

Rešitev prve domače naloge (Skriti kvadrati)

Osnovna rešitev

Recimo, da je $a \leq b$; s primerom $a > b$ se bomo ukvarjali kasneje. V mreži $a \times b$ lahko potemtakem vidimo

- $(a - 1)(b - 1)$ kvadratov s stranico 1
- $(a - 2)(b - 2)$ kvadratov s stranico 2
- $(a - 3)(b - 3)$ kvadratov s stranico 3
- ...
- $(a - (a - 1))(b - (a - 1))$ kvadratov s stranico $a - 1$

V programu moramo vsa ta števila sešteti. To dosežemo z zanko, v kateri seštevamo člene $(a - i)(b - i)$, pri čemer i potuje od 1 do vključno $a - 1$:

```
int stKvadratov = 0;
for (int i = 1; i < a; i++) {
    stKvadratov += (a - i) * (b - i);
}
```

Kako pa obravnavamo primer $a > b$? Tudi to pot seštevamo člene $(a - i)(b - i)$, le da spremenljivka i sedaj potuje od 1 do vključno $b - 1$. Da se izognemo nadležnemu podvajanju kode, si lahko pomagamo z vgrajeno javino metodo `Math.min`, ki vrne manjše izmed podanih dveh števil. Celoten program izgleda takole:

```
import java.util.Scanner;

public class Kvadrati {

    public static void main(String[] args) {
        Scanner sc = new Scanner(System.in);
        int a = sc.nextInt();
        int b = sc.nextInt();

        int m = Math.min(a, b);
        int stKvadratov = 0;
        for (int i = 1; i < m; i++) {
            stKvadratov += (a - i) * (b - i);
        }

        System.out.println(stKvadratov);
    }
}
```

Izboljšana rešitev

Ponovno za začetek predpostavimo, da velja $a \leq b$. Se lahko zanki izognemo? Lahko, če vsoto

$$S = \sum_{i=1}^{a-1} (a-i)(b-i)$$

malce poračunamo. Pričnemo takole:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{a-1} (ab - (a+b)i + i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{a-1} ab - \sum_{i=1}^{a-1} (a+b)i + \sum_{i=1}^{a-1} i^2 \\ &= ab \sum_{i=1}^{a-1} 1 - (a+b) \sum_{i=1}^{a-1} i + \sum_{i=1}^{a-1} i^2 \end{aligned}$$

Vemo, da velja $\sum_{i=1}^k 1 = k$ in $\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2}k(k+1)$, stric Bronštejn ali pa, dobro, teta Wikipedija¹ pa nam razodene še relacijo $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$. Torej:

$$\begin{aligned} S &= ab(a-1) - \frac{1}{2}(a+b)a(a-1) + \frac{1}{6}(a-1)a(2(a-1)+1) \\ &= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{6}a \\ &= -\frac{1}{6}a(a^2 - 3ab + 3b - 1) \\ &= -\frac{1}{6}a((a^2 - 1) - 3b(a-1)) \\ &= -\frac{1}{6}a((a-1)(a+1) - 3b(a-1)) \\ &= -\frac{1}{6}a(a-1)(a+1-3b) \\ &= \frac{1}{6}a(a-1)(3b-a-1) \end{aligned}$$

Kaj pa primer $a > b$? Lahko ga odpravimo preprosto tako, da zamenjamo vrednosti spremenljivk a in b . Potem bo spet $a \leq b$. Naš izboljšani program potemtakem izgleda takole:

```
import java.util.Scanner;

public class Kvadrati {

    public static void main(String[] args) {
        Scanner sc = new Scanner(System.in);
        int a = sc.nextInt();
        int b = sc.nextInt();

        if (a > b) {
            int t = a;
```

¹Tole tetko še nekako prenašamo, njen soprog G...e pa nam, ne moremo si pomagati, gre res malce na živce ...

```
        a = b;  
        b = t;  
    }  
    int stKvadratov = a * (a - 1) * (3 * b - a - 1) / 6;  
  
    System.out.println(stKvadratov);  
}  
}
```