

Лабораторная работа №1

Выполнил Арзуманов Олег

1.1 Вероятностное пространство, формула Байеса.

1. Определить (с обоснованием), зависимы или независимы следующие события:

- (a) Несовместные события;
- (b) События, образующие σ -алгебру Σ в пространстве (Ω, Σ, P) ;
- (c) События, имеющие одинаковую вероятность?

Решение:

а) Если события несовместны, то

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 ;$$

По определению независимости должно выполняться:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Если оба события возможны (т.е. $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$), то произведение $P(A) \times P(B) > 0$, следовательно несовместные события зависимы (знание наступления одного меняет вероятность наступления другого).

б) Σ представляет собой множество всех подмножеств Ω (событий) и удовлетворяет следующим условиям:

- само пространство Ω (достоверное событие) должно принадлежать Σ ;
- если некоторое подмножество A является событием $A \in \Sigma$, то его дополнение \bar{A} также должно быть событием $\bar{A} \in \Sigma$;
- если имеется счетная последовательность событий A_1, A_2, \dots, A_n , то их объединение также должно быть событием $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Из этого следует, что события в σ -алгебре Σ могут быть как зависимыми (A, \bar{A}) , так и независимыми $(\Omega, A \mid A, \emptyset \mid \Omega, \bar{A} \mid \bar{A}, \emptyset)$.

с) $P(A) = P(B)$ — недостаточная информация для вывода об их независимости, нужен контекст.

- пример 1 (независимы и имеют одинаковую вероятность): пусть проводится эксперимент подбрасывания двух монет, где события A - при броске первой упал орёл, B - при броске второй упал орёл. Тогда $P(A) = P(B) = 1/2$ и $P(A \cap B) = 1/4 \rightarrow$ эти события независимы;
- пример 2 (зависимы и имеют одинаковую вероятность): пусть проводится эксперимент одно подбрасывание монетки, где события A - в первом броске орёл, B - в первом броске решка. Тогда $P(A) = P(B) = 1/2$ и $P(A \cap B) \neq 1/4 \rightarrow$ эти события зависимы.

2. Опыт заключается в независимом подбрасывании двух симметричных монет. Рассматриваются следующие события:

- A — появление герба на первой монете;
- B — появление решки на первой монете;
- C — появление герба на второй монете;
- D — появление решки на второй монете;
- E — появление хотя бы одного герба;
- F — появление хотя бы одной решки;
- G — появление одного герба и одной решки;
- H — неоявление ни одного герба;
- K — появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

- (a) $A + C$ = выпал герб хотя бы на одной монете ($\equiv E$).
- (b) AC = и на первой, и на второй монете выпал герб ($\equiv K$).
- (c) EF = на одной монете выпал герб, на другой – решка ($\equiv G$).
- (d) $G + E$ = появление хотя бы одного герба ($\equiv E$).

(e) GE = появление одного герба и одной решки ($\equiv G$).

(f) BD = решка выпала на двух монетах ($\equiv H$).

(g) $E + K$ = появление хотя бы одного герба ($\equiv E$).

3. Производится выстрел по вращающейся круговой мишени, в которой закрашены два непересекающихся сектора с углом 20° . Какова вероятность попадания в закрашенную область?

Решение:

Поскольку любая точка круга (в смысле углового положения) равновероятна, вероятность попадания пропорциональна доле угла, занятого закрашенной областью:

$$P(A) = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}$$

4. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу независимо друг от друга и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода — 1 час, а второго — 2 часа.

Решение:

С помощью метода Монте-Карло (миллиард симуляций):

```
T = 24

t1 = 1 # стоянка 1-го
t2 = 2 # стоянка 2-го

total_simulations = 1000000000

wait_count = 0

for _ in tqdm(range(total_simulations)):
    x = random.uniform(0, T) # случайное время прибытия 1-го
    y = random.uniform(0, T) # случайное время прибытия 2-го

    # Второй ждет
    if (x < y) & (y < x + t1):
        wait_count += 1

    # Первый ждет
    elif (y < x) & (x < y + t2):
```


```
wait_count += 1

else:
    continue

probability = wait_count / total_simulations

print(f'Вероятность ожидания = {probability}')
```

Вывод:

100%  1000000000/1000000000 [08:29<00:00, 1882409.17it/s]

Вероятность ожидания = 0.120651233

Так, в соответствии с законом больших чисел - можно утверждать, что:

$$P(A) \approx 12,07\%$$

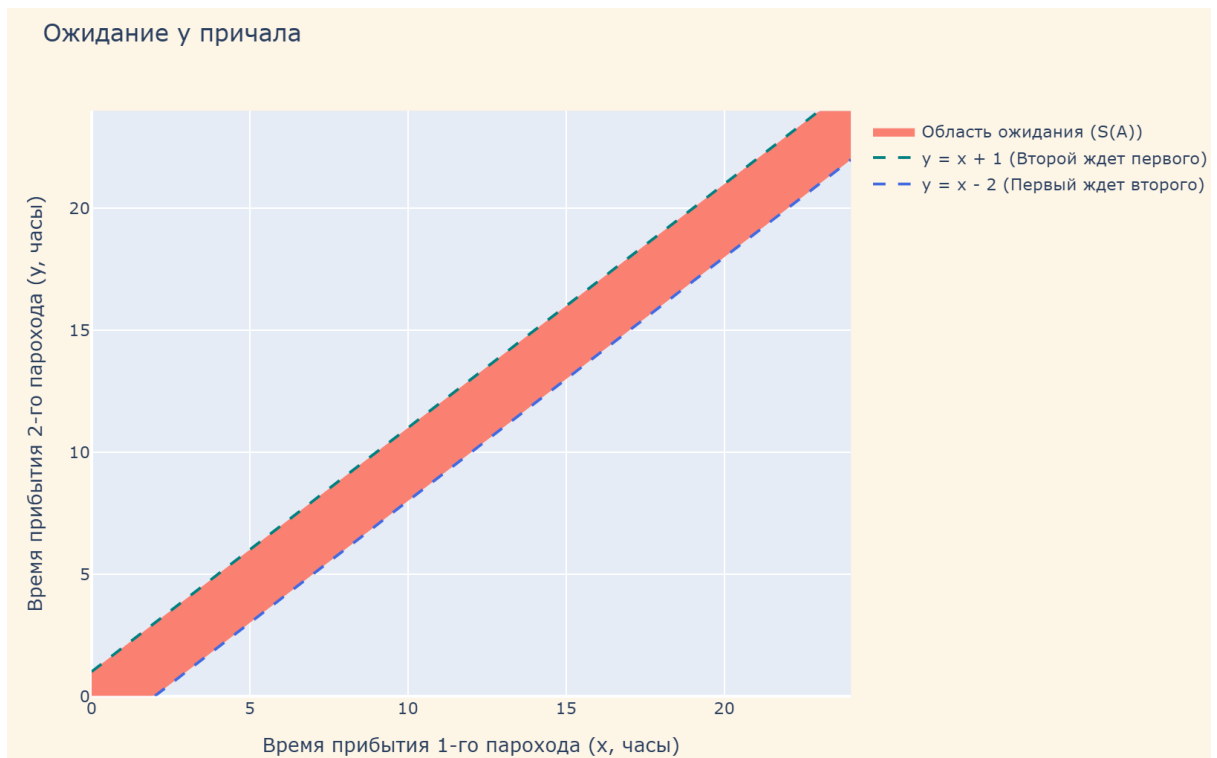


Рисунок 1 – График геометрической вероятности ожидания у причала

5. Самолет, по которому ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей:

(a) Кабина летчика и двигатель

(b) Топливные баки

(c) Планер

Для поражения самолета достаточно либо одного попадания в первую часть, либо двух попаданий во вторую, либо трех в третью. При попадании в самолет одного снаряда, снаряд с вероятностью p_1 попадает в первую часть, с вероятностью p_2 — во вторую, с вероятностью p_3 — в третью. Попавшие снаряды распределяются по частям независимо друг от друга. Известно, что в самолет попало m снарядов. Найти условную вероятность $P(A|m)$ события A – «Самолет поражен» – при $m = 1, 2, 3, 4$.

Решение:

- при $m = 1$: одним снарядом можно поразить самолёт только попаданием в первую часть, значит:

$$P(A|m = 1) = p_1$$

- при $m = 2$: двумя снарядами уничтожение происходит, если:
 - есть хотя бы одно попадание в первую часть (A_1). Найдём вероятность обратного события - \bar{A}_1 (ни один снаряд не попал в первую часть):

$$P(\bar{A}_1|m = 2) = (p_2 + p_3)^2$$

- или оба попадания были во вторую часть (A_2). Поражения самолёта не будет, если из $P(\bar{A}_1|m = 2)$ вычесть $P(A_2)$:

$$P(\bar{A}|m = 2) = (p_2 + p_3)^2 - p_2^2$$

$$\text{Так, } P(A|m = 2) = 1 - P(\bar{A}|m = 2) = 1 - (2p_2p_3 + p_3^2)$$

- при $m = 3$: аналогично предыдущему случаю, рассмотрим вероятность непопадания в первую часть самолёта:

$$P(\bar{A}_1|m=3) = (p_2 + p_3)^3 = p_2^3 + 3p_2^2p_3 + 3p_2p_3^2 + p_3^3$$

Из получившихся случаев только при $3p_2p_3^2$ поражения самолёта не произойдёт, следовательно:

$$P(A|m=3) = 1 - 3p_2p_3^2$$

- при $m=4$: всякое возможное распределение попаданий ведёт к поражению самолёта, которое имеет вероятность 1:

$$P(A|m=4) = 1$$

1.2 Случайный вектор и числовые характеристики.

1. Пусть

$$f_{\xi}(x, y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}$$

Является ли данная функция плотностью распределения случайного вектора?

Решение:

Проверим $f_{\xi}(x, y)$ на свойства плотности:

1) Неотрицательность. Так как $e^{-2|y|} > 0 \forall y$ и $\pi(1+x^2) > 0 \forall x \Rightarrow f_{\xi}(x, y) > 0$.

2) Нормировка. Проверим выполняется ли $\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx dy = 1$:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)} dx dy = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|} dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|} dy &= \int_{-\infty}^0 e^{-2|y|} dy + \int_0^{+\infty} e^{-2|y|} dy = \left[\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-2|y|} \Big|_a^0 \right] + \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2|y|} \Big|_0^b \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - e^{2a} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi\end{aligned}$$

Итого:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)} dx dy = \frac{1}{\pi} \times 1 \times \pi = 1$$

⇓

$f_{\xi}(x, y)$ обладает всеми свойствами плотности распределения.

2. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано следующей таблицей:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	1/3	1/6	0

- (a) Найти маргинальные распределения ξ и η
- (b) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η)
- (c) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность

Решение:

а) Для ξ :

$$P(\xi = -1) = \sum_j P(\xi = -1, \eta_j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} = \frac{1}{2}$$

$$P(\xi = 1) = \sum_j P(\xi = 1, \eta_j) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2}$$

Для η :

$$P(\eta = -1) = \sum_i P(\eta = -1, \xi_i) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

$$P(\eta = 0) = \sum_i P(\eta = 0, \xi_i) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P(\eta = 1) = \sum_i P(\eta = 1, \xi_i) = \frac{7}{24} + 0 = \frac{7}{24}$$

b) Расчёт математического ожидания:

$$E(\xi) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$E(\eta) = -1 \times \frac{11}{24} + 1 \times \frac{7}{24} = -\frac{1}{6}$$

Расчёт ковариационной и корреляционной матриц:

$$E(\xi\eta) = \left[\left(-1 \times -1 \times \frac{1}{8} \right) + \left(-1 \times 1 \times \frac{7}{24} \right) \right] + \left[1 \times -1 \times \frac{1}{3} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \sigma(\xi) = 1$$

$$D(\eta) = \frac{3}{4} - \frac{1}{36} = \frac{13}{18} \Rightarrow \sigma(\eta) = \sqrt{\frac{13}{18}}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi) \times E(\eta) = -\frac{1}{2} - 0 \times = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} \approx -0.589$$

Матрицы:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D(\xi) & cov(\xi, \eta) \\ cov(\xi, \eta) & D(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & corr(\xi, \eta) \\ corr(\xi, \eta) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.589 \\ -0.589 & 1 \end{pmatrix}$$

с) Если ξ и η независимы, то $P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi_x)P(\eta_y)$. Проверим, например, для $(\xi = -1, \eta = -1)$:

$$P(\xi = -1, \eta = -1) = \frac{1}{8} ; P(\xi_{-1})P(\eta_{-1}) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{24} = \frac{11}{48}$$

\Downarrow

ξ и η зависимы и отрицательно коррелированы

3. Пусть имеются два одинаковых тетраэдра с числами 1, 2, 3, 4 на гранях. Подкидываем оба и смотрим на выпавшие числа ξ_1 и ξ_2 . Зададим следующие случайные величины:

$$\phi_1 = \xi_1 + \xi_2 \qquad \phi_2 = \begin{cases} 1, & (\xi_1 \leq \xi_2) \cup (\xi_2 \leq \xi_1) \\ 0, & else \end{cases}$$

- (a) Составить таблицу совместного распределения ϕ_1 и ϕ_2 ;
- (b) Найти маргинальные распределения ϕ_1 и ϕ_2 ;
- (c) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ϕ_1, ϕ_2) ;
- (d) Исследовать ϕ_1 и ϕ_2 на независимость и некоррелированность.

Решение:

а) Таблица совместного распределения:

Представим все возможные варианты бросков:

	xi1	xi2	phi1	phi2
Вариант броска				
1	1	1	2	1
2	1	2	3	1
3	1	3	4	1
4	1	4	5	1
5	2	1	3	1
6	2	2	4	1
7	2	3	5	0
8	2	4	6	1
9	3	1	4	1
10	3	2	5	0
11	3	3	6	1
12	3	4	7	0
13	4	1	5	1
14	4	2	6	1
15	4	3	7	0
16	4	4	8	1

Рисунок 2 – Варианты бросков двух тетраэдров

Тогда довольно просто вывести таблицу совместного распределения ϕ_1 и ϕ_2 :

$\phi_2 \backslash \phi_1$	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	2/16	0	2/16	0
1	1/16	2/16	3/16	2/16	3/16	0	1/16

б) Маргинальные распределения.

Для ϕ_1 :

ϕ_1	2	3	4	5	6	7	8
P	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

Для ϕ_2 :

$$P(\phi_2 = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; \quad P(\phi_2 = 1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

с) Расчёт математического ожидания:

$$E(\phi_1) = 5$$

$$E(\phi_2) = \frac{3}{4}$$

$$E(\phi_1\phi_2) = \frac{56}{16}$$

Расчёт ковариации:

$$\text{cov}(\phi_1\phi_2) = -\frac{1}{4}$$

$$D\phi_1 = \frac{5}{2}; \quad D\phi_2 = \frac{3}{16}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

Расчёт корреляции:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{15}} & 1 \end{pmatrix}$$

d) Если ϕ_1 и ϕ_2 независимы, то должно выполняться для всех x и y :

$$P(\phi_1 = x, \phi_2 = y) = P(\phi_1 = x)P(\phi_2 = y)$$

Проверим для $x = 2$ и $y = 1$:

$$P(\phi_1 = 2, \phi_2 = 1) = \frac{1}{16} \left(\neq \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} \right)$$

\Downarrow

ϕ_1 и ϕ_2 зависимы и отрицательно коррелированы.

4. Пусть $\xi \sim U_{-\pi, \pi}$ и $\eta_1 = \cos \xi$, $\eta_2 = \sin \xi$.

(a) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (η_1, η_2)

(b) Исследовать η_1 и η_2 на независимость и некоррелированность

Решение:

a) Вычисление мат. ожидания:

Плотность $f_\xi(x)$ равна

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & else \end{cases}$$

\Downarrow

$$E(\eta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \xi d\xi = 0$$

$$E(\eta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \xi d\xi = 0$$

Итого вектор мат. ожиданий равен $(0, 0)$.

Вычисление ковариационной матрицы:

$$\begin{aligned} E(\eta_1^2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \xi d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2\xi}{2} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \times \left((1)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}(\cos 2\xi)|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{4\pi} \times (2\pi + 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\eta_2^2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \xi d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2\xi}{2} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \times \left((1)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}(\cos 2\xi)|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{4\pi} \times (2\pi - 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

\Downarrow

$$D(\eta_1) = D(\eta_2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{cov}(\eta_1, \eta_2) = E(\eta_1 \eta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \xi \times \sin \xi d\xi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\xi d\xi = 0$$

Получившаяся ковариационная матрица имеет вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Вычисление корреляционной матрицы:

$$\text{corr}(\eta_1, \eta_2) = \frac{0}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Исследование на коррелированность и зависимость:

- η_1 и η_2 имеют $cov = 0$, т.е. некоррелированы, но зависимы (так как $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$);

5. Найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин ξ и η , если $\xi \sim Exp_2$ и $\eta \sim U_{0,1}$.

Решение:

Выпишем значения плотностей для данных случайных величин:

$$f_{\xi}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} = 2e^{-2t}, & t \geq 0, \lambda > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Поскольку ξ и η независимы, плотность суммы $S = \xi + \eta$ можно получить через свёртку:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(t)f_{\eta}(s-t)dt$$

Поскольку $f_{\eta}(s-t) = 1$, $0 \leq s-t \leq 1$, в то время как при $s < 0 \mid t < 0$ - $f_{\xi+\eta}(s) = 0$, то:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int_{\max(0, s-1)}^s f_{\xi}(t)dt$$

В случае если $0 \leq s \leq 1 \Rightarrow s - 1 \leq 0$:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int_0^s 2e^{-2t} dt = -e^{-2t} \Big|_0^s = 1 - e^{-2s}$$

В случае если $s \geq 1 \Rightarrow s - 1 \geq 0$:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int_{s-1}^s 2e^{-2t} dt = -e^{-2t} \Big|_{s-1}^s = e^{-2(s-1)} - e^{-2s} = e^{-2s}(e^2 - 1)$$

Итого функция плотности суммы двух независимых случайных величин ξ и η , $f_{\xi+\eta}(s)$ имеет вид:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1 - e^{-2s}, & 0 \leq s \leq 1 \\ e^{-2s}(e^2 - 1), & s \geq 1 \end{cases}$$