

מטלה 2 בחישוביות

הנחיות:

- ההגשה עד ה-4.6 דרך המודל.
- ההגשה היא ביחידים. התייעצות עם אחרים מותרת (אם כי עדיף קודם לשבור את הראש לבד), אך חובה לכתוב את הפתרון לבד.
- אם לא נאמר אחרת, הוכיחו את תשובותיכם. מותר להשתמש ללא הוכחה במשפטים שהוכחו בהרצאות, בתנאי שמצטטים את המשפט במדויק.
- אם לא נאמר אחרת, בכל השאלות $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, b\}$.

שאלות

1. נזכיר, כי עבור מחלקת שפות \mathcal{C} , שפה L_1 היא שלמה ב \mathcal{C} , אם היא מוכלת ב \mathcal{C} , וכן לכל $L_2 \in \mathcal{C}$ ניתנת לרדוקציה ל L_1 ($L_2 \leq L_1$).

הוכח או הפרך:

- א. קיימת שפה שלמה ב $RE \cup coRE$.
- ב. קיימת שפה שלמה ב $coRE$.
- ג. הוכיחו כי קיימות זוג שפות L_1, L_2 לא טריוויאליות כך שאף אחת מהן אינה נתנת לרדוקציה לשניה.

2. לכל שפה מהשפות הבאות, ענו האם היא ב R והאם היא ב RE .

- א. $\{ \langle M \rangle \mid L(M) \in R \}$
- ב. $\{ \langle M \rangle \mid M \text{ halts on all inputs} \}$
- ג. $\{ \langle M \rangle \mid L(M) \in coRE \}$

3. בשאלה זו נגדיר סוג חדש של רדוקציות: רדוקציות טיורינג. נאמר ששפה L_1 ניתנת לרדוקציית טיורינג לשפה L_2 , נסמן $L_1 \leq_T L_2$ אם קיימת מכונת טיורינג $M_{1,2}$ דו-סרטית מסוג מיוחד (יפורט בהמשך) במודל הבא:

- למכונה יש סרט אחד רגיל וסרט "שאלות".
- המכונה מתחילה את הריצה כמו מ"ט דו-סרטית רגילה.
- קיימים זוג מצבים מיוחדים q_{ask} . כאשר המכונה עוברת למצב זה, המחשב

מבצע את הצעד הבא בצורה מיוחדת. באופן "קסום" מחושב האם תוכן הסרט השני (משמאל לראש) שייך ל L_2 או לא (ה"קסם" הוא שהדבר מובטח גם אם L_2 אינה כריעה!). אם כן, הוא עובר למצב (לא סופי) מיוחד q_{yes} . אחרת, הוא עובר למצב מיוחד (לא סופי) q_{no} . בשאר המצבים, המכונה מתנהגת לפי טבלת המעברים שלה באופן רגיל.

אם הקלט x שייך ל L_1 , $M_{1,2}$ עוצרת ב q_{acc} , אחרת היא עוצרת ב q_{rej} .

הוכח או הפרך.

1. אם $L_1 \leq_T L_2$ ו $L_2 \in R$, אז L_1 גם ב R .
2. אם $L_1 \leq_T L_2$ ו $L_2 \in RE$, אז L_1 גם ב RE .

שאלת בונוס - שאלה זו תבדק במלואה (וכמובן לא הכרחי לפתור אותה כדי לקבל 100).

1. נזכיר כי הסדר הלקסיקוגרפי על Σ^* מקיים $x <_{lex} y$ אם $|x| < |y|$ או $|x| = |y|$ אך x קודם ל y בסדר מילוני. נאמר שפונקציה $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ היא מונוטונית, אם $x <_{lex} y \rightarrow f(x) <_{lex} f(y)$. הוכח:
2. (3 נקודות) כל פונקציה מונוטונית שתמונתה מוכלת ב $\{0, 1\}$ ניתנת לחישוב.
3. (5 נקודות) לא כל פונקציה מונוטונית נתנת לחישוב. רמז: שיקולי ספירה.