Univerza v Ljubljani 8. junij 2021

Fakulteta za računalništvo in informatiko

Pisni izpit pri predmetu

ALGORITMI IN PODATKOVNE STRUKTURE

UNI RI in IŠRM

točk

Ime in priimek: ______________________

Vpisna številka: ______________________ Podpis: ______________________

Splošna navodila: *Natančno preberite navodila nalog. Odgovorite na zastavljena vprašanja. Odgovore utemeljite in obrazložite. Pišite čitljivo. Čas reševanja: 30 + 45 minut.*

10 točk

1. naloga: Podano imate zaporedje:

$$2, 7, 5, 2, 8, 3, 9, 3, 5, 4$$

ki ga želite urediti (naraščajoče)

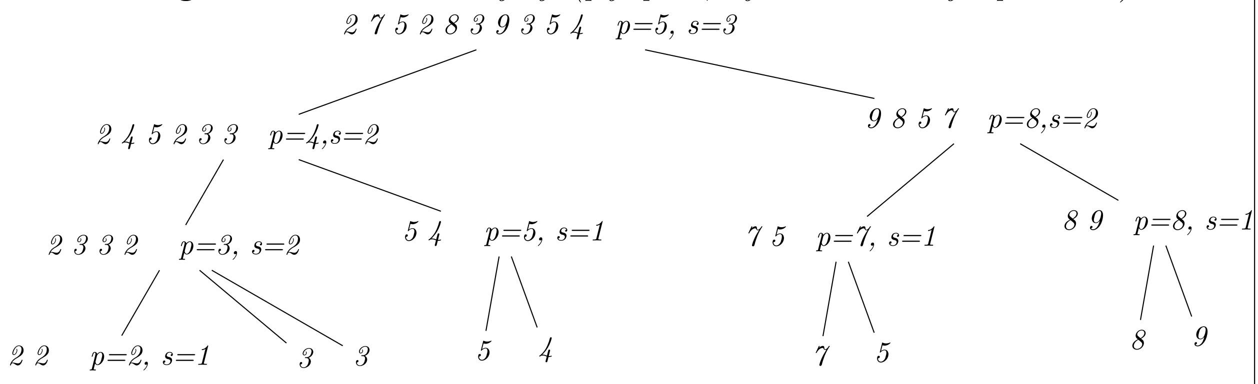
a) Zapišite sled hitrega urejanja (quicksort) tega zaporedja. Izbira pivota naj bo sledeča: če je če je dolžina podzaporedja ≥ 3, potem izberite srednji element po velikosti izmed prvih treh elementov podzaporedja. Če pa je tabela krajša, potem vzemite kar prvi element.

b) Zapišite sled izvajanja urejanja s kopico (heap sort) tega zaporedja. Jasno označite drevesa, ki predstavljajo kopice na nekem koraku.

c) Koliko zamenjav je bilo narejenih pri posameznem porazdeljevanju (partition) pri hitrem urejanju?

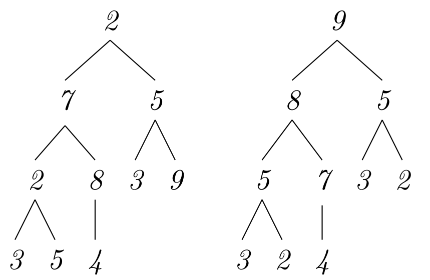
d) Koliko zamenjav je bilo narejenih pri gradnji kopice in koliko pri samem postopku urejanja s kopico?

Rešitve naloge 1 *Rešitev za hitro urejanje (p je pivot, s je število zamenjav pri delitvi):*

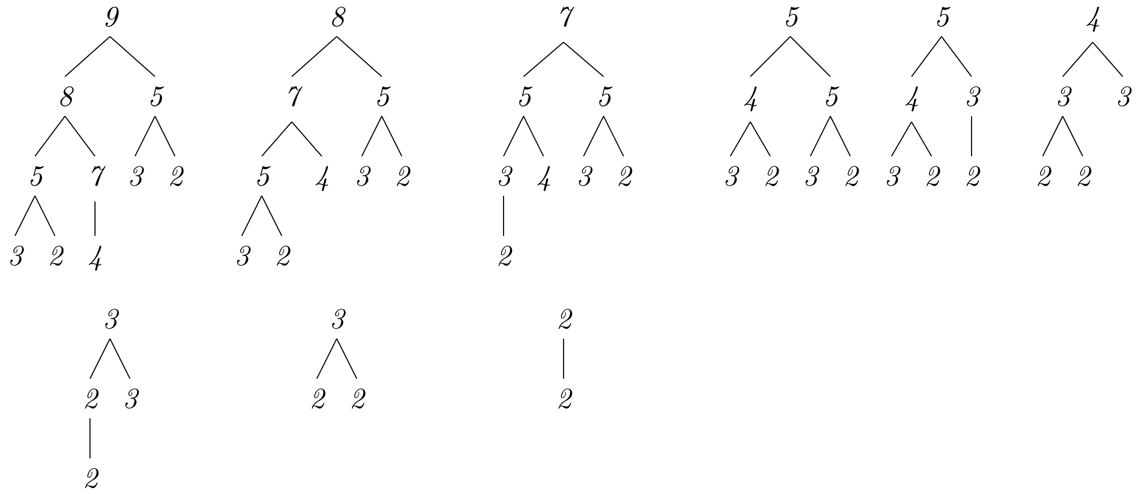


Rešitev za urejanje s kopico:

Graditev kopice *- zahteva 5 pogrezanj*



Urejanje- *zaporedje kopic*



10 točk

2. naloga: V $\mathbb{Z}_7$ bi radi delali diskretno Fourierjevo transformacijo polinoma

$$2x^4 + 6x^2 + 3x + 1$$

a) Katere primitivne korene enote iz $\mathbb{Z}_7$ bi lahko uporabili in zakaj?
b) Izberite najmanjši primerni PKE in zapišite pripadajočo Vandermondovo matriko za ta DFT.
c) Transformirajte podani polinom s pomočjo te matrike.
d) Zapišite inverzno Vandermondovo matriko matriki, ki ste jo napisali pod b).

Rešitve naloge 2 *Rešitve:*
$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 1$
$4^1 = 4, 4^2 = 2, 4^3 = 1$
$3^1 = 3, 3^2 = 2, 3^3 = 6, 3^4 = 4, 3^5 = 5, 3^6 = 1$
$5^1 = 5, 5^2 = 4, 5^3 = 6, 5^4 = 2, 5^5 = 3, 5^6 = 1$
$6^1 = 6, 6^2 = 1$

Uporabili bi lahko 3 ali 5 (ki sta oba šesti PKE), ker sta edina dovolj velike stopnje, ki mora biti vsaj toliko kot je dolžina polinoma (število koeficientov polinoma). Ker naloga zahteva najmanjšega, seveda uporabimo v nadaljevanju 3.

Vandermodejeva matrika:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inverzna Vandermondejeva matrika:

$$6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

10 točk

3. naloga: Podan imate problem 01-nahrbtnika:

$$(5, \_), (4, \_), (2, \_), (6, \_),$$

ki ga bomo reševali z algoritmom, ki smo si ga ogledali na vajah. Podane imate torej štiri predmete, za katere je znana prostornina, ni pa poznana vrednost.
a) Koliko mora biti volumen nahrbtnika, da algoritem ne bo odrezal nobene rešitve zaradi prevelikega volumna? Koliko pa mora biti volumen, da bosta odrezani samo dve rešitvi zaradi prevelikega volumna?
b) Ali lahko nastavite vrednosti podanih štirih predmetov, da ne bo nobena rešitev odrezana zaradi pravila rezanja, ki smo ga vzeli na vajah? Zakaj?
c) Zapišite vrednosti predmetov, da bo rezanja najmanj kar je mogoče (po kriteriju rezanja, ki smo ga vzeli na vajah).
d) Pri vrednostih predmetov kot ste jih nastavili pri c) in volumnu nahrbtnika $V = 12$, zapišite sled algoritma in pokažite kako iz sledi algoritma lahko določite kateri predmeti so v rešitvi in katerih v rešitvi ni.

Rešitve naloge 3 *Rešitve vseh točk bodo izhajale iz izvajanja algoritma (kot je prikazano spodaj). Namesto konkretnih vrednosti bomo pri predmetih zapisali spremenljivke X,Y,Z,W. Sled izvajanja je taka:*

$(0, 0)$
$(5, X)$

$(0, 0), (5, X)$
$(4, Y), (9, X + Y)$

$(0, 0), (4, Y), (5, X), (9, X + Y)$
$(2, Z), (6, Z + Y), (7, Z + X), (11, Z + X + Y)$

$(0, 0), (2, Z), (4, Y), (5, X), (6, Z + Y), (7, Z + X), (9, X + Y), (11, Z + X + Y)$
$(6, W), (8, W + Z), (10, W + Y), (11, W + X), (12, W + Z + Y), (13, W + Z + X), (15, W + X + Y), (17, W + Z + X + Y)$

$(0, 0), (2, Z), (4, Y), (5, X), \{(6, Z + Y), (6, W)\}, (7, Z + X), (8, W + Z), (9, X + Y), (10, W + Y),$
$\{(11, W + X), (11, Z + X + Y)\}, (12, W + Z + Y), (13, W + Z + X), (15, W + X + Y), (17, W + Z + X + Y)$

a) Volumen mora biti večji ali enak 17.
b) Ne, ne moremo. Iz zadnje vrstice zgoraj podane sledi je razvidno, da lahko rešitev z volumnom 6 in z volumnom 11 dobimo na dva načina. Kar pomeni, da bo (ne glede na izbiro vrednosti), vsaj ena bila vedno porezana.
c) Ena možnost je, da imajo predmeti enako vrednost, kot je njihov volumen. Obstaja sicer še veliko drugih rešitev, vse pa dobite, če pogledate neenačbo, ki nastane v zadnji vrstici:

$$0 < Z < Y < X < W < Z + X < W + Z < X + Y < W + Y <$$

$$W + X < Z + X + Y < W + Z + Y < W + Z + X < W + X + Y < W + Z + X + Y$$

Seveda je veliko teh neenakosti redundantnih, ampak vse vrednosti, ki ustrezajo temu, ne bodo rezale nobene rešitve (razen duplikatov volumna).
d) Sled za predmete $(5, 5), (4, 4), (2, 2), (6, 6)$*:*

$(0, 0)$
$(5, 5)$

$(0, 0), (5, 5)$
$(4, 4), (9, 9)$

$(0, 0), (4, 4), (5, 5), (9, 9)$
$(2, 2), (6, 6), (7, 7), (11, 11)$

$(0, 0), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (9, 9), (11, 11)$
$(6, 6), (8, 8), (10, 10), (11, 11), (12, 12), (13, 13), (15, 15), (17, 17)$

$(0, 0), (2, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12)$

Optimalna rešitev $(12, 12)$ *je sestavljena iz predmetov:*

a) $(6, 6)$*, ker je bila rešitev narejena iz rešitve* $(6, 6)$ *v zadnjem dodajanju,*

b) $(2, 2)$ *- rešitev* $(6, 6)$ *je nastala v predzadnjem dodajanju iz* $(4, 4)$

c) $(4, 4)$ - *rešitev je nastala v drugem dodajanju v rešitev* $(0, 0)$*, torej prazen nahrbtnik.*