

1 Sayisal Turev icin Ileri Yon Sonlu Fark Formulleri

1.1 Taylor Serisi

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasindaki Taylor serisine acilimi asagidaki ifade ile hesaplanır.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots$$

1.2 Ornek Noktalar

Bu ifade $x_m = x_0 + mh$ biciminde secilen her bir nokta icin duzenlenir.

$$y_1 = f(x_0) + h * f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$$

$$y_2 = f(x_0) + 2 * h * f'(x_0) + 2^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + 2^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$$

$$y_3 = f(x_0) + 3 * h * f'(x_0) + 3^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + 3^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$$

1.3 Katsayilar ile carpim

Denklemler t_1, t_2, t_3, \dots katsayilari ile carpilir.

$$t_1 * y_1 = t_1 * f(x_0) + t_1 * h * f'(x_0) + t_1 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + t_1 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$$

$$t_2 * y_2 = t_2 * f(x_0) + t_2 * 2 * h * f'(x_0) + t_2 * 2^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + t_2 * 2^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$$

$$t_3 * y_3 = t_3 * f(x_0) + t_3 * 3 * h * f'(x_0) + t_3 * 3^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + t_3 * 3^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$$

1.4 Birlestirme

Denklemlerin her iki yani toplanir.

$$t_1 * y_1 + t_2 * y_2 + t_3 * y_3 = (t_1 + t_2 + t_3) * f(x_0) + (t_1 + t_2 * 2 + t_3 * 3) * h * f'(x_0) + (t_1 + t_2 * 2^2 + t_3 * 3^2) * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + (t_1 + t_2 * 2^3 + t_3 * 3^3) * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$$

1.5 Katsayi ifadeleri

Bu toplam ifadesinden her bir terimin katsayi ifadesi cikarilir.

$$Exp_0 : t_1 + t_2 + t_3$$

$$Exp_1 : t_1 + t_2 * 2 + t_3 * 3$$

$$Exp_2 : t_1 + t_2 * 2^2 + t_3 * 3^2$$

$$Exp_3 : t_1 + t_2 * 2^3 + t_3 * 3^3$$

1.6 Denklem Sistemi

Bu katsayi ifadelerinden ilki ile 1. turevin ifadesi cikarilarak asagidaki denklemler elde edilir.

$$t_1 + t_2 * 2^2 + t_3 * 3^2 = 0$$

$$t_1 + t_2 * 2^3 + t_3 * 3^3 = 0$$

Bu denklemlerden katsayi matrisi olusturulur.

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 2^2 & 3^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 \end{bmatrix}$$

Denklemler, t_1 bagimsiz degisken yapilarak (sag tarafa tasinarak) asagidaki gibi yeniden duzenlenir.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 4 & -9 \\ 1 & 8 & -27 \end{array} \right]$$

1.7 Denklem cozumu

1. satir kullanilarak asagisindaki (2,1) elemani 0 yapilir.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 4 & -9 \\ 0 & 4 & -18 \end{array} \right]$$

2. satir kullanilarak yukarisindaki (1,2) elemani 0 yapilir.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & -18 \end{array} \right]$$

Katsayi matrisi birim matrise donusturulur.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-9}{2} \end{array} \right]$$

Buradan katsayi cozumleri asagidaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned} t_1 &= 9 * t_3 \\ t_2 &= \frac{-9}{2} * t_3 \end{aligned}$$

1.8 Katsayilar icin Tamsayi Degerleri

t_3 degiskenine atanabilecek en kucuk tamsayi degeri EKOK hesabi ile belirlenir.

$$t_3 = EKOK(2) = 2$$

Bu deger yardimiyla katsayi degiskenlerine atanacak degerler hesaplanir.

$$t_1 = 9 * 2 = 18$$

$$t_2 = -9/2 * 2 = -9$$

$$t_3 = 2$$

y_0 noktasinin katsayisi (t_0) ile birlikte tum katsayilar asagidaki gibi belirlenir.

$$y_0 : t_0 = t_1 + t_2 + t_3 = 18 + (-9) + 2 = 11$$

$$y_1 : t_1 = 18$$

$$y_2 : t_2 = -9$$

$$y_3 : t_3 = 2$$

$$y^{(1)} : 6 * h$$

$y^{(1)}$ ifadesi hesaplanir.

$$y^{(1)} = \frac{-11*y_0+18*y_1-9*y_2+2*y_3}{6*h} + O(h^3)$$

$$y^{(1)} = \frac{-11*0.70710678118+18*0.70781353429-9*0.70851957959+2*0.70922491637}{6*0.001} + O(h^3)$$

$$y^{(1)} = 0.7071067783 + O(h^3)$$