Будь ласка, зверніть увагу! Це завдання на оцінку, яка буде враховуватися для отримання сертифікату.

Для виконання кожного практичного завдання у вас є тільки 5 спроб! Зарахована буде оцінка за крайню спробу.

Постановка задачі

Розглянемо метод Карацуби множення двох цілих чисел, який було розглянуто в першій лекції цього тижня.

Нагадаємо в чому полягає основна ідея методу. Нехай, в нас є два числа X та Y, які мають розрядність n, кожне з яких ми можемо розбити навпіл і отримати пари чисел a, b та c, d відповідно, кожне з яких буде мати розрядність $n/2$. В такому випадку можна записати: $X = 10^{n/2} a + b$ та $Y = 10^{n/2} c + d$.

Тоді добуток $X \cdot Y = 10^n ac + 10^{n/2} (ad + bc) + bd$.

Основна специфіка методу полягає в тому, щоб обраховувати не чотири менші добутки ac, ad, bc, bd, а три - $ac, bd, (a + b)(c + d)$, де добуток $(a + b)(c + d)$ використовується для обрахунку $ad + bc$ із використанням вже обрахованих сум ac, bd: $ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$.

Окрім того, що сам метод Карацуби працює швидше за стандартний метод множення в стовпчик, його можна успішно застосовувати для множення чисел у завданнях з, так званою, довгою арифметикою, коли розрядність чисел може сягати 100 і більше.

Наприклад, при розрядності чисел 50:

X = 21625695688898558125310188636840316594920403182768
Y = 13306827740879180856696800391510469038934180115260
XY =
287769407308846640970310151509826255482575362419155842891311909556878670000425352112987881085839680

Зверніть увагу, мова не йде про використання чисел з плаваючою комою, адже в такому випадку були би втрати в точності отриманого результату.

В рамках даного завдання, вам потрібно реалізувати метод Карацуби для множення чисел з довгої арифметики. Нижче наводяться кілька тестів, які дозволять перевірити коректність роботи ваших програм.

ЗАУВАЖЕННЯ

Зауваження 1. Ви можете реалізовувати метод Карацуби на будь-якій мові програмування, яка для вас є зручною. Тести, що наводяться нижче, не залежать від обраної мови.

Зауваження 2. За цим посиланням ви можете завантажити приклад вхідних даних (або в PDF форматі) із числами різної розмірності та вихідних даних для тестів. Ви можете використовувати інформацію з цього файлу для перевірки роботи вашої програми перед тим, як давати відповіді на контрольні питання.

Зауваження 3. Для спрощення реалізації ви можете припустити, що розрядності всіх вхідних чисел в тестах дорівнюють ступеням двійки, тобто: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

Зауваження 4. Нагадуємо, що згідно кодексу честі, який прийнятий на цьому курсі, ви не маєте права публікувати готові рішення програм на форумах курсу. Такі повідомлення будуть видалятись. Але ви можете (і це усіляко вітається) запитувати в своїх колег або співробітників курсу питання щодо можливої реалізації. Також дозволено розміщення невеликих фрагментів коду, але які не дозволяють повністю відтворити вашу програму.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ №1 (1/1 бал)

Почнемо з того, що просто перевіримо коректність роботи вашого методу. В полі нижче вам потрібно ввести результат добутку двох чисел, які мають розмірність 64:

X = 1685287499328328297814655639278583667919355849391453456921116729

Y = 7114192848577754587969744626558571536728983167954552999895348492

Чому дорівнює XY?

11989460275519080564894036768322865785999566885539505969700

Будьте уважні при введенні числа. Краще використовувати операцію копіювання-вставки, а не вводити число вручну.

Перевірка **Зберегти** **Показати відповідь**

Ви використали 1 з 5 можливостей надіслати свої матеріали на розгляд.

В другій частині цього практичного завдання вам потрібно буде реалізувати метод Карацуби рекурсивно (якщо ви цього ще не зробили в попередній частині). Для перевірки коректності роботи вашого методу необхідно буде ввести деякі контрольні числа.

ПРИКЛАД

Повернемось до обрахунку коефіцієнту $(ad + bc) = (a + b)(c + d) - ac - bd$. Розглянемо приклад $X = 1234$ та $Y = 5678$.

На першій ітерації роботи методу Карацуби маємо $a = 12, b = 34, c = 56, d = 78$. Для обрахунку добутків $ac, bd, (a + b)(c + d)$ ми тепер повинні ще раз рекурсивно викликати цей метод. Тож, отримуємо:

1. $ac = 12 \cdot 56$. Тут нові значення коефіцієнтів будуть наступні: $a^\star = 1, b^\star = 2, c^\star = 5, d^\star = 6$. Тут ми зупиняємось і робимо просте множення одноразрядних чисел: $a^\star c^\star = 5, b^\star d^\star = 12$. Щоб отримати значення $a^\star d^\star + b^\star c^\star$ використовуємо формулу з методу $a^\star d^\star + b^\star c^\star = (a^\star + b^\star)(c^\star + d^\star) - a^\star c^\star - b^\star d^\star = (1 + 2)(5 + 6) = 3 \cdot 11$. Але виявляється, що ми не можемо порахувати цей добуток без додаткової рекурсії, тому що він містить множники з розрядністю більше 11. Тож потрібно зануритись ще на один крок ітерації.
    - Рахуємо $3 \cdot 11$. Ці два числа мають різну розрядність і ми не можемо розбити 3 навпіл, тому отримаємо: $a^\dagger = 0, b^\dagger = 3, c^\dagger = 1, d^\dagger = 1, (a^\dagger d^\dagger + b^\dagger c^\dagger) = 3$. Будемо і надалі позначати знайдені значення коефіцієнту $(ad + bc)$ червоним кольором.
    - Отже, $3 \cdot 11 = 33$, а $a^\star d^\star + b^\star c^\star = 33 - 5 - 12 = 16$.
2. $bd = 34 \cdot 78$. Тут нові значення коефіцієнтів будуть наступні: $a^\star = 3, b^\star = 4, c^\star = 7, d^\star = 8$. $a^\star + b^\star)(c^\star + d^\star) = 7 \cdot 15$. Знову занурюємось на один крок для отримання останнього добутку.
    - Рахуємо $7 \cdot 15$: $a^\dagger = 0, b^\dagger = 7, c^\dagger = 1, d^\dagger = 5, (a^\dagger d^\dagger + b^\dagger c^\dagger) = 7$.
    - Отже, $7 \cdot 15 = 105$, а $a^\star d^\star + b^\star c^\star = 105 - 21 - 32 = 52$.
3. $(a + b)(c + d) = 46 \cdot 134$. Тут знову необхідно використати рекурсію. Також постає нетривіальне питання, як розбивати два числа - 46 та 134 - навпіл. Детальніше різні способи розбиття будуть розяглянуті нижче. Тут зупинемось на підході, коли визначаємо найбільшу довжину з двох чисел - 134 з розрядністю 3 - та отримаємо розбиття на 1 та 2 розряди (3/2 = 1). Отримаємо $a^\star = 4, b^\star = 6, c^\star = 13, d^\star = 4$. Нижче для економії тепер будемо наводити тільки ті результати, які стосуються обрахунку коефіцієнтів $(ad + bc)$.

- $a^\star c^\star = 4 \cdot 13$: $a^\dagger = 0, b^\dagger = 4, c^\dagger = 1, d^\dagger = 3$, $(a^\dagger d^\dagger + b^\dagger c^\dagger) = 4$. Отже, $a^\star c^\star = 4 \cdot 13 = 52$.
- $b^\star d^\star = 6 \cdot 4 = 24$.
- $(a^\star + b^\star)(c^\star + d^\star) = 10 \cdot 17$: $a^\dagger = 1, b^\dagger = 0, c^\dagger = 1, d^\dagger = 7$, $(a^\dagger d^\dagger + b^\dagger c^\dagger) = 7$. І це друге значення для коефецієнту $(ad + bc)$, яке дорівнює 7! Отже, $(a^\star + b^\star)(c^\star + d^\star) = 10 \cdot 17 = 170$.
- $(a^\star d^\star + b^\star c^\star) = (a^\star + b^\star)(c^\star + d^\star) - a^\star c^\star - b^\star d^\star = 170 - 52 - 24 = 94$.

4. І нарешті, $ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd = 46 \cdot 134 - 12 \cdot 56 - 34 \cdot 78 = 2840$

Таким чином, під час множення двох чисел $X = 1234$ та $Y = 5678$ методом Карацуби були отримані наступні значення коефіцієнту $(ad + bc)$: 3, 4, 7 (два рази), 16, 52, 94, 2840.

ВИРІВНЮВАННЯ ЧИСЕЛ

Хоча вхідні числа можуть мати розмірність кратну степеням 2, але під час роботи методу в рекурсивних викликах можуть траплятись випадки, коли два множники мають різну розмірність або вона однакова, але не кратна двом.

Наприклад, нехай маємо числа $X = 12345$, $Y = 6789$. Чому тоді буде дорівнювати a, b, c, d? Можна розглянути три варіанти, як поводитись в цій ситуації:

1. Зробити два числа однакової довжини і вирівняти їх до довжини, яка є степенем 2. В даному прикладі ця довжина буде 8 і тоді $X = 00012345$, $Y = 00006789$. Тоді $a = 1, b = 2345, c = 0, d = 6789$.
2. Зробити два числа однакової довжини і вирівняти їх до довжини, яка є кратним 2. Тоді довжина буде 6: $X = 012345$, $Y = 006789$. І $a = 12, b = 345, c = 6, d = 789$.
3. Не робити вирівнювання взагалі, але тоді треба бути уважним зі зведенням коефіцієнтів $ac, bd, ad + bc$ в один результат

В тесті нижче враховуються всі три наведені варіанти. Проте, якщо ви гадаєте, що реалізували інший варіант, то зверніться з цим питанням на форум курсу.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ №2 (3/3 балів)

Для тих самих вхідних чисел X та Y, що наведені у завданні №1, необхідно обрахувати наступний параметр роботи методу Карацуби. Під час своєї роботи метод обраховує суму добутків $ad + bc$. В пояснення до завдання наводилось як це робиться.

Вам потрібно підрахувати кількість появ певних значень цієї суми $ad + bc$ протягом всієї роботи методу над заданими двома числами. Наприклад, якщо $ad + bc = 99$ і воно 4 рази зустрічалось під час роботи методу, то ви повинні ввести число 4.

Зауваження. Зверніть увагу, що при різних реалізаціях методу Карацуби, можуть отримуватись різні значення кількості чисел. Дивіться детальніше роз'яснення в файлі з прикладами.

Введіть скільки разів зустрілось $ad + bc = 105$:

4

Введіть скільки разів зустрілось $ad + bc = 72$:

16

Введіть скільки разів зустрілось $ad + bc = 12$:

17

Перевірка **Зберегти** **Показати відповідь**

Ви використали 3 з 10 можливостей надіслати свої матеріали на розгляд.

Про нас Преса FAQ Контакти

- Умови надання послуг та Кодекс Честі

POWERED BY OPEN edX