시계열자료분석팀

5팀

오정민
강현주
김민정
김정민
배지현

INDEX

모형 선택

But, 백색잡음이 아니라면?

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(Y_1, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) \\ \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_2, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_2, Y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(Y_n, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_n, Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_n, Y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

각 시차의 공분산들 r(1), r(2), …, r(n-1)이 다 추정해야하는 모수!

모형 선택 결정 과정

ACF PACF

ACF (Autocorrelation Function): 자기상관함수

$$p_x(h) = Corr(X_t, X_{t+h})$$

$$= \frac{Cov(x_t, x_{t+h})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t+h})}} = \frac{Cov(x_t, x_{t+h})}{\sqrt{Cov(X_t, X_t)}\sqrt{Cov(X_{t+h}, X_{t+h})}}$$

$$= \frac{Cov(x_t, x_{t+h})}{\sqrt{\gamma(0)}\sqrt{\gamma(0)}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

(*참고*ACVF: $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$)

시차 h에서 자기상관관계가 존재하는지를 나타내는 척도

= 서로 다른 두 시점의 상호 연관관계를 나타내는 척도

AR

AR 모형

현재자료를 … 설명O 설명X

현재의 관측자료 = 과거자료 + 오차항

$$AR(p):\quad X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \cdots + \emptyset_p X_{t-p} + Z_t$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \emptyset_i X_{t-i} + Z_t$$

$Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$

$\emptyset_i$: 각 항의 계수

AR

WHY?

" $\emptyset(B) = 0$ ***의 근의 절댓값*** "

> 1	= 1	< 1
정상성 인과성 가역성	Random Walk Process 대표적인 ***비정상*** 시계열	과거시점이 아니라 ***미래시점에 의존***하는 시계열이 됨

MA

MA 모형

q시점 전까지 오차들의 선형결합으로 표현

$$MA(q):\ X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

백색잡음 각 항의 계수

1시점 전까지 오차들의 선형결합으로 표현

$$MA(1):\ X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1}$$

ARMA

표현 후향연산자를 사용한 표현 조건 ACF & PACF 그래프

ARMA(p,q):

AR 모형의 차수 p, MA 모형의 차수 q인 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} +$$ AR

$$\theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} + Z_t$$ MA

Tip! ARMA(p,q)모형과 AR(p), MA(q)모형의 관계

AR(p) + MA(q) = ARMA(p,q)

AR(1) = ARMA(1,0) / MA(1) = ARMA(0,1)

AR, MA, ARMA

요약

모형	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
정의	과거의 관측값으로 설명	과거의 오차항으로 설명	과거의 관측값과 오차항들로 설명
만족해야하는 조건	정상성, 인과성	가역성	정상성, 인과성, 가역성
ACF	지수적으로 감소	q 이후 절단	지수적으로 감소
PACF	q 이후 절단	지수적으로 감소	지수적으로 감소

모형 식별 및 진단 과정

정상 시계열 자료

↓

모형 식별

↓

모수 추정

↓

모형 진단

↓

미래 예측

2. 모수 추정

```
fit<-arima(oil.price2, order=c(2,0,0))
fit
```

모형 적합 시 arima() 함수를 사용!

```
##
## Call:
## arima(x = oil.price2, order = c(2, 0, 0))
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2  intercept
##       1.3267  -0.4835    19.1463
## s.e.  0.0746   0.0750     0.7397
##
## sigma^2 estimated as 2.205:  log likelihood = -291.35,  aic = 588.71
```

최대가능도 추정법

X_t=19.1463+1.3267X_{t-1}−0.4835X_{t-2}+$Z_t X_t$

AR(2) 모형 적합!

AR: ACF – tail's off 되는 이유

$$X_t = \emptyset_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$X_t X_{t-h} = \emptyset_1 X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h}$$

$$E(X_t X_{t-h}) = \emptyset_1 E(X_{t-1} X_{t-h}) + E(Z_t X_{t-h})$$

$E(Z_t) = 0$

E(X)E(Y) 빼서 Cov로 바꾸기

$$r(h) = \emptyset_1 r(h-1) + \underbrace{\cancel{Cov(Z_t, X_{t-h})}}_{=0}$$

$$r(h) = \emptyset_1 r(h-1) = \emptyset_1\big(\emptyset_1 r(h-2)\big) = \cdots = \emptyset_1{}^h r(0)$$

$$\therefore \frac{r(h)}{r(0)} = \emptyset_1{}^h = \rho(h);\ \boxed{ACF}$$

$|\emptyset_1| < 1$이므로 h가 증가함에 따라

ACF는 지수적으로 감소

MA: ACF – cut off 되는 이유

i) h=0인 경우

$$\gamma(h) = Cov(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}, Z_t + \theta_1 Z_{t-1}) = \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$$

i) h=1인 경우

$$\gamma(h) = Cov(Z_t + \theta_1 Z_{t-1}, Z_{t-1} + \theta_1 Z_{t-2}) = \theta_1\sigma^2$$

i) h>=2인 경우

$$\gamma(h) = Cov(Z_t + \theta_1 \mathrm{Z}_{\mathrm{t}-1}, \mathrm{Z}_{\mathrm{t}-\mathrm{h}} + \theta_1 Z_{t-h-1}) = 0$$

$$\therefore \text{ACF} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \rho(h) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{1+\theta^2} & h = 1 \\ 0 & h \geq 2 \end{cases}$$

따라서 MA(1) 모형의 ACF는 2차 이상부터 절단된 모양!

쌍대성

MA(1) → AR(∞)

MA(1) 모형을 다음과 같이 표현하였었다!

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} \rightarrow X_t = (1+\theta_1 \mathrm{B})\mathrm{Z_t} \rightarrow \frac{1}{(1+\theta_1 B)} X_t = Z_t$$

(가역성으로 인해 $|\theta_1| < 1$ -> 무한등비급수 조건 만족

무한등비급수 형태!

$$Z_t = (1-\theta_1 B + \theta_1^2 B^2 - \cdots)\mathrm{X_t}$$

$$Z_t = X_t - \theta_1 B X_t + \theta_1^2 B^2 X_t + \cdots$$

$$X_t = B X_t - \theta_1^2 B X_t + \cdots + Z_t$$

즉, 과거시점 관측치들의 선형결합으로 이루어진 무한차수의 AR모형이 됨