Obliczenia Naukowe Lista 3

Bartłomiej Puchała

November 2023

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Problem polega na zaimplementowaniu funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji. Metoda bisekcji jest jedną z metod rozwiązywania równań nieliniowych. Ogólną ideą tej metody jest zasada połowienia przedziałów. Chcąc zastosować tą metodę, należy przyjąć pewne założenia, tzn:

1. Funkcja f musi być funkcją ciągłą w $[a, b]$ - Ciągłość funkcji gwarantuje, iż jej wartości nie wykonują nagłych skoków i dla dowolnych dwóch wartości funkcji w tym przedziale znajdziemy wszystkie wartości pośrednie.
2. Funkcja musi zmieniać znak w zadanym przedziale $[a, b]$, tzn. $f(a)f(b) < 0$ - Ten warunek gwarantuje, że w przedziale $[a, b]$ istnieje taki argument x_0, dla którego $f(x_0) = 0$(Gwarancja istnienia przynajmniej jednego pierwiastka)

Jeżeli te założenia są spełnione, to możliwe jest wyznaczanie środków przedziałów

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

Pierwiastki są znajdowane na podstawie kolejnych przybliżeń, należy więc określić dokładność, z jaką chcemy otrzymać pierwiastek funkcji oraz dokładność wyznaczania samej wartości funkcji $f(x)$, tzn. warunkami końca będą takie warunki:

1. $|f(c_n)| \leqslant \epsilon$
2. $|b_n - a_n| \leqslant \delta$

Algorytm w każdym kroku dzieli przedział $[a, b]$ na 2 równe połowy $[a_n, c_n]$ oraz $[c_n, b_n]$. Algorytm przyjmuje za nowy przedział $[a, b]$ tą połówkę, dla której na krańcach przedziału funkcja $f(x)$ zmienia znak i kontynuuje wyznaczanie pierwiastka. Metoda ta jest zbieżna liniowo, wykładnik zbieżności $\alpha = 1$, metoda jest zbieżna globalnie.

1.2 Rozwiązanie

Ta funkcja znajduje się w module Functions

```
function mbisekcji(f::Function, a::Float64, b::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64)::Int64
    err::Int
    it = 0
    u = f(a)
    v = f(b)
    e = b - a
    if(sign(u) == sign(v))
        err = 1
        return (0, 0, it, err)
```

```
    end

    while true
        e = e / 2
        c = a + e
        w = f(c)
        it += 1

        if(abs(e) < delta || abs(w) < epsilon)
            err = 0
            return (c, w, it, err)
        end

        if(sign(w) != sign(u))
            b = c
            v = w
        else
            a = c
            u = w
        end
    end
end
```

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Problem polega na zaimplementowaniu funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona. Metoda ta korzysta z funkcji liczących $f(x)$ oraz $f'(x)$. Aby możliwe było policzenie pierwiastka funkcji $f(x)$ w $[a, b]$ za pomocą tej metody, muszą zostać spełnione podane warunki:

1. W przedziale $[a, b]$ pierwsza pochodna $f'(x) \neq 0$ - w obszarze poszukiwań pochodna funkcji nie powinna być równa 0, w przeciwnym razie metoda może nie zbiegać
2. Funkcja $f \in C^2[a, b]$, tzn. funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $[a, b]$, a ich drugie pochodne są ciągłe.

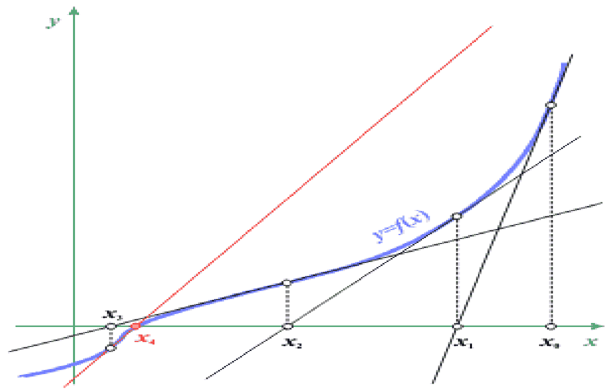
Algorytm polega na wybraniu punktu początkowego x_0, od którego zacznie się poszukiwanie pierwiastka funkcji. Wybór tego punktu ma znaczenie, ponieważ przy źle wybranym punkcie startowym metoda może stać się rozbieżna. Następnie w każdej iteracji wyznaczamy za pomocą wzoru Newtona

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

kolejne przybliżenia pierwiastka, którymi są punkty przecięcia stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_n z osią OX. Do wyznaczania kolejnego przybliżenia pierwiastka potrzebujemy tylko jednego punktu. Kolejne przybliżenia są wyznaczane, dopóki różnica pomiędzy dwoma kolejnymi wyznaczonymi pierwiastkami będzie zbyt mała lub wartość funkcji dla kolejnego x_n przekroczy dokładność. Warunki końca metody prezentują się następująco:

1. $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \delta$
2. $|f(x_{n+1})| \leqslant \epsilon$

Graficzna interpretacja tej metody przedstawia się następująco:



Rysunek 1: Graficzna interpretacja metody Newtona

Zaletą tej metody jest szybka zbieżność, wykładnik zbieżności $\alpha = 2$.

2.2 Rozwiązanie

Ta funkcja znajduje się w module Functions

```
function mstycznych(f::Function, pf::Function, x0::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64,
maxit::Int)
    v = f(x0)
    if abs(v) < epsilon
        return (x0, v, 0, 0)
    end

    if abs(pf(x0)) < epsilon
        return (0, 0, 0, 2) # pochodna bliska zeru
    end

    for k in 1:maxit
        x1 = x0 - v / pf(x0)
        v = f(x1)
        if(abs(v) < epsilon || abs(x1 - x0) < delta)
            return (x1, v, k, 0)
        end
        x0 = x1
    end
    # nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji
    return (0, 0, 0, 1)
end
```

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

Problem polega na zaimplementowaniu funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych. Metoda ta jest podobna do metody Newtona, ale do jej wykonania niepotrzebne jest liczenie pochodnej funkcji $f'(x)$, jest ona aproksymowana przez iloraz różnicowy, tzn:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Aby możliwe było policzenie pierwiastka funkcji $f(x)$ w $[a, b]$ za pomoca tej metody, musza zostać spelnione podane warunki:

1. W przedziale $[a, b]$ pierwsza pochodna $f'(x) \neq 0$ - ten warunek gwarantuje, iż sieczna nie będzie równoległa do osi OX, co uniemożliwiłoby wyznaczenie jej punktu przecięcia z tą osią
2. Funkcja $f \in C^2[a, b]$, tzn. funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale $[a, b]$, a ich drugie pochodne są ciągłe.

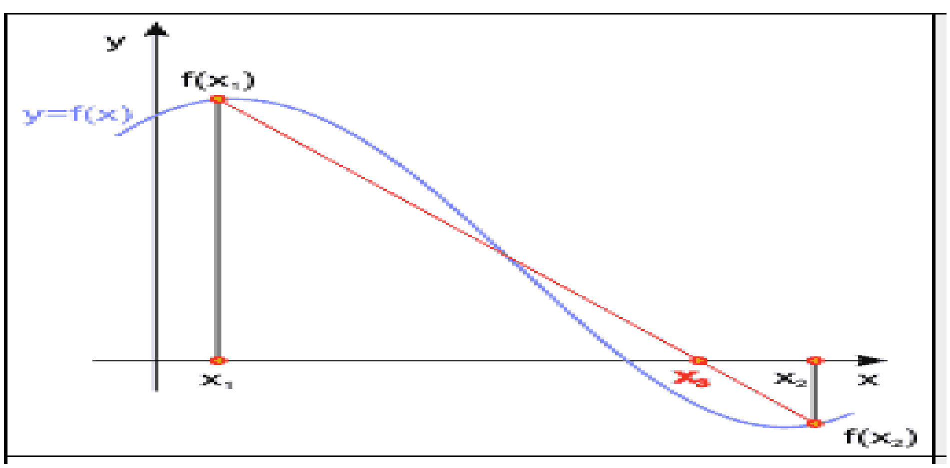
Algorytm polega na iteracyjnym obliczeniu kolejnych przybliżeń pierwiastka, wykorzystując dwa poprzednio wyznaczone przybliżenia pierwiastka za pomocą wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

Wzór ten jest analogiczny co do wzoru Newtona, lecz zamiast wartości pochodnej funkcji $f(x)$ do wzoru podstawiamy jej aproksymację. Chcąc otrzymać kolejne przybliżenie pierwiastka, konstruujemy sieczną do wykresu funkcji $f(x)$ przecinającą $f(x)$ w punktach x_n oraz x_{n-1}. Przecięcie tej siecznej z osią OX będzie kolejnym przybliżeniem pierwiastka. Warunkami końca tej metody są:

1. $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \delta$
2. $|f(x_{n+1})| \leqslant \epsilon$

Metoda ta ma współczynnik zbieżności $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, jej graficzna interpretacja prezentuje się następująco:



Rysunek 2: Graficzna interpretacja metody siecznych

3.2 Rozwiązanie

Ta funkcja znajduje się w module Functions

```
function msiecznych(f::Function, x0::Float64, x1::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64,
maxit::Int)
    fa = f(x0)
    fb = f(x1)
    for k in 1:maxit
        if(abs(fa) > abs(fb))
            tmp = x0
            tmp_f = fa
            x0 = x1
            x1 = tmp
            fa = fb
            fb = tmp_f
        end
        s = (x1 - x0) / (fb - fa)
        x1 = x0
        fb = fa
        x0 = x0 - (fa * s)
        fa = f(x0)
        if(abs(x1 - x0) < delta || abs(fa) < epsilon)
            return (x0, fa, k, 0)
        end
    end
    return (0, 0, 0, 1)
end
```

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Problem polega na zastosowaniu metod rozwiązywania równań do wyznaczenia pierwiastka równania:

$$sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$$

Należy zastosować:

1. Metodę bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.
2. Metodę Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.
3. Metodę siecznych z przybliżeniami początkowymi $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}, \epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

4.2 Rozwiązanie

```
include("./Functions.jl")
using .Functions

function f(x)
    return sin(x) - (1/4)x^2
end

function pf(x)
    return cos(x) - (1/2)x
```

```
end

a = 1.5
b = 2.0
x0 = 1.5
delta = (1/2) * 10^(-5)
epsilon = (1/2) * 10^(-5)
r, v, it, err = Functions.mbisekcji(f, a, b, delta, epsilon)
println("Pierwiastek to $r, wartość funkcji $v, liczba iteracji: $it, znak błędu: $err")

r, v, it, err = Functions.mstycznych(f, pf, x0, delta, epsilon, 10)
println("Pierwiastek to $r, wartość funkcji $v, liczba iteracji: $it, znak błędu: $err")

x0 = 1.0
x1 = 2.0
r, v, it, err = Functions.msiecznych(f, x0, x1, delta, epsilon, 10)
println("Pierwiastek to $r, wartość funkcji $v, liczba iteracji: $it, znak błędu: $err")
```

4.3 Wyniki i interpretacja

Algorytm	x	f(x)	Iteracje
Bisekcja	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4
Siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

Ta funkcja oprócz miejsca zerowego $x_0 = 0$ posiada miejsce zerowe $f(x) = 0$ dla $x \approx 1.93375$, więc każda metoda zwróciła poprawny wynik, różnica w liczbie iteracji dla danej metody wynika z faktu, że każda z metod ma różny współczynnik zbieżności α.

4.4 Wnioski

Mając dobrze zadaną funkcję każda z metod potrafi zwrócić poprawny wynik z zadaną dokładnością, poszczególne metody różnią się tylko liczbą iteracji.

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

Problem polega na znalezieniu metodą bisekcji wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$ z dokładnością obliczeń $\delta = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-4}$.

5.2 Rozwiązanie

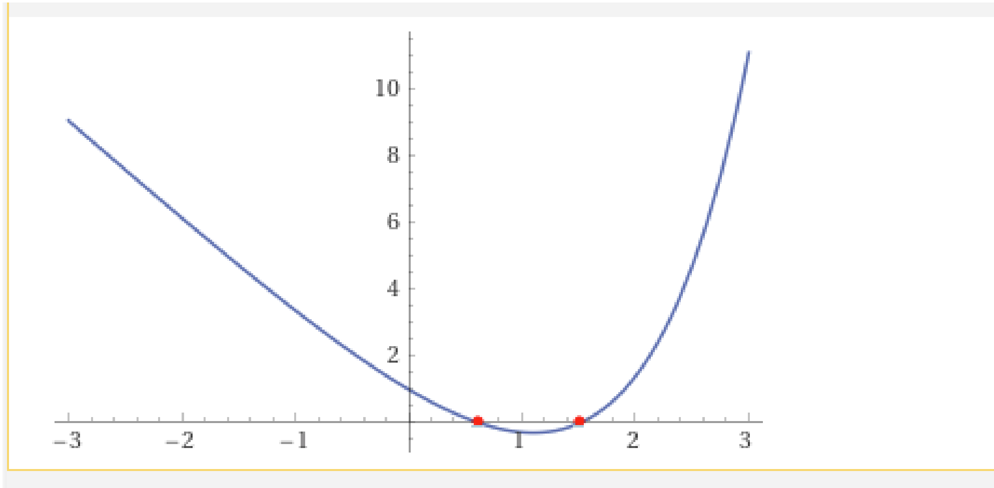
Aby znaleźć wartości zmiennej x, dla których przecinają się wykresy funkcji $f(x)$ należy rozwiązać równanie

$$e^x = 3x$$

co po przekształceniu daje postać

$$e^x - 3x = 0$$

Wykres funkcji $f(x) = e^x - 3x$ przedstawia się następująco:



Rysunek 3: f(x) $= e^x - 3x$

Należy więc się spodziewać się pierwiastków w przedziałach $[0, 1]$ i $[1, 2]$, dlatego wybrałem te dwa przedziały jako parametry do metody bisekcji.

```
include("./Functions.jl")
using .Functions

delta = 10^(-4)
epsilon = 10^(-4)
e_value = Base.MathConstants.e
println(e_value)

function f(x)
    return e_value^(x) - 3x
end

# e^x = 3x
# e^x - 3x = 0
a = 1.0
b = 2.0
r, v, it, err = Functions.mbisekcji(f, a, b, delta, epsilon)
println("Pierwiastek to $r, wartość funkcji $v, liczba iteracji: $it, znak błędu: $err")
```

5.3 Wyniki i interpretacja

Przedział	x	f(x)	Iteracje
$[0, 1]$	0.619140625	-9.066320343276146e-5	9
$[1, 2]$	1.5120849609375	-7.618578602741621e-5	13

5.4 Wnioski

Dla odpowiednio dobranych startowych przedziałów za pomocą metody bisekcji można w poprawny sposób wyznaczyć miejsca zerowe funkcji.

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

Problem polega na znalezieniu miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ za pomocą metody bisekcji, Newtona i siecznych z wymaganą dokładnością $\delta = 10^{-5}$ oraz $\epsilon = 10^{-5}$

6.2 Rozwiązanie

```
include("./Functions.jl")
using .Functions

delta = 10^(-5)
epsilon = 10^(-5)
e = Base.MathConstants.e

function f1(x)
    return e^(1 - x) - 1
end

function pf1(x)
    return -e^(1 - x)
end

function f2(x)
    return x*e^(-x)
end

function pf2(x)
    return -e^(-x)*(x - 1)
end

a = -1.5
b = 0.5
r, v, it, err = Functions.mbisekcji(f2, a, b, delta, epsilon)
println("Pierwiastek to $r, wartość funkcji $v, liczba iteracji: $it, znak błędu: $err")
x0 = -1.5
r, v, it, err = Functions.mstycznych(f2, pf2, x0, delta, epsilon, 10)
println("Pierwiastek to $r, wartość funkcji $v, liczba iteracji: $it, znak błędu: $err")
x0 = -1.5
x1 = 0.5
r, v, it, err = Functions.msiecznych(f2, x0, x1, delta, epsilon, 10)
println("Pierwiastek to $r, wartość funkcji $v, liczba iteracji: $it, znak błędu: $err")
```

Dla podanych metod jako przedziały przyjąłem następujące dane:

Metoda	funkcja	params
Bisekcja	f1	$a = 0.5, b = 2.0$
Bisekcja	f2	$a = -1.5, b = 0.5$
Newton	f1	$x_0 = 0.5$
Newton	f2	$x_0 = -1.5$
Sieczne	f1	$x_0 = 0.5, x_1 = 1.5$
Sieczne	f2	$x_0 = -1.5, x_1 = 0.5$

6.3 Wyniki i interpretacja

Wyniki dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$

Algorytm	x	f(x)	Iteracje
Bisekcja	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16
Newton	0.9999999998878352	1.1216494399945987e-10	4
Sieczne	0.9999999624498374	3.755016342310569e-8	5

Wyniki dla funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$

Algorytm	x	f(x)	Iteracje
Bisekcja	0.0	0.0	2
Newton	-4.179471505818752e-8	-4.179471680498576e-8	6
Sieczne	1.7791419742860986e-8	1.779141942632637e-8	8

Jak widać metoda siecznych potrzebowała więcej iteracji od metody Newtona, co wynika z różnego współczynnika zbieżności α. Dla dobrze wybranych parametrów metoda Bisekcji potrafi w szybszym czasie zwrócić pierwiastek funkcji $f(x)$. Jeżeli chodzi o testy dla metody Newtona dla $x_0 \in (1, \infty)$ dla funkcji f_1, to wraz ze wzrostem wartości punktu startowego x_0 rośnie liczba iteracji metody, aby dla $x_0 = 7$ osiągnąć aż 401 iteracji, a dla większych punktów startowych metoda nie osiąga wymaganej dokładności w maxit iteracji. Dla metody Newtona i funkcji f_2 i punktu $x_0 > 1$ otrzymuję niepoprawne wyniki, co jest spowodowane że $lim_{x->\infty} f_2'(x) = 0$, więc wartości są coraz bardziej niedokładne w arytmetyce. Dla $x_0 = 1$ i funkcji f_2 nie można wybrać tego punktu x_0, ponieważ $f_2'(1) = 0$, co spowoduje, że styczna będzie równoległa do osi OX dzięki czemu niemożliwe będzie wyznaczenie punktu przecięcia i kolejnych przybliżeń pierwiastka.

6.4 Wnioski

Źle dobrane parametry początkowe mogą spowodować błędy w otrzymywanych wynikach. W przypadku implementowania algorytmów poszukujących pierwiastków danych równań, warto zastosować różne metody do różnych celów, np. metodę Bisekcji do ograniczenia przedziału do przedziału, w którym blisko znajduje się miejsce zerowe funkcji, aby potem zastosować metodę siecznych albo Newtona, aby w niewielkiej liczbie iteracji otrzymać poprawny wynik.