클린업 2주차

선형대수학팀(3팀)

박서영
김민주
이윤희
이지연
황정현

INDEX

역행렬(Inverse of matrix)이란?

- n x n의 정방행렬 A

같은 말!

A의 **역행렬**이 존재한다.

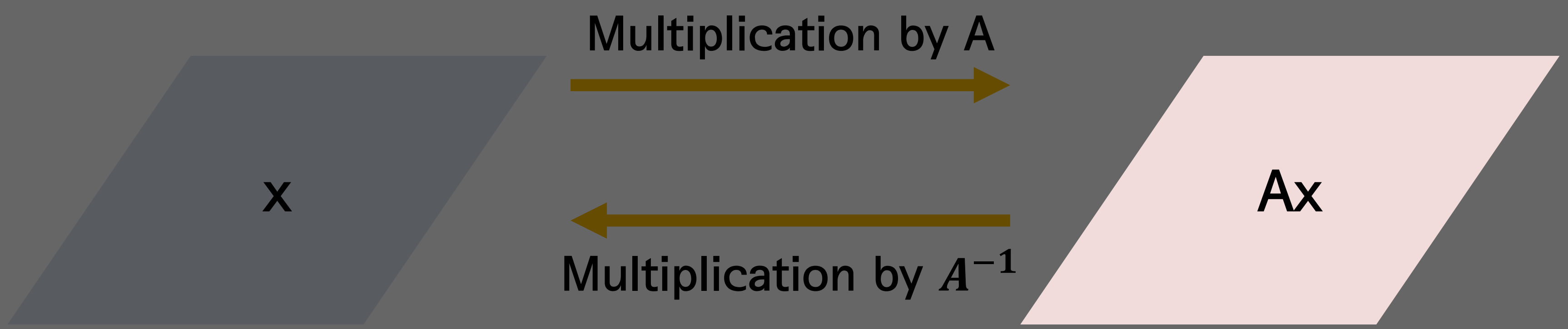
Ax=b의 **유일한 해**가 존재한다.

A^{-1}는 **유일**하다. (Unique)

1 행렬 뜯어보기

역행렬과 선형변환

- 역행렬이 존재하는 n x n의 정방행렬 A에 대하여

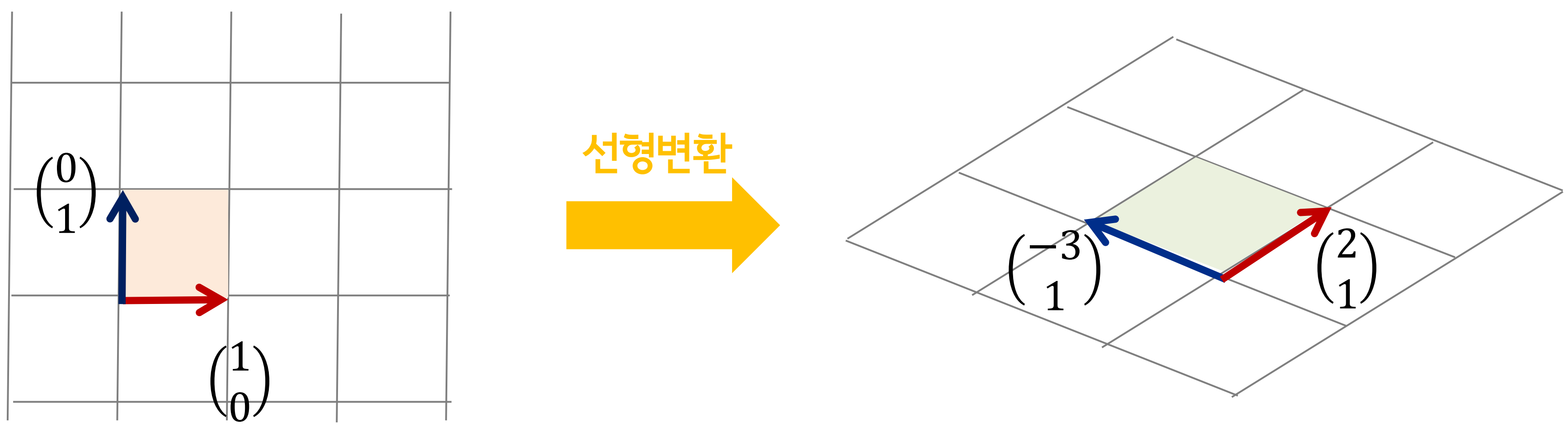


- 벡터공간($\mathbb{R}^n$)의 **차원수가 유지**된다.
- Ax=b의 **해 x가 유일**하다(unique).
- 특정 x를 선형 변환한 **b는 유일**하다.
- x와 Ax (x와 b)는 **일대일대응**이다.

행렬식과 선형변환의 기하학적 관계

- 선형변환 후의 넓이 = |det(A)| x 선형변환 전의 넓이 ($\mathbb{R}^2$의 경우)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$



행렬식과 Ax=b의 해

- 행렬식을 이용해 Ax=b 를 더 쉽게 풀 수 있다!

역행렬 존재 여부의 판단 기준

Cramer's Rule을 이용해 x구하기 가능

선형부분공간의 조건

0 벡터(원점)가 존재해야 한다.

선형부분공간에 있는 벡터에 다른 벡터를 더했을 때
그 합도 선형부분공간에 존재해야 한다.

선형부분공간에 있는 벡터에 스칼라를 곱했을 때
그 곱도 선형부분공간에 존재해야 한다.

Null space

- Homogenous 방정식 $Ax = 0$ 의 해의 집합
- x 에 A 를 곱해 선형변환 했을 때 0 이 되는 벡터 x 들의 집합

Null space는 하나의 선형부분공간이다.

Column space와 Ax=b

Ax = b의 해가 존재한다	=	b는 A의 열벡터의 span에 속한다.	=	b가 A의 column space에 존재한다.

- col(A) = {b : b = Ax for some x in $\mathbb{R}^m$}
- 만약 모든 b에 대하여 Ax=b의 해가 존재하면, col(A)는 모든 b를 나타내고 Column space는 부분공간(subspace)을 넘어 $\mathbb{R}^m$ 의 벡터공간이 된다.

선형독립

- 벡터들의 모임에서 어떤 벡터도 나머지 벡터들의 일차결합으로 만들어질 수 없을 때, 선형독립이라고 한다.

$\mathbb{R}^m$의 원소인 제로벡터 $\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$에 대하여

선형독립!

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix} + \cdots + C_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

를 만족하는 상수 C_i의 해가 C_1=0 C_2=0 ⋯ C_n=0 이면

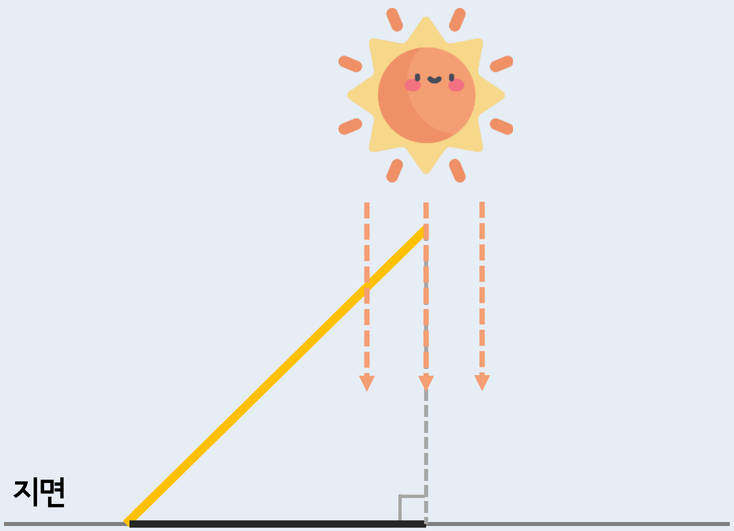
차원(dimension)과 rank

- 벡터공간에서 기저벡터의 개수를 차원(dimension)이라고 한다. 예를 들어 $\mathbb{R}^2$ 의 차원은 2 , $\mathbb{R}^3$ 의 차원은 3이다.
- 행렬 A의 Column space 의 차원을 rank라고 한다.

	Column space	Null space
dimension	pivot 의 개수	pivot이 없는 열의 개수 = 자유변수의 개수

투영벡터(projection)

- 지면에 비스듬히 놓인 막대에 빛이 지면과 수직으로 비칠 때, 막대가 지면에 투영되었다고 한다.
- 이때 막대가 투영되어 지면에 막대의 그림자가 생긴다.



3 투영벡터 : 회귀분석에 적용

Least-Square estimators

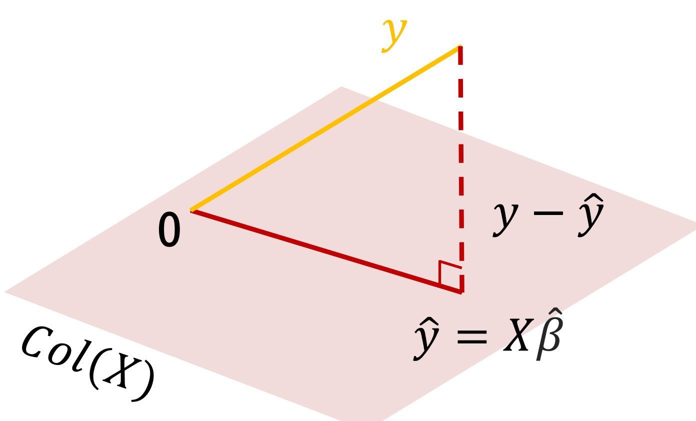
$$X\beta = y$$

Least-Square problem

$$X\hat{\beta} = \hat{y}$$

만족하는 β 존재 X

최소거리해 $\hat{\beta}$ 존재



$X\beta = y$의 최소거리해

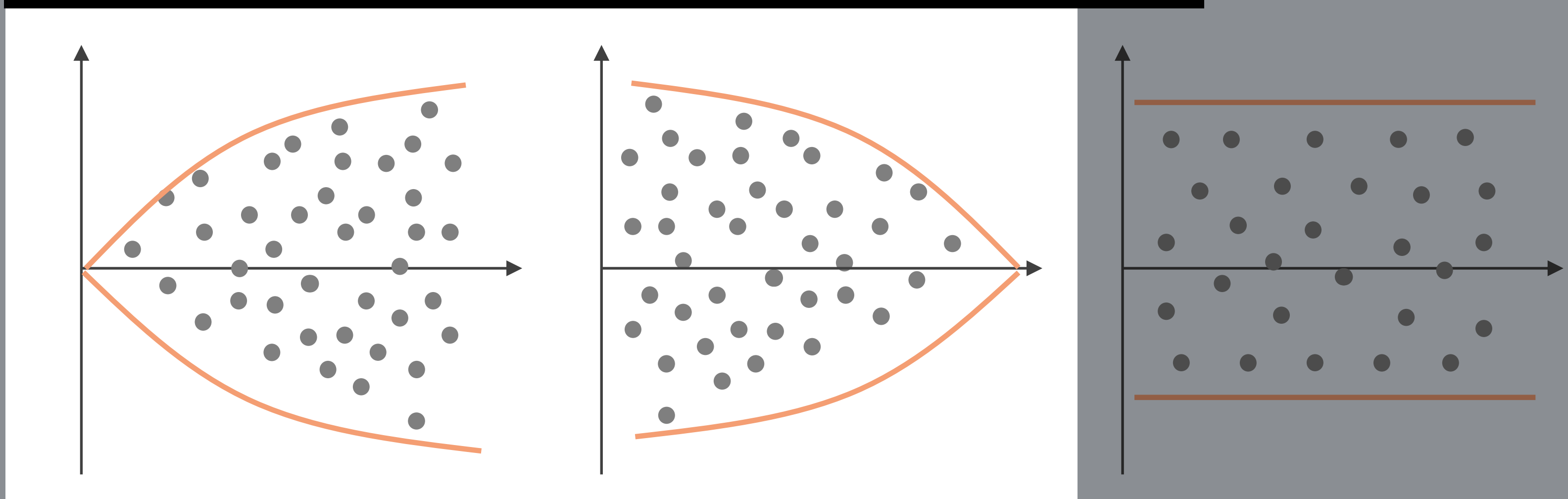
$$\therefore X^T X\hat{\beta} = X^T y$$

3 투영벡터 : 회귀분석에 적용

가중선형회귀(Weighted Linear Regression)

- 일반 단순 회귀 모형은 잔차의 등분산성을 가정한다.
- 등분산성 : 잔차는 평균이 0, 분산이 σ^2으로 입력 변수와 무관하게 무작위적으로 고

입력변수에 따라 분산이 달라지는 등 **이분산성**을 띠는 경우는
작은 분산에 가중치를 두어 등분산성을 맞춰준다.



이분산성 등분산성

Weighted-Least-Square estimators

[redacted]

	일반회귀	가중회귀
SSE	$\lVert y-\hat{y}\rVert^2$ $= \lVert y-X\hat{\beta}\rVert^2$	$\lVert Wy-W\hat{y}\rVert^2$ $= \lVert Wy-WX\hat{\beta}\rVert^2$
β 의 해	$X^TX\hat{\beta}=X^Ty$	$(WX)^TWX\hat{\beta}=(WX)^TWy$

[redacted]

$$\therefore (WX)^TWX\hat{\beta}=(WX)^TWy$$