《数学题-math》题目解析

数学题-math

题目描述：

已知 $f_1=1, f_2=1, f_n=af_{n-1}+bf_{n-2}$

现在给定 k, a, b, l, r，请你求出

$\sum_{i=l}^{r} C_{f_i}^{k} \pmod{1,000,000,007}$

$l, r, n \le 10^{14}, 0 < k \le 200, 0 < a, b < 100$

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

解题思路：

首先 $C_x^k = \frac{x!}{k!(x-k)!} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-k+1)}{k!}$

这是一个没有常数项 k 次多项式，可以简写成 $\sum_{i=1}^{k} a_i x^i$

所以我们要求的 $\sum_{i=l}^{r} C_{F_i}^{k} = \sum_{i=l}^{r} \sum_{j=1}^{k} a_j F_i^j = \sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{i=l}^{r} F_i^j$

数学题-math

解题思路：

不妨设 $S(n,k)=\sum_{i=1}^{n} F_i^k$, 那么我们要求的就是 $\sum_{j=1}^{k} a_j(S(r,j)-S(l-1,j))$

如果我们能狗快速求出 S ,问题就解决了

注意到 $F_i=aF_{i-1}+bF_{i-2}, a>0, b>0, F_1=1, F_2=1$

这个递推是有通项公式的，我们用特征方程来求他的通项

极值学院 edu.mathor.com | 数学家旗下在线教育平台

解题思路：

设 $x_2 = ax + b$ 的两个根分别为 p, q, 其中 $p = \frac{a+\sqrt{\delta}}{2}, q = \frac{a-\sqrt{\delta}}{2}, \delta = a^2 + 4b > 0$

那么这个方程的通项可以写成

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{\delta}}((1-q)p^{n-1} + (1-p)q^{n-1})$$

虽然我们不一定能找到在模 mod 意义下 $\sqrt{\delta}$ 的值（二次剩余不见得一定存在）

我们不妨把题目中的每个数字都写成 $a + b\sqrt{\delta}$，容易证明

1. $a + b\sqrt{\delta}$ 在 + - * / ^ 都是封闭的
2. 最终求出答案时 $b = 0$, 因为整数递推出来的结果一定是整数

极值学院 edu.mathor.com 数学家旗下在线教育平台

解题思路：

接下来再进行处理，就好解决的多了

$$S(n,k)=\sum_{i=1}^{n}F_i^k=\sum_{i=1}^{n}\{\frac{1}{\delta}((1-q)p^{i-1}+(1-p)q^{i-1})\}^k$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^k\sum_{i=1}^{n}((1-q)p^{i-1}+(1-p)q^{i-1})^k$$

后面的部分看起来不是很能够直接化简了，没办法，试试二项式定理吧

$$=(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^k\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}C_k^{k-s}\{(1-q)p^{i-1}\}^s\{(1-p)q^{i-1}\}^{k-s}$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{\delta}})^k\sum_{s=0}^{k}C_k^{k-s}(1-q)^s(1-p)^{k-s}\sum_{i=1}^{n}(p^sq^{k-s})^{i-1}$$

最后面一个 sigma 当 s 一定的时候是一个等比数列求和，直接 O(log n) 时间内就能算出来

前面的枚举 s 是 $O(k)$ 的，最前面枚举的 j 也是 $O(k)$ 的，所以总复杂度就是 $O(k^2\log n)$

在线问答

Q&A

感谢各位聆听！

Thanks for Listening