**BÖLÜM 6: BOOLE CEBİRİ**

**6.1 Boole İşlemleri**

**Tanım 6.1.1**  işlem kümesi üzerinde operasyonlar ve kurallar tanımlayan sisteme **Boole Cebiri** denir. Tanımlanan operasyonlar arasında en çok kullanılacak olan 3 işlem tümleyen alınması, Boole toplaması ve Boole çarpmasıdır. Bir işlenenin **tümleyeni** üzerine konulan çizgi ile gösterilir ve ve şeklinde tanımlanır. **Boole toplaması** ile gösterilir ve sonuçları aşağıda gösterildiği gibidir:

,

**Boole çarpması** ile gösterilir ve aşağıda gösterilen değerleri alır.

Parantezler kullanılmadığı takdirde işlemlerin öncelik sırası ilk olarak tümleyeni alma, sonraki adımda Boole çarpmasını yapma ve son olarak Boole toplamını uygulamak şeklindedir.

**Örnek 6.1.2:** Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

**a-)**   **b-)**   **c-)**

**Uyarı 6.1.3** Mantık işlemlerinde tümleyen alma, Boole toplaması ve Boole çarpması sırasıyla ve operatörleriyle gösterilirken 0 yanlışa 1 ise doğruya karşılık gelmektedir. Bu sayede Boole cebirindeki fonksiyonlar bileşik önerme eşitliklerine, aynı şekilde önerme eşitlikleri de Boole cebiri fonksiyonlarına dönüştürülebilmektedir.

**Örnek 6.1.4:** Aşağıdaki eşitlikleri mantıksal denkliğe dönüştürünüz.

**a-)**  **b-)**  **c-)**

**Örnek 6.1.5:** Aşağıdaki önemeleri Boole cebiri özdeşliğine dönüştürünüz.

**a-)**  **b-)**

**c-)**

**Tanım 6.1.6**  olsun. Bu durumda olsun. Herhangi bir değişkeninin değeri kümesinden ise alabileceği değerler veya olur ve değişkeni **Boole değişkeni** adını alır. Tanım kümesi den ye olan fonksiyona da  **dereceden Boole fonksiyonu** denir.

**Örnek 6.1.7:**   
 Boole değişkenlerinin sıralı ikilileri kümesinden kümesine

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1  1  0  0 | 1  0  1  0 | 0  1  0  0 |

tanımlanan fonksiyonu ikinci dereceden Boole

fonksiyonudur ve değerleri yandaki tabloda gösterilmiştir.

**Tanım 6.1.8** Boole fonksiyonları, değişkenlerden oluşan Boole ifadeleri ve Boole işlemleri kullanılarak gösterilir. **Boole ifadeleri** de şeklinde başka Boole ifadeleri ile özyineli olarak tanımlanır. Örneğin ve iki Boole ifadesi olsun. Bu durumda ve de farklı Boole ifadeleridir. Kısacası her Boole ifadesi bir Boole fonksiyonudur. Bu fonksiyonların değerleri ifadelerdeki değişkenlerin yerlerine ve konularak elde edilir.

**Örnek 6.1.9:**  ve fonksiyonlarının alabileceği değerleri bulunuz.

**Tanım 6.1.10**  değişkenden oluşan iki Boole fonksiyonu ve fonksiyonlarının eşit kabul edilmesi için kümesinin elemanları olduğunda

eşitliği sağlanmalıdır. Aynı Boole fonksiyonunu tanımlayabilen iki farklı Boole ifadesi **denk** ifadelerdir. Örneğin üç farklı Boole ifadesi olan ve birbirine denktir. fonksiyonunun **tümleyeni** olan fonksiyonunda dir. ve fonksiyonları dereceden Boole fonksiyonları olsun. **Boole toplamı** ve **Boole çarpımı** aşağıda belirtildiği gibi gösterilir;

2.dereceden bir Boole fonksiyonunun tanım kümesi 4 farklı ikiliden oluşur ve değer kümesi 2 elemanlı dir. Bu yüzden 16 farklı 2. dereceden Boole fonksiyonu vardır. Bu fonksiyonlar isimleriyle aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1  1  0  0 | 1  0  1  0 | 1  1  1  1 | 1  1  1  0 | 1  1  0  1 | 1  1  0  0 | 1  0  1  1 | 1  0  1  0 | 1  0  0  1 | 1  0  0  0 | 0  1  1  1 | 0  1  1  0 | 0  1  0  1 | 0  1  0  0 | 0  0  1  1 | 0  0  1  0 | 0  0  0  1 | 0  0  0  0 |

**Örnek 7.8.2:** . dereceden kaç farklı Boole fonksiyonu vardır?

. dereceden bir Boole fonksiyonunun tanım kümesi tane kümesinin Kartezyen çarpımından oluşur ve bu nedenle tanım kümesi elemanlıdır. Bir Boole fonksiyonunun değer kümesi de olduğundan . dereceden Boole fonksiyonlarının sayısı dir.

**Boole Cebirinde Özdeşlikler**

|  |  |
| --- | --- |
| **Özdeşlik** | **İsim** |
|  | Çift tümleme kuralı |
|  | Değişmezlik kuralı |
|  | Özdeşlik kuralı |
|  | Baskınlık kuralı |
|  | Değişme kuralı |
|  | Birleşme kuralı |
|  | Dağılma kuralı |
|  | De Morgan kuralı |
|  | Yutma kuralı |
|  | Birim özelliği |
|  | Sıfır özelliği |

**Örnek 6.1.11:**

Dağılma kuralının,

Değişmezlik kuralının ve

Değişme kuralının geçerliliğini

ispatlayınız ve bu ifadeleri mantıksal

denkliğe dönüştürünüz.

**Tanım 6.1.12** Bir Boole ifadesinin

**çifteşi** ifadede yer alan Boole

toplamlarının Boole çarpımı yapılması,

Boole çarpımlarının Boole toplamı

yapılması, 0 ların 1 ve 1 lerin 0

yapılmasıyla elde edilir. Boole fonksiyonu nin çifteşi, bu ifadenin çifteşi ile gösterilen

fonksiyondur ve bu çifteş fonksiyon ile gösterilir. fonksiyonu fonksiyonunu gösterirken kullanılan Boole ifadesine bağlı değildir. Boole fonksiyonları arasındaki özdeşlik, özdeşliğin her iki tarafındaki ifadelerin çifteşleri alındığında da geçerlidir. **Çifteşlik prensibi** adı verilen bu durum yeni özdeşliklerin elde edilmesinde oldukça faydalıdır.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1  1  1  1  0  0  0  0 | 1  1  0  0  1  1  0  0 | 1  0  1  0  1  0  1  0 | 0  0  1  0  0  0  0  0 | 0  1  0  0  0  1  0  0 |

**Örnek 6.1.13:**  ve ifadelerinin çifteşlerini bulunuz.

**Örnek 6.1.14:** Yandaki tabloda değerleri verilen

ve fonksiyonlarını tanımlayan

Boole ifadelerini bulunuz.

ve

**Tanım 7.1.6** Bir grafında köşeler kümesi sonsuz olabilir. Köşe sayısı veya kenar sayısı sonsuz olan çizgeye **sonsuz çizge** denir. Köşe sayısı ve kenar sayısı sonlu olan çizgeye **sonlu çizge** denir. Biz aksi belirtilmedikçe sonlu çizgelerde çalışacağız.

**Örnek 7.1.7:** Örnek 7.1.3 ve 7.1.4 teki graflar sonlu graflardır.

**Tanım 7.1.8** Bir grafta köşelerin aynı sırasız ikilisi ile gösterilen farklı kenarlara **paralel (çoklu) kenarlar** denir. İki elemanı farklı olmayan sırasız ikilinin temsil ettiği kenara **döngü** veya **ilmek** denir.Sonlu, yönlü olmayan, çoklu kenar ve döngü içermeyen graflara **basit graf** denir.

**Örnek 7.1.9:** Örnek 7.1.3 teki kenarları paralel kenarladır ve kenarı bir döngüdür. Böylece bu basit graf değildir. Örnek 7.1.4 teki grafta döngü ve çoklu kenarlar yoktur. Bu nedenle bu graf basit graf örneğidir.

**Örnek 7.1.10: (Sosyal Ağlar)** Biz grafları iki kişinin birbirlerini tanıyıp tanımadıklarını veya arkadaş olup olmadıklarını ifade etmek için kullanabiliriz. Bir insan grubunun içinde bulunan her kişi köşe olarak ifade edilir. İki kişinin birbirini tanıması ya da arkadaş olmasını ifade etmek için yönsüz kenar kullanılır.

köşelerin kümesi olsun ve birbirlerini tanıyan kişileri bir kenarla birleştirelim. Aşağıdaki grafa göre Yağmur sadece Ezgi’yi, Özgür de sadece Hatice’yi tanımaktadır. Jale; Ezgi’yi, Nil’i, Barış’ı, Banu’yu ve Gaye’yi tanımaktadır. Aslı ile Elvan ve Barış ile Cenk tanışmamaktadırlar.

Erhan

Mert

Ezgi

Hatice

Barış

Aslı

Yağmur

Özgür

Nil

Cenk

Ülkü

Jale

Elvan

Gaye

Pelin

Banu

**Yönlü Graflar**

Buraya kadar biz yönsüz grafları tanıtmış olduk. Bu çizgelerin kenarlarına **yönsüz kenar** da denir. Ancak bir graf modeli oluşturduğumuzda bu grafın kenarlarına yön atama ihtiyacımız da olabilir. Örneğin bir bilgisayar ağında bazı bağlantılar sadece bir yönde işlem yapabilir. Aşağıda tek yönlü veri iletişim bağlantılarının yer aldığı bir veri ağı yönlü bir grafla modellenmiştir.

İstanbul

Bursa

Kayseri

Samsun

Malatya

Ankara

Afyonkarahisar

**Tanım 7.1.11 Yönlü graf (digraf)** köşelerin boş olmayan kümesi ve köşelerin sıralı ikililerinin bir kümesinden oluşur. Bu durumda kümesinin elemanlarına **yönlü kenarlar (yaylar)** denir. Eğer sıralı ikilisi bir yayı ise yayına  **dan ye yönlendirilmiştir** denir. Bu durumda kenarı, üzerine dan ye yönelmiş bir ok konularak gösterilir ve bu kenar  **köşesinde başlar, köşesinde sona erer** denir. ya  **nın başlangıç köşesi**, ye de  **nın bitiş köşesi** denir. ve köşelerine  **kenarına bitişiktir** diyeceğiz. , köşeleri ve kenarları olan yönlü graf ise de ile gösterilir. Yönlü çizgeler de döngüler ve aynı iki köşeyi birleştiren yönlü kenarlar içerebilirler.

**Örnek 7.1.12:**

Yukarıdaki ve grafları için

**a-)**  ve kümelerini bulunuz.

**b-)** garfında kenarların başlangıç ve bitiş köşelerini bulunuz.

**c-)**  grafında kenarların sıralı ikili temsillerini yazınız.

**Örnek 7.1.13:**  köşelerinin kümesi ve olan grafını çiziniz.

**Tanım 7.1.14** Yönlü bir grafta farklı kenarlar, köşelerin aynı sıralı ikilisini bağlıyorsa bu kenarlara **katlı (paralel) yönlü kenarlar** denir. Her biri sıralı ikilisine karşılık gelen tane yönlü kenar varsa, bu kenarı  **katlı bir kenardır** denir. Yine bir tek köşeyi bağlayan kenarlara da **döngü** denir. Eğer yönlü bir grafın katlı yönlü kenarları varsa bu grafa **yönlü çoklu graf** denir. Sonlu, yönlü bir graf döngü ve katlı kenar içermiyorsa bu grafa **yönlü basit graf** denir.

**Örnek 7.1.15:** Örnek 7.1.12 teki grafı için kenarı bir döngüdür ve dır. ve olduğundan bu kenarlar katlı yönlü kenarlar değildirler. grafında kenarı bir döngüdür ve ile kenarları katlı yönlü kenarlardır. Çünkü aynı sıralı ikili ile temsil ediliyorlar. Ayrıca bu iki graf yönlü basit graf değildirler. grafı yönlü çoklu graf değildir ancak grafı yönlü çoklu graftır.

**Örnek 7.1.16: (Turnuvalar)** Tek Devreli Lig Usulü Turnuva: Bu turnuvada her takım diğer takımla tam olarak bir defa oynamaktadır ve eşitlik durumuna izin verilmemektedir. Bu tür turnuvalar köşelerin takımları gösterdiği yönlü graf ile ifade edilebilir. kenarı takımının takımını yendiğini göstermektedir.

Bu çizge döngü ve paralel

Takım 2

Takım 1

kenar içermeyen basit yönlü

çizgedir. Bu tür bir yönlü çizge

modeli yanda gösterilmiştir.

Takım 3

Takım 6

Yandaki grafta Takım 1 in hiç

yenilmediği ve Takım 3 ün hiç

kazanmadığı görülmektedir.

Takım 5

Takım 4

**Tanım 7.1.17**  bir graf olsun. ve olmak üzere kenarı için eğer kenarı de ile köşelerini birleştiriyorsa dür.

Eğer yukarıdaki şart sağlanıyorsa grafına nin bir **alt grafı** denir ve

ile gösterilir. ise grafına grafının bir **üst grafı** denilir ve bu durum grafı grafını **içerir** şeklinde ifade edilir. Özel olarak ve ise alt çizgesine nin bir **öz alt çizgesi** denir.

**Örnek 7.1.18:**

Yanda verilen grafı için aşağıdaki , ve graflarının birer alt grafı olduğunu gösteriniz.

**Örnek 7.1.19:** Aşağıdaki grafın en az bir köşeye sahip tüm alt graflarını bulunuz.

**7.2 Bağlantılılık**

**Tanım 7.2.1**  yönsüz grafında köşelerin kümesi olsun. grafında ardışık olarak komşu olan tane kenarlarının oluşturduğu bir graf parçasına grafında bir **yol** denir. Bazen bu yola ile arasındaki yol da denir. köşesine **yolun başlangıcı**, köşesine **yolun bitişi** denir. ve e yolun **uç köşeleri**, diğer köşelere de yolun **iç köşeleri** denir. Yolun kenar sayısı olan sayısına **yolun uzunluğu** denir. Yol bazen şeklinde de gösterilir. Ayrıca bir yol aynı köşe veya aynı kenardan defalarca geçebilir.

**Örnek 7.2.2:** Aşağıdaki grafı için yol örnekleri;

3 uzunluklu yolu

1 uzunluklu yolu

4 uzunluklu yolu

**Tanım 7.2.3** Bir yolun başlangıç ve bitişi aynı ise bu yola **kapalı yol**, aksi halde **açık yol** denir. Sıfır uzunluklu bir yola da **aşikar yol** denir.

**Örnek 7.2.4:**

Örnek 7.2.2 deki yol örnekleri açık yol

örnekleridir. Ancak bu grafta

yolu kapalı bir yol örneğidir.

**Tanım 7.2.5** Eğer bir yolda tüm köşeler farklı ise ve doğal olarak tüm kenarlar da farklıysa bu yola **patika** denilir.

**Örnek 7.2.6:** Örnek 7.2.2 deki graf için yolu bir patika değildir ancak yolu bir patikadır.

**Tanım 7.2.7**  ve , grafının iki köşesi olsun. Eğer dan ye giden bir patika bulunabilirse ve köşelerine **bağlantılı köşeler** denir. Eğer bir grafında verilen her köşe çifti bağlantılı bir köşe çifti ise grafına **bağlantılı graf**, aksi halde **bağlantısız graf** denir.

**Örnek 7.2.8:** Aşağıdaki çizgesi bağlantılıdır ancak çizgesi bağlantısızdır.

**Tanım 7.2.9** Bir grafının başka bir bağlantılı alt grafının öz alt grafı olmayan bağlantılı bir alt grafa grafının bir **bileşeni** denir. Kısaca nin bir bileşeni, nin daha büyük bağlantılı bir bileşeninde kalmayan bağlantılı parçalardan her birisidir. Bağlantılı bir graf tek başına bir bileşendir. grafının bileşenlerinin sayısı ile gösterilir. O halde bir grafın bağlantılı olması için gerek ve yeter şart olmasıdır.

**Örnek 7.2.10:** Aşağıdaki grafı bağlantısızdır ve dir.

nin bileşenleri

**Tanım 7.2.11** Bir grafında köşe kümesi üzerinde “ ve birbirine bağlantılı köşelerdir ancak ve ancak ” şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı ile elde edilen nin parçalanışındaki elemanlar nin bileşenleridir.

**Teorem 7.2.12**  köşeli ve bileşenli basit bir grafın kenar sayısı en az dır.

**Sonuç 7.2.13**  köşeye ve den fazla kenarı olan her graf bağlantılıdır.

**Sonuç 7.2.14** Bir grafında kenar sayısı , köşe sayısı olsun. ise grafı bağlantısızdır.

**Tanım 7.2.15** Bir grafında bir yolun tüm kenarları farklıysa bu yola **iz** denilir. Başlangıç ve bitiş köşeleri eşit olan bir ize **kapalı iz (devre)**, aksi halde **açık iz** denir. Başlangıç ve bitiş köşesi hariç tüm köşeleri farklı olan devreye **devir** denir. Bir devirde en az 3 köşe olmalıdır.

**Örnek 7.2.16:**

yolu

de bir devredir

yolu

de bir devirdir

**7.3 Ağaçlar**

**Tanım 7.3.1** Hiç devre içermeyen yönsüz bağlantılı bir çizgeye **ağaç** denir. Bir ağaç devre içermediği için çoklu kenarlar ve döngü içermez bu nedenle basit graflardır.

**Örnek 7.3.2:** Aşağıdaki çizgelerden hangileri ağaçtır?

ve bağlantılı grafları hiç devre içermediği için ağaçtırlar. bağlantılı graftır ancak bir devredir. Bu nedenle bir ağaç değildir. grafı bağlantılı olmadığından ağaç değildir.

**Tanım 7.3.3** Hiç devre içermeyen yönsüz bir çizgeye **orman** denir. Ormanların her bağlantılı parçaları birer ağaçtır.

**Örnek 7.3.4:** Aşağıdaki graf 2 tane bileşenden oluşan bir ormandır.

**Teorem 7.3.5** Yönsüz bir çizge ancak ve ancak her düğüm ikilisi için bir tek iz olması durumunda bir ağaçtır.

**Tanım 7.3.6** Bir ağacın özel bir düğümü **kök** olarak belirlenir. Bir kök belirlendikten sonra kenarlara, kökten her bir düğüme bir tek iz olduğu için yönleri kökten uzaklaşacak şekilde yönlendirerek bir yön verebiliriz. Böylece köküyle birlikte bir ağaç yönlü bir çizge olur ve **kökü ağaç** olarak isimlendirilir. Köksüz bir ağacı köklü bir ağaca herhangi bir düğümü kök olarak belirleyerek değiştirebiliriz. Farklı kök seçimlerinin farklı köklü ağaçları üretebileceğine dikkat edelim.

**Örnek 7.3.7:** Aşağıda ağaç den ve köşeleri kök seçilerek elde edilen iki tane köklü ağaç gösterilmektedir.

kök iken

kök iken

**Örnek 7.3.8:** Örnek 7.3.7 deki ağaç den köşesi kök seçilerek elde edilen köklü ağacı gösteriniz.

**Tanım 7.3.9** Ağaçların terminolojisinin botanik ve soya ait kökeni vardır. bir köklü ağaç olsun. Eğer , de kökten farklı bir düğüm ise nin **ebeveyni,** dan ye yönlü bir kenar olacak şekildeki tek düğüm dur. , nin ebeveyni olduğunda ye nun bir **çocuğu** denir. Aynı ebeveyne sahip düğümlere **kardeş** düğümler denir. Kökten, verilen bir düğüme gelen yol üzerindeki, verilen düğümden farklı tüm düğümlere bu düğümün **ataları** denir. Bir düğümünün **nesli** olan düğümler atası olan düğümlerdir. Çocuk düğümü olmayan düğüme **yaprak düğüm** denir. Çocuk düğümü olanlara ise **iç düğümler** denir. Eğer kök, çizgenin tek düğümü değilse bir iç düğüm olur, diğer halde ise bir yaprak olur. Eğer bir ağaçta düğümse düğümünün kök olduğu **alt ağaç**, ve neslini içeren ağacın alt çizgesinden ve bu nesille ilişkili kenarlardan oluşur.

**Örnek 7.3.10:** , kökü olan bir ağaçtır ve bu ağaçta nin ebeveyni dir. nin çocukları ve dir. nin kardeşleri ve dir. nin ataları ve dir. nin nesli ve dir. İç düğümler ve dir. Yapraklar ve dir. Kökü olan alt ağaçta aşağıda gösterilmiştir.

kökü olan alt ağaç

**Örnek 7.3.11:** Örnek 7.3.10 daki kökü olan ağacına göre aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

**a-)**  nın çocukları ………. dir ve nin çocukları ………. dir.

**b-)**  nin ebeveyni ………. dir ve nin ebeveyni ………. dır.

**c-)**  nin kardeşi ………. dir ve nin kardeşleri ………. dir.

**d-)**  nin ataları ………. dir ve nin ataları ………. dır.

**e-)**  nin nesli ………. dir ve nin nesli ………. dır.

**Örnek 7.3.12:** Örnek 7.3.10 daki kökü olan ağacına göre aşağıdakileri yanıtlayınız.

**a-)** Kökü olan alt ağacı çizip yapraklarını ve iç düğümlerini varsa bulunuz.

**b-)** Kökü olan alt ağacı çizip yapraklarını ve iç düğümlerini varsa bulunuz.

**Tanım 7.3.13** Bir köklü ağacın her iç düğümünün den fazla çocuğu yoksa bu ağaca **-li ağaç** denir. Eğer her iç düğümünün tam olarak tane çocuğu varsa **tam -li ağaç** denir. ise bir -li ağaca **ikili ağaç** denir.

**Örnek 7.3.14:**

tam -li ağaçtır çünkü her iç düğümünün iki çocuğu vardır. tam -lü ağaçtır çünkü her iç düğümünün 3 çocuğu vardır. de her iç düğümün beş çocuğu olduğu için tam -li ağaçtır. herhangi bir için bir tam -li ağaç değildir, çünkü bazı iç düğümlerin iki çocuğu varken diğerlerinin üç çocuğu vardır.

**Tanım 7.3.15** Bir **sıralı köklü** (özyineli) ağaç, her iç düğümünün çocuklarının sıralandığı köklü bir ağaçtır. Sıralı köklü ağaçlar, her iç düğümün çocukları soldan sağa doğru sıralayarak çizilir. Bir sıralı ikili ağaçta (kısaca **ikili ağaçta**), eğer bir iç düğümün iki çocuğu varsa ilkine **sol çocuk** ve ikincisine de **sağ çocuk** denir. Bir düğümün sol çocuğunda kökü olan ağaca **sol alt ağaç**, sağ çocuğunda kökü olan ağaca ise **sağ alt ağaç** denir.

**Örnek 7.3.16:** Aşağıda gösterilen ikili ağacındaki nin sol çocuğu ve sağ çocuğu dir. nin sol ve sağ alt ağaçları aşağıda gösterilmiştir.

nin sağ alt ağacı

nin sol alt ağacı

**Teorem 7.3.17**  düğümlü bir ağacın kenarı vardır.

**Teorem 7.3.18**  iç düğümü olan bir tam -li ağacın düğümü vardır.

**Teorem 7.3.19** Bir tam -li ağaçta

**(i)**  düğüm varsa iç düğüm ve yaprak,

**(ii)**  iç düğüm varsa düğüm ve yaprak,

**(iii)**  yaprak varsa düğüm ve iç düğüm vardır.

**Tanım 7.3.20** Bir köklü ağaçtaki bir düğümünün **seviyesi**, kökten bu düğüme giden tek yolun uzunluğudur. Kökün seviyesi sıfır olarak tanımlanır. Bir ağacın **yüksekliği** tüm düğümlerin seviyelerinin en büyüğüdür. Bir başka deyişle, bir köklü ağacın yüksekliği, kökten herhangi bir düğüme giden en uzun yolun uzunluğudur. Yüksekliği olan bir köklü -li ağacın tüm yapraklarının seviyesi veya ise **dengelidir.**

**Örnek 7.3.21:** Aşağıda gösterilen köklü ağacın her bir köşesinin seviyesini bulunuz ve bu ağacın yüksekliği nedir?

**Örnek 7.3.22:** Aşağıda gösterilen köklü ağaçların hangileri dengelidir?

**Teorem 7.3.23** Yüksekliği olan bir -li ağaçta en fazla tane yaprak vardır.

**Sonuç 7.3.24** Eğer yüksekliği olan bir -li ağacın yaprağı varsa dir. Eğer -li ağaç tam ve dengeli ise dir. (Burada tavan fonksiyonunu kullanıyoruz. ten büyük veya eşit olan en küçük tamsayıyı göstermektedir.)

**7.4 Köşe ve Kenar Dereceleri**

**Tanım 7.4.1** Yönsüz bir graftaki **köşe derecesi** o köşeye bağlı olan kenarların sayısıdır. köşesinin derecesi ya da ile gösterilir. Bir yönsüz grafta, bir köşede döngü varsa, döngü köşenin derecesine iki birim katkıda bulunmaktadır. Ayrıca bir köşenin derecesi en az sıfır olabilir.

Bir yönsüz grafın köşe derecelerinin artmayan dizisine grafın **derece dizisi** denir. Bir yönsüz grafında bir köşenin derecesi sıfır ise bu köşeye **ayrık (izole)** köşe denir. 1 dereceli köşelere ise **sallanan köşe** denir. Sallanan köşeyi grafın geri kalanına bağlayan kenara ise **sallanan kenar** adı verilir. Yine bir yönsüz grafında sayısına grafının **minimum derecesi**, sayısına ise grafının **maksimum derecesi** denir.

**Örnek 7.4.2:** Örnek 7.1.3 teki grafta tüm köşelerin derecesini bulunuz ve bu grafın derece dizisini, ve yi bulunuz. İzole köşe, sallanan kenar ve sallanan köşe varsa belirleyiniz.

**Örnek 7.4.3:** Örnek 7.1.10 de izole köşe yoktur yani kümesinde herkes bu kümeden en az bir kişiyi tanımaktadır. Yağmur, Erhan, Özgür, Elvan ve Banu köşeleri sallanan köşelerdir yani bu kişiler bu kümeden sadece bir kişiyi tanımaktadırlar. Jale köşesinin derecesi 5 tir yani Jale bu kümeden beş kişiyi tanımaktadır.

**Uyarı 7.4.4** Örnek 7.4.3 te görüldüğü gibi köşe derecesi kavramı grafın temsil ettiği olaya bağlı olarak anlamlandırılabilir.

**Örnek 7.4.5:** Derece dizisi olan bir basit graf çiziniz.

**Teorem 7.4.6 (EL SIKIŞMA TEOREMİ)**  çizgesi kenarlı yönsüz bir çizge olsun. Bu durumda olur yani dir. Sonuç olarak bir yönsüz grafında köşe derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katıdır.

**İspat:** Döngü olmayan bir kenar 2 farklı köşenin derecelerine katkı yapmaktadır. Bir köşedeki döngü ise bu köşenin derecesine 2 kez katkı yapmaktadır. Bu yüzden derecelerin toplamı kenar sayılarının toplamının iki katıdır.

**Teorem 7.4.7** Yönsüz bir çizgede derecesi tek olan köşelerin sayısı çifttir.

**İspat:**  kenarlı yönsüz çizgesinde ve sırasıyla dereceleri çift ve tek olan köşe kümeleri olsun. Bu durumda

olur. için çift sayı olduğundan çift olur. Ayrıca sayısı da çift olduğundan sayısı da çift olmalıdır. toplamındaki tüm terimler tek olduğu ve toplamları çift olduğu için bu terimlerin sayısı yani çift olmalıdır. Bu nedenle derecesi tek olan köşe sayısı çifttir.

**Örnek 7.4.8:** Derece dizi olan bir graf bulunamaz çünkü tek dereceli köşe sayısı 3 tür yani tek sayıdır.

**Tanım 7.4.9** Yönlü kenarlı bir grafta, köşesinin **iç derecesi**, yi bitiş köşesi olarak alan kenarların sayısıdır ve ile gösterilir. köşesinin **dış derecesi** ise yi başlangıç köşesi olarak alan kenarların sayısıdır ve ile gösterilir. Köşedeki bir döngünün hem iç hem de dış dereceye katkısı dir.

**Örnek 7.4.10:** Örnek 7.1.12 deki grafındaki tüm köşelerin iç ve dış derecelerini bulunuz.

**Teorem 7.4.11** yönlü kenarlı bir çizge olsun. Bu durumda

dir.

**İspat:** Her bir kenar bir köşenin iç derecesine 1 katkıda bulunurken, başka bir köşenin dış derecesine 1 katkıda bulunur. Böylece bütün köşelerin giren derecelerinin toplamı ve çıkan derecelerinin toplamı aynıdır ve bu ikisi de çizgedeki kenarların sayısına eşittir.

**Örnek 7.4.12:**Yönlü bir grafta bir köşenin iç ve dış derecesi grafın temsil ettiği olaya bağlı olarak anlamlandırılabilir. Örnek 7.1.17 de Takım 1 in iç derecesi 0 dış derecesi 5 tir. Yani hiç yenilmediği ve diğer beş takımı yendiği anlamına gelmektedir. Takım 2 nin iç derecesi 3 tür yani üç kez yenildiği anlamına gelir. Dış derecesi ise 2 dir. Bu da 2 kez kazandığı anlamına gelir.

**BÖLÜM 8: BÖLÜNEBİLİRLİK VE MODÜLER ARİTMETİK**

**8.1 Bölüm**

**Tanım 8.1.1**  ve b birer tamsayı olmak üzere eğer olacak şekilde bir tamsayısı varsa veya başka bir ifadeyle bir tamsayı ise  **yi böler** deriz. yi bölüyorsa nin bir **faktörü** veya bir **bölenidir** ve nın bir **katıdır** deriz. gösterimi , yi böler demektir. gösterimi , yi bölmez demektir. yi olarak niceliklerle ifade edebiliriz ki burada sözü edilen uzay tamsayılar kümesidir.

**Uyarı 8.1.2**  için olduğundan dır. Diğer taraftan için dır. Eğer ise olduğu açıktır.

**Örnek 8.1.3:**  olduğundan olur ve olacak biçimde bir olmadığından olur.

**Teorem 8.1.4**  tamsayılar olsun. O zaman

**(i)**  ve dir.

**(ii)**  dir.

**(iii)** eğer ve ise olur

**(iv)** eğer ve ise dir.

**(v)** eğer ise dir.

**(vi)** eğer ve ve ve tamsayı ise dir.

**Tanım 8.1.5**  bir tamsayı olsun. Eğer nin bölenleri sadece ve ise o zaman ye bir **asal sayı** denir.

**8.2 Bölme Algoritması**

**Teorem 8.2.1 BÖLME ALGORİTMASI**  bir tamsayı ve bir pozitif tamsayı olsun. olacak şekilde eşitliğini sağlayan sadece bir tane ve bir tane tamsayıları vardır.

**Tanım 8.2.2** Bölme algoritmasında verilen eşitlikte ye **bölen**, ya **bölünen**, ya **bölüm** ve ye **kalan** denir.

**Örnek 8.2.3:** , e bölündüğünde bölüm ve kalan nedir?

**8.3 Modunda Aritmetik**

**Tanım 8.3.1** kümesi üzerinde toplama işlemi ve çarpma işlemi ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar ve  **modundaki aritmetik işlemler**i yapıyoruz denir.

olmak üzere ve dir.

işlemleri şu özellikleri sağlar:

**Kapalılık:** olmak üzere ve dir.

**Birleşme Özelliği:** olmak üzere ve dir.

**Değişme Özelliği:** olmak üzere ve dır.

**Birim Elemanlar Özelliği:** Sırasıyla ve elemanları modunda toplama ve çarpma için birim elemanlardır. Şöyle ki ise ve dir.

**Toplamaya Göre Ters Eleman Özelliği:** Eğer nin elemanı ise toplamaya göre tersidir. Yani dır.

**Dağılma Özelliği:** olmak üzere ve dir.

**Uyarı 8.3.2** modunda nin her elemanının çarpmaya göre tersi olmayabilir. Örneğin da nin çarpmaya göre tersi yoktur.

**Örnek 8.3.3:**  de ve u bulunuz.