

# Projet Poisson: Modèle de réparation imparfaite de Brown-Proschan

Arman Hosseini, Paul Slisse, Guillaume Staub, Jade Roumazeille-Peter

2025-03-14

## Contents

<b>1</b>	<b>Présentation du modèle</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Estimation des paramètres $(p, F)$ . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modelisation numerique</b>	<b>4</b>
2.1	Simulation d'un processus de Weibull . . . . .	4
2.2	Première simulation d'un processus de Brown-Proschan . . . . .	5
2.3	Estimation du paramètre $p$ par maximum de vraisemblance . . . . .	7
2.4	Estimation de l'intensité du processus par plusieurs méthodes . . . . .	8
2.5	Conclusion . . . . .	19
2.6	Références . . . . .	19

# 1 Présentation du modèle

## 1.1 Introduction

Dans ce projet, nous allons nous intéresser au processus de Poisson à réparation imparfaite développé par Brown et Proschan [2] en 1983 ,retravaillé par Whitaker et Samaniego [1],que nous allons raccourcir en BP. Dans ce modèle, lorsque le système tombe en panne, celui-ci est réparé “parfaitement” avec une probabilité  $p$ : il redevient donc dans un état neuf. Sinon, le système est remis dans un état équivalent à celui précédant la panne.

Pour ce faire, commençons par introduire les notations qui nous seront nécessaires. On note  $T_i$  les temps entre chaque panne. On note  $A_i$  l'âge du système après la  $i$ -ème panne. Ainsi,  $A_i = 0$  si l'on a une réparation parfaite après la  $i$ -ème panne et  $A_i = A_{i-1} + T_i > 0$  sinon. On note  $F$  la fonction de répartition de l'âge sur  $[0, +\infty]$  et  $S$  la fonction de survie associé à  $F$  notée  $S(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$ .

Ainsi, les paramètres à estimer de notre modèle sont  $(p, F)$ .

## 1.2 Estimation des paramètres $(p, F)$

Pour le modèle de BP, les paramètres  $(p, F)$  ne peuvent pas être estimés avec la seule connaissance de la distribution des  $T_i$ . En effet, on peut montrer que pour deux valeurs de  $p$  différentes et la même fonction  $F$ , il est possible d'obtenir la même distribution des  $T_i$ . Par exemple, si  $F$  est la fonction de répartition d'une loi exponentielle, alors les  $T_i$  suivent la même loi exponentielle qui est indépendante de  $p$ . Bien que la fonction  $F$  peut être estimée via les  $T_i$ , le problème est que l'on ne peut estimer le paramètre  $p$  avec la suite des  $T_i$ .

Pour remédier à cela, nous allons introduire une nouvelle suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre  $p$  que l'on note  $Z_i$ . A la  $i$ -ème panne, si la réparation est parfaite alors  $Z_i = 1$  et si elle est imparfaite,  $Z_i = 0$ . Rajouter cette information sur le type de panne qui est uniquement déterminé par le paramètre  $p$  rend le problème d'estimation solvable.

A partir de maintenant, nous allons faire les hypothèses suivantes pour notre étude :  $-p > 0$  - $F$  est absolument continue (admet une densité  $f$ ) - $F(0) = 0$  (pas de réparation instantanée)

Nous allons observer le système jusqu'à la  $m$ -ème réparation parfaite. On note  $n$  le nombre total de panne et donc  $n - m$  est le nombre de réparation imparfaite.

La suite des âges observés  $(a_i)$  est entièrement déterminé par les couples  $(t_i, z_i)$ .

$$L(p, F) = f(t_1)p^{z_1}(1-p)^{1-z_1} \times \frac{f(t_2 + a_1)}{S(a_1)}p^{z_2}(1-p)^{1-z_2} \times \dots \times \frac{f(t_n + a_{n-1})}{S(a_{n-1})}p^{z_n}(1-p)^{1-z_n}$$

Pour comprendre cette formulation de la vraisemblance, on considère le cas  $n = 2$  (les  $n > 2$  se comprennent par récurrence).

$$L(p, F|(t_1, t_2), (z_1, z_2)) = f_{T_1, Z_1}(t_1, z_1)f_{T_2, Z_2}((t_2, z_2)|(T_1 = t_1, Z_1 = z_1))$$

Par indépendance des événements “panne” est “la réparation est parfaite”, on a :

$$f_{T_1, Z_1}(t_1, z_1) = f(t_1)p^{z_1}(1-p)^{1-z_1}$$

Ensuite, on a deux cas possibles :

Si  $z_1 = 0$  (réparation imparfaite), on a  $a_1 = t_1$  :

$$f_{T_2, Z_2}((t_2, z_2)|(T_1 = t_1, Z_1 = z_1)) = \frac{f(t_2 + a_1)}{S(a_1)}p^{z_2}(1-p)^{1-z_2}$$

Si  $z_1 = 1$  (réparation imparfaite), on a  $a_1 = 0$  et  $S(a_1) = 1$ , d'où :

$$f_{T_2, Z_2}((t_2, z_2)|(T_1 = t_1, Z_1 = z_1)) = f(t_2)p^{z_2}(1-p)^{1-z_2} = \frac{f(t_2 + a_1)}{S(a_1)}p^{z_2}(1-p)^{1-z_2}$$

En notant  $x_i$  l'âge observé juste avant la  $i$ -ème panne. Si  $z_i = 0$ , on a directement que  $a_i = x_i$ , si  $z_i = 1$ ,  $a_i = 0$ ,  $x_i = a_{i-1} + t_i$ , mais on peut tout de même écrire que  $S(a_i) = S(x_i)^{1-z_i}$ . Si dans la formule de la vraisemblance, on remplace les  $a_i$  par les  $x_i$  et qu'on factorise les  $p$  et  $(1-p)$  ensemble à l'aide des  $n$  et  $m$  on obtient:

$$L(p, F) = p^m(1-p)^{n-m}f(x_1)\frac{f(x_2)}{S(x_1)^{1-z_1}} \times \dots \times \frac{f(x_n)}{S(x_{n-1})^{1-z_{n-1}}}$$

Avec cette écriture de la vraisemblance, on trouve le MLE de  $p$ :  $\hat{p} = \frac{m}{n}$ . Ce résultat est plutôt logique, on estime la probabilité  $p$  de réparation parfaite en calculant le ratio de réparation parfaite sur le nombre total de pannes.

Maintenant qu'on a le MLE de  $p$ , intéressons nous à  $F$ .

Pour trouver un estimateur empirique du MLE de  $F$ , on peut maximiser la partie ne dépendant pas de  $p$  dans la vraisemblance au dessus. Cela équivaut à déterminer  $F$ , qui est une fonction continue par morceaux, maximisant, l'estimation suivante de la vraisemblance:

$$l(F) = \prod_{i=1}^n \frac{(F(x_{(i)}) - F(x_{(i)}^-))}{S(x_{(i-1)})^{1-z_{(i-1)}}}$$

où la densité  $f$  en  $x_i$  est approximée par  $F(x_{(i)}) - F(x_{(i)}^-)$ , les  $x_{(i)}$  sont les âges  $x_i$  avant les pannes ordonnés. Les  $z_{(i)}$  ne sont pas ordonnés mais sont les  $z_i$  réindexés pour que  $z_{(i)}$  correspondent au mode de réparation après la panne survenue à l'âge  $x_{(i)}$ . En particulier notre MLE empirique ne sera pas nécessairement continue à l'inverse de la vraie fonction  $F$ .

Malheureusement, le maximum de la fonction  $l(F)$  n'est pas toujours atteignable. En effet, il faut que  $z_{(n-1)} = 1$ .

Plaçons nous dans le cas où  $z_{(n-1)} = 1$ . Définissons  $\phi_i = \frac{S(x_{(i)})}{S(x_{(i-1)})}$  la probabilité de survivre jusqu'à l'âge  $x_{(i)}$  sachant que le système n'a pas eu de réparation parfaite depuis une durée  $x_{(i-1)}$ . Ainsi, notre problème de maximisation revient à maximiser par rapport à  $\phi$ :

$$l(\phi) = \prod_{i=1}^n (1 - \phi_i) \phi_i^{k_i}$$

où  $k_i = \sum_{j=i}^{n-1} z_{(j)}$  est le nombre de réparation parfaites pour des pannes intervenues à un âge supérieur à  $x_{(i)}$ .

On montre facilement que le maximum de cette fonction est atteint en :

$$\hat{\phi}_i = \frac{k_i}{k_i + 1}, 1 \leq i \leq n-1; \hat{\phi}_n = 0$$

Ainsi, on obtient le MLE empirique de la fonction de survie  $S$ :

$$\hat{S}(t) = \begin{cases} 1, & t < x_{(1)} \\ \prod_{j=1}^i \hat{\phi}_j, & x_{(i)} < t < x_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 0, & t \geq x_{(n)} \end{cases}$$

Dans le cas où  $z_{(n-1)} = 0$ , on a toujours le même maximiseur de  $l(\phi)$  mais désormais par définition,  $k_{n-1} = 0$  et donc  $\hat{\phi}_{n-1} = 0$  ce qui implique que  $\hat{S}(t) = 0, t \geq x_{(n-1)}$ . Ainsi, on voit que notre approximation de la

vraisemblance  $l(F)$  n'est pas défini car dans le dernier terme du produit, on a une division par 0. C'est pourquoi dans ce cas précis, il n'existe pas de MLE empirique issu de la maximisation de notre estimation de la vraisemblance. Ce MLE empirique est en réalité un "neighbourhood MLE" de  $F$  dans une certaine topologie, on peut tout de même l'utiliser pour  $z_{(n-1)} = 0$ .

Ce modèle de BP peut-être vu comme une suite de réparations parfaites indépendantes, ainsi, on peut se restreindre aux temps de réparations parfaites pour étudier les propriétés du modèle. On a le résultat suivant (citer BP 1983) qui nous dit que si  $Y_1$  est l'âge du système à la première réparation parfaite, alors la fonction de survie  $S_y$  de  $Y_1$  vérifie:

$$S_y(t) = (S(t))^p$$

En effet, en notant  $r$  le taux de hasard associé à  $T$ , le taux de hasard associé à  $Y_1$  est égal à  $pr$  car la probabilité qu'une réparation ait lieu à l'instant  $t$  sachant qu'il n'y avait pas précédemment est égale à  $r(t)$ , et elle est alors parfaite avec une probabilité  $p$ , avec indépendance entre les deux phénomènes. On peut ensuite utiliser le lien entre taux de hasard et fonction de survie:

$$S_y(t) = \exp\left(-\int_0^t pr(x)dx\right) = (S(t))^p$$

En établissant la distribution empirique du processus de Poisson inhomogène obtenu en ne considérant que les durées entre deux réparations parfaites  $Y_1, \dots, Y_m$ . On obtient ainsi une approximation de  $S_y$ , que l'on note  $\hat{S}_y$ . Or  $S_y(t) = (S(t))^p$ , donc on obtient via  $1 - \hat{S}_y^{n/m}$  un autre estimateur de la fonction de répartition.

On peut également établir la distribution empirique des  $T_i|Z_{i-1} = 1$ , c'est-à-dire des durées entre chaque réparation parfaite et la réparation suivante. On obtient ainsi une approximation de la densité, et en la cumulant, une nouvelle estimation de la fonction de répartition.

Ces deux derniers estimateurs n'exploitent pas toutes les informations issues des observations de  $T$  et  $Z$ , contrairement au premier, on peut donc supposer qu'ils seront moins performants.

## 2 Modelisation numerique

### 2.1 Simulation d'un processus de Weibull

Les  $Z_i$  suivent une loi Binomiale par leur définition:  $\mathbb{P}(Z_i = 1) = p$ .

On simule ici le modèle. Pour ce faire, on commence par créer deux fonctions: *simulPPh1* et *invWeibull*. La fonction *simulPPh1* permet de simuler un processus de poisson homogène: on simule  $k$  fois une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1 ce qui nous donne une liste de nombres telle que  $[n_1, n_2, \dots, n_k]$ . On renvoie ensuite les temps d'arrivées simulés (notés  $A_k$  dans la fonction *simulPPIWeibull*) qui représentent la somme cumulée telle que  $[n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + \dots + n_k]$ .

```
simulPPh1 <- function(k)
{
  return(cumsum(rexp(k, 1)))
}
```

La fonction *invWeibull* renvoie l'intensité cumulée inverse de Weibull:  $\Lambda^{-1}$ . Montrons comment nous l'avons trouvé:

Nous avons prouvé en cours que la fonction d'intensité cumulée est égale à  $\Lambda(t) = (\frac{t}{\alpha})^\beta$  avec  $\alpha, \beta$  des paramètres strictement positifs. Calculons l'inverse de cette fonction:

$$y = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \iff y^{\frac{1}{\beta}} = \frac{t}{\alpha} \iff t = \alpha y^{\frac{1}{\beta}}$$

Ainsi,  $\Lambda^{-1}(y) = \alpha y^{\frac{1}{\beta}}$ . On l'implémente donc avec comme paramètres par défaut  $\beta = 2$  et  $\alpha = 1$ .

```
invWeibull <- function(y, alpha=1, beta=2)
{
  return(alpha*y**(1/beta))
}
```

On peut maintenant simuler le modèle BP. Pour cela, on génère une variable aléatoire géométrique de paramètre  $p$ , représentant le nombre  $k$  de réparations imparfaites nécessaires avant d'atteindre la première réparation parfaite. On simule ensuite le processus homogène comme expliqué précédemment et on retourne les temps  $T_i = \Lambda^{-1}(A_i)$  et les valeurs de la fonction de survie de la loi Weibull:  $S(t) = \exp(-(\frac{t}{\alpha})^\beta)$  créant ainsi un processus de poisson inhomogène. On réitère cela  $m$  fois où  $m$  représente le nombre de réparations parfaites.

## 2.2 Première simulation d'un processus de Brown-Proschan

```
simulPPIWeibull <- function(m, alpha, beta, p)
{
  k <- rgeom(1, p)+1
  A_k = simulPPh1(k)
  T_k = c(invWeibull(A_k, alpha, beta))
  S_k = c(exp(-(head(T_k,-1)/alpha)**beta),1)
  T_succes = c(tail(T_k,1)) #le temps où il ya la rep parfaite
  S_succes = c(tail(S_k,1)) #et sa valeur de fonction de survie associée
  for(i in 1:m-1)
  {
    k <- rgeom(1, p)+1
    A_k = simulPPh1(k)
    T_k_temp = c(invWeibull(A_k, alpha, beta))
    T_k = c(T_k, tail(T_k,1) + T_k_temp)
    S_k = c(S_k,exp(-(T_k_temp[-1]/alpha)**beta),1)
    T_succes = c(T_succes, tail(T_k,1))
    S_succes = c(S_succes, tail(S_k,1))
  }
  return(list(T = T_k,S=S_k, T_succes = T_succes,S_succes=S_succes))
}
```

On va désormais afficher les résultats d'une simulation de notre processus de BP pour vérifier que notre code marche bien. Pour cela, on affiche pour chaque temps de pannes, la valeur de la fonction de survie théorique (calculable explicitement dans le cas de Weibull).

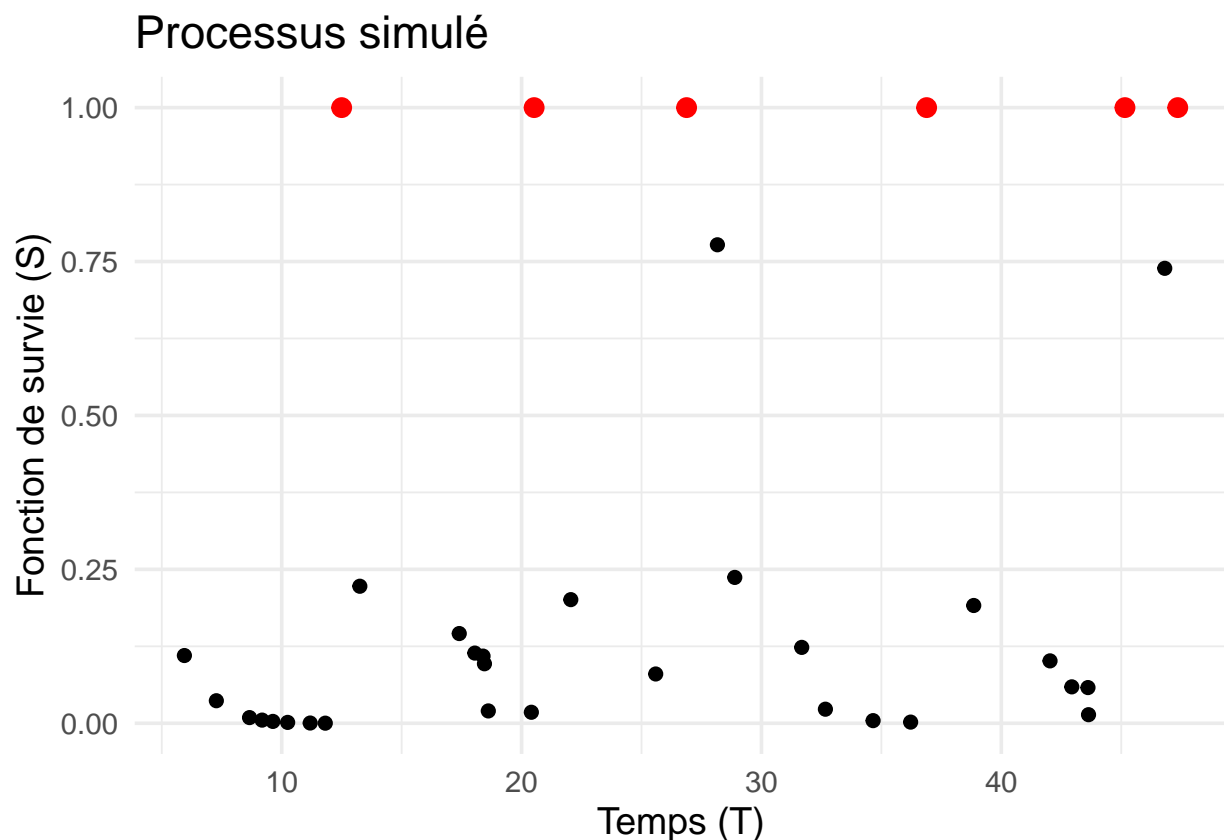
```
m <- 5
p <- 0.2
result <- simulPPIWeibull(m, 4, 2, p)
print(result)
```

```
## $T
## [1] 5.942335 7.274556 8.657631 9.181656 9.630975 10.247340 11.186764
## [8] 11.816079 12.498365 13.256347 17.401322 18.049514 18.392660 18.451897
## [15] 18.612789 20.406807 20.522851 22.052054 25.590928 26.878928 28.163721
## [22] 28.887154 31.678980 32.666254 34.653883 36.219128 36.886234 38.850005
## [29] 42.030218 42.938179 43.612187 43.635945 45.154606 46.813735 47.354615
##
```

```
## $S
## [1] 0.1100347121 0.0366094752 0.0092358697 0.0051491410 0.0030359529
## [6] 0.0014116457 0.0004010274 0.0001622727 1.0000000000 0.2225871045
## [11] 0.1457366730 0.1140156481 0.1091225299 0.0966521516 0.0200612368
## [16] 0.0178719324 1.0000000000 0.2008216916 0.0800597555 1.0000000000
## [21] 0.7771976040 0.2369204060 0.1232769800 0.0228656264 0.0042857524
## [26] 0.0019128983 1.0000000000 0.1913242546 0.1013548197 0.0591663372
## [31] 0.0579941663 0.0139416621 1.0000000000 0.7389666190 1.0000000000
##
## $T_succes
## [1] 12.49836 20.52285 26.87893 36.88623 45.15461 47.35462
##
## $S_succes
## [1] 1 1 1 1 1 1
```

```
df_result <- data.frame(T = result$T, S = result$S)
df_succes <- data.frame(T = result$T_succes, S = result$S_succes)
```

```
ggplot(df_result, aes(x = T, y = S)) +
  geom_point(color = "black", size = 2) +
  geom_point(data = df_succes, aes(x = T, y = S), color = "red", size = 3) +
  labs(title = "Processus simulé",
       x = "Temps (T)",
       y = "Fonction de survie (S)") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```



On voit donc que graphe est cohérent d'après les résultats des différents vecteurs. En effet, lorsqu'il n'y a

pas de réparations parfaites, l'âge du système ne cesse d'augmenter et la valeur de la fonction de survie tend vers 0 et à l'inverse, lorsqu'une réparation est parfaite, son âge retombe à zéro et la fonction de survie vaut à nouveau 1.

## 2.3 Estimation du paramètre $p$ par maximum de vraisemblance

On implémente le calcul du MLE trouvé précédemment :  $\hat{p} = m/n$ .

```
MLE_P <- function(m,n)
{
  return(m/n)
}
```

Pour observer le bon comportement de notre estimateur, on va simuler des processus pour des valeurs de  $m$  croissantes et calculer à chaque fois notre  $\hat{p}$ .

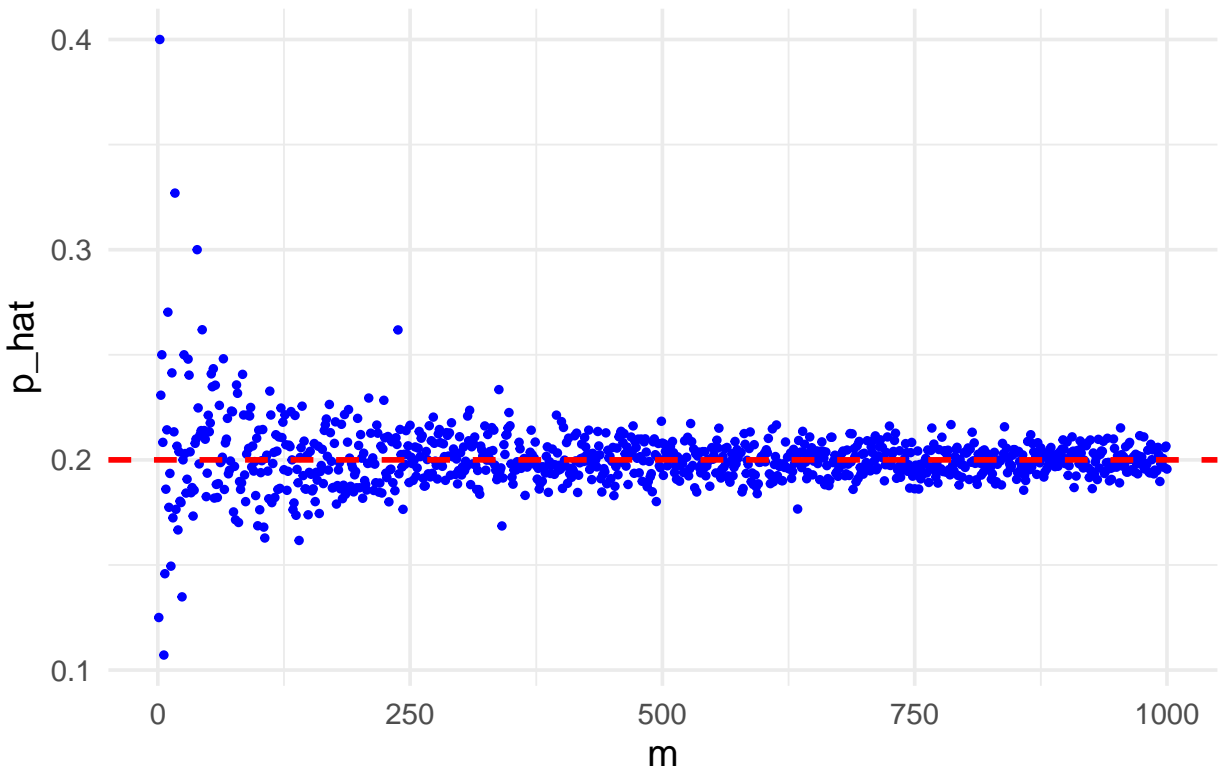
```
p_hat <- c()
for (m in 1:1000) {
  process <- simulPPIWeibull(m, 1, 2, 0.2)
  p_hat <- c(p_hat, m / length(process$T))
}

df <- data.frame(m = 1:1000, p_hat = p_hat)

ggplot(df, aes(x = m, y = p_hat)) +
  geom_point(color = "blue", size = 1) +
  geom_hline(yintercept = 0.2, color = "red", linetype = "dashed", size = 1) +
  labs(title = "Estimation de p_hat en fonction de m",
       x = "m",
       y = "p_hat") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```

```
## Warning: Using 'size' aesthetic for lines was deprecated in ggplot2 3.4.0.
## i Please use 'linewidth' instead.
## This warning is displayed once every 8 hours.
## Call 'lifecycle::last_lifecycle_warnings()' to see where this warning was
## generated.
```

## Estimation de $p_{\text{hat}}$ en fonction de $m$



On observe que plus  $m$  augmente, plus notre estimation ponctuelle se rapproche de la vraie valeur de  $p$ . On observe également que la variance diminue.

## 2.4 Estimation de l'intensité du processus par plusieurs méthodes

### 2.4.1 Estimation par maximum de vraisemblance ou neighbourhood MLE

On rappelle la formule du MLE qui est bien défini uniquement si  $z_{(n-1)} = 1$  (voir première partie du document):

$$\hat{S}(t) = \begin{cases} 1, & t < x_{(1)} \\ \prod_{j=1}^i \hat{\phi}_j, & x_{(i)} < t < x_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 0, & t \geq x_{(n)} \end{cases}$$

On rappelle également que cet estimateur peut être utilisé pour  $z_{(n-1)} = 0$  mais devient un neighbourhood MLE et est nul pour  $t \geq x_{(J+1)}$  où  $J$  est le dernier indice pour lequel  $z_{(J)} = 1$  (en dehors de  $z_{(n)}$ ). On définit une nouvelle fonction *simulPPIWeibull2*, qui s'inspire fortement de la première simulation mais qui ne renvoie pas les mêmes choses. Ici on retourne les instants de pannes, la type de réparation associé à chaque panne ( $= Z$ ) ainsi que les instants de réparations parfaites (sous ensemble de  $T$ ).

```
simulPPIWeibull2 <- function(m, alpha, beta, p)
{
  k <- rgeom(1, p)+1
  A_k = simulPPh1(k)
  T_k = c(invWeibull(A_k, alpha, beta))
  Z_k = c(rep(0,k-1),1)
```



```

T_succes = tail(T_k,1)
for(i in 1:m-1)
{
  k <- rgeom(1, p)+1
  A_k = simulPPh1(k)
  T_k_temp = c(invWeibull(A_k, alpha, beta))
  T_k = c(T_k, tail(T_k,1) + T_k_temp)
  Z_k = c(Z_k,rep(0,k-1),1)
  T_succes = c(T_succes, tail(T_k,1))
}
return(list(T = T_k,Z=Z_k, T_succes = T_succes))
}

```

```

res<-simulPPIWeibull2(50,4,2,0.2)
Z<-res$Z
T<-res$T

```

On implémente maintenant le calcul du MLE (ou neighbourhood MLE en fonction des cas) trouvé précédemment. La fonction  $MLE_S$  renvoie les vecteurs  $x_{()}$  et  $\hat{\phi}$  permettant de construire le MLE. On a ensuite une deuxième fonction  $plot\_MLE\_S$  qui permet de construire graphiquement le MLE en retournant ses valeurs pour une séquence de temps  $t$ .

```

MLE_S <- function(T,Z)
{
  n<-length(Z)
  x <- c()
  last_perfect <- 0
  for (i in 1:n){
    x <- c(x,T[i]-last_perfect)
    if (Z[i]==1){
      last_perfect<-T[i]
    }
  }
  idx<-order(x)
  x_order<-x[idx]
  z_order<-Z[idx]
  phi_hat<-c()
  for (i in 1:(n-1)){
    k<-sum(z_order[i:(n-1)])
    phi_hat<-c(phi_hat,k/(k+1))
  }
  phi_hat<-c(phi_hat,0)
  return(list(x_order = x_order,phi_hat=phi_hat))
}

plot_MLE_S <-function(t,x_order,phi_hat) {
  x_order<-c(x_order,Inf)
  S_hat<-rep(1,length(t))
  # Inférieur au premier temps de panne
  count<-1
  while (t[count]<x_order[1]){
    count<-count+1
  }
  i<-1

```

```

phi<-phi_hat[1]
#Entre deux temps de pannes ou supérieur au dernier
for (j in count:length(t)){
  if (t[j]>x_order[i+1]){
    phi<-phi*phi_hat[i]
    i<-i+1
  }
  S_hat[j]=phi
}
return(S_hat)
}

```

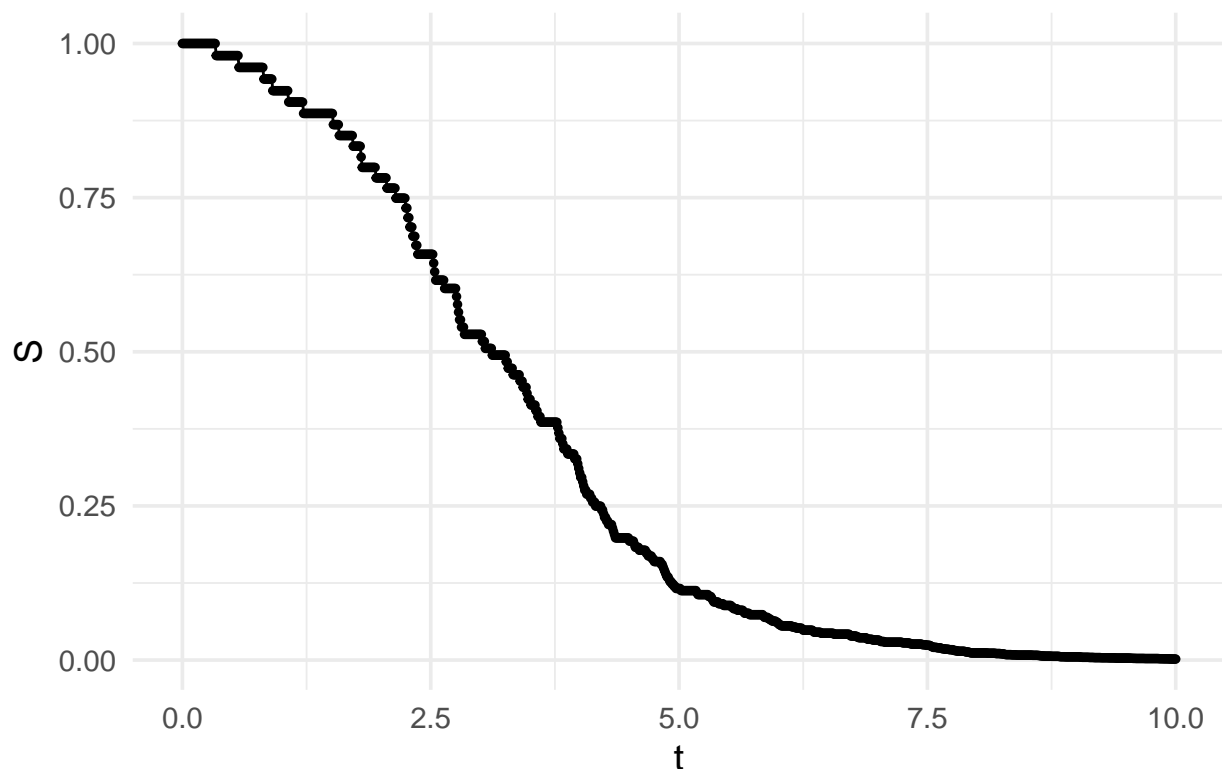
On teste le calcul et l'affichage de notre estimateur sur une simulation simple.

```

r<-MLE_S(T,Z)
t<-seq(0,10,0.01)
S_hatBP <- plot_MLE_S(t,r$x_order,r$phi_hat)
df <- data.frame(t = t, S_hat = S_hatBP)
ggplot(df, aes(x = t, y = S_hatBP)) +
  geom_point(color = "black", size = 1) +
  geom_line()+
  labs(title = "Estimation de S en fonction du temps",
       x = "t",
       y = "S") +
  theme_minimal(base_size = 14)

```

## Estimation de S en fonction du temps



## 2.4.2 Estimation de l'intensité du processus en utilisant les temps de pannes à la suite d'une réparation parfaite

On va maintenant utiliser la distribution empirique des  $T_i|Z_{i-1} = 1$ , c'est-à-dire des durées entre chaque réparation parfaite et la réparation suivante pour obtenir une approximation de la densité. En la cumulant, on obtient une estimation de la fonction de répartition. On définit comme avant 2 fonctions, une nous retournant tout le nécessaire pour construire l'estimateur et une seconde pour construire l'estimateur et retourner les valeurs en une séquence de temps  $t$  donnée.

```
MLE_emp_1 <- function(T,Z)
{
  n<-length(Z)
  delta_t <- c()
  last_perfect <- 0
  for (i in 1:(n-1)){
    if(Z[i]==1){
      delta_t <- c(delta_t,T[i+1]-T[i])
    }
  }
  idd<-order(delta_t)
  delta_t_ordered <- delta_t[idd]
  return(delta_t_ordered)
}

plot_MLE_emp_1 <- function(t, x)
{
  num_perfect <- length(x)
  x<-c(x,Inf)
  S_hat<-rep(1,length(t))
  # Inférieur au premier temps de panne
  count<-1
  while (t[count]<x[1]){
    S_hat[count] <- 1
    count<-count+1
  }
  i<-1
  S_hat[count]<-(num_perfect - 1)/num_perfect
  #Entre deux temps de pannes ou supérieur au dernier
  for (j in count:length(t)){
    if (t[j]>x[i+1]){
      i<-i+1
    }
    S_hat[j]=(num_perfect - i)/num_perfect
  }
  return(S_hat)
}
```

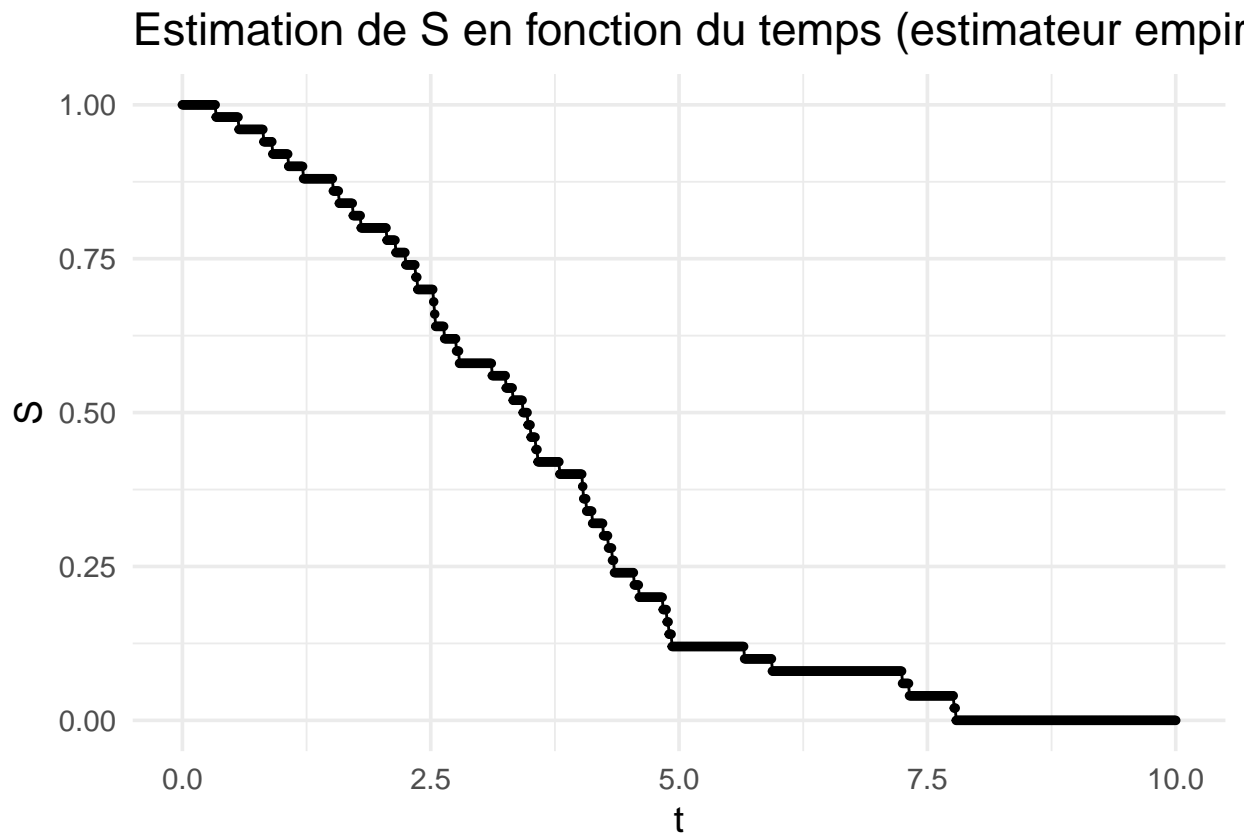
On teste l'affichage de l'estimateur sur la même simulation que l'estimateur précédent.

```
idd<-MLE_emp_1(T,Z)
idd
```

```
## [1] 0.3335713 0.5642220 0.8129381 0.9049199 1.0695904 1.2106135 1.5183467
```

```
## [8] 1.5735423 1.7163414 1.7910753 2.0503122 2.1407182 2.2421429 2.3489065
## [15] 2.3668895 2.5279945 2.5306435 2.5420816 2.6307829 2.7587384 2.7854451
## [22] 3.1114826 3.2538458 3.3290010 3.4282927 3.4782364 3.5043104 3.5520773
## [29] 3.5776403 3.7916750 4.0288735 4.0353885 4.0607872 4.1256802 4.2345619
## [36] 4.2883982 4.3203461 4.3466510 4.5483281 4.5999323 4.8318263 4.8738992
## [43] 4.8901799 4.9297214 5.6563988 5.9305053 7.2477772 7.3191227 7.7699201
## [50] 7.7859837
```

```
S_hat_e1 <- plot_MLE_emp_1(t,idd)
df <- data.frame(t = t, S_hat_e1 = S_hat_e1)
ggplot(df, aes(x = t, y = S_hat_e1)) +
  geom_point(color = "black", size = 1) +
  geom_line() +
  labs(title = "Estimation de S en fonction du temps (estimateur empirique 1)",
       x = "t",
       y = "S") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```



### 2.4.3 Estimation de l'intensité du processus avec uniquement les temps de réparations parfaites

On va maintenant utiliser la distribution empirique du processus de Poisson inhomogène obtenu en ne considérant que les durées entre deux réparations parfaites  $Y_1, \dots, Y_m$ . On obtient ainsi une approximation de  $S_y$ , que l'on note  $\hat{S}_y$ . Or  $S_y(t) = (S(t))^p$ , donc on obtient via  $1 - \hat{S}_y^{n/m}$  notre estimateur de la fonction de répartition. On reprend les mêmes conventions de codes que pour les deux estimateurs précédent.

```

MLE_emp_2_c <- function(T,Z)
{
  n<-length(Z)
  perfects <- c()
  last_perfect <- 0
  for (i in 1:n){
    if(Z[i]==1){
      perfects <- c(perfects,T[i])
    }
  }
  inter_perfects <- c()
  inter_perfects <- c(perfects[1])
  for (i in 1:length(perfects)-1){
    inter_perfects <- c(inter_perfects, perfects[i+1] - perfects[i])
  }
  idd<-order(inter_perfects)
  inter_perfects_ordered <- inter_perfects[idd]
  return(inter_perfects_ordered)
}

plot_MLE_emp_2 <- function(t, ipo, Z)
{
  num_repairs <- length(Z)
  num_perfect <- length(ipo)
  ipo<-c(ipo,Inf)
  S_hat_y<-rep(1,length(t))
  # Inférieur au premier temps de panne
  count<-1
  while (t[count]<ipo[1]){
    S_hat_y[count] <- 1
    count<-count+1
  }
  i<-1
  S_hat_y[count]<-(num_perfect - 1)/num_perfect
  #Entre deux temps de pannes ou supérieur au dernier
  for (j in (count+1):length(t)){
    if (t[j]>ipo[i+1]){
      i<-i+1
    }
    S_hat_y[j]=(num_perfect - i)/num_perfect
  }

  S_hat <- (S_hat_y)**(num_repairs / num_perfect)

  return(S_hat)
}

```

On teste l'affichage de l'estimateur sur la même simulation que pour les estimateurs précédents.

```

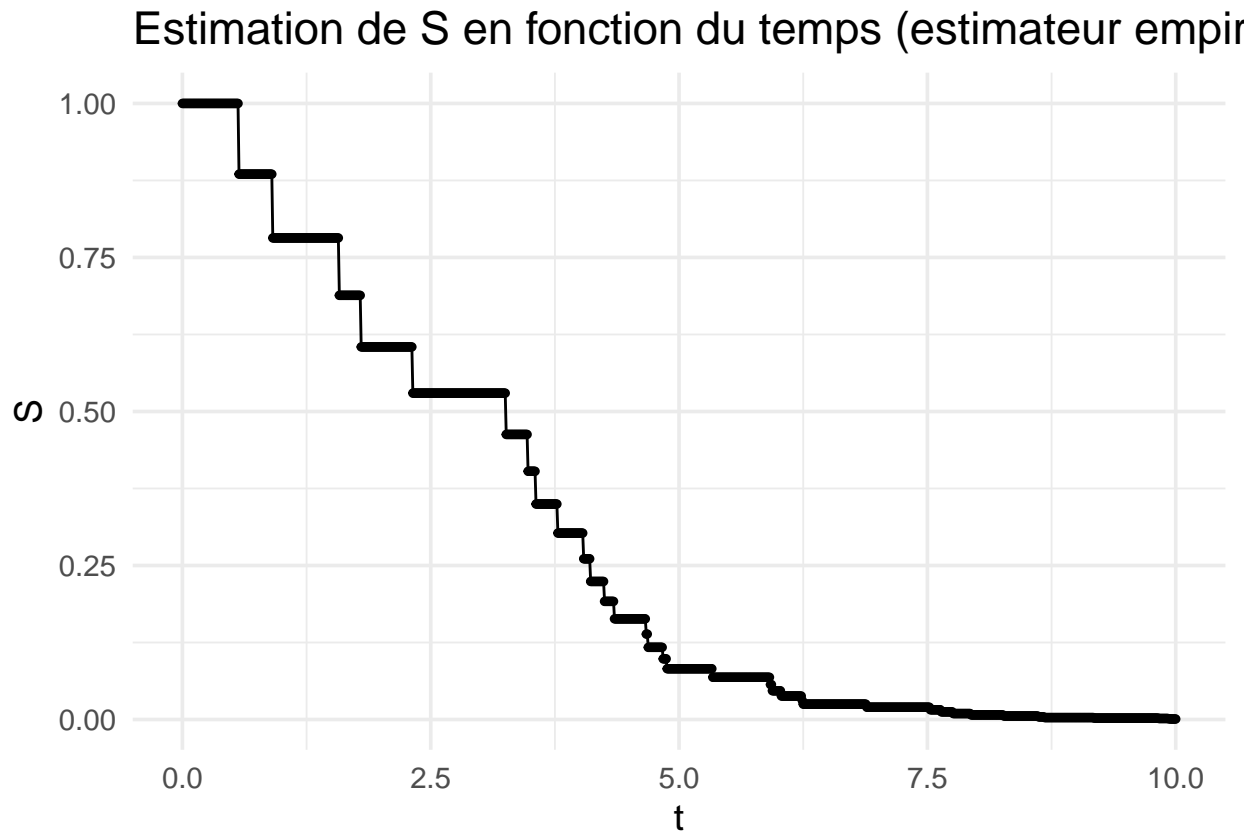
ipo<-MLE_emp_2_c(T,Z)
ipo

```

```
## [1] 0.5642220 0.9049199 1.5735423 1.7910753 2.3166017 3.2538458
```

```
## [7] 3.4782364 3.5520773 3.7725059 4.0353885 4.1083194 4.2487701
## [13] 4.3466510 4.6694675 4.6887084 4.8362538 4.8738992 5.3385928
## [19] 5.9113082 5.9305053 6.0219577 6.2305268 6.2457499 6.8813320
## [25] 7.5221866 7.6316867 7.7599466 7.9349915 8.2677941 8.6195107
## [31] 8.6766357 9.1789322 9.8209720 9.9218955 9.9472767 10.5564578
## [37] 11.0396941 11.3769671 11.4703212 11.4856450 11.5224027 12.0165106
## [43] 12.4830084 13.5342646 14.7053875 14.8504421 16.1881536 18.3293461
## [49] 18.9630690 19.9087286 22.7716064
```

```
S_hat_e2 <- plot_MLE_emp_2(t, ipo, Z)
df <- data.frame(t = t, S_hat_e2 = S_hat_e2)
ggplot(df, aes(x = t, y = S_hat_e2)) +
  geom_point(color = "black", size = 1) +
  geom_line() +
  labs(title = "Estimation de S en fonction du temps (estimateur empirique 2)",
       x = "t",
       y = "S") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```



#### 2.4.4 Comparaison des estimateurs

Pour comparer nos estimateurs de la fonction de survie  $S$ , on va évaluer la fonction de survie théorique d'un processus de Weibull, que l'on peut calculer, en une séquence de temps positifs. On va ensuite afficher sur le même graphe cette courbe exacte et celles obtenues avec chacun des estimateurs.

```

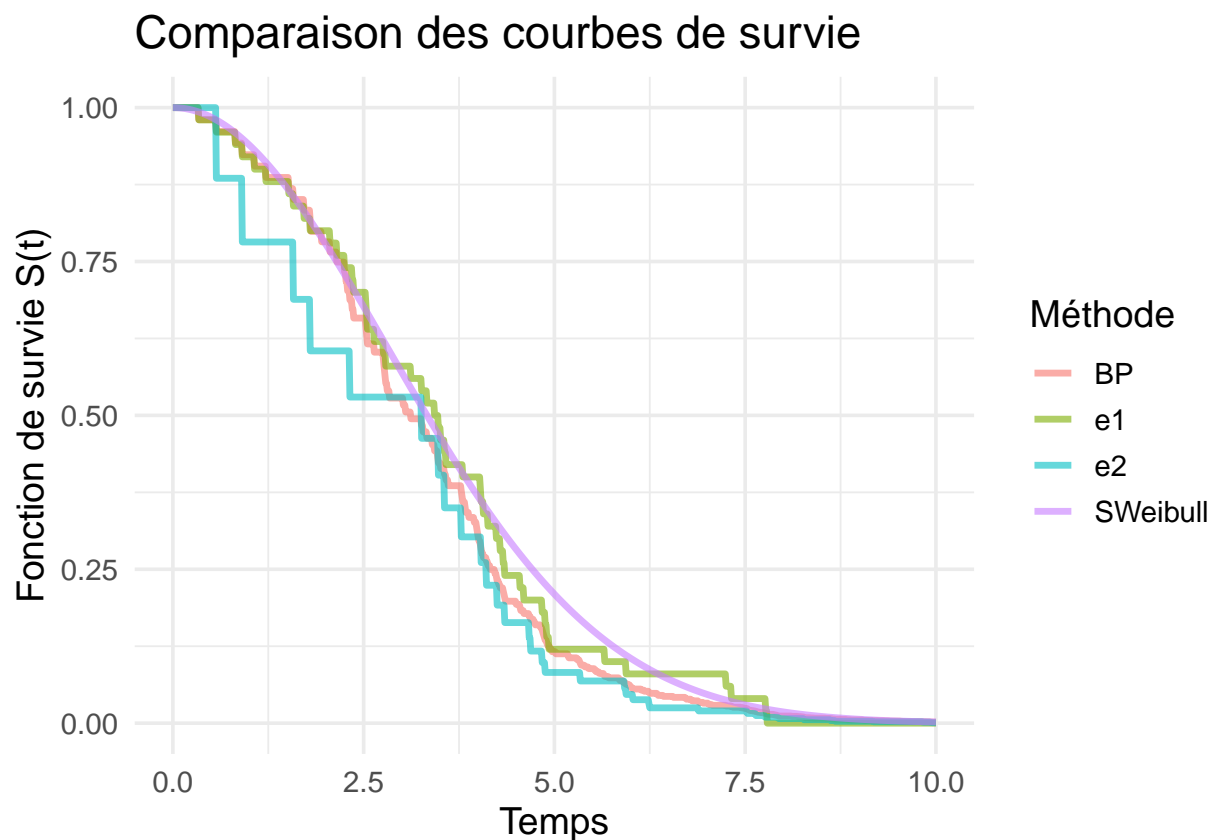
SWeibull <- function(y, alpha=1, beta=2)
{
  return(exp(-(y/alpha)**beta))
}

df <- data.frame(
  t = t,
  SWeibull = SWeibull(t, 4, 2),
  BP = S_hatBP,
  e1 = S_hat_e1,
  e2 = S_hat_e2
)

df_long <- df %>%
  pivot_longer(cols = -t, names_to = "Méthode", values_to = "Survie")

# Plot
ggplot(df_long, aes(x = t, y = Survie, color = Méthode)) +
  geom_line(size = 1.2, alpha = 0.6) +
  labs(title = "Comparaison des courbes de survie",
       x = "Temps",
       y = "Fonction de survie S(t)",
       color = "Méthode") +
  theme_minimal(base_size = 14)

```



En plus de ce critère graphique qui permet une identification visuelle de la performance, on va implémenter

2 critères numériques, la MSE et la variance en fonction du nombre de réparations parfaites  $m$ .

```
nrpm <- 100 # Nombre de réparations parfaites max
mse_BP <- c()
mse_e1 <- c()
mse_e2 <- c()
for (m in 5:nrpm){
  res<-simulPPIWeibull2(m,4,2,0.1)
  Z<-res$Z
  T<-res$T
  t<-seq(0,10,0.1*1/m)
  S_t <- SWeibull(t, 4,2)
  r<-MLE_S(T,Z)
  S_hatBP <- plot_MLE_S(t,r$x_order,r$phi_hat)
  idd<-MLE_emp_1(T,Z)
  S_hat_e1 <- plot_MLE_emp_1(t,idd)
  ipo<-MLE_emp_2_c(T,Z)
  S_hat_e2 <- plot_MLE_emp_2(t,ipo, Z)
  mse_BP <- c(mse_BP, sum((S_t - S_hatBP)**2)/length(S_t))
  mse_e1 <- c(mse_e1, sum((S_t - S_hat_e1)**2)/length(S_t))
  mse_e2 <- c(mse_e2, sum((S_t - S_hat_e2)**2)/length(S_t))
}

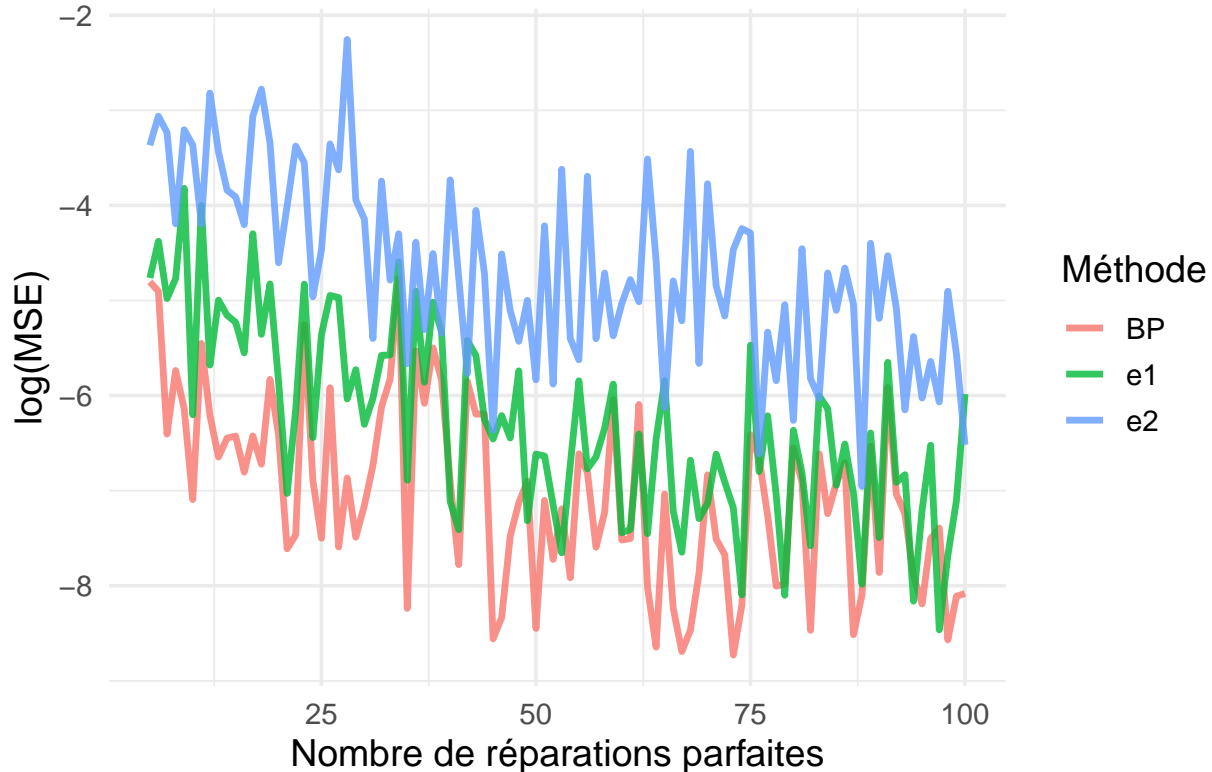
df_mse <- data.frame(
  m = seq(5,nrpm),
  BP = log(mse_BP),
  e1 = log(mse_e1),
  e2 = log(mse_e2)
)

df_mse_long <- df_mse %>%
  pivot_longer(cols = -m, names_to = "Méthode", values_to = "log_MSE")

ggplot(df_mse_long, aes(x = m, y = log_MSE, color = Méthode)) +
  geom_line(size = 1.2, alpha = 0.8) +
  labs(title = "Évolution du log(MSE) selon la méthode",
       x = "Nombre de réparations parfaites",
       y = "log(MSE)",
       color = "Méthode") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```



## Évolution du log(MSE) selon la méthode



On voit que l'estimateur du MLE non paramétrique, qui est celui qui utilise le plus d'informations, mais qui ne possède pas de garanties théoriques en l'absence de  $z_{n-1} = z_n = 1$ , est celui qui possède les meilleures performances pour la majorité des simulations. C'est un résultat particulièrement visible lorsque les réparations parfaites sont assez rares comparées aux réparations imparfaites. On observe également que l'erreur des estimateurs a tendance à diminuer lorsqu'on augmente le nombre de réparations (via l'augmentations du nombre de réparations parfaites).

```
nrpm <- 100 # Nombre de réparations parfaites max
niter <- 10
var_BP <- rep(0,nrpm)
var_e1 <- rep(0,nrpm)
var_e2 <- c(0,nrpm)
for (m in 5:nrpm){
  t<-seq(0,10,0.1*1/m)
  moy_BP <- rep(0,length(t))
  moy_e1 <- rep(0,length(t))
  moy_e2 <- rep(0,length(t))
  moy_BPs <- rep(0,length(t))
  moy_e1s <- rep(0,length(t))
  moy_e2s <- rep(0,length(t))
  for (i in 1:niter){
    res<-simulPPIWeibull12(m,4,2,0.2)
    Z<-res$Z
    T<-res$T # PAS COHERENT AVEC LA DEFINITION THEORIQUE DE T !
    r<-MLE_S(T,Z)
    S_hatBP <- plot_MLE_S(t,r$x_order,r$phi_hat)
```

```

idd<-MLE_emp_1(T,Z)
S_hat_e1 <- plot_MLE_emp_1(t,idd)
ipo<-MLE_emp_2_c(T,Z)
S_hat_e2 <- plot_MLE_emp_2(t,ipo, Z)
moy_BP <- moy_BP + S_hatBP
moy_e1 <- moy_e1 + S_hat_e1
moy_e2 <- moy_e2 + S_hat_e2
moy_BPs <- moy_BPs + S_hatBP**2
moy_e1s <- moy_e1s + S_hat_e1**2
moy_e2s <- moy_e2s + S_hat_e2**2
}
moy_BP <- moy_BP / niter
moy_e1 <- moy_e1 / niter
moy_e2 <- moy_e2 / niter
moy_BPs <- moy_BPs / niter
moy_e1s <- moy_e1s / niter
moy_e2s <- moy_e2s / niter
var_BP[m] <- sum(moy_BPs - moy_BP**2)/length(t)
var_e1[m] <- sum(moy_e1s - moy_e1**2)/length(t)
var_e2[m] <- sum(moy_e2s - moy_e2**2)/length(t)
}

```

Ci-dessus nous calculons la variance moyenne des fonctions de survie sur `niter` simulations en fonction du nombre de réparations parfaites.

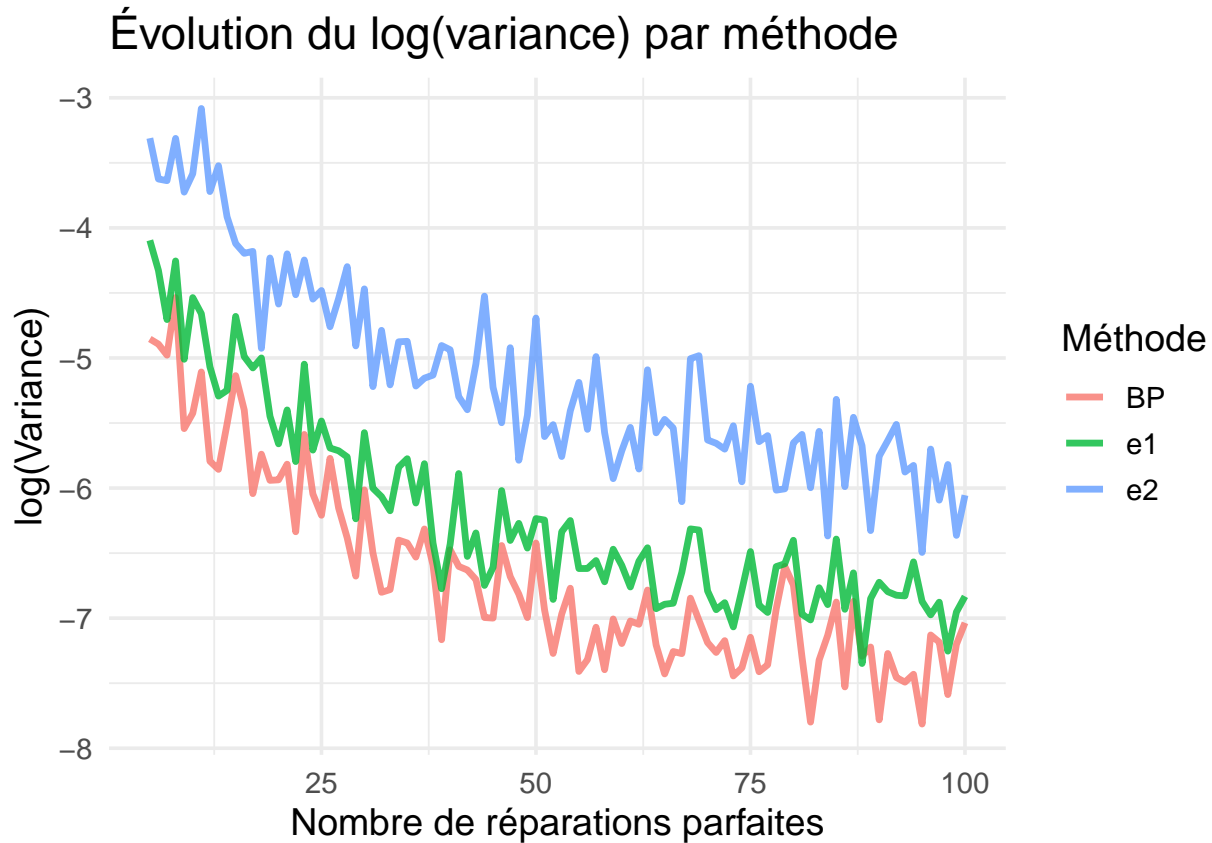
```

df_var <- data.frame(
  m = seq(5,nrpm),
  BP = log(var_BP[-(1:4)]),
  e1 = log(var_e1[-(1:4)]),
  e2 = log(var_e2[-(1:4)])
)

df_var_long <- df_var %>%
  pivot_longer(cols = -m, names_to = "Méthode", values_to = "logVar")

ggplot(df_var_long, aes(x = m, y = logVar, color = Méthode)) +
  geom_line(size = 1.2, alpha = 0.8) +
  labs(title = "Évolution du log(variance) par méthode",
       x = "Nombre de réparations parfaites",
       y = "log(Variance)",
       color = "Méthode") +
  theme_minimal(base_size = 14)

```



On remarque que le MLE non paramétrique est uniformément plus robuste que les estimateurs empiriques, sa plus faible variance indiquant sa robustesse. Ainsi, le MLE non paramétrique est à la fois plus robuste et plus consistant que les deux estimateurs empiriques. De plus, on remarque que la variance diminue avec l'augmentation du nombre de réparations (via l'augmentation du nombre de réparations parfaites).

## 2.5 Conclusion

## 2.6 Références

### References

- [1] Francisco J. Samaniego Lyn R. Whitaker. "Estimating the Reliability of Systems Subject to Imperfect Repair". In: *Journal of the American Statistical Association* 84.405 (1989), pp. 301–309.
- [2] Frank Proschan Mark Brown. "Imperfect Repair". In: *Journal of Applied Probability* 20.4 (1983), pp. 851–859.