

시계열자료분석팀

5팀

오정민
강현주
김민정
김정민
배지현

INDEX

1. 2주차 복습
2. ARIMA
3. SARIMA
4. ARFIMA
5. ARCH/GARCH
6. Time Series CV

ARIMA의 표현

표현 적합

$$ARIMA(p, d, q)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t$$

$$= (1 + B\phi_1 + B^2\phi_2 + \dots + \phi_q B^q)Z_t$$

특성함수로 표현 $\phi(B)(1 - B)^d X_t = \phi(B)Z_t$

EX) $ARIMA(1, 1, 1)$

$$(1 + B\phi_1)Z_t = (1 - \phi_1 B)(1 - B)X_t$$

SARIMA

전체 flow 모형 종류 SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)적합 acf / pacf

SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)

dependent

$$\rightarrow \phi(B)\Phi(B^{12})(1-B)^d(1-B^{12})^D X_t$$

$$= \theta(B)\Theta(B^{12})Z_t, Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

SARIMA

Y_t 가 d번의 차분, D번의 계절차분을 한 상태의 정상 시계열

트렌드와 계절성을 한 번에 제거해 줄 수 있는 모델!

$$Y_t = (1-B)^d(1-B^{12})^D X_t$$

SARIMA

전체 flow 모형 종류 SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)적합 acf / pacf

$$SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$$

p,q

비계절적 요소

한 주기 내에서 acf와 pacf 판단

P,Q

계절적 요소

주기마다 있는 acf와 pacf 판단

ARFIMA란?

표현 long term memory process 모수추정

$$\text{ARFIMA}(p, d, q)$$

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \phi(B)Z_t, \quad 0 < d < 0.5$$

(식은 ARIMA랑 동일)

$$\text{ARFIMA}(0, d, 0) : (1 - B)^d X_t = Z_t, \quad 0 < d < 0.5$$

ARFIMA란?

표현 long term memory process 모수추정

왜 ARFIMA가 Long Term Memory Process 인가?

ARFIMA(0, d, 0)일 때

$$\text{ACF } \rho(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)}$$

$h \rightarrow \infty$ 일때, 주어진 식은 h^{2d-1} 로 수렴

→ 0으로 빠르게 수렴하지 않음!

→ 그 합 역시 무한대로 발산

ARCH

표현

ARCH의 비선형성

문제점

: **A**uto **R**egressive **C**onditional **H**eteroscedasticity
 변동성을 설명하기 위한 비선형 모델

$ARCH(p)$

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1) \quad \alpha_0 > 0, \alpha_j \geq 0, j = 1, 2, \dots$$

σ_t : t 시점의 변동성의 standard deviation

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2$$

현재시점의
변동성



의존

과거 오차항의 제곱

➡ 시간의 경과에 따라 변화하는 이분산의 특성을 가짐!

GARCH

표현

GARCH의 장점

: Generalized ARCH

 $GARCH(p, q)$

$$\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_j \geq 0, \beta_k \geq 0, j, k = 1, 2, \dots$$

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j u_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

t시점의
변동성

p시점 전까지의
오차항의 제곱

q시점 전까지의
변동성

Time Series CV

Fixed rolling window forecast



sample에서 old data point들이 drop되면서 new data point들이 추가되는 방식

Pass1
Pass2
Pass3
Pass4
Pass5

window size, 즉 학습하는 데이터 양이 일정

Available Historical Time Series

Rolling window

Training Forecasting



ARCH(∞) = GARCH(1, 1) 증명

GARCH(1, 1)

$$\sigma_t^2 = w + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$= w + \alpha u_{t-1}^2 + \beta (w + \alpha u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2)$$

$$= w + \alpha u_{t-1}^2 + \beta w + \beta \alpha u_{t-2}^2 + \beta^2 \sigma_{t-2}^2$$

$$= w + \alpha u_{t-1}^2 + \beta w + \beta \alpha u_{t-2}^2 + \beta^2 (w + \alpha u_{t-3}^2 + \beta \sigma_{t-3}^2)$$

$$= w + \alpha u_{t-1}^2 + \beta w + \beta \alpha u_{t-2}^2 + \beta^2 w + \beta^2 \alpha u_{t-3}^2 + \beta^3 \sigma_{t-3}^2$$

$$= \dots$$

ARCH(∞) = GARCH(1, 1) 증명**GARCH(1, 1)**

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= w + \alpha u^2_{t-1} + \beta w + \beta \alpha u^2_{t-2} + \beta^2 w + \beta^2 \alpha u^2_{t-3} + \beta^3 \sigma^2_{t-3} \\ &= w(1 + \beta + \beta^2) + \alpha(u^2_{t-1} + \beta u^2_{t-2} + \beta^2 u^2_{t-3}) + \beta^3 \sigma^2_{t-3} \\ &= \dots \\ &= w(1 + \beta + \beta^2 + \dots) \\ &\quad + \alpha(u^2_{t-1} + \beta u^2_{t-2} + \beta^2 u^2_{t-3} + \dots) + \beta^\infty \sigma^2_0 \\ &= \frac{w}{1 - \beta} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha \beta^{j-1} u^2_{t-j} \quad \longleftrightarrow \quad \text{ARCH}(\infty)\end{aligned}$$