电磁学小论文
Maxwell 方程的微分形式表达

Oyyko

2021 年 6 月 7 日

目录

1 微分形式简介

1.1 导言

在二重积分的换元中，如果认为面积元有向，可以得到：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

假如在这里不对行列式取绝对值，如果我们交换 x 和 y 的顺序那么将会发现 Jacobi 行列式相差一个负号。用数学语言描述为：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

由此出发推广得到：在 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 之中定义外积运算满足如下性质：

$$(a\mathrm{d}x) \otimes \mathrm{d}y = a(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y)$$

$$\mathrm{d}x \otimes (\mathrm{d}y + \mathrm{d}z) = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x$$

$$(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y) \otimes \mathrm{d}z = \mathrm{d}x \otimes (\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z)$$

由微分的外积和函数组成的线性组合称为微分形式。
设 P, Q, R 都是 x, y, z 的函数

- P 是零次微分形式
- $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 是一次微分形式
- $P\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$ 是二次微分形式
- $P\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z$ 是三次微分形式

对于两个微分形式 λ, μ，也可以做外积, 这只需要把对应的项进行外积操作最后再加起来即可。

而对于微分形式之间的运算，有以下规律：

- 对加法的分配律：$(\lambda + \mu) \otimes \nu = \lambda \otimes \nu + \mu \otimes \nu$

- 结合律：$\lambda \otimes (\mu \otimes \nu) = (\lambda \otimes \mu) \otimes \nu$
- 若 λ 是 p 次微分形式,μ 是 q 次微分形式，则有 $\lambda \otimes \mu = (-1)^{pq} \mu \otimes \lambda$

1.2 外微分运算与 Poincare 引理

对于外微分形式 ω 引入外微分运算 d,d 称为外微分算子。

微分算子 d 定义为：

$$\mathrm{d}(A+B) = \mathrm{d}A + \mathrm{d}B$$

$$\mathrm{d}\big(a\mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 + \cdots + \mathrm{d}u^k\big) = \mathrm{d}a \otimes \mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}u^k$$

对于零次微分形式 $\omega = f$,

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

对于一次微分形式 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$

由上述的式子 $\mathrm{d}\big(a\mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 + \cdots + \mathrm{d}u^k\big) = \mathrm{d}a \otimes \mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}u^k$

计算可得：$\mathrm{d}\omega = (\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z) + (\frac{\partial}{\partial z}P - \frac{\partial}{\partial x}R\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x) + (\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y)$

而对于二次微分形式：

$$\omega = P\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$$

它的外微分计算可得：

$$\mathrm{d}\omega = (\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R)\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z$$

现在考虑假如我们对于一个微分形式求两次外微分：由外微分的定义可知：

$$\mathrm{d}\big(a\mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 + \cdots + \mathrm{d}u^k\big) = \mathrm{d}a \otimes \mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}u^k$$

则

$$\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\big(a\mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 + \cdots + \mathrm{d}u^k\big)\big) = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}a \otimes \mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}u^k\big) = \mathrm{d}(1) \otimes \mathrm{d}a \otimes \mathrm{d}u^1 \otimes \mathrm{d}u^2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}u^k = 0$$

由此得 Poincare 引理：

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$$

1.3 Hodge 对偶

注意到 n 个变量的 m 次微分形式，实际上有：C_n^m 个分量。而由于 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 因此 m 次和 n-m 次微分形式有相同的基底数量。在它们之间进行的变换叫做 Hodge 对偶。

用爱因斯坦求和符号写出就是：$u_i \mathrm{d}x^i \mapsto \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}u^i \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k$

记 a 的 Hodge 对偶是 $\star a$

2 麦克斯韦方程的微分形式

2.1 导言

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

注意到，在真空中，对应的方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

可以看到其具有优美的对称性，我们的目标就是试图找出这种对称背后的原因，并且给出用微分形式表示的更优美的 Maxwell 方程形式。

2.2 重写高斯磁定律

即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\mathbf{B} = 0$ 其中 $\mathbf{B}$ 是二次微分形式

2.3 重写法拉第电磁感应定律

注意到，如果 $\mathbf{B}$ 不随时间变化，那么有：$\mathrm{d}\mathbf{E} = 0$, 但这里需要将 $\mathbf{E}$ 看为一次微分形式假如 $\mathbf{B}$ 随时间变化，那么同样的将 $\mathbf{B}$ 看为二次微分形式，$\mathbf{E}$ 看为一次微分形式。

考虑 $F = \mathbf{B} + \mathbf{E} \otimes \mathrm{d}t$ 是一个二次微分形式。

计算 $\mathrm{d}F = \mathrm{d}\mathbf{B} + \mathrm{d}(\mathbf{E} \otimes \mathrm{d}t) = \mathrm{d}\mathbf{B} + \mathrm{d}\mathbf{E} \otimes \mathrm{d}t = 0$

可得 $\mathrm{d}F = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}\mathbf{B} = 0$ **and** $\mathrm{d}\mathbf{E} = 0$

因此高斯磁定律和法拉第电磁感应定律就被统一为:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}(\mathbf{B} + \mathbf{E} \otimes \mathrm{d}t) = 0$$

2.4 重写高斯定律和麦克斯韦-安培定律

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

注意到这里我们对于 $\mathbf{E}$ 求了散度，但是在上面我们是把 $\mathbf{E}$ 看为一次微分形式的。为了相适应，就要用到我们之前说的 Hodge 对偶。在 (t, x, y, z) 中，Hodge 对偶把二次微分形式转换为二次微分形式。

规定对 t 求偏导时需要同时除以 c

这里考虑 $F = \mathbf{B} + \mathbf{E} \otimes \mathrm{d}t$ 的 Hodge 对偶 $\star F = \star\mathbf{B} + \star(\mathbf{E} \otimes \mathrm{d}t)$

对上式外微分可得到: $\mathrm{d}(\star F) = \frac{1}{c}(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\mathrm{d}t \otimes (\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y))$
$+ \frac{1}{c}(\nabla \cdot \mathbf{E})(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z) + (\nabla \times \mathbf{B})(\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y) \otimes \mathrm{d}t$

并且考虑电流的 4 矢量 $J = (\mu_0 \rho c, \mu_0 j^1, \mu_0 j^2, \mu_0 j^3)$ 则有对应的一次微分形式 $J = j_x \mathrm{d}x + j_y \mathrm{d}y + j_z \mathrm{d}z + \mu_0 \rho c \mathrm{d}t$

那么它的 Hodge 对偶就是:

$$\star J = \mu_0 j_1 \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}t + \mu_0 j_2 \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}t + \mu_0 j_3 \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}t + \mu_0 \rho c \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}z$$

将对应项比较得到:

$\mathrm{d}(\star F) = \mathrm{d}J$

$\Leftrightarrow \frac{1}{c}\nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \rho c$ 且 $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$ 又由于 $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ 便可得到高斯定律和麦克斯韦-安培定律

综上我们得到 Maxwell 方程的微分形式表达:

$$\begin{cases} \mathrm{d}F = 0 \\ \mathrm{d}(\star F) = \star J \end{cases}$$

3 推论

3.1 $\mathrm{d}F = 0$ 来自 Poincare 引理

电磁张量实际上是四维矢势的外微分。即 $F = \mathrm{d}A$, 那么 $\mathrm{d}F = \mathrm{d}\mathrm{d}A = 0$ 就是显然的了。

3.2 Poincare 引理导出连续性方程

由于 $\mathrm{d}(\star F) = \star J$

则有 $\mathrm{d}(\star J) = \mathrm{d}\,\mathrm{d}(\star F) = 0$ 展开得到：

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

改写一下就是

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}$$

这就是电荷守恒定律。

4 参考资料

1 叶邦角：电磁学，第二版，中国科学技术大学出版社

2 A Visual Introduction to Differential Forms and Calculus on Manifolds by Fortney, J.P.