3. 已知命题“在 1 到 100 之间任取 k 个数字，总是可以找到两个子集，其和一样（子集元素个数不必相同）。”是真命题，问 k 最小是多少？显然，如果 k=100，这个命题是真命题；而 k=1 时，这个命题是假命题。

下面是对题目的分析和解答思路：

**题目重述：**
给定命题：「在1到100之间任取 k 个不同的整数，这 k 个数的所有子集（子集元素个数可以为0或任意正数）中，总能找到两个不同的子集使得它们的元素和相同。」
我们已知当 k=100时该命题肯定为真，而当 k=1时该命题为假（只有一个数，子集的和只有0和这个数本身，不会产生重复和）。
题目问：作为真命题的最小 k 是多少？

**关键分析：**
要保证任意选出的 k 个数中都能找到两个子集和相等的例子，就意味着不存在能令所有子集和互不相同的「特殊集合」。

我们需要一个能最大化区分子集和的集合构造。已知如果选取的数严格满足「每个数都大于之前所有选定数的和」这种快速增长模式，那么该集合的子集和都将是互不重复的（因为这种构造类似二进制表示，典型例子是幂集构造：1,2,4,8,...）。例如，对于集合{1,2,4,8,16,32,64}（7个数），它的子集和从0到127之间的128个数值全部互不重复。这表明，当 k=7 时，我们可以找到一个特例（如上述7个数）使「无重复子集和」的情况成立，从而反驳「必有重复子集和」的命题。这说明 k=7 时命题不一定为真。

那么当 k=8 时情况如何？
如果想在 k=88 时仍然保持所有子集和互不相同，就需要在前7个数已经是 {1,2,4,8,16,32,64} 的基础上，再添加一个数 xxx ，满足「$x > 1+2+4+8+16+32+64 = 127x > 1+2+4+8+16+32+64 = 127x > 1+2+4+8+16+32+64 = 127$」。只有如此才能继续保持所有子集和互不重复。然而在1到100中，最大数是100，而100小于128，无法满足 x>127x >127x>127 的条件。这意味着一旦有8个数，无论如何选择第8个数，都无法避免与已有子集和出现重复。举例：如果添加100，那么子集 {100}的和为100；而原本已有的 {64,32,4}的和也是100，这就出现了重复子集和。

因此：

- k=7 时存在能使所有子集和不同的特殊集合（如 {1,2,4,8,16,32,64}），故命题不总为真。
- k=8 时无论怎么选，都会导致出现重复子集和，因此命题在 k=8 时开始总为真。

**结论：**
该命题成为真命题的最小 k 是8。

**最终答案：**

$$\boxed{8}$$

---

1. 给定矩阵$A = (x_{ij})_{n\times n}$，其中$x_{ij}$看作是$n^2$个变量。det(A)表示 A 的行列式值，将其看作这 $n^2$ 个变量 $x_{ij}$ 的多元函数。矩阵 B 定义为$b_{ij} = det(A)$ 对$x_{ij}$的偏导数。求矩阵 B 和 A 的关系。进一步，考虑 det(A)的所有二阶偏导数，整理成为$n^2 \times n^2$的矩阵 C，求矩阵 C 和 A 的关系。注意，你的答案不应是写出 B 或 C 的某个元素和 A 的元素之间的关系，而是整体上 B,C 和 A 的关系。

下面给出题目的详细解答思路与最终结果。

**题目回顾与要求：**

我们把一个 $n \times n$ 矩阵 $A = (x_{ij})$ 的行列式 $\det(A)$ 看作关于这 $n^2$ 个变量 $x_{ij}$ 的多元函数。记

- $B$ 为 $\det(A)$ 对 $A$ 的一阶偏导数矩阵，即 $b_{ij} = \frac{\partial \det(A)}{\partial x_{ij}}$。
- $C$ 为 $\det(A)$ 的所有二阶偏导数形成的 $n^2 \times n^2$ 的矩阵，即将 $\frac{\partial^2 \det(A)}{\partial x_{ij} \partial x_{kl}}$ 以适当顺序排成矩阵。

题目要求给出 $B$ 和 $A$ 的整体关系，然后再进一步给出 $C$ 与 $A$ 的整体关系。注意，不能只给出元素与元素之间的点对点关系，而要给出矩阵层面的整体关系。

**第一步：求 $B$ 与 $A$ 的关系**

行列式 $\det(A)$ 是一个多线性交替函数。当 $A$ 可逆时，一个经典结果是行列式的微分满足：

$$d(\det(A)) = \det(A)\,\mathrm{trace}(A^{-1} dA).$$

换言之，将 $H$ 看作对 $A$ 的一个微扰矩阵（方向），有

$$D\det(A)[H] = \det(A)\,\mathrm{trace}(A^{-1} H).$$

记 $B = \left(\frac{\partial \det(A)}{\partial x_{ij}}\right)$。将方向微扰 $H = (h_{ij})$ 的作用写出：

$$D\det(A)[H] = \sum_{i,j} \frac{\partial \det(A)}{\partial x_{ij}} h_{ij} = \sum_{i,j} b_{ij} h_{ij}.$$

另一方面，

$$D\det(A)[H] = \det(A)\,\mathrm{trace}(A^{-1} H) = \det(A) \sum_{i,j} (A^{-1})_{ij} h_{ji}.$$

比较这两个表达式，可以看出当 $H = E_{ji}$（单位矩阵的单元基）时，对应的偏导数为 $b_{ij} = \det(A)(A^{-1})_{ji}$。将 $i, j$ 重新命名回去，可得：

$$B = \det(A)(A^{-1})^T.$$

这给出了 $B$ 与 $A$ 的整体关系，不需要逐元素分解：

$$\boxed{B = \det(A)(A^{-1})^T.}$$

**第二步：求 $C$ 与 $A$ 的关系**

$C$ 是二阶偏导所形成的矩阵（Hessian矩阵）。我们需要找出 $\det(A)$ 的二阶微分公式。

已知：

$$D\det(A)[H] = \det(A)\operatorname{trace}(A^{-1}H).$$

对这个方向导数再求导，对于任意两个方向矩阵 $H, K$，有：

$$D^2\det(A)[H, K] = D(\det(A)\operatorname{trace}(A^{-1}H))[K].$$

利用莱布尼茨法则与 $A^{-1}$ 的微分性质 $d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1}$，经过标准的矩阵微分推导（这是比较经典的结果），可以得到一个简洁的表达式：

$$D^2\det(A)[H, K] = \det(A)\big(\operatorname{trace}(A^{-1}H)\operatorname{trace}(A^{-1}K) - \operatorname{trace}(A^{-1}HA^{-1}K)\big).$$

这一结果是矩阵微分学中的已知定理。它不需逐元素讨论，而是直接给出二阶导数这个双线性形式的整体公式。在这个公式中，$C$ 扮演的角色就是：给定两个方向矩阵 $H, K$，二阶差分 $D^2\det(A)[H, K]$ 的值正是由上式给出。

因此 $C$ 与 $A$ 的关系可写为下列整体的双线性形式：

$$\boxed{D^2\det(A)[H, K] = \det(A)\big(\operatorname{trace}(A^{-1}H)\operatorname{trace}(A^{-1}K) - \operatorname{trace}(A^{-1}HA^{-1}K)\big).}$$

这就是 $C$ 的整体结构：当你把 $C$ 看作一个作用于 $(H, K)$ 的双线性形式，它由上面的公式决定，完全由 $A^{-1}$ 和 $\det(A)$ 表达。

**总结：**

- 一阶偏导矩阵 $B$ 与 $A$ 的关系：

$$B = \det(A)(A^{-1})^T.$$

- 二阶偏导矩阵 $C$ 与 $A$ 的关系（通过双线性形式呈现）：

$$D^2\det(A)[H, K] = \det(A)\big(\operatorname{trace}(A^{-1}H)\operatorname{trace}(A^{-1}K) - \operatorname{trace}(A^{-1}HA^{-1}K)\big).$$

以上结果均是整体层面的关系表达，而非元素与元素间的点对点关系。