Préparation au concours Général
Arithmétique

Asp J.Buet *mars 2014*

1 Cours

- Connaître le cours d'arithmétique de spécialité mathématique.
- Connaître le principe de récurrence et la récurrence forte.
- **Principe des tiroirs** Si n balles sont placées dans k tiroirs, au moins un tiroir contiendra $\lceil n/k \rceil$ balles ou plus.

  Par exemple, si vous avez des chaussettes vertes et des chaussettes bleues, indiscernables au touché, rangées en vrac. Votre chambre est dans le noir et vous voulez avoir deux chaussettes de la même couleur pour vous habiller. Il vous suffit pour cela de prendre trois chaussettes, vous en aurez forcément deux de la même couleur.

  Autre exemple : on jette de manière aléatoire de la peinture blanche et de la peinture noire sur une table de 2 m par 3 m. Montrez que l'on peut forcément trouver deux points, distants d'un mètre, de la même couleur.
- **La descente infinie** Tout partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. On dit que $\mathbb{N}$ est bien ordonné. Une conséquence de ce principe équivalent au principe de récurrence est la méthode de descente infinie découverte par Fermat.
  Soit une suite de propositions $P_0, P_1, ..., P_n, ...$ Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est fausse, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que P_m soit fausse et $m < k$, alors toutes les propositions $P_0, P_1, ..., P_n, ...$ sont vraies.
- **Indicatrice d'Euler**
  Soit n un entier naturel > 1. On appelle indicatrice d'Euler de n que l'on note $\varphi(n)$, le nombre d'entiers naturels non nuls $\leqslant n$ et premiers avec n.
  - Si p est un nombre premier alors $\varphi(p) = p - 1$
  - La fonction φ est multiplicartive, i.e., pour tout couple d'entiers naturels m et n premiers entre eux on a :

  $$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$
- **Théorème de Wilson**
  p divise $(p-1)! + 1$ si, et seulement si, p est premier. (Caractérisation des nombres premiers).
- **Théorème d'Euler**
  Si a est premier avec n alors :

  $$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$
- **Théorème des restes chinois**
  On considère des nombres naturels $m_1, m_2, ..., m_k$, premiers entre eux deux à deux, et des entiers $b_1, b_2, ..., b_k$. Le système de congruences :

  $$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \qquad \cdots \\ x \equiv b_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

  admet une unique solution modulo $M = m_1 m_2 ... m_k$.

  Voir le poly à part pour les démonstrations et une méthode de résolution du dernier système.

  Exemple classique : Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?
- Vous pourrez voir en regardant les annales que l'année du concours revient souvent dans le problème. Je vous conseille donc de regarder dès maintenant quelques propriétés de l'entier 2014 (diviseurs, diviseurs premiers, nombre de diviseurs, $\varphi(2014)$...).

2 Exercices

1. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

2. Trouver tous les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^n - 2^m = 1$

3. Calculer :
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + ...$$

4. Quel est le chiffre des dizaines de milliers du nombre $5^{5^{5^{5^5}}}$?

3 Problème : Concours Général 2012 - les premiers sont en haut, les exposants sont en bas

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on dispose de la décomposition en facteurs premiers
$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$$
où les nombres premiers disctincts $p_1, p_2, ...p_k$ sont les diviseurs premiers de n, et les exposants $a_1, a_2, ...a_k$ sont des entiers strictement positifs . On pose alors
$$f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} ... a_k^{p_k}.$$
Par exemple, si $n = 720 = 2^4 3^2 5^1$, on a $f(n) = 4^2 2^3 1^5 = 128$.
En posant de plus $f(1) = 1$, on obtient une fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.
Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f^i(n)$ par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, de façon que $f^0(n) = n$ et
$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N},\ f^{i+1}(n) = f(f^i(n)).$$
Par exemple : $f^0(720) = 720, f^1(720) = f(720) = 128, f^2(720) = f(128) = 49$.
Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction f et des suites $(f^i(n))_{i \in \mathbb{N}}$ pour n fixé.

1. (a) Calculer $f(2012)$.
   (b) Déterminer les nombres $f^i(36^{36})$ pour $0 \leqslant i \leqslant 3$. Que peut-on dire des suivants ?
2. (a) Donner un exemple d'entier $n \geqslant 1$ tel que, pour tout entier naturel i, on ait
$$f^{i+2}(n) = f^i(n) \text{ et } f^{i+1}(n) \neq f^i(n).$$
   (b) Montrer que la fonction f n'est ni croissante ni décroissante.
3. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$:
   (a) l'équation $f(n) = 1$;
   (b) l'équation $f(n) = 2$;
   (c) l'équation $f(n) = 4$.
4. (a) Pour tous entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 0$, montrer que $ab \leqslant a^b$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$ des entiers tels que $a_i \geqslant 2$ et $b_i \geqslant 0$ pour tout i.
   Montrer que
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_3 b_3 \leqslant a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_k^{b_k}.$$
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f(f(n)) \leqslant n$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que, pour tout entier $i \geqslant r$, on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$.
5. Soit E l'ensemble des entiers $n \geqslant 2$ n'ayant que des exposants strictements supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.
   (a) Pour tout entier $a \geqslant 2$, montrer qu'il existe des entiers naturels α et β tels que
$$a = 2\alpha + 3\beta.$$
   (b) En déduire que si n appartient à E, alors il existe un élément m de E tel que $f(m) = n$.
   (c) Donner un élément m de E tel que $f(m) = 2012^{2012}$.
   (d) Que peut-on dire de la réciproque de (b) ?