Лабораторная работа №1

Выполнил Арзуманов Олег

1.1 Вероятностное пространство, формула Байеса.

1. Определить (с обоснованием), зависимы или независимы следующие события:

(a) Несовместные события;

(b) События, образующие σ-алгебру Σ в пространстве (Ω, Σ, P);

(c) События, имеющие одинаковую вероятность?

Решение:

a) Если события несовместны, то

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0\,;$$

По определению независимости должно выполняться:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Если оба события возможны (т.е $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$), то произведение $P(A) \times P(B) > 0$, следовательно несовместные события зависимы (знание наступления одного меняет вероятность наступления другого).

b) Σ представляет собой множество всех подмножеств Ω (событий) и удовлетворяет следующим условиям:

- само пространство Ω (достоверное событие) должно принадлежать Σ;

- если некоторое подмножество A является событием $A \in \Omega$, то его дополнение $\bar{A}$ также должно быть событием $\bar{A} \in \Omega$;

- если имеется счетная последовательность событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, то их объединение также должно быть событием $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma$.

Из этого следует, что события в σ-алгебре Σ могут быть как зависимыми $(A, \bar{A})$, так и независимыми $(\Omega, A \mid A, \emptyset \mid \Omega, \bar{A} \mid \bar{A}, \emptyset)$.

c) $P(A) = P(B)$ – недостаточная информация для вывода об их независимости, нужен контекст.

- пример 1 (независимы и имеют одинаковую вероятность): пусть проводится эксперимент подбрасывания двух монет, где события A - при броске первой упал орёл, B - при броске второй упал орёл. Тогда $P(A) = P(B) = 1/2$ и $P(A \cap B) = 1/4$ → эти события независимы;

- пример 2 (зависимы и имеют одинаковую вероятность): пусть проводится эксперимент одно подбрасывание монетки, где события A - в первом броске орёл, B - в первом броске решка. Тогда $P(A) = P(B) = 1/2$ и $P(A \cap B) \neq 1/4$ → эти события зависимы.

2. Опыт заключается в независимом подбрасывании двух симметричных монет. Рассматриваются следующие события:

- A — появление герба на первой монете;
- B — появление решки на первой монете;
- C — появление герба на второй монете;
- D — появление решки на второй монете;
- E — появление хотя бы одного герба;
- F — появление хотя бы одной решки;
- G — появление одного герба и одной решки;
- H — непоявление ни одного герба;
- K — появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

(a) $A + C$ = выпал герб хотя бы на одной монете ($\equiv E$).

(b) AC = и на первой, и на второй монете выпал герб ($\equiv K$).

(c) EF = на одной монете выпал герб, на другой – решка ($\equiv G$).

(d) $G + E$ = появление хотя бы одного герба ($\equiv E$).

(e) GE = появление одного герба и одной решки ($\equiv G$).

(f) BD = решка выпала на двух монетах ($\equiv H$).

(g) $E + K$ = появление хотя бы одного герба ($\equiv E$).

3. Производится выстрел по вращающейся круговой мишени, в которой закрашены два непересекающихся сектора с углом 20°. Какова вероятность попадания в закрашенную область?

Решение:

Поскольку любая точка круга (в смысле углового положения) равновероятна, вероятность попадания пропорциональна доле угла, занятого закрашенной областью:

$$P(A) = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}$$

4. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу независимо друг от друга и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода — 1 час, а второго — 2 часа.

Решение:

С помощью метода Монте-Карло (миллиард симуляций):

```
T = 24

t1 = 1  # стоянка 1-го
t2 = 2  # стоянка 2-го

total_simulations = 1000000000

wait_count = 0

for _ in tqdm(range(total_simulations)):
    x = random.uniform(0, T)  # случайное время прибытия 1-го
    y = random.uniform(0, T)  # случайное время прибытия 2-го

    # Второй ждет
    if (x < y) & (y < x + t1):
        wait_count += 1

    # Первый ждет
    elif (y < x) & (x < y + t2):
```

```
        wait_count += 1

    else:
        continue

probability = wait_count / total_simulations

print(f'Вероятность ожидания = {probability}')
```

Вывод:

```
100% 1000000000/1000000000 [08:29<00:00, 1882409.17it/s]

Вероятность ожидания = 0.120651233
```

Так, в соответствии с законом больших чисел - можно утверждать, что:

$$P(A) \approx 12{,}07\%$$

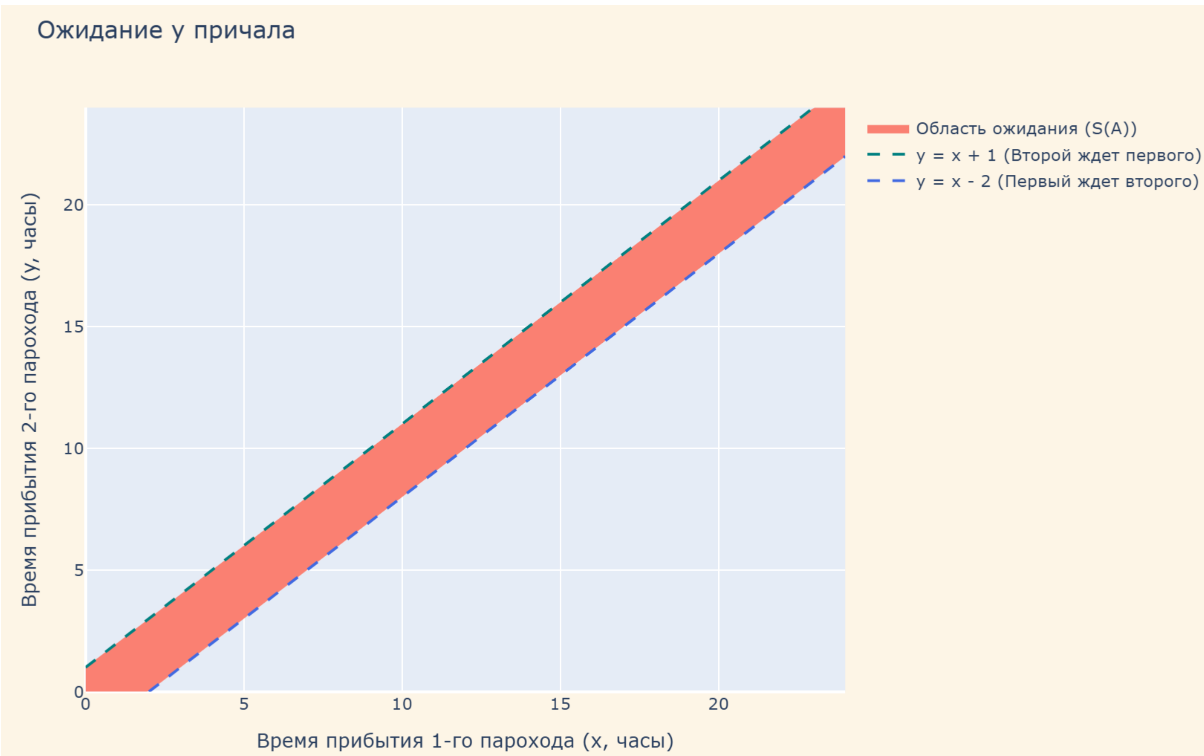

Рисунок 1 – График геометрической вероятности ожидания у причала

5. Самолет, по которому ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей:

(a) Кабина летчика и двигатель

(b) Топливные баки

(c) Планер

Для поражения самолета достаточно либо одного попадания в первую часть, либо двух попаданий во вторую, либо трех в третью. При попадании в самолет одного снаряда, снаряд с вероятностью p_1 попадает в первую часть, с вероятностью p_2 — во вторую, с вероятностью p_3 — в третью. Попавшие снаряды распределяются по частям независимо друг от друга. Известно, что в самолет попало m снарядов. Найти условную вероятность $P(A|m)$ события A – «Самолет поражен» – при $m = 1, 2, 3, 4$.

Решение:

- при $m = 1$: одним снарядом можно поразить самолёт только попаданием в первую часть, значит:

$$P(A|m = 1) = p_1$$

- при $m = 2$: двумя снарядами уничтожение происходит, если:
  - есть хотя бы одно попадание в первую часть (A_1). Найдём вероятность обратного события - $\bar{A}_1$ (ни один снаряд не попал в первую часть):

$$P(\bar{A}_1|m = 2) = (p_2 + p_3)^2$$

  - или оба попадания были во вторую часть (A_2). Поражения самолёта не будет, если из $P(\bar{A}_1|m = 2)$ вычесть $P(A_2)$:

$$P(\bar{A}|m = 2) = (p_2 + p_3)^2 - {p_2}^2$$

Так, $P(A|m = 2) = 1 - P(\bar{A}|m = 2) = 1 - (2p_2p_3 + {p_3}^2)$

- при $m = 3$: аналагично предыдущему случаю, рассмотрим вероятность непопадания в первую часть самолёта:

$$P(\bar{A}_1|m=3) = (p_2+p_3)^3 = {p_2}^3 + 3{p_2}^2 p_3 + 3p_2{p_3}^2 + {p_3}^3$$

Из получившихся случаев только при $3p_2{p_3}^2$ поражения самолёта не произойдёт, следовательно:

$$P(A|m=3) = 1 - 3p_2{p_3}^2$$

- при $m = 4$: всякое возможное распределение попаданий ведёт к поражению самолёта, которое имеет вероятность 1:

$$P(A|m=4) = 1$$

1.2 Случайный вектор и числовые характеристики.

1. Пусть

$$f_\xi(x,y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}$$

Является ли данная функция плотностью распределения случайного вектора?

Решение:

Проверим $f_\xi(x,y)$ на свойства плотности:

1) Неотрицательность. Так как $e^{-2|y|} > 0 \ \forall y$ и $\pi(1+x^2) > 0 \ \forall x \Rightarrow f_\xi(x,y) > 0$.

2) Нормировка. Проверим выполняется ли $\iint_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)dxdy = 1$:

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}dxdy = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|}dy\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|}dy = \int_{-\infty}^{0} e^{-2|y|}dy + \int_{0}^{+\infty} e^{-2|y|}dy = \left[\lim_{a\to-\infty} e^{-2|y|}\Big|_a^0\right] + \left[\lim_{b\to+\infty} e^{-2|y|}\Big|_0^b\right]$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2} - e^{2a}\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} arctgx|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arctgx|_0^b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi$$

Итого:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}dxdy = \frac{1}{\pi} \times 1 \times \pi = 1$$

$$\Downarrow$$

$f_\xi(x,y)$ обладает всеми свойствами плотности распределения.

2. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано следующей таблицей:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$1/3$	$1/6$	0

(a) Найти маргинальные распределения ξ и η

(b) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η)

(c) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность

Решение:

а) Для ξ:

$$P(\xi = -1) = \sum_j P\big(\xi = -1,\ \eta_j\big) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} = \frac{1}{2}$$

$$P(\xi = 1) = \sum_j P\big(\xi = 1,\ \eta_j\big) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2}$$

Для η:

$$P(\eta = -1) = \sum_i P(\eta = -1,\ \xi_i) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

$$P(\eta = 0) = \sum_i P(\eta = 0,\ \xi_i) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P(\eta = 1) = \sum_i P(\eta = 1,\ \xi_i) = \frac{7}{24} + 0 = \frac{7}{24}$$

b) Расчёт математического ожидания:

$$E(\xi) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$E(\eta) = -1 \times \frac{11}{24} + 1 \times \frac{7}{24} = -\frac{1}{6}$$

Расчёт ковариационной и корреляционной матриц:

$$E(\xi\eta) = \left[\left(-1 \times -1 \times \frac{1}{8}\right) + \left(-1 \times 1 \times \frac{7}{24}\right)\right] + \left[1 \times -1 \times \frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{2}$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = 1 - 0 = 1 \Longrightarrow \sigma(\xi) = 1$$

$$D(\eta) = \frac{3}{4} - \frac{1}{36} = \frac{13}{18} \Longrightarrow \sigma(\eta) = \sqrt{\frac{13}{18}}$$

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi) \times E(\eta) = -\frac{1}{2} - 0 \times = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$cor(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} \approx -0.589$$

Матрицы:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D(\xi) & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & D(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{13}{18}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & cor(\xi,\eta) \\ cor(\xi,\eta) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.589 \\ -0.589 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Если ξ и η независимы, то $P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi_x)P(\eta_y)$. Проверим, например, для $(\xi = -1, \eta = -1)$:

$$P(\xi = -1, \eta = -1) = \frac{1}{8} \ ; \ P(\xi_{-1})P(\eta_{-1}) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{24} = \frac{11}{48}$$

$$\Downarrow$$

ξ и η зависимы и отрицательно коррелированы

3. Пусть имеются два одинаковых тетраэдра с числами 1, 2, 3, 4 на гранях. Подкидываем оба и смотрим на выпавшие числа ξ_1 и ξ_2. Зададим следующие случайные величины:

$$\phi_1 = \xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad \phi_2 = \begin{cases} 1, & (\xi_1 \vdots \xi_2) \cup (\xi_2 \vdots \xi_1) \\ 0, & else \end{cases}$$

(a) Составить таблицу совместного распределения ϕ_1 и ϕ_2;

(b) Найти маргинальные распределения ϕ_1 и ϕ_2;

(c) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ϕ_1, ϕ_2);

(d) Исследовать ϕ_1 и ϕ_2 на независимость и некоррелированность.

Решение:

a) Таблица совместного распределения:

Представим все возможные варианты бросков:

	xi1	xi2	phi1	phi2
Вариант броска				
1	1	1	2	1
2	1	2	3	1
3	1	3	4	1
4	1	4	5	1
5	2	1	3	1
6	2	2	4	1
7	2	3	5	0
8	2	4	6	1
9	3	1	4	1
10	3	2	5	0
11	3	3	6	1
12	3	4	7	0
13	4	1	5	1
14	4	2	6	1
15	4	3	7	0
16	4	4	8	1

Рисунок 2 – Варианты бросков двух тэтраэдоров

Тогда довольно просто вывести таблицу совместного распределения ϕ_1 и ϕ_2:

$\phi_2 \backslash \phi_1$	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	$2/16$	0	$2/16$	0
1	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$2/16$	$3/16$	0	$1/16$

b) Маргинальные распределения.

Для ϕ_1:

ϕ_1	2	3	4	5	6	7	8
P	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$4/16$	$3/16$	$2/16$	$1/16$

Для ϕ_2:

$$P(\phi_2 = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}; \quad P(\phi_2 = 1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

c) Расчёт математического ожидания:

$$E(\phi_1) = 5$$

$$E(\phi_2) = \frac{3}{4}$$

$$E(\phi_1\phi_2) = \frac{56}{16}$$

Расчёт ковариации:

$$cov(\phi_1\phi_2) = -\frac{1}{4}$$

$$D\phi_1 = \frac{5}{2}\ ; \qquad D\phi_2 = \frac{3}{16}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

Расчёт корреляции:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{15}} & 1 \end{pmatrix}$$

d) Если ϕ_1 и ϕ_2 независимы, то должно выполняться для всех x и y:

$$P(\phi_1 = x, \phi_2 = y) = P(\phi_1 = x)P(\phi_2 = y)$$

Проверим для $x = 2$ и $y = 1$:

$$P(\phi_1 = 2, \phi_2 = 1) = \frac{1}{16}\left(\neq \frac{1}{16} \times \frac{3}{4}\right)$$

$$\Downarrow$$

ϕ_1 и ϕ_2 зависимы и отрицательно коррелированы.

4. Пусть $\xi \sim U_{-\pi,\pi}$ и $\eta_1 = cos\,\xi, \eta_2 = sin\,\xi$.

(a) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η)

(b) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность

Решение:

a) Вычесление мат. ожидания:

Плотность $f_\xi(x)$ равна

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$E(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi d\xi = 0$$

$$E(\eta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \xi d\xi = 0$$

$$E(\eta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \xi d\xi = 0$$

Итого вектор мат. ожиданий равен (0,0,0).

Вычесление ковариационной матрицы:

$$E(\xi^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \times \left(\frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$E({\eta_1}^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \xi \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2\xi}{2} \, d\xi$$
$$= \frac{1}{4\pi} \times \left((1)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}(\cos 2\xi)|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi} \times (2\pi + 0) = \frac{1}{2}$$

$$E({\eta_2}^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \xi \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2\xi}{2} \, d\xi$$
$$= \frac{1}{4\pi} \times \left((1)|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}(\cos 2\xi)|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi} \times (2\pi - 0) = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$D(\xi) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$D(\eta_1) = D(\eta_2) = \frac{1}{2}$$

$$cov(\eta_1, \eta_2) = E(\eta_1\eta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cos\,\xi \times sin\,\xi\,d\xi = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sin2\xi\,d\xi = 0$$

$$cov(\xi, \eta_1) = E(\xi\eta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi \times cos\,\xi\,d\xi = 0$$

$$cov(\xi, \eta_2) = E(\xi\eta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \xi \times sin\,\xi\,d\xi$$

Пусть $u = \xi, dv = sin\xi \;\rightarrow\; du = d\xi, v = -cos\xi$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \xi \times sin\,\xi\,d\xi = [-\xi cos\xi + sin\xi]|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\Downarrow$$

$$cov(\xi, \eta_2) = 1$$

Получившаяся ковариационная матрица имеет вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Вычесление корреляционной матрицы:

$$cor(\eta_1, \eta_2) = \frac{0}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$$

$$cor(\xi, \eta_1) = \frac{0}{\frac{\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$$

$$cor(\xi, \eta_2) = \frac{1}{\frac{\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{\pi} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{\pi} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Исследование на коррелированность и зависимость:

- η_1 и η_2 имеют $cov = 0$, т.е. некоррелированы, но зависимы (так как ${\eta_1}^2 + {\eta_2}^2 = 1$);
- ξ и η_1 некоррелированы ($cov = 0$) и зависимы (так как $\eta_1 = cos\ \xi$ - детерминированная функция от ξ);
- ξ и η_2 - коррелированы и зависимы.

5. Найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин ξ и η, если $\xi \sim Exp_2$ и $\eta \sim U_{0,1}$.

Решение:

Выпешем значения плотностей для данных случайных величин:

$$f_\xi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = 2e^{-2t}, & t \geq 0,\ \lambda > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = 1, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Поскольку ξ и η независимы, плотность суммы $S = \xi + \eta$ можно получить через свёртку:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) f_\eta(s-t) dt$$

Поскольку $f_{\eta}(s-t) = 1,\ 0 \leq s-t \leq 1$, в то время как при $s < 0 \mid t < 0$ - $f_{\xi+\eta}(s) = 0$, то:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int\limits_{\max(0,\ s-1)}^{s} f_{\xi}(t)dt$$

В случае если $0 \leq s \leq 1\ \Rightarrow s-1 \leq 0$:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int\limits_{0}^{s} 2e^{-2t}dt = -e^{-2t}\big|_{0}^{s} = 1 - e^{-2s}$$

В случае если $s \geq 1\ \Rightarrow s-1 \geq 0$:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \int\limits_{s-1}^{s} 2e^{-2t}dt = -e^{-2t}\big|_{s-1}^{s} = e^{-2(s-1)} - e^{-2s} = e^{-2s}(e^{2}-1)$$

Итого функция плотности суммы двух независимых случайных величин ξ и η, $f_{\xi+\eta}(s)$ имеет вид:

$$f_{\xi+\eta}(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1 - e^{-2s}, & 0 \leq s \leq 1 \\ e^{-2s}(e^{2}-1), & s \geq 1 \end{cases}$$