, a declaração torna-se uma proposição e tem um valor-verdade

Predicados

- Exemplo 1: Seja $P(x)$ a declaração "x > 3". Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

- Exemplo 2: Seja $Q(x, y)$ a representação de "x = y + 3". Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Predicados

- Exemplo 1: Seja $P(x)$ a declaração "x > 3". Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

P(4) é verdadeiro e P(2) é falso

- Exemplo 2: Seja $Q(x, y)$ a representação de "x = y + 3". Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Predicados

- Exemplo 1: Seja $P(x)$ a declaração "x > 3". Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

P(4) é verdadeiro e P(2) é falso

- Exemplo 2: Seja $Q(x, y)$ a representação de "x = y + 3". Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Q(1,2) é falso e Q(3,0) é verdadeiro.

Predicados

- Exemplo 1: Seja $P(x)$ a declaração “x > 3”. Qual o valor-verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

P(4) é verdadeiro e P(2) é falso

- Exemplo 2: Seja $Q(x, y)$ a representação de “x = y + 3”. Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Q(1,2) é falso e Q(3,0) é verdadeiro.

- Em geral uma afirmação que envolva *n* variáveis, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pode ser indicada por $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - *P* é chamado de **predicado *n*-ário**

Predicados

- Exemplo 3: Considere a afirmação:

```
if (x > 0) {
    x = x+1;
}
```

  - $P(x)$ é “$x > 0$”

Exercícios

1. Considere $P(x)$ como a proposição "x $\leq$ 4". Quais são os valores-verdade das proposições abaixo?

a) $P(0)$ **b)** $P(4)$ **c)** $P(6)$

2. Considere $P(x)$ como a proposição "a palavra x contém a letra a". Quais são os valores-verdade das proposições abaixo?

a) $P(\text{orange})$ **b)** $P(\text{lemon})$

c) $P(\text{true})$ **d)** $P(\text{false})$

Exercícios

3. Considere $Q(x, y)$ como a proposição "x é a capital de y." Quais os valores-verdade das proposições a seguir?

a) Q(Denver, Colorado)

b) Q(Detroit, Michigan)

c) Q(Massachusetts, Boston)

d) Q(Nova York, Nova York)

Exercícios

4. Constate o valor de x depois que a proposição **if** $P(x)$ **then** $x := 1$ for executada, em que $P(x)$ é a proposição "$x > 1$", se o valor de x, quando essa proposição for alcançada, for

a) $x = 0$.

b) $x = 1$.

c) $x = 2$.

Quantificadores

- **Quantificação**: criar proposições a partir de predicados
  - Forma de dizer se um predicado é verdadeiro ou falso para um conjunto de elementos
  - Quantificações em português: *muitos, todos, alguns, nenhum e poucos*

Quantificadores

- Dois tipos de quantificações
  - **Universal**: predicado é verdadeiro para todos os elementos em consideração
  - **Existencial**: existe um ou mais elementos para os quais o predicado é verdadeiro
- A área que estuda predicados e quantificadores é chamada de **cálculo de predicados**

Quantificador Universal

- Definição: A ***quantificação universal*** de *P*(*x*) é a afirmação

  "*P*(*x*) é válida para todos os valores de *x* do domínio."
- A notação $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ indica a quantificação universal de *P*(*x*). Aqui $\forall$ é chamado de quantificador universal.
- Lemos $\forall x P(x)$ como "**para todo *x* *P*(*x*)**".
- Um elemento para o qual *P*(*x*) é falsa é chamada de **contraexemplo** de $\forall x P(x)$.

Quantificador Universal

- Podemos ler ∀ também como "para cada" ou "para qualquer"
- O significado da quantificação universal de $P(x)$ muda quando mudamos o domínio.

O domínio deve ser sempre especificado

Quantificador Universal

Significado do quantificador universal:

- **Sentença**: $\forall x P(x)$
- **Quando é verdadeira**? *P*(*x*) é verdadeiro para todo *x*.
- **Quando é falsa**? Existe um *x* tal que *P*(*x*) é falsa.

Quantificador Universal

- Exemplo: Seja *P*(*x*) a declaração “ x + 1 > x”. Qual o valor verdade da quantificação $\forall x P(x)$, no **domínio de todos os números reais** $(\mathbb{U} = \mathbb{R})$?

Quantificador Universal

- Exemplo: Seja *P*(*x*) a declaração " x + 1 > x". Qual o valor verdade da quantificação $\forall x P(x)$, no domínio de todos os números reais ($\mathbb{U} = \mathbb{R}$)?

  $\forall x P(x)$ é verdadeira

Quantificador Universal

- Exemplo: Seja $Q(x)$ a declaração "$x < 2$". Qual o valor-verdade da quantificação $\forall x Q(x)$, em que o <u>domínio consiste em todos os números reais</u>?

Quantificador Universal

- Exemplo: Seja $Q(x)$ a declaração "$x < 2$". Qual o valor-verdade da quantificação $\forall x Q(x)$, em que o domínio consiste em todos os números reais?

Falsa! Vemos que $x = 3$ é um contraexemplo.

Quantificador Universal

- Exemplo: Seja *P*(*x*) a declaração "$x^2 > 0$". Para mostrar que $\forall x P(x)$ é falsa onde o universo de discurso consiste em todos os números inteiros ($\mathbb{U} = \mathbb{Z}$), damos um contraexemplo.

Quantificador Universal

- Exemplo: Seja *P*(*x*) a declaração “$x^2 > 0$”. Para mostrar que $\forall x P(x)$ é falsa onde o universo de discurso consiste em todos os números inteiros $(\mathbb{U} = \mathbb{Z})$, damos um contraexemplo.

Vemos que ***x* = 0** é um contraexemplo.

Quantificador Universal

- Exemplo: Qual o valor-verdade de $\forall x P(x)$, em que *P*(*x*) é a proposição " $x^2 < 10$" e o <u>domínio é o conjunto dos inteiros positivos que não excedem 4</u> $(\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4\})$?

Quantificador Universal

- Exemplo: Qual o valor-verdade de $\forall x P(x)$, em que *P*(*x*) é a proposição " $x^2 < 10$" e o domínio é o conjunto dos inteiros positivos que não excedem 4 $(\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4\})$?

  A declaração $\forall x P(x)$ é o mesmo que a conjunção

  $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$

  $\forall x P(x)$ é falsa pra *P*(4)

- Obs.: Quando todos os elementos do domínio podem ser listados – seja x_1, x_2, ..., x_n, a quantificação universal $\forall x P(x)$ é o mesmo que a conjunção

$$\forall x P(x) \leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \ldots \wedge P(x_n)$$

Exercício

- Qual o valor-verdade de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? E qual o valor-verdade dessa proposição se o domínio são os número inteiros?

Exercício

- Qual o valor-verdade de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? E qual o valor-verdade dessa proposição se o domínio são os número inteiros?

Para os números reais é falsa.

Contra-exemplo: $0 < 0\ x < 1$

Exercício

- Qual o valor-verdade de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? E qual o valor-verdade dessa proposição se o domínio são os número inteiros?

Para os números inteiros é verdadeira.

Quantificador Existencial

- Definição: A *quantificação existencial* de $P(x)$ é a proposição

  "Existe um elemento x do domínio tal que $P(x)$."
- Usamos a notação $\exists x P(x)$ para a quantificação existencial de $P(x)$.
- Aqui $\exists$ é chamado de **quantificador existencial**.

Quantificador Existencial

- Lemos ∃ como “existe”, “há pelo menos um”, “existe algum” ou “para algum”
- Permite construir uma proposição que é verdadeira se e somente se $P(x)$ é verdadeira para, pelo menos, um valor no domínio.

Quantificador Existencial

- Da mesma forma, um domínio deve sempre ser especificado quando uma proposição $\exists x P(x)$ é usada.
- A quantificação $\exists x P(x)$ pode ser lida como:
  - "Existe um *x* tal que *P*(*x*)."
  - "Existe pelo menos um *x* tal que *P*(*x*)."
  - "Para algum *x* *P*(*x*)."

Quantificador Existencial

Significado do quantificador existencial:

- **Sentença**: $\exists x P(x)$
- **Quando é verdadeira**? Existe um *x* tal que P(*x*) é verdadeira.
- **Quando é falsa**? *P*(*x*) é falsa para todo *x*.

Quantificador Existencial

- Exemplo: Seja $P(x)$ a expressão "$x > 3$". Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x P(x)$ no domínio dos números reais $(\mathbb{U} = \mathbb{R})$?

- Exemplo 2: Seja $Q(x)$ a expressão "$x = x + 1$". Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x Q(x)$ no domínio dos números reais?

Quantificador Existencial

- Exemplo: Seja *P*(*x*) a expressão “*x* > 3”. Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x P(x)$ no domínio dos números reais $(\mathbb{U} = \mathbb{R})$?

  Verdadeira para qualquer x>3

- Exemplo 2: Seja *Q*(*x*) a expressão “x = x + 1”. Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x Q(x)$ no domínio dos números reais?

  Falsa.

Quantificador Existencial

- Exemplo 3: Qual o valor-verdade de $\exists x P(x)$, em que $P(x)$ é a proposição "$x^2 > 10$" e o domínio é o conjunto dos inteiros positivos que não excedem 4?

Quantificador Existencial

- Exemplo 3: Qual o valor-verdade de $\exists x P(x)$, em que $P(x)$ é a proposição "$x^2 > 10$" e o domínio é o conjunto dos inteiros positivos que não excedem 4?

  Como o domínio é {1, 2, 3, 4}, a proposição $\exists x P(x)$ é a mesma disjunção

  $$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

  $\exists x P(x)$ é verdadeira pra $P(4)$

- Obs.: Quando todos os elementos do domínio podem ser listados – seja x_1, x_2, ..., x_n –, a quantificação existencial $\exists x P(x)$ é a mesma que a disjunção

  $$\boldsymbol{\exists x P(x) \leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \ldots \vee P(x_n)}$$

Lembrete

TABELA 1 **Quantificadores.**		
Sentença	***Quando é verdadeira?***	***Quando é falsa?***
$\forall x P(x)$	$P(x)$ é verdadeira para todo x.	Existe um x tal que $P(x)$ é falsa.
$\exists x P(x)$	Existe um x tal que $P(x)$ é verdadeira.	$P(x)$ é falsa para todo x.

- Em geral, é assumido implicitamente que todos os domínios dos quantificadores são não vazios.
- Se o domínio é vazio, então
  - $\forall P(x)$ é verdadeira
  - $\exists x P(x)$ é falsa

Quantificador de Unicidade

- Quantificador existencial de unicidade: $\exists!$ ou $\exists_1$
- *P*(*x*) é verdadeiro *para um e somente um x* no universo de discurso.
- Notação:

$$\exists!\, xP(x)$$

- A quantificação $\exists!\, xP(x)$ pode ser lida como:
  - “Existe um *x* e somente um *x* tal que *P*(*x*).”

Prioridade dos Quantificadores

- Os quantificadores ∀ e ∃ têm prioridade maior que todos os operadores lógicos do cálculo proposicional

$$\forall x P(x) \lor Q(x) \equiv \left(\forall x P(x)\right) \lor Q(x)$$

$$\forall x P(x) \lor Q(x) \not\equiv \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

Exercícios

1) Considere $P(x)$ como a proposição “ x passa mais do que cinco horas em aula todos os dias”, em que o domínio de x são todos os estudantes. Expresse cada uma dessas quantificações em português.

a) $\exists x P(x)$

b) $\forall x P(x)$

c) $\exists x \neg P(x)$

d) $\forall x \neg P(x)$

Exercícios

2) Considere $C(x)$ como a proposição "x tem um gato", $D(x)$ como "x tem um cachorro" e $F(x)$ como "x tem um furão". Expresse cada uma dessas proposições em termos de $C(x)$, $D(x)$, $F(x)$, quantificadores e conectivos lógicos. O domínio são todos os estudantes de sua sala.

a) Um estudante de sua sala tem um gato, um cachorro e um furão.

b) Todos os estudantes de sua sala têm um gato, um cachorro ou um furão.

c) Algum estudante de sua sala tem um gato e um furão, mas não um cachorro.

d) Nenhum estudante de sua sala tem um gato, um cachorro e um furão.

e) Para cada um desses animais, gatos, cachorros e furões, há um estudante em sua sala que possui um dos três como animal de estimação.

Exercícios

3) Determine o valor verdade de cada uma destas proposições, se o domínio for os números inteiros.

a) $\forall n(n + 1 > n)$

b)$\exists n(2n = 3n)$

c) $\exists n(n = -n)$

d))$\forall n(n^2 \geq n)$

Exercícios

4) Suponha que o domínio da função proposicional P(x) sejam os números inteiros 1, 2, 3, 4 e 5. Expresse estas proposições sem usar quantificadores, mas, sim, apenas negações, disjunções e conjunções.

a) $\exists x P(x)$

b) $\forall x P(x)$

c) $\neg\exists x P(x)$

d) $\neg\forall x P(x)$

e) $\forall x((x \neq 3) \rightarrow P(x)) \vee \exists x \neg P(x)$

Exercícios

5) Para cada uma destas proposições, encontre um domínio para que a proposição seja verdadeira e um domínio para que a proposição seja falsa.

a) Todos estão estudando matemática discreta.

b) Todo têm mais de 17 anos.

c) Duas pessoas têm a mesma mãe.

d) Nem todo par de pessoas diferentes tem a mesma avó.

Exercícios

6) Transcreva cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.

a) Ninguém é perfeito.

b) Nem todos são perfeitos.

c) Todos os seus amigos são perfeitos.

d) Nem todos são seus amigos ou alguém não é perfeito

Exercícios

7) Encontre um contraexemplo, se possível, para estas proposições quantificadas universalmente, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.

a) $\forall x(x^2 \geq x)$

b) $\forall x(x > 0 \vee x < 0))$

c) $\forall x(x = 1)$

Exercícios

8) Considere F(x, y) como a proposição “ x pode enganar y”, em que o domínio são todas as pessoas do mundo. Use quantificadores para expressar cada uma das proposições abaixo.

a) Todos podem enganar Fred.

b) Evelyn pode enganar a todos.

c) Não há exatamente uma pessoa a quem todos podem enganar.

d) Ninguém pode enganar a si próprio.

e) Há alguém que pode enganar exatamente uma pessoa além de si próprio.

Exercícios

9) Expresse cada uma das proposições abaixo usando quantificadores. Depois, forme a negação da proposição; nenhuma negação pode ficar do lado esquerdo de um quantificador. Em seguida, expresse a negação em português. (Não use simplesmente as palavras “Não é o caso de”.)

a) Alguns cães velhos aprendem truques novos.

b) Nenhum coelho sabe cálculo.

c) Não há cães que falem.

d) Não há nesta sala alguém que fale francês ou russo.

Exercícios

10) Considere M(x, y) como “x enviou um e-mail a y” e T(x, y) como “x telefonou para y”, em que o domínio são todos os estudantes em sua sala. Use quantificadores para expressar cada uma das proposições a seguir. (Assuma que todos os e-mails que foram enviados foram recebidos; o que geralmente não acontece.)

a) Chou nunca mandou um e-mail para Koko.

b) Arlene nunca mandou um e-mail ou telefonou para Sarah.

c) José nunca recebeu um e-mail de Débora.

d) Todo estudante de sua sala mandou um e-mail para Ken.

e) Ninguém de sua sala telefonou para Nina.

f) Há dois estudantes diferentes que mandaram e-mails entre si ou telefonaram para outra pessoa da sala.

Predicados e Quantificadores (cont.)

Matemática Discreta

Prof. Emanuel Estrada

centro de ciências computacionais

Negando Expressões Quantificadas

- Considere a negação da seguinte expressão:

  "Todo estudante na sua turma teve aulas de cálculo"

- Essa expressão é uma quantificação universal

$$\forall x P(x)$$

- Onde
  - $P(x)$: "x teve aula de cálculo"
  - Domínio: todos estudantes da turma

Negando Expressões Quantificadas

- A negação da proposição “Todo estudante na sua turma teve aulas de cálculo” é

“Não é o caso de todos os alunos de sua turma terem feito aulas de cálculo”

Isso é equivalente a

$$\neg\forall x P(x)$$

Negando Expressões Quantificadas

- A negação da proposição "Todo estudante na sua turma teve aulas de cálculo" é

"Não é o caso de todos os alunos de sua turma terem feito aulas de cálculo"

Isso é equivalente a

$$\neg\forall x P(x)$$

"Existe um estudante na sua turma que não teve aula de cálculo"

- Em outras palavras, isto é a quantificação da negação do predicado original

$$\exists x \neg P(x)$$

Negando Expressões Quantificadas

Equivalências envolvendo o operador de negação

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Leis de De Morgan para Quantificadores

- Quando o domínio do predicado $P(x)$ consiste de n elementos, onde $n>0$, as regras de negação para proposições quantificadas são exatamente como as leis de De Morgan.

Leis de De Morgan para Quantificadores

$$\neg\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Leis de De Morgan para Quantificadores

$$\neg\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Representando-se a quantificação universal por conjunções:

$$\forall xP(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

Leis de De Morgan para Quantificadores

$$\neg\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Representando-se a quantificação universal por conjunções:

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

$$\neg\forall x P(x) \equiv \neg\big(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)\big)$$

Leis de De Morgan para Quantificadores

$$\neg \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Representando-se q quantificação universal por conjunções:

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \land P(2) \land \cdots \land P(x_n)$$

$$\neg \forall x P(x) \equiv \neg\big(P(x_1) \land P(2) \land \cdots \land P(x_n)\big)$$

Aplicando-se a lei de De Morgan:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \neg P(x_1) \lor \neg P(2) \lor \cdots \lor \neg P(x_n)$$

Leis de De Morgan para Quantificadores

$$\neg\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Representando-se q quantificação universal por conjunções:

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

$$\neg\forall x P(x) \equiv \neg\big(P(x_1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)\big)$$

Aplicando-se a lei de De Morgan:

$$\neg\forall x P(x) \equiv \neg P(x_1) \vee \neg P(2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)$$

Usando a equivalência entre disjunções e o quantificador existencial:

$$\neg P(x_1) \vee \neg P(2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Leis de De Morgan para Quantificadores

$$\neg\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Representando-se q quantificação universal por conjunções:

$$\forall xP(x) \equiv P(x_1) \land P(2) \land \cdots \land P(x_n)$$

$$\neg\forall xP(x) \equiv \neg\big(P(x_1) \land P(2) \land \cdots \land P(x_n)\big)$$

Aplicando-se a lei de De Morgan:

$$\neg\forall xP(x) \equiv \neg P(x_1) \lor \neg P(2) \lor \cdots \lor \neg P(x_n)$$

Usando a equivalência entre disjunções e o quantificador existencial:

$$\neg P(x_1) \lor \neg P(2) \lor \cdots \lor \neg P(x_n) \equiv \exists x\neg P(x)$$

$$\therefore\ \neg\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \equiv \exists \boldsymbol{x}\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Exemplo 1

- Quais as negações de “Existe um politico honesto” e “Todos os brasileiros comem churrasco”?

Exemplo 1

- Quais as negações de “Existe um politico honesto” e “Todos os brasileiros comem churrasco”?

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$: x é honesto

$\mathbb{U} = políticos$

$\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

Exemplo 1

- Quais as negações de “Existe um politico honesto” e “Todos os brasileiros comem churrasco”?

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$: x é honesto
$\mathbb{U} = políticos$
$\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

Negação:
$\neg \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \equiv \forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

Exemplo 1

- Quais as negações de “Existe um politico honesto” e “Todos os brasileiros comem churrasco”?

$\boldsymbol{H(x)}$: x é honesto
$\mathbb{U} = políticos$
$\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{C(x)}$: x come churrasco
$\mathbb{U} = brasileiros$
$\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$

Negação:
$\neg \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \equiv \forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

Exemplo 1

- Quais as negações de “Existe um politico honesto” e “Todos os brasileiros comem churrasco”?

$\boldsymbol{H(x)}$: x é honesto
$\mathbb{U} = políticos$
$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

Negação:
$\neg\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \equiv \forall \boldsymbol{x}\neg\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{C(x)}$: x come churrasco
$\mathbb{U} = brasileiros$
$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$

Negação:
$\neg\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \equiv \exists \boldsymbol{x}\neg\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$

Exemplo 2

- Quais as negações das proposições $\forall x(x^2 > x)$ e $\exists x(x^2 = 2)$?

$\forall x(x^2 > x)$
$P(x)$: $x^2 > x$

$\exists x(x^2 = 2)$
$Q(x)$: $x^2 = 2$

Exemplo 2

- Quais as negações das proposições $\forall x(x^2 > x)$ e $\exists x(x^2 = 2)$?

$\forall x(x^2 > x)$
$P(x)$: $x^2 > x$

Negação:
$\neg\forall x P(x)$
$\exists x \neg P(x)$
$\exists x \neg(x^2 > x)$
$\exists x(x^2 \leq x)$

$\exists x(x^2 = 2)$
$Q(x)$: $x^2 = 2$

Negação:
$\neg\exists x Q(x)$
$\forall x \neg Q(x)$
$\forall x \neg(x^2 = x)$
$\forall x(x^2 \neq 2)$

Exemplo 3

- Mostre que $\neg\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ e $\exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$ são logicamente equivalentes.

$$\neg\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \equiv \exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$$

Exemplo 3

- Mostre que $\neg\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big)$ e $\exists x\big(P(x) \land \neg Q(x)\big)$ são logicamente equivalentes.

$$\neg\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \equiv \exists x\big(P(x) \land \neg Q(x)\big)$$

Da equivalência lógica

$$p \to q \equiv \neg p \lor q$$

Exemplo 3

- Mostre que $\neg\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big)$ e $\exists x\big(P(x) \land \neg Q(x)\big)$ são logicamente equivalentes.

$$\neg\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \equiv \exists x\big(P(x) \land \neg Q(x)\big)$$

Da equivalência lógica

$$p \to q \equiv \neg p \lor q$$

Tem-se:

$$\neg\forall x\big(\neg P(x) \lor Q(x)\big)$$

Exemplo 3

- Mostre que $\neg\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ e $\exists x\big(P(x) \land \neg Q(x)\big)$ são logicamente equivalentes.

$$\neg\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \equiv \exists x\big(P(x) \land \neg Q(x)\big)$$

Da equivalência lógica

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \lor q$$

Tem-se:

$$\neg\forall x\big(\neg P(x) \lor Q(x)\big)$$

Aplicando-se a lei de De Morgan para quantificadores:

$$\exists x \neg\big(\neg P(x) \lor Q(x)\big)$$

Exemplo 3

- Mostre que $\neg\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$ e $\exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$ são logicamente equivalentes.

$$\neg\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \equiv \exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$$

Da equivalência lógica

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Tem-se:

$$\neg\forall x\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big)$$

Aplicando-se a lei de De Morgan para quantificadores:

$$\exists x \neg\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big)$$

Agora, aplicando-se De Morgan para proposições

$$\boldsymbol{\exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)}$$

Quantificadores Agrupados

- Quantificadores são agrupados quando um está no **escopo** do outro:

$$\forall x \exists y (\mathrm{x} + \mathrm{y} = 0)$$

Quantificadores Agrupados

- Quantificadores são agrupados quando um está no **escopo** do outro:

$$\forall x \exists y \overbrace{\boxed{(x + y = 0)}}^{P(x,\, y)}$$

Quantificadores Agrupados

- Quantificadores são agrupados quando um está no **escopo** do outro:

$$\forall x \exists y \underbrace{(x + y = 0)}_{P(x,\, y)} \quad \left\{ \forall x \exists y P(x, y) \right.$$

Quantificadores Agrupados

- Quantificadores são agrupados quando um está no **escopo** do outro:

$$\forall x \underbrace{\exists y \overbrace{(x + y = 0)}^{P(x,\, y)}}_{Q(x,\, y)} \quad \begin{cases} \forall x \exists y \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \\ \forall x Q(x, y) \end{cases}$$

Quantificadores Agrupados

- Quantificadores são agrupados quando um está no **escopo** do outro:

$$\forall x \underbrace{\exists y \overbrace{(x + y = 0)}^{P(x,\, y)}}_{Q(x,\, y)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \exists y \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \\[1em] \forall x Q(x, y) \end{array} \right.$$

- A expressão pode ser lida como:
  - “Para todo *x* existe um *y* tal que *P*(*x*, *y*)”
- A expressão $\forall x \exists y P(x, y)$ tem o significado: “Todo número inteiro tem um oposto”.

Quantificadores Agrupados

- Alterando a ordem dos quantificadores, tem-se:

$$\exists y \forall x P(x, y)$$

- A expressão pode ser lida como:
  - “existe um inteiro *y* para todo inteiro *x* tal que P(*x*, *y*)”
- A expressão $\exists x \forall y P(x, y)$ tem o significado: “Existe um número inteiro que é o oposto de qualquer inteiro”.
  - Essa sentença é **falsa**

Quantificadores Agrupados

- Exemplo: Converta para a linguagem natural a sentença

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \big((\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}) \land (\boldsymbol{y} < \boldsymbol{0}) \rightarrow (\boldsymbol{xy} < \boldsymbol{0}) \big)$$

Em que o domínio para ambas variáveis são os números reais.

Quantificadores Agrupados

- Exemplo: Converta para a linguagem natural a sentença

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\big((\boldsymbol{x} > \mathbf{0}) \land (\boldsymbol{y} < \mathbf{0}) \rightarrow (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} < \mathbf{0})\big)$$

Em que o domínio para ambas variáveis são os números reais.

A multiplicação de um número real positivo por um negativo resulta em um número real negativo

Quantificadores Agrupados

Convertendo do Português

- C(x): x é um cachorro.
- G(x): x é um gato.
- P(x, y): x persegue y.

- Todos cachorros perseguem todos os gatos

Quantificadores Agrupados

Convertendo do Português

- C(*x*): *x* é um cachorro.
- G(*x*): *x* é um gato.
- P(*x*, *y*): *x* persegue *y*.

- Todos cachorros perseguem todos os gatos

$$\forall x \forall y [(C(x) \land G(y)) \rightarrow P(x, y)]$$

Quantificadores Agrupados

Convertendo do Português

- Alguns cachorros perseguem gatos

- Apenas cachorros perseguem gatos

Quantificadores Agrupados

Convertendo do Português

- Alguns cachorros perseguem gatos

  $\exists x \forall y \left[\left(C(x) \land G(y) \right) \to P(x,y) \right]$

- Apenas cachorros perseguem gatos

  $\forall x \forall y \left[\left(G(y) \land P(x,y) \right) \to C(x) \right]$ ou $\forall x \forall y \left[\left(C(x) \land P(x,y) \right) \to G(y) \right]$

Quantificadores Agrupados

Convertendo do Português

- Traduza a seguinte sentença em uma expressão lógica: “A soma de dois positivos inteiros é sempre positiva.”

Solução:

Reescrever a sentença em português de formar a aparecer os **quantificadores** e o **domínio**.

“**Para todo** par de **inteiros**, se ambos são positivos, então a soma deles é positiva.”

Quantificadores Agrupados

Convertendo do Português

- Traduza a seguinte sentença em uma expressão lógica: “A soma de dois positivos inteiros é sempre positiva.”

Solução:

Introduzimos as variáveis:

“Para todos os inteiros *x*, *y*, se *x* e *y* são positivos, então *x*+*y* é positivo.”

Quantificadores Agrupados

Convertendo do Português

- Traduza a seguinte sentença em uma expressão lógica: “A soma de dois positivos inteiros é sempre positiva.”

Solução:

“Para todos os inteiros *x*, *y*, se *x* e *y* são positivos, então *x*+*y* é positivo.”

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}((\boldsymbol{x} > \mathbf{0}) \wedge (\boldsymbol{y} > \mathbf{0}) \rightarrow (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > \mathbf{0})) \qquad \mathbb{U} = \mathbb{Z}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > \mathbf{0}) \qquad \mathbb{U} = \mathbb{Z}^{+}$$

Quantificadores Agrupados

- Exemplos:

Considerando os predicados

- F(x): x é uma fruta
- L(x): x é um legume
- D(x, y): x é mais doce do que y

Escreva sentenças para as seguintes proposições:

a) Todas as frutas são mais doces do que todos os legumes.

b) Todas as frutas são mais doces do que alguns legumes.

c) Algumas frutas são mais doces do que alguns legumes.

d) Alguns legumes são mais doces que todas as frutas.

Quantificadores Agrupados

- Exemplos:

Considerando os predicados

- F(x): x é uma fruta
- L(x): x é um legume
- D(x, y): x é mais doce do que y

Escreva sentenças para as seguintes proposições:

a) Todas as frutas são mais doces do que todos os legumes.

$$\forall x \forall y \left(\left(F(x) \land L(y) \right) \rightarrow D(x, y) \right)$$

b) Todas as frutas são mais doces do que alguns legumes.

$$\forall x \exists y \left(\left(F(x) \land L(y) \right) \rightarrow D(x, y) \right)$$

c) Algumas frutas são mais doces do que alguns legumes.

$$\exists x \exists y \left(\left(F(x) \land L(y) \right) \rightarrow D(x, y) \right)$$

d) Alguns legumes são mais doces que todas as frutas.

$$\exists y \forall x \left(\left(L(y) \land D(y, x) \right) \rightarrow F(x) \right)$$

Quantificadores Agrupados

Negação

- Aplicações sucessivas das regras de negação de sentenças com um único quantificador

Quantificadores Agrupados

Negação

- Exemplo: Qual é a negação da seguinte sentença?

$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} (\mathbf{x} = -\mathbf{y})$

Quantificadores Agrupados

Negação

- Exemplo: Qual é a negação da seguinte sentença?

$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y}(\mathbf{x} = -\mathbf{y})$

- Solução:

Sendo $P(x, y) = \exists y(\mathrm{x} = -\mathrm{y})$,

$\neg \forall x P(x, y)$

$\exists x\left(\neg \exists y(\mathrm{x} = -\mathrm{y})\right)$

$\exists x\left(\forall y \neg(\mathrm{x} = -\mathrm{y})\right)$

$\exists x \forall y(\mathrm{x} \neq -\mathrm{y})$

Quantificadores Agrupados

Negação

- Exemplo:

Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y (xy = 1)$:

Quantificadores Agrupados

Negação

- Exemplo:

Expresse a negação da sentença $\forall x \exists y(\mathrm{xy} = 1)$:

$$\neg \forall x \exists y(xy = 1)$$

$$\exists x \neg \exists y(xy = 1)$$

$$\exists x \forall y \neg (xy = 1)$$

$$\exists x \forall y(xy \neq 1)$$

Exercícios

1) Transcreva as expressões abaixo para o português, em que o domínio para cada variável consista nos números reais.

a) $\forall x \exists y (x < y)$

b) $\forall x \forall y \Big(\big((x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \big) \rightarrow (xy \geq 0) \Big)$

c) $\forall x \forall y \exists z (xy = z)$

Exercícios

2) Considere Q(x, y)como a proposição "x enviou um e-mail para y", em que o domínio para x e y são todos os estudantes de sua sala. Expresse cada uma das quantificações abaixo em português.

a) $\exists x \exists y Q(x, y)$
b) $\exists x \forall y Q(x, y)$
c) $\forall x \exists y Q(x, y)$
d) $\exists y \forall x Q(x, y)$
e) $\forall y \exists x Q(x, y)$
f) $\forall x \forall y Q(x, y)$

Exercícios

3) Expresse cada uma das proposições matemáticas abaixo usando predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos.

a) O produto de dois números reais negativos é positivo.

b) A diferença entre um número real e ele mesmo é zero.

c) Todo número real positivo tem exatamente duas raízes quadradas.

d) Um número real negativo não tem uma raiz quadrada que seja um número real.

Exercícios

4) Transcreva cada uma das quantificações agrupadas abaixo em proposições em português que expressem um fato matemático. O domínio em cada caso são todos os números reais.

a) $\exists x \forall y (xy = y)$

b) $\forall x \forall y \Big(\big((x < 0) \land (y < 0) \big) \rightarrow (xy > 0) \Big)$

c) $\exists x \exists y ((x^2 > y) \land (x < y))$

d) $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$

Exercícios

5) Determine o valor-verdade de cada uma das proposições abaixo se o domínio para as variáveis são todos os números inteiros.

a) $\forall n \exists m (n^2 < m)$

b) $\forall n \exists m (n < m^2)$

c) $\forall n \exists m (n + m = 0)$

d) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$

e) $\forall n \forall m \exists p (p = (n + m)/2)$

Exercícios

6) Reescreva cada uma das proposições para que as negações apareçam apenas inseridas nos predicados (ou seja, nenhuma negação esteja do lado de fora de um quantificador ou de uma expressão que envolva conectivos lógicos).

a) $\neg\forall x \forall y P(x,y)$

b) $\neg\forall y \exists x P(x,y)$

c) $\neg\forall y \forall x (P(x,y) \wedge Q(x,y)$

d) $\neg\left(\exists x \exists y \neg P(x,y) \wedge \forall x \forall y Q(x,y)\right)$

e) $\neg\forall x (\exists y \forall z P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y P(x,y,z))$