בעיית פיצה

אלי ובני הזמינו פיצה משפחתית.

ידוע כי מהירות אכילה של **אלי** גדולה פי-X ממהירות אכילה של **בני**, כאשר $X>1$ הוא מספר ממשי.

לפני תחילת הארוחה ל**אלי** קיימת אפשרות לחלק את הפיצה ל-**N** משולשים **שווים**.

במהלך הארוחה כל אחד מהבנים לוקח משולש נוסף **בעת** שסיים את הקודם.

יש למצוא **מספר משולשים N** שיאפשר ל**אלי** לאכול כמה שיותר פיצה.

אסור לחלק את הפיצה למספר משולשים שיביא בסופו של דבר למצב בו שני החברים מגיעים למשולש האחרון **בו-זמנית**.

א. יש לתת תשובה בצורת פונקציה של X . $N = f(X)$

ב. יש לתת תשובה בצורת אלגוריתם ש**הקלט** שלו הוא X.

פתרון

ברור שהמספר משולשים **N** צריך להיות **גדול או שווה** **X+1** .

נניח שיש **N** משולשים ו**N = X** .

אם **בני** יאוכל משולש **1** **אלי** יאוכל **X** משולשים ואז סך הכול הם יאוכלו
N = X + 1 משולשים .

אבל **N = X** ואז **N = N + 1** . **זה בלתי אפשרי**

==

$N = X$, **אלי** יאוכל $\frac{N-1}{N}$ מפיצה,

ואם $N = X + 1$ **אלי** יאוכל $\frac{N}{N+1}$ מפיצה

ו $\frac{N-1}{N} > \frac{N}{N+1}$, $\left(N^2 > N^2 - 1\right)$.

דוגמה : **N = X = 5**

בני יאוכל **1**

אלי יאוכל **5**

N = 5

X = 4

בני יאוכל **1**

אלי יאוכל **4**

$$N >= X + 1$$

דבר שני מספר משולשים **N** צריך להיות שונה מ- $N \neq (X+1)\cdot p+1$

כדי להימנע ממצב בו שני החברים מגיעים למשולש האחרון בו-זמנית,

(**X + 1** הוא מספר משולשים ששניהם מסיימים לאכול בו-זמנית).

דוגמה :

X = 2 p = 3 N = 10

בני יאוכל **1** **אלי** יאוכל **2**	**בני** יאוכל **2** **אלי** יאורך **4**	**בני** יאוכל **3** **אלי** יאוכל **6**	**נישאר משולש 1**

p = 1 **p = 2** **p = 3**

$$\boxed{N \neq (X+1)\cdot p+1}$$

נניח כי $N=(X+1)\cdot p+r$ כאשר $2 \le r \le X$.

אז **אלי** יאוכל $\frac{X\cdot p+r-1}{(X+1)\cdot p+r}$ מפיצה ו**בני** יאוכל $\frac{p+1}{(X+1)\cdot p+r}$ מפיצה.

נוכיח כי **אלי** צריך לחלק את הפיצה ל-**X+1** משולשים.

או במילים אחרות **אנו צריכים להוכיח** כי $\frac{X}{X+1} < \frac{X\cdot p+r-1}{(X+1)\cdot p+r}$.

אמנם, $(X \cdot p + r - 1) \cdot (X + 1) < X \cdot ((X + 1) \cdot p + r)$

$$X^2 p + Xp + rX + r - X - 1 < X^2 p + Xp + Xr$$

$r - X - 1 < 0$ או $r < X + 1$, מש"ל.

התשובה:

$$\boxed{\mathbf{F(X) = X + 1}}$$