

## סיבוכיות מטלה 2

עוז לוי 305181158

### שאלה 1.

- א. נתחיל מכך שלא קיימת רדוקציה בין שתי שפות  $L_1, L_2$  אשר מקיימות  $L_1 \in RE \setminus R$ ,  $L_2 \in coRE \setminus R$ . כעת נניח כי קיימת שפה שלמה באיחוד  $RE \cup coRE$ , לפי הגדרה אם היא שייכת לאחת הקב'  $RE \setminus R$ ,  $coRE \setminus R$  (שאין ביניהן חיתוך) אזי היא אינה שלמה! ברור ששפה שלמה בקב' הנ"ל לא יכולה להיות שייכת ל- $R$  מפני שלא קיימת רדוקציה בין HP לכל שפה ב- $R$  לדוגמא,  $HP \not\leq R$  שייכת לקב'...  
ב. ידוע כי HP היא שפה שלמה ב- $RE$ . לפי הגדרה כל שפה  $L$  ב- $RE$  קיימת שפה  $\bar{L}$  אשר שייכת ל- $coRE$ . לפי תכונות הרדוקציה והגדרה שפה שלמה HP מתקיים:  
לכל שפה  $L_i$  השייכת ל- $R$  מקיים  $L_i \leq HP$  ומכך נגזר כי  $\bar{L}_i < \bar{HP}$  אזי  $\bar{HP}$  שלמה ב- $coRE$  לדוגמא.  
ג. עבור כל זוג שפות  $L_1, L_2$  כריעות ניתן למצוא פונ' רדוקציה מתאימה ע"י בנייה. עבור יחס הרדוקציה  $L_1 \leq L_2$  הפונ' תיבנה באופן הבא:  
א. לכל ערך מילה אשר שייכת לשפה  $L_1$  נציב כתמונה לפונ' את המילה  $w$  אשר שייך לשפה  $L_2$ .  
ב. לכל ערך מילה אשר אינה שייכת לשפה  $L_1$  נציב כתמונה לפונ' את המילה  $w$  אשר אינה שייך לשפה  $L_2$ .  
ומכך ניתן לבנות פונ' רדוקציה בין כל שתי שפות הניתנות להכרעה.  
<https://cs.stackexchange.com/questions/19427/does-two-languages-being-in-p-imply-reduction-to-each-other>

כאשר מדובר לא בהכרח בשפות כריעות אנו יכולים להשתמש בדוגמא הבאה כמו שתי השפות  $HP$  ו- $\bar{HP}$  שהשתמשנו בסעיפים הקודמים, ובבירור אין רדוקציה בין השפות הנ"ל.

### שאלה 2.

- א.  $L_s =$  שפת קידודי המכונות  $\langle M_i \rangle$  כך שהשפה אשר כל אחת מהמכונות  $M_i$  מקבלת נמצאת ב- $R$ . ע"י מנייה רקורסיבית של שפות בעל תכונות ב- $RE$  והמשפט הבא: עבור כל תכונה  $S$  לא טריוויאלית ב- $RE$  כך שהקב' הריקה שייכת ל- $S$ , מתקיים כי  $L_s$  אינה שייכת ל- $RE$ . במקרה שלנו הקב' הריקה באמת שייכת לתכונה (כי השפה הריקה נמצאת ב- $R$ ) אזי השפה  $L_s$  אינה שייכת ל- $RE$ .  
ב.  $L =$  שפת קידודי כל מכונות אשר עוצרות על כל קלט.  
ז"א, אנו צריכים מכונה אשר מטפלת בקידודי מכונות וקובעת האם הם עוצרות על כל קלט או לא. מפני שלא ניתן לבדוק בצורה סופית כל קלט בעולם, אין לנו דרך להכריע את השפה הנ"ל לכן ראשית אינה שייכת ל- $R$ . אציין כי במקרה שקיימת מכונה אשר מכריעה את השפה הנ"ל, אותה מכונה יכולה גם להכריע את  $HP \leq$  סתירה לכן בהכרח לא ב- $R$  (צד א' ברדוקציה).

בהמשך לכך נבצע רדוקציה מבעיית הדחייה לבעיה ההכרעה עבור כל קלט (שלנו).

בעיית הדחייה תיוצג ע"י מ"ט  $M\bar{h}p(\langle M_i \rangle, w)$ .

נבנה מ"ט  $M'(x)$  לשפה הנ"ל אשר מקבלת  $x = f(\langle M_i \rangle, w)$ .

פעולת  $M'$

הפעל  $M\overline{hp}(<M_i>, w)$  למס' סיבובים כאורך הקלט

אם  $M\overline{hp}$  עצרה, אזי  $M'$  תכנס ללולאה אינסופית.

אם  $M\overline{hp}$  לא עצרה, אזי  $M'$  תעצור.

המכונה  $M'$  מקבלת את השפה  $L$  שלנו ע"י שימוש ב  $M\overline{hp}$  ומכך מתקיים כי  $\overline{HP} \leq L$ .  
הוכחת הרדוקציה:

נכונות -  $M'$  עוצרת מקס' לאחר אורך הקלט סיבובים כאשר  $M\overline{hp}$  לא הצליחה להכריע,

ונכנסת ללולאה כאשר  $M\overline{hp}$  הכריעה כי המילה אינה בשפה.

עצירה - האלגו' עוצר כתלות באורך הקלט.

עקביות - אלגו' המשתמש ב  $M\overline{hp}$  וניתן לבנייה.

לכן השפה הנ"ל אינה שייכת ל-RE.

יכול להיות מעניין, אבל כנראה לא קשור לסעיף.

<https://cs.stackexchange.com/questions/41243/halting-problem-reduction-to-halting-for-all-inputs>

ג.  $L_5$  שפת קידודי כל המכונות שהשפות שלהן שייכות ל-coRE.

$$\{ \langle M \rangle \mid L(M) \in \text{coRE} \} = \{ \langle M \rangle \mid \overline{L(M)} \in \text{RE} \} = \{ \langle M' \rangle \mid L(M') \in \text{RE} \}$$

$$\{ \langle M' \rangle \mid L(M') \in \text{RE} \} = \{ \langle M' \rangle \mid L(M') \in \text{RE} \setminus R \cup L(M') \in R \}$$

לא קיימים קידודי מכונות המכריעים אם שפה היא ב  $\text{RE} \setminus R$  לפי הגדרת הקב' RE.

מכך נסיק כי השפה  $L_5$  שקולה לשפה בסעיף א'. מ.ז.ל.

### שאלה 3.

א. לפי הנחה,  $L_2$  שייכת ל- $R$ , לכן קיימת מ"ט אשר מכריעה אותה, נסמן  $M_2$ .

נפעיל את המכונה רדוקציית טיורינג  $M_{1,2}$  על השפות  $L_1, L_2$ , ומפני שאנו יודעים כי  $L_2$  ניתנת

להכרעה ריצת  $M_{1,2}$  תגיע למצב  $q_{\text{yes/no}}$ . החל ממצב זה אנו נקליט את פעולת  $M_{1,2}$  (ע"י

הקונפיגורציות) עד לסופה. מההקלטה הנ"ל אנו יכולים לבנות מ"ט  $M_1$  אשר תכריע את השפה

$L_1$  וזאת ע"פ בנייתה של  $M_{1,2}$ .

לסיכום, ע"י הנתון כי  $L_1 \leq_{\text{MT}} L_2$  וכי  $L_2$  ניתנת להכרעה, אנו יכולים למצוא את המ"ט שתכריעה

את  $L_1$  ומכך בהכרח שייכת ל- $R$ .

ב. הטענה אינה נכונה ונראה דוגמא נגדית למצב  $L_2 = \text{HP}$ ,  $L_1 = \overline{\text{HP}}$ .

השפות הנ"ל מקיימות  $L_1 \leq_{\text{MT}} L_2$  ונראה את המ"ט המקיימת את הרדוקציה:

ממצב  $q_{\text{ask}}$  המכונה תעבור

ל  $q_{\text{yes}}$  אם הקלט שייך ל HP

ל  $q_{\text{no}}$  אם הקלט אינו שייך ל HP

בהמשך לכך אין טעם לבצע חישוב כלשהו של הקלט אל מול  $\overline{\text{HP}}$  מפני שהתשובה

ישירות הפוכה לתשובה במצב  $q_{\text{yes/no}}$  הגענו אליו.