Préparation au Concours Général
Géométrie

Asp J.Buet *24 mars 2014*

1 Exercices

1.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et soit M un point quelconque du plan. Montrer si une droite passant par M coupe $\mathcal{C}$ en A et B alors :

$$\bar{M}A.\bar{M}B = OM^2 - R^2.$$

Le réel $\bar{M}A.\bar{M}B$, égal à $OM^2 - R^2$, est appelé puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

1.2

Soient A, B, C des points d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

1.3

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Donner une CNS pour que a, b, c soient les longueurs des côtés d'un triangle.

1.4 Concours Général 1993

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace.
   (a) Parmi les triangles MAB d'aire donnée, quels sont ceux de périmètre minimal ?
   (b) Parmi les triangles MAB de périmètre donné, quels sont ceux d'aire maximale ?
2. Soit, dans un tétraèdre de volume V, a, b, c, d les longueurs des quatre arêtes, telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas coplanaires, et $L = a + b + c + d$. Déterminer la valeur maximales de $\frac{V}{L^3}$.

1.5 Concours Général 2013

1. Dans l'espace, soit D_1, D_2 deux droites non coplanaires et soit M un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2. Montrer qu'il existe au plus une droite passant par M et coupant à la fois D_1 et D_2. Dans quel cas n'en existe-t-il aucune ?
   L'espace étant muni d'un repère orthonormé, soit $ABCDEFGH$ le cube dont les commets ont pour coodonnées $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1), H(0,1,1)$. Soit respectivement D_1, D_2 et D_3 les droites $(EF), (BC)$ et (DH).
   Enfin soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points de coordonnées $M(x, y, z)$ tels que
   $$xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0.$$
2. Donner une représentation paramétrique de chacune des droites D_1, D_1 et D_3.
3. Montrer que les droites D_1, D_2 et D_3 sont incluses dans $\mathcal{S}$.
4. Montrer que toute droite de l'espace non incluse dans $\mathcal{S}$ rencontre $\mathcal{S}$ en $0, 1$ ou 2 points.
5. En déduire que toute droite coupant les droites D_1, D_2 et D_3 est incluse dans $\mathcal{S}$.
6. Soit D_4 une droite qui ne rencontre aucune des droites D_1, D_2, D_3 et qui n'est pas incluse dans $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe au plus deux droites de l'espace coupant les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4.