

电磁学小论文

Maxwell 方程的微分形式表达

PB19000304 张佳

2021 年 6 月 7 日

目录

1	微分形式简介	2
1.1	引言	2
1.2	外微分运算与 Poincare 引理	3
1.3	Hodge 对偶	4
2	麦克斯韦方程的微分形式	4
2.1	引言	4
2.2	重写高斯磁定律	4
2.3	重写法拉第电磁感应定律	4
2.4	重写高斯定律和麦克斯韦-安培定律	5
3	推论	6
3.1	$dF = 0$ 来自 Poincare 引理	6
3.2	Poincare 引理导出连续性方程	6
4	参考资料	6

1 微分形式简介

1.1 引言

在二重积分的换元中，如果认为面积元有向，可以得到：

$$dxdy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv$$

假如在这里不对行列式取绝对值，如果我们交换 x 和 y 的顺序那么将会发现 Jacobi 行列式相差一个负号。用数学语言描述为：

$$dxdy = -dydx$$

由此出发推广得到：在 dx, dy, dz 之中定义外积运算满足如下性质：

$$(adx) \otimes dy = a(dx \otimes dy)$$

$$dx \otimes (dy + dz) = dx \otimes dy + dx \otimes dz$$

$$dx \otimes dy = -dy \otimes dx$$

$$(dx \otimes dy) \otimes dz = dx \otimes (dy \otimes dz)$$

由微分的外积和函数组成的线性组合称为微分形式。

设 P, Q, R 都是 x, y, z 的函数

- P 是零次微分形式
- $Pdx + Qdy + Rdz$ 是一次微分形式
- $Pdy \otimes dz + Qdz \otimes dx + Rdx \otimes dy$ 是二次微分形式
- $Pdx \otimes dy \otimes dz$ 是三次微分形式

对于两个微分形式 λ, μ ，也可以做外积，这只需要把对应的项进行外积操作最后再加起来即可。

而对于微分形式之间的运算，有以下规律：

- 对加法的分配律： $(\lambda + \mu) \otimes \nu = \lambda \otimes \nu + \mu \otimes \nu$

- 结合律: $\lambda \otimes (\mu \otimes \nu) = (\lambda \otimes \mu) \otimes \nu$
- 若 λ 是 p 次微分形式, μ 是 q 次微分形式, 则有 $\lambda \otimes \mu = (-1)^{pq} \mu \otimes \lambda$

1.2 外微分运算与 Poincare 引理

对于外微分形式 ω 引入外微分运算 d , d 称为外微分算子。

微分算子 d 定义为:

$$d(A + B) = dA + dB$$

$$d(adu^1 \otimes du^2 + \cdots + du^k) = da \otimes du^1 \otimes du^2 \otimes \cdots \otimes du^k$$

对于零次微分形式 $\omega = f$,

$$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

对于一次微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$

由上述的式子 $d(adu^1 \otimes du^2 + \cdots + du^k) = da \otimes du^1 \otimes du^2 \otimes \cdots \otimes du^k$

计算可得: $d\omega = (\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q)dy \otimes dz + (\frac{\partial}{\partial z}P - \frac{\partial}{\partial x}R)dz \otimes dx + (\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P)dx \otimes dy$

而对于二次微分形式:

$$\omega = Pdy \otimes dz + Qdz \otimes dx + Rdx \otimes dy$$

它的外微分计算可得:

$$d\omega = (\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R)dx \otimes dy \otimes dz$$

现在考虑假如我们对于一个微分形式求两次外微分: 由外微分的定义可知:

$$d(adu^1 \otimes du^2 + \cdots + du^k) = da \otimes du^1 \otimes du^2 \otimes \cdots \otimes du^k$$

则

$$d(d(adu^1 \otimes du^2 + \cdots + du^k)) = d(da \otimes du^1 \otimes du^2 \otimes \cdots \otimes du^k) = d(1) \otimes da \otimes du^1 \otimes du^2 \otimes \cdots \otimes du^k = 0$$

由此得 Poincare 引理:

$$dd\omega = 0$$

1.3 Hodge 对偶

注意到 n 个变量的 m 次微分形式，实际上有： C_n^m 个分量。而由于 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 因此 m 次和 $n-m$ 次微分形式有相同的基底数量。在它们之间进行的变换叫做 Hodge 对偶。

用爱因斯坦求和符号写出就是： $u_i dx^i \mapsto \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u^i dx^j \otimes dx^k$
记 a 的 Hodge 对偶是 $\star a$

2 麦克斯韦方程的微分形式

2.1 引言

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

注意到，在真空中，对应的方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

可以看到其具有优美的对称性，我们的目标就是试图找出这种对称背后的原因，并且给出用微分形式表示的更优美的 Maxwell 方程形式。

2.2 重写高斯磁定律

即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow d\mathbf{B} = 0$ 其中 \mathbf{B} 是二次微分形式

2.3 重写法拉第电磁感应定律

注意到，如果 \mathbf{B} 不随时间变化，那么有： $d\mathbf{E} = 0$ ，但这里需要将 \mathbf{E} 看为一次微分形式假如 \mathbf{B} 随时间变化，那么同样的将 \mathbf{B} 看为二次微分形式， \mathbf{E} 看为一次微分形式。

考虑 $F = \mathbf{B} + \mathbf{E} \otimes dt$ 是一个二次微分形式。

计算 $dF = d\mathbf{B} + d(\mathbf{E} \otimes dt) = d\mathbf{B} + d\mathbf{E} \otimes dt = 0$

可得 $dF = 0 \Leftrightarrow d\mathbf{B} = 0$ and $d\mathbf{E} = 0$

因此高斯磁定律和法拉第电磁感应定律就被统一为：

$$dF = d(\mathbf{B} + \mathbf{E} \otimes dt) = 0$$

2.4 重写高斯定律和麦克斯韦-安培定律

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

注意到这里我们对于 \mathbf{E} 求了散度，但是在上面我们是把 \mathbf{E} 看为一次微分形式的。为了相适应，就要用到我们之前说的 Hodge 对偶。在 (t, x, y, z) 中，Hodge 对偶把二次微分形式转换为二次微分形式。

规定对 t 求偏导时需要同时除以 c

这里考虑 $F = \mathbf{B} + \mathbf{E} \otimes dt$ 的 Hodge 对偶 $\star F = \star \mathbf{B} + \star(\mathbf{E} \otimes dt)$

对上式外微分可得到： $d(\star F) = \frac{1}{c}(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt \otimes (dy \otimes dz + dz \otimes dx + dx \otimes dy))$
 $+ \frac{1}{c}(\nabla \cdot \mathbf{E})(dx \otimes dy \otimes dz) + (\nabla \times \mathbf{B})(dy \otimes dz + dz \otimes dx + dx \otimes dy) \otimes dt$

并且考虑电流的 4 矢量 $J = (\mu_0 \rho c, \mu_0 j^1, \mu_0 j^2, \mu_0 j^3)$ 则有对应的一次微分形式 $J = j_x dx + j_y dy + j_z dz + \mu_0 \rho c dt$

那么它的 Hodge 对偶就是：

$$\star J = \mu_0 j_1 dy \otimes dz \otimes dt + \mu_0 j_2 dz \otimes dx \otimes dt + \mu_0 j_3 dx \otimes dy \otimes dt + \mu_0 \rho c dx \otimes dy \otimes dz$$

将对应项比较得到：

$$d(\star F) = dJ$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \rho c$ 且 $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$ 又由于 $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ 便可得到高斯定律和麦克斯韦-安培定律

综上我们得到 Maxwell 方程的微分形式表达：

$$\begin{cases} dF = 0 \\ d(\star F) = \star J \end{cases}$$

3 推论

3.1 $dF = 0$ 来自 Poincare 引理

电磁张量实际上是四维矢势的外微分。即 $F = dA$, 那么 $dF = ddA = 0$ 就是显然的了。

3.2 Poincare 引理导出连续性方程

由于 $d(\star F) = \star J$

则有 $d(\star J) = dd(\star F) = 0$ 展开得到:

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

改写一下就是

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}$$

这就是电荷守恒定律。

4 参考资料

- 1 叶邦角: 电磁学, 第二版, 中国科学技术大学出版社
- 2 A Visual Introduction to Differential Forms and Calculus on Manifolds
by Fortney, J.P.