Funções de produção (parte 2)

Vinicius Santos

Economia - ENG1 07067

16 de Maio de 2025

Substituição de insumos

Outra característica importante de uma função de produção é o quão "facilmente" o capital pode ser substituído pelo trabalho ou, mais geralmente, como qualquer insumo pode ser substituído por outro.

Essa característica depende principalmente da forma de uma única isoquanta.

Até agora, assumimos que um determinado nível de produção pode ser alcançado com uma variedade de diferentes combinações de insumos – isto é, assumimos que as firmas podem substituir trabalho por capital mantendo a produção constante.

Quão facilmente essa substituição pode ser feita pode, é claro, variar.

Em alguns casos, a substituição pode ser feita de maneira fácil e rápida em resposta a mudanças nas circunstâncias econômicas.

Os proprietários de minas acharam relativamente fácil automatizar em resposta ao aumento dos salários dos mineiros, por exemplo.

Em outros casos, as firmas podem ter pouca escolha quanto à combinação de insumos que devem usar.

Produtores de óperas têm pouca chance de substituir capital (cenário) por trabalho (cantores).

Formalmente, a substituição de insumos é medida pela *elasticidade de substituição*, definida pela razão entre as mudanças percentuais em K/L e as mudanças percentuais na TMS ao longo de uma isoquanta (não nos ateremos a essa questão).

Função de produção de proporções fixas

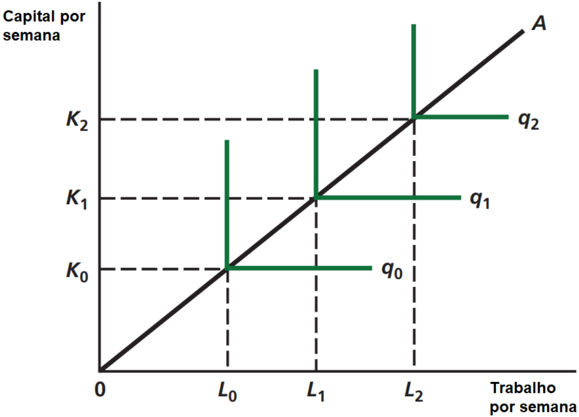

Figura 1. Mapa de isoquantas com proporções fixas

Função de produção de proporções fixas

A Figura 1 demonstra um caso em que não é possível haver substituição, onde as isoquantas têm forma de L, indicando que máquinas e trabalho devem ser usados em **proporções absolutamente fixas**.

Por exemplo, se K_1 máquinas estão em uso, L_1 trabalhadores são necessários para produzir o nível de produção q_1; empregar mais trabalhadores do que L_1 não aumentará a produção com K_1 máquinas.

Em outras palavras, a produtividade marginal do trabalho é zero além de L_1.

Por outro lado, usar menos trabalhadores resultaria em máquinas ociosas.

Se apenas L_0 trabalhadores fossem contratados, por exemplo, apenas q_0 unidades poderiam ser produzidas, mas essas unidades poderiam ser produzidas com apenas K_0 máquinas.

Quando L_0 trabalhadores são contratados, há um excesso de máquinas dado por K_1 - K_0.

Ambos os insumos são totalmente utilizados somente se uma combinação de K e L que esteja ao longo do raio A, que passa pelos vértices das isoquantas, for escolhida.

Se uma firma com tal função de produção desejar expandir, ela deve aumentar todos os insumos simultaneamente para que nenhum seja redundante.

Por exemplo, considere a combinação de capital e trabalho necessária para cortar a grama de um gramado.

O cortador de grama precisa de uma pessoa para operá-lo, e um trabalhador precisa de um cortador de grama para produzir qualquer resultado.

A produção pode ser expandida (isto é, mais grama pode ser cortada ao mesmo tempo) apenas adicionando capital e trabalho ao processo produtivo em proporções fixas.

Mudanças na tecnologia

Uma função de produção reflete o conhecimento técnico das firmas sobre como usar insumos para produzir produtos e quando as firmas aprendem novas formas de operar, a função de produção muda.

Esse tipo de avanço técnico ocorre constantemente à medida que máquinas antigas e obsoletas são substituídas por outras mais eficientes que incorporam tecnologias de ponta.

Os trabalhadores também fazem parte desse progresso técnico ao se tornarem mais instruídos e aprenderem habilidades específicas para executar seus trabalhos.

Hoje, por exemplo, o aço é produzido de forma muito mais eficiente do que no século XIX tanto porque os altos-fornos e laminadores são melhores quanto porque os trabalhadores são melhor treinados para usar essas instalações.

O conceito de função de produção e seu respectivo mapa de isoquantas são ferramentas importantes para entender o efeito da mudança técnica.

Formalmente, o progresso técnico representa um deslocamento da função de produção, como o ilustrado na Figura 2.

Mudanças na tecnologia

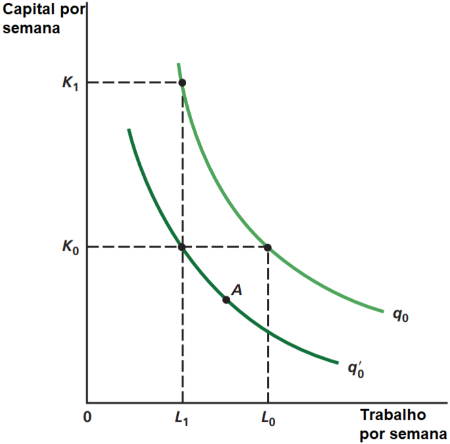

Figura 2. Mudança técnica

Mudanças na tecnologia

Na figura 2, a isoquanta q_0 resume o estado inicial do conhecimento técnico.

Esse nível de produção pode ser obtido usando K_0, L_0 ou qualquer uma de várias combinações de insumos.

Com a descoberta de novas técnicas de produção, a isoquanta q_0 se desloca em direção à origem — o mesmo nível de produção pode agora ser obtido com quantidades menores de insumos.

Se, por exemplo, a isoquanta q_0 se desloca para dentro, para q_0', agora é possível produzir q_0 com a mesma quantidade de capital que antes (K_0), mas com muito menos trabalho (L_1).

É até possível produzir q_0 usando menos capital e menos trabalho do que anteriormente, escolhendo um ponto como A.

O progresso técnico representa uma verdadeira economia de insumos e (como veremos no próximo capítulo) uma redução nos custos de produção.

Progresso técnico *vs* substituição de insumos

Podemos usar a Figura 2 para mostrar uma distinção importante entre verdadeiro avanço técnico e simples substituição de capital por trabalho.

Com progresso técnico, a firma pode continuar a usar K_0, mas produz q_0 com menos trabalho (L_1).

A produção por unidade de trabalho aumenta de q_0/L_0 para q_0/L_1.

Mesmo na ausência de melhorias técnicas, a firma poderia ter alcançado esse aumento escolhendo usar K_1 unidades de capital.

Essa substituição de capital por trabalho também teria causado um aumento na produtividade média do trabalho de q_0/L_0 para q_0/L_1.

Esse aumento, contudo, não significaria uma melhoria real na forma como os bens são produzidos.

Ao estudar dados de produtividade, especialmente dados sobre produção por trabalhador, devemos ter cuidado para garantir que as mudanças observadas representem melhorias técnicas reais e não apenas substituição de capital por trabalho.

A função de produção

Suponha o processo de produção usado por uma rede de fast-food chamada Paraíso do Hamburger (PH).

A função de produção para cada unidade da rede é dada por:

$$\text{hamburgers por hora} = q = 10\sqrt{KL}, \tag{1}$$

onde K representa o número de grelhas utilizadas e L representa o número de trabalhadores empregados durante uma hora de produção.

Um aspecto dessa função é que ela apresenta retornos constantes à escala (função Cobb-Douglas com retornos constantes à escala, já que os expoentes somam 1).

A Tabela 1 mostra esse fato ao considerar níveis de insumo para K e L variando de 1 a 10.

À medida que trabalhadores e grelhas aumentam conjuntamente, a produção horária de hamburgers cresce proporcionalmente.

Para aumentar o número de hamburgers servidos, a PH deve simplesmente duplicar sua tecnologia de cozinha repetidamente.

A função de produção

Grelhas (K)	Trabalhadores (L)	Hamburgers por hora
1	1	10
2	2	20
3	3	30
4	4	40
5	5	50
6	6	60
7	7	70
8	8	80
9	9	90
10	10	100

Tabela 1. Produção de hamburgers com diferentes combinações de grelhas e trabalhadores.

Produtividade média e marginal

Para analisar a produtividade do trabalho da PH, devemos manter o capital constante e variar apenas o trabalho.

Suponha que a PH disponha de quatro grelhas ($K = 4$, um número particularmente fácil de extrair a raiz quadrada).

Nesse caso, a função de produção é $q = 10\sqrt{4 \cdot L} = 20\sqrt{L}$, oferecendo uma relação simples entre a produção e o uso de trabalho.

A Tabela 2 mostra essa relação.

Observe dois aspectos na tabela.

Primeiro, a produção por trabalhador diminui à medida que mais funcionários são contratados.

Como K é fixo, isso ocorre porque os trabalhadores acabam se atrapalhando mutuamente ao se aglomerarem em torno das quatro grelhas.

Segundo, a produtividade de cada trabalhador adicional contratado também decresce.

Contratar mais trabalhadores reduz a produção por trabalhador devido à produtividade marginal decrescente, consequência do número fixo de grelhas.

Embora a produção da PH apresente retornos constantes de escala quando K e L podem variar, manter um insumo fixo gera as quedas esperadas nas produtividades média e marginal.

Produtividade média e marginal

Grelhas (K)	Trabalhadores (L)	Hamburgers por hora (Q)	Q/L	MPL
4	1	20,0	20,0	20,0
4	2	28,3	14,1	8,3
4	3	34,6	11,5	6,3
4	4	40,0	10,0	5,4
4	5	44,7	8,9	4,7
4	6	49,0	8,2	4,3
4	7	52,9	7,6	3,9
4	8	56,6	7,1	3,7
4	9	60,0	6,7	3,4
4	10	63,2	6,3	3,2

Tabela 2. Produtividade do trabalho com $K = 4$ *grelhas*

Mapa de isoquantas

A tecnologia de produção da PH é melhor ilustrada por seu mapa de isoquantas.

Aqui mostramos como obter uma isoquanta, mas quaisquer outras poderiam ser calculadas da mesma forma.

Suponha que a PH queira produzir 40 hamburgers por hora.

Nesse caso, sua função de produção se torna:

$$q = 40 \text{ hamburgers por hora} = 10\sqrt{KL} \Rightarrow 4 = \sqrt{KL} \Rightarrow 16 = K \cdot L. \tag{2}$$

A Tabela 3 mostra algumas das combinações de K e L que satisfazem essa equação.

Claramente, há muitas formas de produzir 40 hamburgers, desde o uso intensivo de grelhas com trabalhadores se movimentando entre elas até o uso de muitos trabalhadores em poucas grelhas.

Todas as combinações possíveis estão refletidas na isoquanta "$q = 40$" da Figura 3.

Outras isoquantas teriam exatamente o mesmo formato, mostrando que a PH possui muitas possibilidades de substituição nas formas como realmente escolhe produzir seus hamburgers celestiais.

Mapa de isoquantas

Hamburgers por hora (Q)	Grelhas (K)	Trabalhadores (L)
40	16,0	1
40	8,0	2
40	5,3	3
40	4,0	4
40	3,2	5
40	2,7	6
40	2,3	7
40	2,0	8
40	1,8	9
40	1,6	10

Tabela 3. Combinações de K e L para produzir 40 hamburgers por hora

Mapa de isoquantas

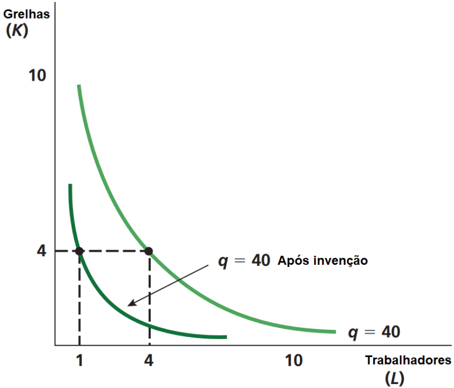

Figura 3. Progresso técnico na produção de hamburgers

Taxa marginal de substituição técnica (TMS)

A TMS de L por K ao longo da isoquanta $q = 40$ também pode ser lida diretamente da Tabela 3.

Por exemplo, ao passar de 3 para 4 trabalhadores, a PH pode reduzir o número de grelhas de 5,3 para 4,0.

Assim, a TMS neste ponto é dada por:

$$\text{TMS} = -\frac{\text{Variação em } K}{\text{Variação em } L} = -\frac{(4-5{,}3)}{(4-3)} = \frac{1{,}3}{1} = 1{,}3. \tag{3}$$

Essa inclinação indica à empresa que ela pode reduzir o uso de grelhas em 1,3 ao contratar mais um trabalhador, e pode usar essa informação em suas decisões de contratação.

O cálculo é bem diferente, no entanto, se a empresa já empregar muitos trabalhadores para produzir seus 40 hamburgers.

Com oito trabalhadores, por exemplo, contratar o nono permite à empresa reduzir o uso de grelhas em apenas 0,2 grelhas.

Como veremos no próximo capítulo, essa é uma decisão que a empresa tomaria apenas se as grelhas fossem muito mais baratas do que os trabalhadores.

Progresso técnico

A possibilidade de avanço científico na arte de produção de hamburgers também pode ser ilustrada neste caso simples.

Suponha que a engenharia genética leve à invenção de hamburgers autovirantes, de modo que a função de produção se torne $q = 20\sqrt{K \cdot L}$.

Podemos comparar essa nova tecnologia com a que prevalecia anteriormente, recalculando a isoquanta $q = 40$: $q = 40 = 20\sqrt{K \cdot L} \Rightarrow 2 = \sqrt{K \cdot L} \Rightarrow 4 = K \cdot L$.

As combinações de K e L que satisfazem essa equação são mostradas na isoquanta "$q = 40$ após a invenção" da Figura 3.

Uma maneira de ver o efeito geral da invenção é calcular a produção por hora de trabalho nestes dois casos.

Com quatro grelhas, a Figura 3 mostra que eram necessários quatro trabalhadores usando a tecnologia antiga para produzir 40 hamburgers por hora.

A produtividade média era de 10 hamburgers por hora por trabalhador.

Agora, um único trabalhador pode produzir 40 hamburgers por hora porque cada hambúrguer se vira sozinho.

A produtividade média é de 40 hamburgers por hora por trabalhador.

Esse nível de produtividade por trabalhador-hora poderia ter sido alcançado com a tecnologia antiga, mas isso exigiria 16 grelhas e seria consideravelmente mais custoso.

Exercícios de revisão

1. De que maneiras os mapas de isoquantas das firmas e os mapas de curvas de indiferença dos indivíduos se baseiam na mesma ideia? Quais são as diferenças mais importantes entre esses dois conceitos?
2. Uma manchete de jornal de 2019 dizia: "Recuperação estagnada afeta a produtividade." Supondo que a "produtividade" referida na manchete seja a habitual "produção média por hora trabalhada", como você avaliaria se essa queda representa de fato uma diminuição nos produtos marginais dos trabalhadores?
3. Uma função de produção de proporções fixas pode exibir retornos crescentes ou decrescentes à escala? Como seria o mapa de isoquantas em cada caso?
    a) Descreva o mapa de isoquantas para a produção de viagens aéreas.
    b) Suponha que uma companhia aérea alugue 10 aviões e contrate 30 pilotos. Explique, tanto graficamente quanto em palavras, por que isso seria uma decisão tola.
    c) Suponha que o progresso técnico em equipamentos de aviação torne possível que um único piloto opere um avião com segurança. Como isso alteraria o mapa de isoquantas descrito na parte a? Como isso afetaria a produtividade média do trabalho nesse setor? Como isso afetaria a produtividade média do capital (aviões) nesse setor?

Problemas

1. Suponha que a função de produção para latas de atum seja dada por

$$q = 6K + 4L$$

onde
$q =$ produção de latas de atum por hora
$K =$ uso de capital por hora
$L =$ uso de trabalho por hora.

a) Supondo que o capital esteja fixado em $K = 6$, quanto de L é necessário para produzir 60 latas de atum por hora? E para produzir 100 latas por hora?
b) Agora suponha que o uso de capital esteja fixado em $K = 8$; quanto de L é necessário para produzir 60 latas de atum por hora? E para produzir 100 latas por hora?
c) Represente graficamente as isoquantas $q = 60$ e $q = 100$. Indique os pontos encontrados nas partes a e b. Qual é a Taxa Marginal de Substituição Técnica (TMS) ao longo dessas isoquantas?

Problemas

2. A função de produção para arroz tufado é dada por

$$q = 100\sqrt{KL}$$

onde q é o número de caixas produzidas por hora, K é o número de máquinas de tufar usadas por hora e L é o número de trabalhadores contratados por hora.

a) Calcule a isoquanta para $q = 1.000$ para essa função de produção e mostre-a em um gráfico.

b) Se $K = 10$, quantos trabalhadores são necessários para produzir $q = 1.000$? Qual é a produtividade média dos trabalhadores de arroz tufado?

c) Suponha que o progresso técnico mude a função de produção para $q = 200\sqrt{KL}$. Responda as partes a e b para esta nova situação.

d) Suponha que o progresso técnico ocorra de forma contínua a uma taxa de 5

$$q = (1.05)^t 100\sqrt{KL}$$

onde t é o número de anos que se passaram até o momento. Agora, responda as partes a e b para essa função de produção.
(Nota: As suas respostas devem incluir termos em $(1.05)^t$. Explique o significado desses termos.)