1 Sayisal Turev icin Ileri Yon Sonlu Fark Formulleri

1.1 Taylor Serisi

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasindaki Taylor serisine acilimi asagidaki ifade ile hesaplanir.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$

1.2 Ornek Noktalar

Bu ifade $x_m = x_0 + mh$ biciminde secilen her bir nokta icin duzenlenir.

$y_1 = f(x_0) + h * f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$

$y_2 = f(x_0) + 2 * h * f'(x_0) + 2^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + 2^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$

$y_3 = f(x_0) + 3 * h * f'(x_0) + 3^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + 3^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$

1.3 Katsayilar ile carpim

Denklemler $t_1, t_2, t_3, ...$ katsayilari ile carpilir.

$t_1 * y_1 = t_1 * f(x_0) + t_1 * h * f'(x_0) + t_1 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + t_1 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$

$t_2 * y_2 = t_2 * f(x_0) + t_2 * 2 * h * f'(x_0) + t_2 * 2^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + t_2 * 2^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$

$t_3 * y_3 = t_3 * f(x_0) + t_3 * 3 * h * f'(x_0) + t_3 * 3^2 * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + t_3 * 3^3 * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$

1.4 Birlestirme

Denklemlerin her iki yani toplanir.

$t_1 * y_1 + t_2 * y_2 + t_3 * y_3 = (t_1 + t_2 + t_3) * f(x_0) + (t_1 + t_2 * 2 + t_3 * 3) * h * f'(x_0) + (t_1 + t_2 * 2^2 + t_3 * 3^2) * \frac{h^2}{2!} * f''(x_0) + (t_1 + t_2 * 2^3 + t_3 * 3^3) * \frac{h^3}{3!} * f'''(x_0)$

1.5 Katsayi ifadeleri

Bu toplam ifadesinden her bir terimin katsayi ifadesi cikarilir.

$Exp_0 : t_1 + t_2 + t_3$

$Exp_1 : t_1 + t_2 * 2 + t_3 * 3$

$Exp_2 : t_1 + t_2 * 2^2 + t_3 * 3^2$

$Exp_3 : t_1 + t_2 * 2^3 + t_3 * 3^3$

1.6 Denklem Sistemi

Bu katsayi ifadelerinden ilki ile 2. turevin ifadesi cikarilarak asagidaki denklemler elde edilir.

$t_1 + t_2 * 2 + t_3 * 3 = 0$

$t_1 + t_2 * 2^3 + t_3 * 3^3 = 0$

Bu denklemlerden katsayi matrisi olusturulur.

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2^3 & 3^3 \end{bmatrix}$$

Denklemler, t_1 bagimsiz degisken yapilarak (sag tarafa tasinarak) asagidaki gibi yeniden duzenlenir.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 8 & -27 \end{array}\right]$$

1.7 Denklem cozumu

1. satir kullanilarak asagisindaki (2,1) elemani 0 yapilir.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -24 \end{array}\right]$$

2. satir kullanilarak yukarisindaki (1,2) elemani 0 yapilir.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -24 \end{array}\right]$$

Katsayi matrisi birim matrise donusturulur.

$$\left[\begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Buradan katsayi cozumleri asagidaki gibi belirlenir.
$t_1 = 5 * t_3$
$t_2 = -4 * t_3$

1.8 Katsayilar icin Tamsayi Degerleri

t_3 degiskenine atanabilecek en kucuk tamsayi degeri EKOK hesabi ile belirlenir.
$t_3 = EKOK() = 1$

Bu deger yardimiyla katsayi degiskenlerine atanacak degerler hesaplanir.

$t_1 = 5 * 1 = 5$

$t_2 = -4 * 1 = -4$

$t_3 = 1$

y_0 noktasinin katsayisi (t_0) ile birlikte tum katsayilar asagidaki gibi belirlenir.

$y_0 : t_0 = t_1 + t_2 + t_3 = 5 + (-4) + 1 = 2$

$y_1 : t_1 = 5$

$y_2 : t_2 = -4$

$y_3 : t_3 = 1$

$y^{(2)} : -1 * h^2$

$y^{(2)}$ teriminin katsayisi negatif oldugundan tum katsayilar (-1) ile carpilir.

$y_0 : t_0 = 2$

$y_1 : t_1 = -5$

$y_2 : t_2 = 4$

$y_3 : t_3 = -1$

$y^{(2)} : 1 * h^2$

$t_{sum} = 0$ (katsayilar dogru ise toplami 0 olmalidir)

$y^{(2)}$ ifadesi hesaplanir.

$y^{(2)} = \frac{2*y_0 - 5*y_1 + 4*y_2 - y_3}{1*h^2} + O(h^2)$

$y^{(2)} = \frac{2*0.70710678118 - 5*0.70781353429 + 4*0.70851957959 - 0.70922491637}{1*0.001^2} + O(h^2)$

$y^{(2)} = -0.7071000000 + O(h^2)$