Generar PI por el método de Montecarlo en phyton

Oziel Alberto Torres Villarreal, Carlos Antonio Caballero Padilla,
Nestoe Eliud Cano Garcia, Jorge Enrique Flores Gonzalez,
Heber Adrian Casillas Gutierrez, Victor Alan Cabazos Ramiresz

9 de septiembre de 2022

1. Introducción

El método Montecarlo es implementado para estimar probabilidades que serían muy complicadas de calcular de forma teórica, o para calcular lo que se espera en determinado experimento. Se explorará el método de Montecarlo para el cálculo de pi. Se dará una explicación acerca del método de Montecarlo, así como su objetivo principal para la simulación presentada. Este cálculo será analizado haciendo uso como ejemplo del experimento de la aguja de Buffon, planteada por el naturista francés Georges Louis Leclerc de Buffon. Para hacer demostración del método se hará una simulación en Python, un lenguaje de alto nivel de programación interpretado cuya filosofía hace hincapié en la legibilidad de su código, se utiliza para desarrollar aplicaciones de todo tipo; a través de este y haciendo demostración de nuestro programa se obtendrán los resultados y mostrarán las gráficas de la experimentación realizada. [6].

2. Desarrollo

2.1. El cálculo de Arquímedes

En el siglo III antes de Cristo, el físico griego utilizó polígonos para afinar en el cálculo y llegó a determinar el valor de pi con un error de solo entre el 0.024 % y el 0.040 % sobre el valor real. Siguió con la misma práctica Claudio Ptolomeo (en el siglo II de nuestra era), quien mejoró la aproximación de Arquímedes, y estableció el valor de 3,14166 para pi empleando un polígono de 120 lados. A finales del siglo V, el matemático y astrónomo chino Zu Chongzhi dio un paso más, atribuyéndole un valor de 3,1415927, resultado que no fue mejorado hasta el siglo XV. Tras siglos de cálculos, la llegada de los ordenadores cambió los parámetros: el cálculo se disparó y se han ido añadiendo decimales a pi hasta los 12,1 billones actuales. Y una anécdota: con la ayuda de una potente computadora, un científico japonés encontró 1,24 trillones (para nosotros, billones) de dígitos de pi, rompiendo todos los récords. [7].

2.2. ¿En qué consiste el método de simulación de MonteCarlo?

A la hora de realizar un análisis de riesgos para la toma de decisiones en la empresa, es importante tener acceso a la mayor cantidad de información posible. En este sentido, la simulación de Monte Carlo permite ver todos los resultados posibles de las decisiones que tomamos y evaluar el impacto del riesgo. Este método de simulación, por tanto, es de gran utilidad para la gerencia de riesgos de cualquier tipo de organización. También resulta de importancia para los Project Managers que tengan que gestionar riesgos en proyectos de envergadura

Pero, ¿qué es la simulación de Monte Carlo (también la encontrarás escrita como Simulación Montecarlo)? Se trata de una técnica matemática computarizada, que permite tener en cuenta el riesgo en análisis cuantitativos y tomas de decisiones. Comenzó a utilizarse en la Segunda Guerra Mundial, y debe su nombre a la ciudad de Mónaco, conocida por sus casinos. Actualmente, se usa en muchos sectores, desde los proyectos de Oil And Gas, hasta las finanzas o la manufactura. En la simulación de Montecarlo se trabaja, habitualmente, con programas informáticos como Excel o R Studio[3].

2.3. Método de Monte Carlo

En 1872 Ludwig Boltzmann se enfrentó a la necesidad de calcular el coeficiente de auto difusión de un medio gaseoso. En la búsqueda de la solución supuso que las moléculas del gas se comportaban como esferas elásticas. Al hacer un balance de las partículas en una región del espacio obtuvo una ecuación integro-diferencial, que hoy se conoce como la ecuación de Transporte de Boltzmann. La ecuación de Boltzmann pasó a formar parte de la teoría de la Física que se consideró terminada cuando H. Hertz obtuvo la evidencia experimental de la existencia y propiedades de las ondas electromagnéticas predichas por Maxwell; y que pasaba a unificar la Óptica con la Física Newtoniana. En ese momento de la historia de la Ciencia se llegó a pensar que el estudio de la Física había culminado ya que existía un cuerpo teórico completo a través del cual todos los hechos se podían explicar, ese cuerpo teórico se sustentaba en las ecuaciones de Newton. Sin embargo, existían tres problemas que la Física Newtoniana no podía explicar satisfactoriamente: El problema del cuerpo negro, o la catástrofe ultravioleta, la ausencia de evidencia experimental de la existencia del éter y la falla de la teoría electromagnética para explicar el efecto fotoeléctrico.

En 1887 Michelson y Morley realizaron diversos experimentos tendientes a demostrar la existencia del Éter motivados por la necesidad de explicar el fenómeno de la aberración estelar. Este medio ya había sido postulado por Aristóteles como el medio material que componía al mundo supra lunar, mientras que el mundo sublunar estaba compuesto por los átomos de Demócrito: Fuego, Aire, Tierra y Agua. Durante la edad media el éter se conoció también como el Quinto Elemento. Para explicar la existencia de las ondas electromagnéticas el éter fue utilizado por Maxwell como el medio que se perturba para que estas ondas se propaguen. Sin embargo, la evidencia experimental demostró que el éter no existía. En 1905 A. Einstein utilizó los postulados de Planck para explicar exitosamente el efecto Fotoeléctrico, que Hertz había encontrado varios años antes. En otra de sus publicaciones Einstein, aportó evidencia sobre la existencia de los átomos al explicar el movimiento Browniano y sacudió los cimientos de la Física Newtoniana al establecer la Relatividad Restringida. Al intentar entender el transporte de la radiación, la ecuación de Boltzman fue utilizada y se buscaron métodos para resolverla. Estos intentos se impulsaron en la época de los años 40 durante el desarrollo del proyecto Manhattan, cuyo fin era fabricar la bomba atómica.

En la búsqueda de métodos confiables para estimar la masa crítica se utilizaron los métodos Monte Carlo, aunque en la historia de la humanidad estos métodos habían sido utilizados siglos atrás, pero el nombre de Monte Carlo no se dio sino hasta 1949 en que se publicó el primer artículo con este nombre. [Metrópolis and Ulam 1949]. Mas técnicamente, un Monte Carlo es un proceso estocástico numérico, es decir, una secuencia de estados cuya evolución viene determinada por sucesos aleatorios. Recordemos que un suceso aleatorio es un conjunto de resultados que se producen con cierta probabilidad. Veamos un par de ejemplos ilustrativos[2].

Ejemplo 1: Gotas de lluvia para estimar pi
Consideremos un círculo de radio unidad circunscrito por un cuadrado. Suponiendo una lluvia uniforme sobre el cuadrado, podemos hallar el valor de pi a partir de la probabilidad de que las gotas caigan dentro del círculo.

$$\mathrm{P} = \frac{\text{área del círculo}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y}{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y} = \frac{2\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \sqrt{1-x^2}}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}.$$

Figura 1: Formula a utilizar

Es decir, pi = 4P. Nótese que: (i) podemos simular fácilmente este experimento generando aleatoriamente con un ordenador puntos de coordenadas cartesianas (x, y); (ii) podemos mejorar nuestra estimación de pi aumentando el número de puntos generados (ejercicio 1); (iii) tenemos un método para hallar la integral que aparece en la ecuación. Ciertamente el valor de pi puede encontrarse de forma más rápida y precisa mediante otros métodos, pero veremos que el método Monte Carlo es el m ´ as eficiente para hallar integrales multidimensionales[4].

2.4. Experimentación

Estimación del valor de pi
Dadas estas primeras explicaciones, procederemos a continuación a aplicar el método Montecarlo para estimar el valor de «PI«. La idea aquí consiste en generar de modo aleatorio una serie de puntos (x, y) en un plano 2-D cuadrado de lado 1. Donde a su vez insertaremos un círculo con el mismo diámetro e inscrito en dicho cuadrado. Luego calculamos la proporción de puntos numéricos que se encuentran dentro del círculo y el número total de puntos generados, para, a partir de esos datos, calcular el posible valor de «pi».

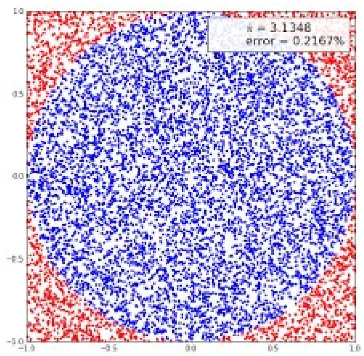

Figura 2: Grafica representativa

Pero ¿cómo obtenemos el valor de pi a partir de las estimaciones del área del circulo y del cuadrado? Pues bien, partiendo de las superficies de nuestro círculo y de nuestro cuadrado[5]:

$$\text{SUPERFICIE CIRCULO} = \pi \times R^2$$

$$\text{SUPERFICIE CUADRADO} = 4R^2$$

Figura 3: Fórmulas de área para el cuadrado y el circulo.

Tenemos que:

$$\frac{\text{SUPERFICIE CIRCULO}}{\text{SUPERFICIE CUADRADO}} = \frac{4}{\pi}$$

Figura 4: Sustituyendo R al cuadrado en ambas ecuaciones.

Puesto lo que queremos averiguar aquí es el valor de «pi» despejamos este último, con lo que obtendremos:

$$\pi = 4 \times \frac{\text{SUPERFICIE CIRCULO}}{\text{SUPERFICIE CUADRADO}}$$

Figura 5: Fórmula para encontrar pi.

2.5. Simulación

Programa[1]:

```
#IMPORTAR MDULO "RANDOM".
import random

#RANGO
INTERVAL= 2000 #Mientras mas grande sea este valor, mas numeros de pi encontramos

circle_points= 0 #PUNTOS DENTRO DEL CRCULO
square_points= 0 #PUNTOS DENTRO DEL CUADRADO

for i in range(INTERVAL**2): #El operador ** calcula el exponente entre valores de tipo de da

    #GENERACIN DE PUNTOS
    rand_x= random.uniform(-1, 1) # Dentro de la generacion de puntos se estima un circulo x=
    rand_y= random.uniform(-1, 1) # Lo mismo pasa dentro de la "Y"

    #DISTANCIA DE CADA PUNTO DEL ORIGEN
    origin_dist= (rand_x**2 + rand_y**2)**0.5

    #COMPROBAR SI EL PUNTO EST DENTRO DEL CRCULO.
    if origin_dist<= 1:
        circle_points+= 1

    square_points+= 1

    #OBTENCIN DEL VALOR DE PI.
    pi = 4* circle_points/ square_points

#ESTIMACIN FINAL.
print("PI_ESTIMATION: ", pi)
print('TOTAL_POINTS: ',square_points)
```

Resultado con Interval=2000:
PI ESTIMATION: 3.139995
TOTAL POINTS: 4000000

Resultado con Interval=4000:
PI ESTIMATION: 3.14119025
TOTAL POINTS: 16000000

3. Resultados

Se puede observar que, con un intervalo de 2000, se obtuvo un total de 4,000,000 de puntos, dando como resultado un valor de pi igual a 3.139995, si lo redondeamos tendríamos que pi es 3.14, un valor cercano al valor real. Por otro lado, con un intervalo de 4000, se obtuvo un total de 16,000,000 de puntos, generando un valor más exacto de pi, en este caso de 3.14119025, para este caso no es necesario redondearlo para obtener 3.14 como en el primer caso, por lo que podemos concluir que, al tener intervalos mas grandes, obtendremos un resultado con mayor exactitud para el valor de pi.

4. Conclución

Como se analizó a lo largo del trabajo hay muchas formas de obtener el numero pi, sin recurrir al cálculo a mano, ya que este último es demasiado tedioso y largo, como lo vimos en clase hay distintos códigos que nos pueden llevar a completar dicho objetivo, estos códigos son mucho más rápidos que un humano y su único problema es el grado de precisión con el que cuenta, esto se puede observar en los resultados donde usando un intervalo de 4000 conseguimos obtener solamente 4 dígitos correctos, esto quiere decir que para conseguir datos más precisos es necesario incrementar la cantidad de intervalos lo que conlleva a un mayor esfuerzo en las computadoras por lo que este tipo de métodos está limitado por el avance de la tecnología y su capacidad para procesar datos ya que si nos excedemos el cálculo de pi podría tardas horas. A pesar de contar con tecnología avanzada aun no somos capaces de descubrir cual es el valor final de pi e incluso hay quienes consideran que pi está compuesto por un numero infinito el cual contiene todas las posibles combinaciones de numeros.

Referencias

[1] antonioam82. estimacion$_pi.py, Mayo 2021$.

[2] Héctor Vega Carrillo. El método de montecarlo. 2012. URL www.academia.edu/27470172/El_m%C3%A9todo_Monte_Carlo.

[3] EALDE. En qué consiste el método de simulación de monte carlo., Agosto 2020. URL https://www.ealde.es/metodo-simulacion-monte-carlo/.

[4] José Ignacio Illana. métodos monte carlo. 2013. URL https://ugr.es/~jillana/Docencia/FM/mc.pdf.

[5] programacionpython80889555. EstimaciÓn del valor de «pi» mediante el mÉtodo «montecarlo» en python., Mayo 2021. URL https://programacionpython80889555.wordpress.com/2021/05/11/estimacion-del-valor-de-pi-mediante-el-metodo-montecarlo-en-python/#:~:text=El%20Programador%20Chapuzas-,ESTIMACI%C3%93N%20DEL%20VALOR%20DE%20.

[6] Licesio J Rodrıguez-Aragón. Simulación, método de montecarlo. 2011. URL https://previa.uclm.es/profesorado/licesio/docencia/mcoi/tema4_guion.pdf.

[7] unknow. Día de pi: ¿quién descubrió el valor del número pi?), marzo 2018. URL https://www.elperiodico.com/es/extra/20180314/dia-de-pi-2018-6687376.