בס"ד

חישוביות - מטלה 1-

1.א. $F:\Sigma^* \to \Gamma^*$ עבור א"ב סופיים $\Gamma \subset \Sigma$.

בלי הגבלת הכלליות נקבע:

$\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,1,b\}$

• F הינה פונקציה מלאה ושאינה ניתנת לחישוב.

נראה דוגמא לפונקציה F' שאינה מלאה ושאינה ניתנת לחשוב.

נגדיר את F' כך שהיא פועלת בדיוק כמו F רק הא"ב קלט שלה שונה:

$\Sigma' = \{0,1,2\}$, $\Gamma' = \{0,1,b\}$ $\quad F': \Sigma^* \to \Gamma'^*$

נדגיש ש F' מוגדר רק עבור Σ בקלט (ולא עבור Σ') בה"כ

ולכן אינה מלאה.

הוכחה: (שאינה ניתנת לחישוב)

נניח בשלילה ש F' ניתנת לחישוב, כלומר קיימת M שבהינתן x מחשבת את $F'(x)$ לכל $x \in \Sigma'$.

נתבונן ב M, אם היא יכולה לחשב את F' אז גם היא יכולה לחשב את F (כי F' פועלת בדיוק כמו F - כך הגדרנו, ובנוסף $\Sigma \subset \Sigma'$)

וסתירה לכך ש F אינה ניתנת לחישוב

F' אינה ניתנת לחישוב.

ג. נגדיר פונקציה F מלאה וניתנת לחישוב $F:\Sigma^* \to \Gamma^*$

$\Sigma=\{0,1\}$ $\Gamma=\{0,1,b\}$

$x\in\Sigma^*$, $F(x)=x$ פונקציית הזהות.

נבנה מ"ט M שמחשבת פונקציה זו:

$$M=(Q,q_0,F,\Gamma,\Sigma,b,\delta)$$

$$Q=\{q_s,q_F\}\ ,\ q_0=q_s\ ,\ F=\{q_F\}$$

המשמעות של המצבים:

- q_s - מצב התחלה כאשר קוראים 0 או 1 נשארים על מצב זה.
- q_F - מצב סופי מגיעים למצב זה אחר שקוראים את תו הסוף b.

$Q \backslash F$ \ Γ	0	1	b
q_s	$(q_s,0,R)$ כתיבת 0	$(q_s,1,R)$ כתיבת 1	(q_F,b,S) סיום

ואז לפי קוד סופי כאשר יקרא תו הסוף b המכונה העתיקה את הקלט ותעצור.

ד. נגדיר פונקציה F שאינה מלאה וניתנת לחישוב

$\Sigma=\{0,1\}$ $\Gamma=\{0,1,b\}$

$$F(x)=\begin{cases}1^n & \backslash\ x=0^n\ \ n\in\mathbb{N}\\ \text{undefined} & \backslash\ \text{otherwise}\end{cases}$$

נבנה מ"ט M שמחשבת את F:

$$M=(Q,q_0,F,\Gamma,\Sigma,b,\delta)$$

$$Q=\{q_0,q_{ud},q_F\}\ ,\ F=\{q_F\}$$

המשמעות של המצבים:

- q_{ud} - מצב undefined כאשר מגיע למצב זה לא יוצא ממנו והמכונה לא עוצרת.
- q_0 - ~~[illegible]~~ כל עוד קורה 0 נשאר במצב הזה וכותב 1.
- q_F - כאשר מגיע לתו הסיום b.

$Q \backslash F$ \ Γ	0	1	b
q_0	$(q_0,1,R)$ כותב 1	$(q_{ud},1,S)$ לא מוגדר	(q_F,b,S) סיום
q_{ud}	$(q_{ud},0,S)$	$(q_{ud},1,S)$	—

בס״ד

2.א. מכונת טיורינג עם אינסוף סרטים, פונקציית המעברים שלה מוגדרת כך:

$$\delta : Q \times \Gamma \times \Gamma \times \dots \to Q \times (\Gamma \times \{S,R,L\}) \times (\Gamma \times \{S,R,L\}) \cdots$$

$$\delta(q,\bar{a}) = (\delta_1(q,\bar{a}), \delta_2(q,\bar{a}), \dots)$$

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

נראה שכל $F:\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ פונקציה כלשהי,

ניתנת לחישוב במודל TM זה עם אינסוף סרטים.

~~[illegible]~~ נסמלץ את TM בעלת אינסוף סרטים שהגדרנו ונראה שכל F ניתנת לחישוב:

אתחול - # קלט רק בסרט הראשון ← $X = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

כל שאר הסרטים ריקים ␢

עבור על הסרט הראשון ועבור כל תו

x_i שנקרא נכתוב אותו במקום הראשון

בסרט ה i.

כאשר נגיע לסוף X (הקלט) נכניס סימן

כלשהו (נגדיר *)

↓

1 $x_1\ x_2\ x_3 \dots x_i\ x_{i+1} \dots x_j$ | ␢ ␢ ……

2 ␢ ␢ ␢ …

3 ␢ ␢ ␢ …

⋮

i ␢ ␢ ␢ …

⋮

אינסוף סרטים

↓

1 $x_1\ x_2\ x_3 \dots x_i$

2 x_2 ␢ ␢ …

3 x_3 ␢ ␢ …

⋮

i x_i ␢ ␢ ␢ …

j x_j ␢ ␢ ␢ …

j+1 * ␢ ␢ ␢ …

⋮

␢ ␢ ␢

⋮

אינסוף סרטים

עכשיו יש ראש קורא\כותב

על כל אחד מתווי הקלט

ובנוסף כל סרט זה יודע את

כל הקלט $\bar{a}$

ויוכל לפעול בהתאמה עבור הקלט

↓

כך אפשר לחשב כל F

↓

אנו יודעים שיש פונקציות F

שאינן ניתנות לחישוב עבור TM רגילה.

↓

המודלים אינם שקולים

2.ב. מכונת טיורינג בעלת אינסוף סרטים שבשונה מסעיף א, הצעד בסרט ה-i תלוי

רק בתוכן הראש בסרט זה (ולא תלוי בכל וקטור $\bar{a}$ כמו בסעיף קודם)

פונקציית המעברים מוגדרת כך:

$$\delta(q,\bar{a}) = (\delta_1(q,a_1), \delta_2(q,a_2), \dots)$$

(ראה שקילות ל MT רגילה -

⇐ בהינתן MT שמחשבת f_M נבנה 'MT בעלת אינסוף סרטים (MT רגילה)
שמחשבת את אותה הפונקציה ומוגדרת באותו האופן רק על הסרט הראשון
ובכל שאר הסרטים אף פעם לא תזיז את הראשים (וישארו בהם b).

⇒ בהינתן מכונת MT עם אינסוף סרטים שמחשבת את f_M נבנה 'MT רגילה
שמחשבת את אותה הפונקציה.

באופן אינטואיטיבי בגלל שכל סרט פועל לפי פונקציית מעברים משלו ורק לפי מה
שהוא רואה בראש שלו אז הוא שקול בטוח ל MT רגילה שפשוט תחולק ע"י תו
כלשהו - לדוג' # - לכל הסרטים שמשתמשים וכל חלק בסרט היחיד יפעל כמו הסרט
המתאים לו מהמכונה עם אינסוף הסרטים.

2.ג. מ״ט שבה Q יכול להיות אינסופי, כל השאר כמו במ״ט רגילה.

(ראה ש TM עם אינסוף מצבים חזקה יותר מ TM רגילה (עם מספר מצבים סופי).

- (נמלוף את TM עם אינסוף מצבים: (עם $\Sigma=\{0,1\}$ בה״כ)

עבור כל מחרוזת 0 או 1 נגדיר 2 מצבים q_0, q_1 בהתאמה.

עבור כל $x\in\{0,1\}^n$ נגדיר עוד 2 מצבים q_{x0}, q_{x1} בהתאמה.

וכך עד אינסוף.

ונותר לנו עוד להראות שיכול לקבל כל שפה (סופית ואינסופית).

ה TM המתאימה שהגדרנו (עם אינסוף מצבים) יכולה להכריע כל שפה כי עבור כל מ

שנספר יהיה לנו מצב לעבור אליו. (יש לנו אינסוף כאלה).

והראינו בכיתה שישנן שפות ש TM רגילה לא יכולה להכריע.

וקל לראות ש TM עם אינסוף מצבים חזקה יותר ולכן אינה שקולה ל TM רגילה. ■

3. מ״ט שבה Γ יכול להיות אינסופי, כל השאר כמו במ״ט רגילה.

(ראה ש TM עם אינסוף תוים באלפבית עבודה Γ חזק יותר מ TM רגילה.

- (נסמלף מעובד כך ש TM עם Γ אינסופי יכול להכריע כל שפה מעל א״ב Σ

עבור $L\subset\Sigma^*$ כלשהי (אינסופית בה״כ, כי סופית גם TM רגילה מכריעה).

נגדיר ב Γ של TM כך:

עבור כל $x\in L$ קיים באלפבית עבודה תו $\langle x\rangle\in\Gamma$.

ל TM יש 2 מצבים q_{accept}, q_{reject} מצב מקבל ומצב דוחה.

אם $x\in L$ אז כתיבה של $\langle x\rangle$ בסרט יביא אותנו למצב מקבל (q_{accept})

אם $x\notin L$ אז $\langle x\rangle\notin\Gamma$ ונגיע למצב דוחה. (q_{reject})

וכך אפשר להכריע כל שפה.

TM רגילה אינה יכולה להכריע כל שפה ו TM עם Γ אינסופי חזקה יותר. ■