极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下 在线教育平台

《ACM-ICPC区域赛真题精讲》

课程地址

# 《奇遇》题目解析

# 奇遇

**题目描述：**

$$f(1)=1, f(n)=\sum_{i=1}^{n-1}[gcd(i,n-i)==1]$$

$$g(n)=\sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$$

$$G_k(n)=\begin{cases} f(g(n)) & k=1 \\ g(G_{k-1}(n)) & k>1 \wedge k \mod 2=0 \\ f(G_{k-1}(n)) & k>1 \wedge k \mod 2=1 \end{cases}$$

**解题思路：**

这题非常的数学。

简单的推导一下$f$函数和$g$函数

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{i=1}^{n-1}[\gcd(i, n-i) = 1] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}[\gcd(i, n) = 1] \\ &= \varphi(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{d \mid n} f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d \mid n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

## 奇遇



**解题思路：**

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=1}^{n-1}[\gcd(i, n-i)=1] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}[\gcd(i, n)=1] \\
&= \varphi(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)
\end{aligned}
$$

可以得出$g(n) = n$

**解题思路：**

则递归式就简化为

$$F_k(n)=\begin{cases}\varphi(n) & k=1\\ F_{k-1}(n) & k>1, k \bmod 2=0\\ \varphi(F_{k-1}(n)) & k>1, k \bmod 2=1\end{cases}$$

易得，求$\mathrm{F}_k(n)$，即求$\left\lfloor\frac{\mathrm{k}+1}{2}\right\rfloor$次$\phi$

求$k$次$\phi$显然不现实，再考虑一下，在求$\log_2 n$次$\phi$后， 恒有$\phi=1$

后面就不用再求了！

所以至多求$\max(\log n, \left\lfloor\frac{\mathrm{k}+1}{2}\right\rfloor)$次，每次操作$\mathrm{O}(\sqrt{n})$

总复杂度为$\mathrm{O}(\max\left(\log n, \left\lfloor\frac{\mathrm{k}+1}{2}\right\rfloor\right)*\sqrt{n})$

```
#include <cstdio>

const int N=1e6+5;
int tot,p[N];
bool flg[N];

void sieve(int n) {
    for(int i=2;i<=n;++i) {
        if(!flg[i]) p[++tot]=i;
        for(int j=1;j<=tot&&i*p[j]<=n;++j) {
            flg[i*p[j]]=1;
            if(i%p[j]==0) break;
        }
    }
}
```

```
long long phi(long long x) {
    long long ans=x;
    for(int i=1;i<=tot&&1LL*p[i]*p[i]<=x;++i) {
        if(x%p[i]) continue;
        ans=ans/p[i]*(p[i]-1);
        while(x%p[i]==0) x/=p[i];
    }
    if(x>1) ans=ans/x*(x-1);
    return ans;
}
int main() {
    sieve(N-5);
    long long n,k;
    scanf("%lld%lld",&n,&k);
    k=(k+1)/2;
    for(long long i=1;i<=k&&n>1;++i) {
        n=phi(n);
    }
    printf("%lld\n",n%1000000007);
    return 0;
}
```

# 感谢各位聆听!

Thanks for Listening