קצת לוגיקה - ביטויים בוליאנים

מבוא ללוגיקה

לוגיקה משמשת בתפקיד חשוב ומתפתח במדעי המחשב. למעשה, ישנם כאלה המרחיקים לכת ורואים את מדעי המחשב כלוגיקה יישומית.

בסעיפים הבאים נכיר את **תחשיב הפסוקים** (propositional logic), המהווה מערכת להסקת מסקנות ועריכת חישובים עם פסוקים. תחשיב הפסוקים החל עם עבודתו של המתמטיקאי ג׳ורג׳ בול (George Boole) בין השנים 1847 ל- 1854. בול הבחין בדמיון בין התכונות של האופרטורים הלוגיים **ו** (and) ו- **או** (or) והפעולות המתמטיות כפל וחיבור. הוא פיתח מערכת לטיפול במשפטים לוגיים כמו שהאריתמטיקה מטפלת במספרים.

תחשיב הפסוקים

האסטרטגיה הבסיסית של בול הייתה ללמוד תבניות של טיעונים לוגיים, על-ידי שימוש בסמלים כדי לייצג הן משפטים בודדים והן את התבניות עצמן. גישה זו ללוגיקה ידועה כתחשיב הפסוקים (או לפעמים כתחשיב הסימנים - symbolic logic). משפט (או פסוק) בתחשיב הפסוקים יכול להיות בעל ערך אחד משני ערכי האמת **אמת (true)** או **שקר (false)**. המשפטים הבאים הם פסוקים (propositions) אופייניים.

- השטח של משולש שווה-שוקיים ישר זווית עם יתר באורך של $\sqrt{2}$ הוא 1/2.
- כל האיברים ברשימה (4 6 7 5 3 1) קטנים מ- 10.
- $3 + 5 = 7$
- המשפט ״דג סקרן שט בים מאוכזב ולפתע מצא חברה״ מכיל לפחות מופע אחד של כל האותיות של הא״ב העברי.
- אף סטודנט מהקורס ״אשנב למתמטיקה״ בסמסטר ב2005 לא קיבל ציון 100.

שימו לב שלמרות שהמשפט השלישי הוא **שקר**, הוא עדיין פסוק. כדי להביע משפטים כאלו בדרך מדויקת, אנו משתמשים בסגנון פורמלי בכתיבת פסוקים.

הגדרה:

פסוק הוא כל ביטוי שאפשר ליצור לפי הכללים הבאים:

כלל 1: הערכים **true** ו- **false** הם פסוקים.

כלל 2: כל משתנה שהטיפוס שלו הוא {**true, false**} הוא פסוק.

כלל 3: אם p הוא פסוק, כך גם $(\sim p)$.

כלל 4: אם p ו- q הם פסוקים, כך גם $(p \vee q), (p \wedge q), (p \Rightarrow q), (p \Leftrightarrow q)$.

בטבלה 1 נמצאים *האופרטורים הלוגיים* (logical operators) המוזכרים בכללים 3 ו- 4 ליצירת פסוקים.

ייצוג מתמטי	**משמעות**
$\sim$	שלילה
$\vee$	או (דיסיונקציה)
$\wedge$	וגם (קוניונקציה)
$\Rightarrow$	גרירה
$\Leftrightarrow$	שקילות

טבלה 1 האופרטורים הלוגיים

נשים לב כי הגדרה זו היא רקורסיבית. כלומר, הכללים 3 ו- 4 מגדירים פסוק על-ידי שימוש בפסוק אחד או יותר קיימים, ובאופרטורים לוגיים. כל אחד מהפסוקים הקיימים נוצר על-ידי שימוש בכללים 3 ו- 4 שוב. בכל אופן, בגלל שיש פסוקים יסודיים שנוצרו על-ידי כללים 1 ו- 2 שבהם אין שימוש במילה פסוק, התהליך של מציאת פסוקים בעזרת כללים אלו אינו אינסופי; כלומר, ההגדרה אינה מעגלית. (מושג הרקורסיה ילמד בהרחבה בהמשך הקורס).

כרגע, כשאנו עובדים עם תחשיב הפסוקים, נשתמש במשתנים ולא נדאג למשמעות של הפסוקים המסוימים שהם יכולים לסמל. מאוחר יותר, נשים במשתנים פירושים שונים המתאימים לתחום העיצוב של המחשב והתכנות.

נגדיר משתנה בוליאני (על שמו של ג'ורג' בול) כמשתנה שערכיו הם אמת (true) או שקר (false).

נסתכל תחילה בכמה דוגמאות.

דוגמא 1.

אם p, q ו- r הם משתנים בוליאנים, אז הדוגמאות הבאות הן פסוקים חוקיים.

$$p,\quad q,\ (\sim p),\quad (p \vee q),\quad (p \vee (q \vee r)),\quad (p \Rightarrow (q \vee (r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))))$$

משמאל לימין - שלוש הדוגמאות הראשונות הן פסוקים בבירור, הנובעים ישירות מהכללים 1 ו-2. הדוגמא הרביעית נובעת ישירות מהכללים 2 ו- 4. עבור הדוגמא החמישית אפשר ליישם את כלל 4 פעמיים:

p, q ו- r הם פסוקים מכלל 2;

$(q \vee r)$ הוא פסוק מכלל 4;

$(p \vee (q \vee r))$ הוא פסוק מכלל 4.

כך אפשר להצדיק גם את היות הדוגמא השישית פסוק:

p, q ו- r הם פסוקים מכלל 2;

$(p \Leftrightarrow q)$ הוא פסוק מכלל 4;

$(r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))$ הוא פסוק מכלל 4;

$(q \vee (r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)))$ הוא פסוק מכלל 4;

$(p \Rightarrow (q \vee (r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))))$ הוא פסוק מכלל 4;

דוגמא 2.

הדוגמאות הבאות אינן מהוות פסוקים חוקיים כיוון שאין סדרה של יישומים של הכללים 1 - 4 המובילה אליהם:

$$(p),\quad (p\ q)\ p),\quad \sim (p)$$

כמו שדוגמא 2 מראה, אם אנו דבקים בקפדנות בארבעת הכללים, לסוגריים יש תפקיד חשוב בקביעה אם ביטוי הוא פסוק או לא. בכל אופן, אנו יכולים לזרוק את הסוגריים בכל פעם שהמשמעות ברורה בלעדיהם. כך למשל אפשר לכתוב $\sim p$ במקום $(\sim p)$, $p \vee q$ במקום $(p \vee q)$ וכדומה.

זריקה רשלנית של הסוגריים יכולה לגרום לאי-בהירות. למשל, אין זה ברור מה משמעותו של הפסוק $p \vee q \wedge r$. האם הכוונה ל- $(p \vee (q \wedge r))$ או ל- $((p \vee q) \wedge r)$.

כדי להימנע מערפול זה, סדר הקדימויות של חמשת האופרטורים הלוגיים הוא: $\sim$ הוא בעל הקדימות הגדולה ביותר; אחריו $\wedge$; ואחר-כך $\vee$, $\Rightarrow$ ו- $\Leftrightarrow$ בסדר זה. לכן, $p \vee q \wedge r$ יפורש תמיד $(p \vee (q \wedge r))$. הדבר דומה לקדימות של פעולת הכפל על-פני החיבור במתמטיקה, המפרשת את הביטוי $a + 2b$ כסכום של a ושל $2b$ ולא כמכפלה של a+2 עם b.

לוגיקה והשפה העברית

לא תמיד אפשר לייצג משפטים בשפה בעזרת פסוקים. כלומר, הרבה משפטים אינם משפטים הצהרתיים ולכן אין להם ערך אמת. למשל, "סגור את הדלת!" הוא משפט פקודה ו"האם השתתפת בהרצאתו של פרופ' ישראלי היום?" הוא משפט שאלה. בכל אופן, אפשר לייצג משפטים רבים על-ידי פסוקים, ומשפטים רבים יותר אפשר לייצג על-ידי פרדיקטים. במדעי המחשב, רוב המשפטים שנרצה לייצג בעזרת סימנים הם הצהרתיים, יש להם ערך אמת אחד ואפשר לייצגם בעזרת פסוקים או פרדיקטים.

נשים לב שישנם חמישה אופרטורים בתחשיב הפסוקים. למעשה, רק אחד באמת הכרחי, כיוון שאפשר להראות שכל אחד מהאחרים שקול לביטוי שמשתמש רק באופרטור אחד (נראה זאת בהמשך ובתרגילים). השפה העברית מציעה מגוון עצום של דרכים להביע את אותו רעיון; לכן כשאנו מייצגים משפט על-ידי פסוקים, אנו משמיטים את גווני המשמעויות ומתרכזים במבנה הלוגי של המשפט. בנוסף, אנו נשתמש באותו מבנה לוגי כדי להביע צורות שונות בשפה העברית.

שלילה (Negation)

אם אנו מייצגים את הפסוק "בנימין נתניהו מתמודד על ראשות הממשלה" על-ידי המשתנה p, אנו יכולים לייצג כל אחד מהפסוקים הבאים על-ידי $\sim p$:

- "בנימין נתניהו לא מתמודד על ראשות הממשלה."
- "זה לא המקרה שבנימין נתניהו מתמודד על ראשות הממשלה."

קוניונקציה (Conjunction)

באופן דומה אנו יכולים לייצג את כל אחד מהמשפטים הבאים בעזרת הפסוק $p \wedge q$, כאשר מתבצעות השמות מתאימות למשתנים p ו- q.

- "המספר n הוא מספר ראשוני שקטן מ- 100. "
- " $10 \le x \le 100$"
- "הנרי היגינס היה רווק מושבע, אבל אליזה דוליטל כבשה את לבו."
- "למרות שעזר וייצמן היה שר הביטחון בממשלת הליכוד, הוא נבחר לנשיאות המדינה בתמיכת מפלגת העבודה."

הראשון מהמשפטים לעיל מכיל שני משפטים - ""n הוא מספר ראשוני" ו- "n הוא קטן מ- 100" - אבל הם משתלבים זה בזה על-ידי קיצור. המשפט השני מכיל גם הוא שני משפטים - " $10 \le x$ " ו- " $x \le 100$ " - והם מקוצרים לאחד בסגנון המתמטי. במשפט השלישי למילה "אבל" יש אותה משמעות לוגית של ו; היא מוסיפה גורם של ניגוד למשפט, אבל אין בו כדי להבדיל בסמלים של הפסוק הלוגי. במשפט הרביעי המילה "למרות" מצביעה על קיומו של ו , גם כאן בתוספת של ניגוד.

את המשפט "השמש זורחת, הציפורים מצייצות והעצים מלבלבים" אפשר לייצג כ- $((p \wedge q) \wedge r)$ או כ- $(p \wedge (q \wedge r))$. ביחידה 7 נראה ששני הביטויים הלוגיים הללו שקולים ואפשר להשמיט את הסוגריים ולכתוב את הביטוי $p \wedge q \wedge r$. במשפט בעברית, הפסיק הראשון משמש כאופרטור הלוגי $\wedge$.

דיסיונקציה (Disjunction)

לאופרטור הלוגי $\vee$ יש שתי משמעויות השונות במקצת אחת מרעותה. נתבונן במשפט הבא: "לחוג במדעי המחשב באוניברסיטה יתקבל כל מי שיקבל מעל 720 במבחן הפסיכומטרי או שיהיה לו ממוצע של לפחות 10 בבגרות". מובן שהאוניברסיטה לא מתכוונת לדחות את הסטודנטים שימלאו את שני התנאים, כלומר יקבלו מעל 720 בפסיכומטרי וגם יהיה להם ציון ממוצע מעל 10 בבגרות. מצד שני, דמיינו לעצמכם הורה אומר לילדו: "אתה יכול ללכת לנדנדה או למגלשה". כוונתו היא בוודאי "אתה יכול ללכת לאחד או לשני אך לא לשניהם". המילה **או** במשפט של האוניברסיטה היא ***או כוללני*** *(inclusive **or**)*, שמשמעותו היא "אחת או שתי האפשרויות מתקבלות". אנחנו מציינים זאת לפעמים כ- **ו/או**. המילה **או** במשפט של ההורה היא ***או מצומצם*** *(exclusive **or**)*, שמשמעותו היא "רק אפשרות אחת מהשתיים מתקבלת ולא שתיהן". בתחשיב הפסוקים אנו משתמשים בדרך-כלל ב**או** כוללני ולא ב**או** מצומצם.

גרירה (Implication)

בפסוקים מהצורה $p \Rightarrow q$, p נקרא *הנחה* ו- q נקרא *מסקנה*. דוגמא בעברית לגרירה לוגית (implication) היא:

"אם תשבור את הכוס, אז תקבל עונש".

למרות שהמילה "אז" מושמטת לעתים קרובות בשימוש השוטף. אם p מייצג את "תשבור את הכוס", ו- q מייצג את "תקבל עונש", המשפט כולו ייוצג כ- $p \Rightarrow q$ (במשמעות "p גורר את q"). לחילופין, אנו יכולים לכתוב את המשפט כך: "תקבל עונש אם תשבור את הכוס", ועדיין נייצג זאת כ- $p \Rightarrow q$.

שקילות (Equivalence)

נבחין בהבדל בין שני שימושים שונים במילה *אם* במשפטים כדוגמת הבאים:

- "אני אקנה כרטיסים אם ההצגה שמועלית היא 'עלובי החיים'."
- "אני אקנה כרטיסים רק אם ההצגה שמועלית היא 'עלובי החיים'."

אם r מייצג את הפסוק "ההצגה שמועלית היא 'עלובי החיים'" ו- s מייצג את "אני אקנה כרטיסים", המשפט הראשון יכול להיות מיוצג על-ידי $r \Rightarrow s$. אדם שאומר את המשפט הזה

אינו אומר אם יקנה כרטיסים במקרה שההצגה 'גבירתי הנאווה' מועלית. למשפט השני יש משמעות אחרת לגמרי, והוא מיוצג על-ידי $s \Rightarrow r$. כלומר, אפשר לנסח אותו במילים אחרות כ-"אם אני אקנה כרטיסים אז ההצגה שמועלית היא 'עלובי החיים' "; הנסיבות היחידות בהן האדם יקנה כרטיסים הן אם ההצגה 'עלובי החיים' מועלית. הפסוק $s \Rightarrow r$ נקרא *הניגוד* של $r \Rightarrow s$.

תכונה אחרת חשובה של $p \Rightarrow q$ היא שהסיבתיות אינה הכרחית בין p ל- q. למשל, כשאנו אומרים "אם איתמר ינגן היטב בפסנתר, אז הוא יצטרף לתזמורת", אנו במרומז מניחים שהצירוף לתזמורת נגרם על-ידי נגינתו הטובה של איתמר. המשפט " אם 1+1=2 , אז השמש היא המרכז של המערכת הסולרית" מיוצג גם הוא על-ידי $p \Rightarrow q$, ומנקודת המבט של הלוגיקה הוא חוקי בדיוק כמו המשפט על איתמר והתזמורת. סיבתיות היא עוד תכונה שאנו יכולים לבטא בשפה הטבעית אך איננו יכולים לבטא בתחשיב הפסוקים.

הביטוי $p \Leftrightarrow q$ נועד ששני הפסוקים הם שקולים לוגית; כלומר כל אחד גורר את השני. דוגמא אופיינית לכך היא הבאה:

"יהי T משולש שצלעותיו הן a, b ו- c. אזי $a^2 + b^2 = c^2$ אם ורק אם T הוא משולש ישר-זווית".

אם p מייצג את $a^2 + b^2 = c^2$ ו- q מייצג את" T הוא משולש ישר-זווית", אז נייצג את המשפט " $a^2 + b^2 = c^2$ אם ורק אם T הוא משולש ישר-זווית" על-ידי $p \Leftrightarrow q$. כלומר, שני הפסוקים $p \Rightarrow q$ ו- $q \Rightarrow p$ הם **true** בו-זמנית.

דוגמא 3.

משפטים שלמים יכולים להיות מיוצגים בעזרת פסוקים. נתבונן בדוגמא המעט מורכבת הבאה: "אם האוניברסיטה הפתוחה או האוניברסיטה העברית יזכו בחוזה, דיגיטל או סאן יספקו להם את המחשבים ואת הציוד הנוסף, י.ב.מ. לא תספק להם את המחשבים ומנכ"ל משרד החינוך יודיע על פרישה". כדי לכתוב פסוק שקול למשפט מורכב זה, נייחס לכל תת-משפט משתנה משלו לפי הפירוט הבא:

האוניברסיטה הפתוחה תזכה בחוזה	=	OU
האוניברסיטה העברית תזכה בחוזה	=	HU
דיגיטל תספק מחשבים	=	DC
דיגיטל תספק ציוד נוסף	=	DE
סאן תספק מחשבים	=	SC
סאן תספק ציוד נוסף	=	SE
י.ב.מ. תספק מחשבים	=	IC
מנכ"ל משרד החינוך יודיע על פרישה	=	MR

המשפט כולו ייוצג על-ידי הפסוק הבא:

$$(OU \vee HU) \Rightarrow (((DC \wedge DE) \vee (SC \wedge SE)) \wedge \sim IC \wedge MR)$$

הערכת פסוקים: ערכי אמת

הגדרה: יהיו $p_1, \ldots, p_n$ כל המשתנים בפסוק. אז ה**מצב** של משתנים אלו $p_1, \ldots, p_n$ הוא התוצאה של השמת הערכים הבוליאנים **true** או **false** לכל אחד מהם.

לדוגמא, נניח שיש לנו את הפסוק $p \vee q$. מאחר ויש בו רק שני משתנים, וכל אחד מהם יכול להיות בעל ערך אחד משניים (**true** או **false**), יש רק ארבעה מצבים אפשריים למשתנים בפסוק זה. לכן, שלא כמו טיפוסים עם אינסוף ערכים (כמו **N** או **R**), ל- $p \vee q$ יש מרחב מצב כל-כך קטן שאנו יכולים לכתבו בטבלה עם כל ארבעת המצבים של המשתנים שלו. טבלה כזו נקראת **טבלת אמת**. טבלת האמת לפסוק $p \vee q$ ניתנת בטבלה 2.

p	q	$p \vee q$
true	**true**	**True**
true	**false**	**True**
false	**true**	**True**
false	**false**	**False**

טבלה 2: טבלת אמת עבור דיסיונקציה

מכאן אנו רואים שהערך של הפונקציה הוא **true** בכל פעם שלפחות אחד מהמשתנים הוא **true**; אחרת הוא **false**. ההגדרה של הפסוק תואמת את האינטואיציה שלנו על דיסיונקציה כפי שתיארנו קודם. כלומר, נניח שהמשתנה p מייצג את המשפט: "הציון שלך במבחן הפסיכומטרי הוא מעל 72." והמשתנה q מייצג את המשפט: "יש לך ממוצע של למעלה מ- 10 בבגרות.", אז הפסוק $(p \vee q)$ הוא **true** כאשר p הוא **true**, q הוא **true**, או כאשר גם p וגם q הם **true**; אחרת, $(p \vee q)$ הוא **false**.

באופן דומה אפשר לבנות טבלאות אמת עבור האופרטורים האחרים בתחשיב הפסוקים, כפי שנראה בטבלאות הבאות. רוב טבלאות האמת עקביות עם הפירוש האינטואיטיבי של האופרטורים שהצגנו קודם.

p	$\sim p$
true	**false**
false	**true**

טבלה 3 : טבלת אמת עבור שלילה

p	q	$p \wedge q$
true	**true**	**true**
true	**false**	**false**
false	**true**	**false**
false	**false**	**false**

טבלה 4 : טבלת אמת עבור קוניונקציה

p	q	$p \Rightarrow q$
true	**true**	**true**
true	**false**	**false**
false	**true**	**true**
false	**false**	**true**

טבלה 5 : טבלת אמת עבור גרירה

p	q	$p \Leftrightarrow q$
true	**true**	**true**
true	**false**	**false**
false	**true**	**false**
false	**false**	**true**

טבלה 6 : טבלת אמת עבור שקילות

אנו צריכים לדון מעט יותר על אופרטור הגרירה, במיוחד עבור המקרה בו p הוא **false**. נחזור לדוגמא שראינו : ״אם ההצגה שמועלית היא 'עלובי החיים', אני אקנה כרטיסים.״ המשפט הזה מיוצג על-ידי $p \Rightarrow q$. נבדוק את טבלת האמת של אופרטור הגרירה שורה אחרי שורה :

- אם ההצגה 'עלובי החיים' מוצגת, ערכו של המשתנה p הוא **true**. אם אני קונה כרטיסים, ערכו של המשתנה q גם הוא **true** וערכו של המשפט כולו הוא **true**.
- אם ההצגה 'עלובי החיים' מוצגת, ערכו של המשתנה p הוא **true**. אם בכל זאת אני לא קונה כרטיסים, ערכו של המשתנה q הוא **false**. והמשפט כולו הוא שקרי, כלומר ערכו **false**.
- אם ההצגה 'עלובי החיים' אינה מוצגת, ערכו של המשתנה p הוא **false**. האם בהכרח לא אקנה כרטיסים במקרה כזה? אם אני לא קונה כרטיסים, ערכו של המשתנה q הוא **false**, והמשפט כולו אמיתי, וערכו **true**. אבל, יתכן ואקנה כרטיסים להצגה 'שורת המקהלה' במקום זאת. מה ערכו של המשפט כולו אז? נשים לב ש**לא** אמרתי שאקנה כרטיסים **רק אם** ההצגה 'עלובי החיים' מועלית, ולכן בסך-הכל אם ההצגה לא מועלית ובכל זאת קניתי כרטיסים הרי שלא שיקרתי, והמשפט כולו נשאר אמיתי. כיוון שהשקריות של p לא גורמת בהכרח לשקריות של q , אנחנו חייבים להגיד שהמשפט כולו ערכו **true**.

טבלאות אמת יכולות להיבנות עבור פסוקים שונים עם מורכבויות שונות. כשלפסוק יש יותר מאופרטור אחד, השמות ערכי האמת נעשות בסדר בו אנו מפרשים את האופרטורים. נראה זאת בדוגמא הבאה.

דוגמא 4.

נבנה טבלת אמת עבור הפסוק $(p \vee q) \Rightarrow \sim p$ על-ידי התחלה עם p ו- q , הפקה של טבלת אמת עבור כל אחד מהתת-פסוקים $(p \vee q)$ ו- $\sim p$, ואחר-כך צירוף של תוצאות אלו על-ידי שימוש בטבלת האמת המקורית של $\Rightarrow$. אנו עובדים בדרך-כלל משמאל לימין כפי שנראה להלן :

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \Rightarrow \sim p$
true	**true**	**true**	**false**	**false**
true	**false**	**true**	**false**	**false**
false	**true**	**true**	**true**	**true**
false	**false**	**false**	**true**	**true**

טבלה 7 : טבלת אמת עבור הפסוק המורכב $(p \vee q) \Rightarrow \sim p$.

מספר השורות בטבלת האמת עולה באופן אקספוננציאלי (מעריכי) יחסית למספר המשתנים שבפסוק. כלומר, אם בפסוק יש משתנה אחד, כמו ב- $\sim p$, אז בטבלת האמת יהיו שתי שורות (אחת עבור כל ערך אמת אפשרי של p). לפסוקים עם שני משתנים, כמו $p \vee q$, יהיו ארבע שורות בטבלת האמת. לפסוקים עם שלושה משתנים יהיו שמונה שורות, כיוון שיש $2^3 = 8$ דרכים שונות להציב את שני ערכי האמת **true** ו- **false** בשלושה משתנים. באופן כללי, גודלה של טבלת אמת לפסוק עם n משתנים יהיה לכן 2^n שורות. לכן, אם יש לנו יותר משלושה או ארבעה משתנים בפסוק, גודלה של טבלת האמת יכול להיות מסורבל.

טענו לעיל שאין צורך בכל חמשת האופרטורים שהצגנו ולמעשה אפשר להסתפק באחד בלבד וכל השאר שקולים לו. נסמן שקילות זו בסימן המתמטי $\equiv$ להבדיל מאופרטור השקילות שסימנו $\Leftrightarrow$. נראה זאת בצורה מדויקת. נתחיל **בשני** אופרטורים הכרחיים :

נניח שיש לנו את שני האופרטורים **שלילה** $(\sim)$ **ואו** $(\vee)$ בלבד. אנו צריכים להביע את האופרטורים **ו** $(\wedge)$, **גרירה** $(\Rightarrow)$ **ושקילות** $(\Leftrightarrow)$ באמצעות האופרטורים הנתונים לנו.

טענה : $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$ (טענה זו ידועה בשם חוק דה-מורגן - DeMorgan's Law)

נוכיח טענה זו על-ידי שימוש בטבלאות אמת.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
true	**true**	**true**	**false**	**false**	**false**	**true**
true	**false**	**false**	**false**	**true**	**true**	**false**
false	**true**	**false**	**true**	**false**	**true**	**false**
false	**false**	**false**	**true**	**true**	**true**	**false**

טבלה 8 : טבלת אמת המראה שקילות בין $p \wedge q$ ל- $\sim(\sim p \vee \sim q)$.

מהטבלה עולה בבירור כי הפסוקים $p \wedge q$ ו- $\sim(\sim p \vee \sim q)$ מקבלים אותם ערכי אמת בכל אחת משורות הטבלה, כלומר בכל אחד מארבעת המצבים ש- p ו- q יכולים להיות בהם. לכן הפסוקים שקולים.

? שאלה1

באותו אופן בדיוק אפשר להראות כי $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$. עשה זאת.

את האופרטור גרירה נביע בעזרת האופרטורים **שלילה** ו-**או** כך: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$.

גם הפעם נוכיח את השקילות על-ידי שימוש בטבלאות אמת.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
true	**true**	**true**	**false**	**true**
true	**false**	**false**	**false**	**false**
false	**true**	**true**	**true**	**true**
false	**false**	**true**	**true**	**true**

טבלה 9: טבלת אמת המראה שקילות בין $p \Rightarrow q$ ל- $\sim p \vee q$.

ומה לגבי אופרטור השקילות? (בדוק את התוצאה בעזרת טבלאות אמת.)

$$
\begin{aligned}
p \Leftrightarrow q \ &\equiv\ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\
&\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \\
&\equiv \sim(\sim(\sim p \vee q) \vee \ \sim(\sim q \vee p))
\end{aligned}
$$

כלומר, הצלחנו להביע את כל חמשת האופרטורים בעזרת שני אופרטורים בלבד.

? שאלה 2

נניח שנתונים לך שני אופרטורים אחרים, **שלילה** ($\sim$) ו- **ו** ($\wedge$). האם אפשר להביע בעזרתם את כל שאר האופרטורים? אם כן - הוכח תשובתך בעזרת טבלאות אמת, אם לא - הסבר מדוע.

? שאלה 3

נניח שנתונים לך שני אופרטורים אחרים, **שלילה** ($\sim$) ו- **גרירה** ($\Rightarrow$). האם אפשר להביע בעזרתם את כל שאר האופרטורים? אם כן - הוכח תשובתך בעזרת טבלאות אמת, אם לא - הסבר מדוע.

? שאלה 4

נניח שנתונים לך שני אופרטורים אחרים, **שלילה** ($\sim$) ו- **שקילות** ($\Leftrightarrow$). האם אפשר להביע בעזרתם את כל שאר האופרטורים? אם כן - הוכח תשובתך בעזרת טבלאות אמת, אם לא - הסבר מדוע.

נגדיר אופרטור בינרי חדש בשם nor המקבל **true** רק כאשר שני האופרנדים שלו הם **false**. כלומר, טבלת האמת שלו היא זו:

p	q	p nor q
true	**true**	**false**
true	**false**	**false**
false	**true**	**false**
false	**false**	**true**

טבלה 10: טבלת אמת עבור nor

המשמעות של אופרטור זה בשפה הטבעית היא מעין "לא זה ולא זה". כששני האופרנדים שקריים הפסוק אמיתי. ובאנגלית: "neither this nor that". שימו לב ש- nor הוא למעשה not or, ואכן גם טבלת האמת שלו מראה כך. היא בדיוק הפוכה (**שלילה**) מהטבלה של **או**.

טענה: אפשר להציג בעזרת האופרטור nor בלבד את כל חמשת האופרטורים.

הוכחה: מספיק להוכיח כי אפשר להציג את האופרטורים **שלילה** ו- **או** בעזרת nor, שכן ראינו כבר לעיל ששניים אלו מספיקים כדי להציג את כל האופרטורים.

ובכן, את האופרטור **שלילה** נציג כך: $\sim p \equiv p \text{ nor } p$

השקילות נכונה כיוון שכאשר p הוא **true** אז $p \text{ nor } p = \textbf{true} \text{ nor } \textbf{true} = \textbf{false}$

וכאשר p הוא **false** אז $p \text{ nor } p = \textbf{false} \text{ nor } \textbf{false} = \textbf{true}$

וזהו בדיוק אופרטור השלילה.

ומה לגבי האופרטור **או**? כפי שראינו בטבלת האמת, nor הוא בדיוק השלילה של **או**, ולכן:

$$p \vee q \equiv \sim (p \text{ nor } q) \equiv (p \text{ nor } q) \text{ nor } (p \text{ nor } q)$$

ואכן נראה זאת בטבלת האמת :

p	q	$p \vee q$	p nor q	(p nor q) nor (p nor q)
true	**true**	**true**	**false**	**true**
true	**false**	**true**	**false**	**true**
false	**true**	**true**	**false**	**true**
false	**false**	**false**	**true**	**false**

טבלה 11 : טבלת אמת המראה שקילות בין $p \vee q$ ל- (p nor q) nor (p nor q)

? שאלה 5

בהינתן האופרטור nor, הבע בעזרתו את האופרטור **ו** ($\wedge$) ואת האופרטור **גרירה** ($\Rightarrow$). הוכח תשובתך בעזרת טבלאות אמת.

השימוש של ביטויים בוליאנים בשפת Java

אופרטורי יחס (relational operators)

אופרטורי היחס משווים בין שני ערכים שיש ביניהם יחס סדר. כלומר, הם משמשים לקבוע אם שני ערכים (למשל מספרים) הם שווים או שאחד מהם גדול מהשני. תוצאת השוואה זו היא ערך לוגי **true** או **false**.

ב- Java קיימים שישה אופרטורי יחס, המוצגים בטבלה הבאה :

במתמטיקה	ב- Java	משמעות
$=$	`==`	שני הערכים שווים
$\neq$	`!=`	שני הערכים שונים
$>$	`>`	הערך השמאלי גדול מהערך הימני
$<$	`<`	הערך השמאלי קטן מהערך הימני
$\geq$	`>=`	הערך השמאלי גדול או שווה לערך הימני
$\leq$	`<=`	הערך השמאלי קטן או שווה לערך הימני

טבלה 12 : אופרטורי היחס

למרות שקיימים סמלים תקניים מקובלים במתמטיקה לגבי האופרטורים האלה, הסימול ב- Java לגבי חלק מהם שונה במקצת. הדבר נובע ממגבלות אוסף התווים בחלק ממתקני הקלט/פלט. צמדי התווים ==, =!, =>, =< מהווים יחידות בלתי-נחלקות, ולכן יש לכתבם בסמיכות ובאותה שורה.

שימו לב לא להתבלבל בין אופרטור ההשמה (=) לבין אופרטור ההשוואה(==). זו אחת מהטעויות הנפוצות ביותר ב- Java.

אופרטורים לוגיים (logical operators)

כזכור, הגדרנו חמישה אופרטורים לוגיים. לשלושה מהם יש ייצוג בשפה Java, והם מוצגים בטבלה הבאה:

ייצוג מתמטי	משמעות	הייצוג ב- Java
$\sim$	שלילה	!
$\vee$	או (דיסיונקציה)	||
$\wedge$	וגם (קוניונקציה)	&&
$\Rightarrow$	גרירה	אין ייצוג
$\Leftrightarrow$	שקילות	אין ייצוג

טבלה 13: אופרטורים לוגיים

לדוגמא, כך נכתוב את הפסוקים הבאים ב- Java:

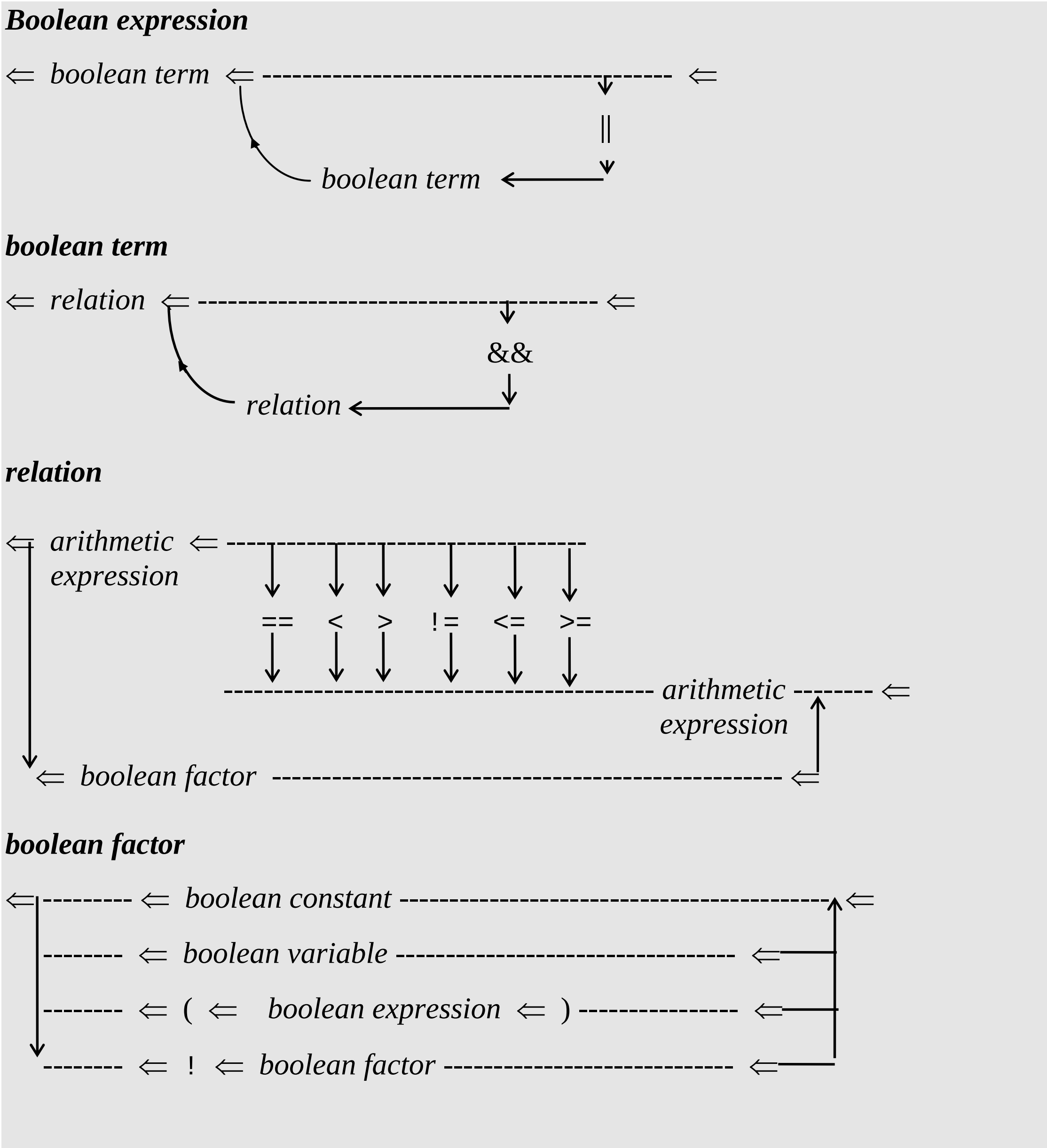
$(\sim p)$	`! p`
$(p \vee q)$	`(p || q)`
$(p \wedge (q \vee r))$	`(p && (q || r))`

נשים לב שלאופרטורים גרירה ושקילות אין ייצוג בשפה Java. אם צריך לייצגם, אפשר להשתמש באחת מהשקילויות הלוגיות (כגון: $p \Rightarrow q$ שקול ל- $\sim p \vee q$).

אנו יכולים לסכם ולהגדיר במדויק מהו התחביר של ביטוי בוליאני באותו אופן בו הגדרנו מהו ביטוי חשבוני.

הגדרה

ביטוי בוליאני הוא ביטוי שערכו הוא מהטיפוס `int` (1 ו- 0 מייצגים את **true** ו- **false** בהתאמה) ויש לו את התחביר הבא:



שימו לב,

אם אנו רוצים להדפיס את ערכו של ביטוי לוגי (בוליאני) b כלשהו , נכתוב בפשטות כך:

System.out.print (b);

אם ערך הביטוי הוא אמת, יודפס true, ואם ערכו שקר יודפס false.

אופרטור התנאי הטרנרי

אופרטור התנאי (?:) הוא האופרטור היחיד הטרנרי בשפה Java. כלומר זהו האופרטור היחיד שיש לו שלושה אופרנדים. הוא מקבל שלושה ביטויים ומחזיר ערך. התחביר הוא זה:

ternary selection expression

⇐**(**⇐ *logic expression* ⇐ **)**⇐ **?** ⇐**(**⇐ *expression1* ⇐ **)**⇐ **:** ⇐ **(** ⇐ *expression2*

⇐**)**

השורה נקראת כך: אם logic expression הוא **true** החזר את ערכו של expression1, אחרת (ערכו הוא **false**) החזר את ערכו של expression2.

בדרך-כלל את הערך המוחזר מציבים במשתנה. לדוגמא, במשתנה z יוצב הערך הגדול בין x ו- y.

```
z = (x > y) ? x : y;
```

תשובות לשאלות

תשובה 1

הוכחת חוק דה-מורגן $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
true	**true**	**true**	**false**	**false**	**false**	**true**
true	**false**	**true**	**false**	**true**	**false**	**true**
false	**true**	**true**	**true**	**false**	**false**	**true**
false	**false**	**false**	**true**	**true**	**true**	**false**

תשובה 2

נתונים שני האופרטורים **שלילה** ו**קוניונקציה**. ראינו כי בעזרתם אפשר להביע את האופרטור **דיסיונקציה**, בעזרת חוק דה-מורגן $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$.

אופרטור הגרירה ייוצג כך: $p \Rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$. והטבלה:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow q$
true	**true**	**false**	**false**	**true**	**true**
true	**false**	**true**	**true**	**false**	**false**
false	**true**	**false**	**false**	**true**	**True**
false	**false**	**true**	**false**	**true**	**True**

כך גם לגבי אופרטור השקילות: $p \Leftrightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)$. בדוק בעצמך את טבלת האמת.

תשובה 3

נתונים האופרטורים **שלילה** ו**גרירה**.

האופרטור **קוניונקציה** ייכתב כך: $p \wedge q \equiv \sim(p \Rightarrow \sim q)$

האופרטור **דיסיונקציה** ייכתב כך: $p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$

האופרטור **שקילות** ייכתב כך:

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim((p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p))$$

בדוק בעצמך את טבלאות האמת.

תשובה 4

לא ניתן להביע את כל האופרטורים באמצעות **שלילה** ו**שקילות** בלבד, כיוון שבטבלת האמת של האופרטור **שקילות** יש שתי תשובות **true** ושתי תשובות **false**, אי אפשר להגיע למצבים לא סימטריים כמו שבאופרטורים **קוניונקציה** ו**דיסיונקציה** באמצעות תוספת של שלילה בלבד.