클린업 1주차

선형대수학팀(3팀)

박서영
김민주
이윤희
이지연
황정현

INDEX

1 선형대수의 개념 및 필요성

선형대수란?

선형대수학

연립선형방정식(Ax=b)
해 구하기

행렬

벡터

연립선형방정식을 보다 쉽게 표현하고
해를 구하기 위해 ‘행렬’과 ‘벡터‘ 이용!

1 선형대수의 개념 및 필요성

통계와 선형대수의 관계

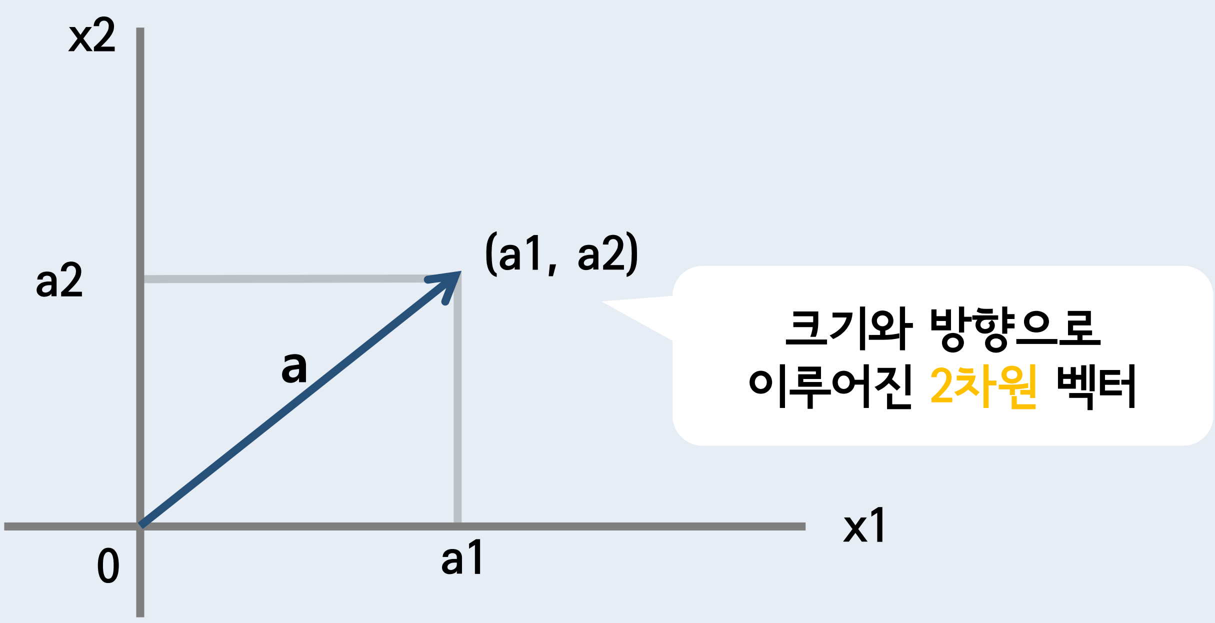
- 선형대수는 머신러닝부터 딥러닝까지 거의 모든 이론의 바탕
- 데이터를 행렬 및 벡터 형식으로 나타냄으로써 구조적 표현 및 연산 가능
- PCA. SVD, LSA, 딥러닝의 구조 등의 수학적 근간

벡터(vector)란?

- 선형대수의 기본단위
- 하나의 열만 존재하는 행렬

공간 측면

예시

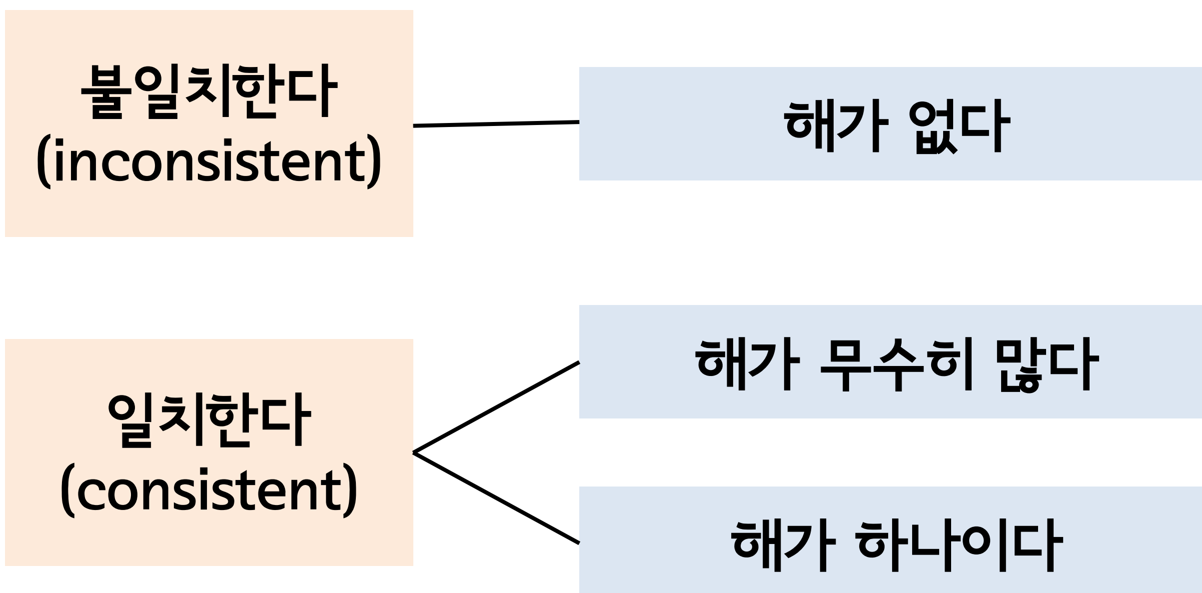


3

Ax = b 해결하기

연립선형방정식 해의 종류

- 연립선형방정식의 해는 해의 유무를 기준으로 '불일치한다/일치한다'로 나뉘고, 일치하는 경우 해의 개수에 따라 '무수히 많다/하나이다' 로 나뉜다.



선형 결합 (linear combination)과 span

- Ax를 mxn 크기의 행렬A의 각 컬럼($\mathbb{R}^n$ 의 벡터)과 각각의 벡터의 변수 값의 곱으로 나타낼 수 있는데, 이를 선형 결합(linear combination)라 한다.

$$Ax = [a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$$

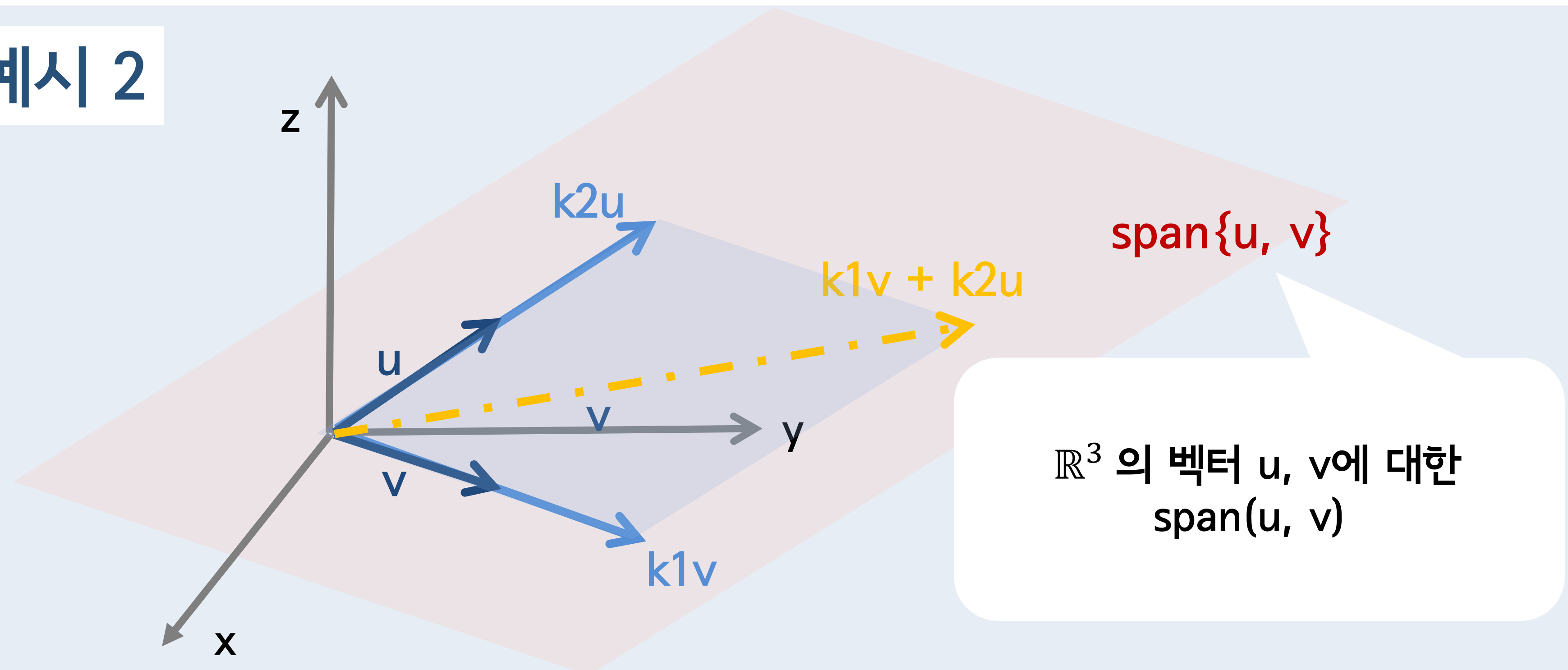
Span{$a1$ $a2$ ⋯an}

span은 벡터 a_1 a_2 ⋯a_n 의 조합이다.

Span의 공간적 이해

- u와 v가 $\mathbb{R}^n$ 의 벡터라면, span{u, v}는 u와 v의 선형결합($k_1v + k_2u$) 이다.
- 이 때, 영벡터가 아닌 u, v에 대해 span{u, v}는 원점을 지나며 u, v를 포함한 **평면**이다.

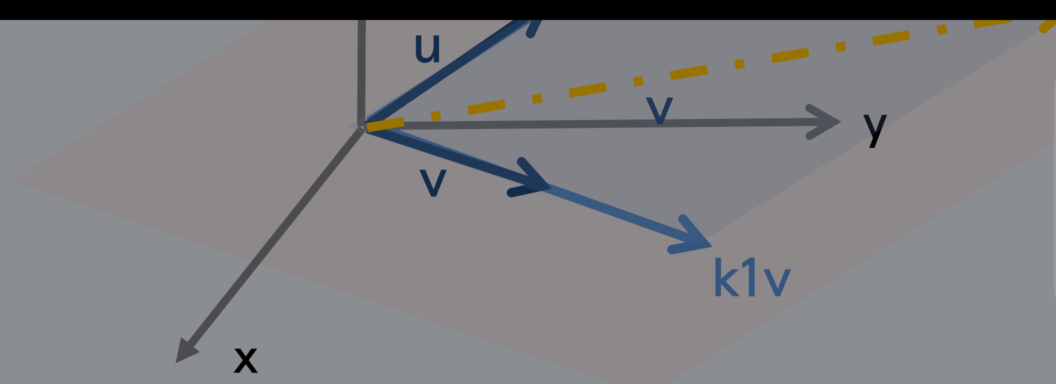
예시 2



Span의 공간적 이해

- u와 v가 $\mathbb{R}^n$ 의 벡터라면, span{u, v}는 u와 v의 선형결합(k1v + k2u) 이다.

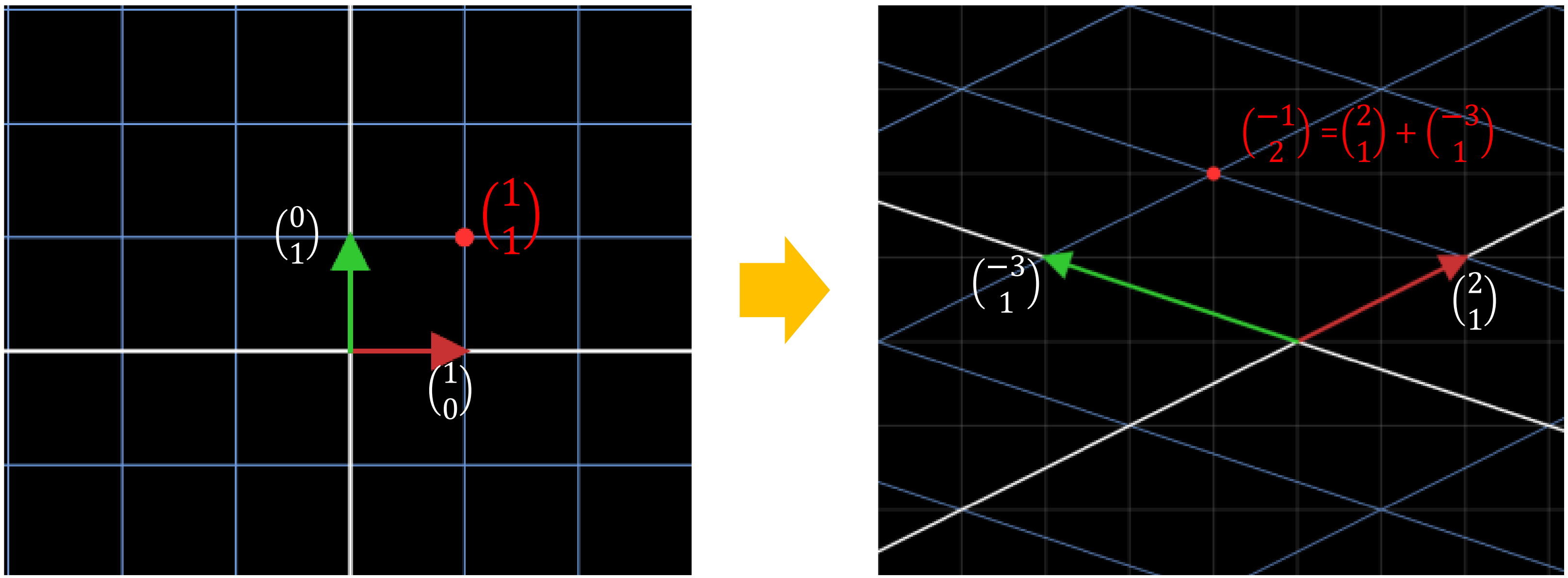
만약 Ax = b 연립일차방정식의 해가 존재하려면
b가 A의 열벡터들의 span에 위치해야 한다고
공간적으로 이해할 수 있음!



$\mathbb{R}^3$ 의 벡터 u, v에 대한 span(u, v)

선형변환의 공간적 의미

- (예시) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 에 행렬 $\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$ 를 곱해 $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 로 변환한 선형변환 : $\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}}_{b}$



선형변환 후 벡터 $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ 는 변환된 기저벡터

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$의 1배와 1배의 합으로 표현 가능

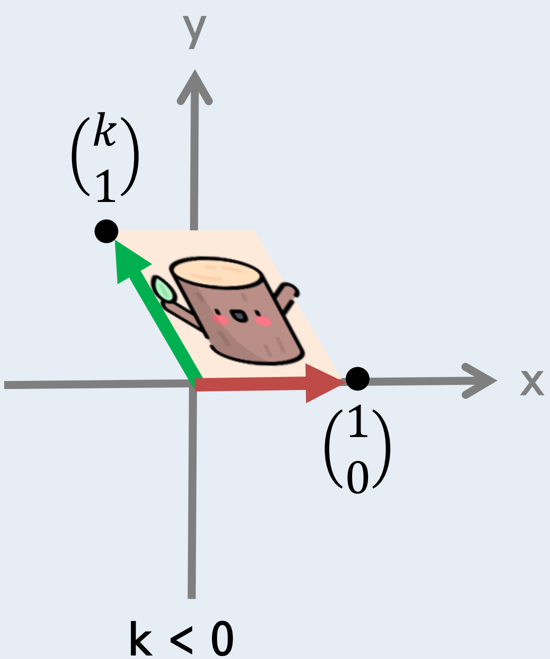
선형변환의 종류

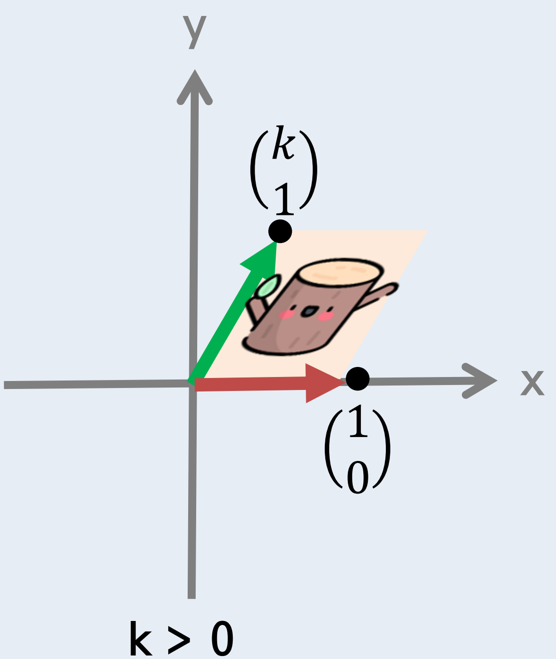
- Shear : 평행사변형 모양으로 변환되는 것

아래 예시) 기저벡터가 (k,1), (1,0)로 바뀜으로써 격자가 평행사변형 꼴로 변형됨

Standard Matrix (A행렬)

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Affine Transformation

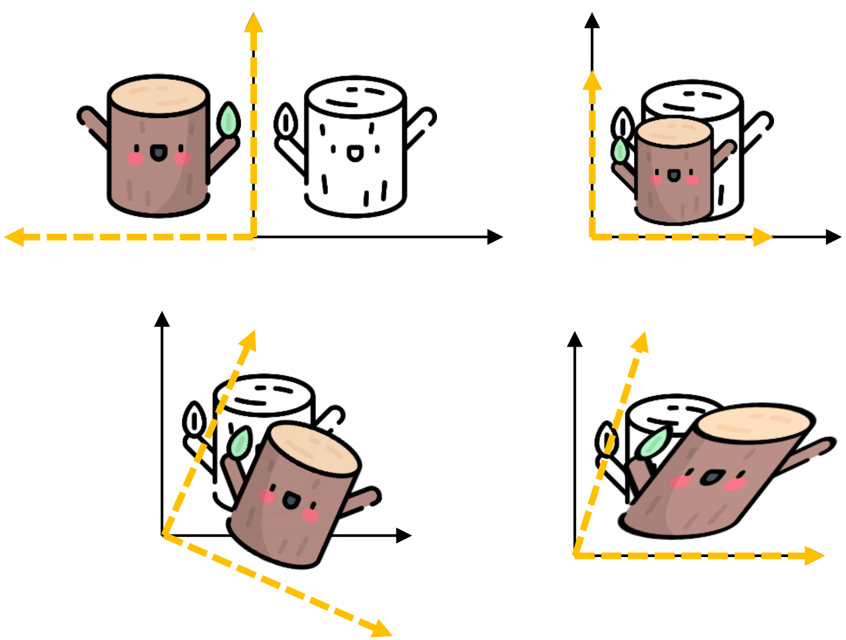
선형변환

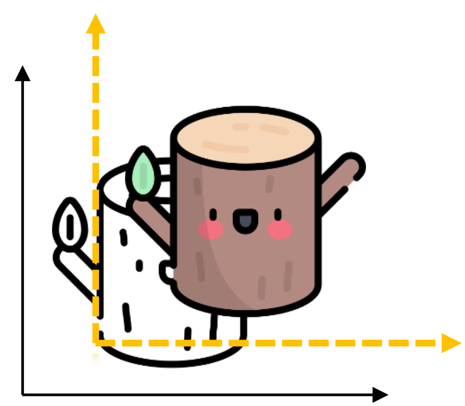
$$Y = AX$$

+

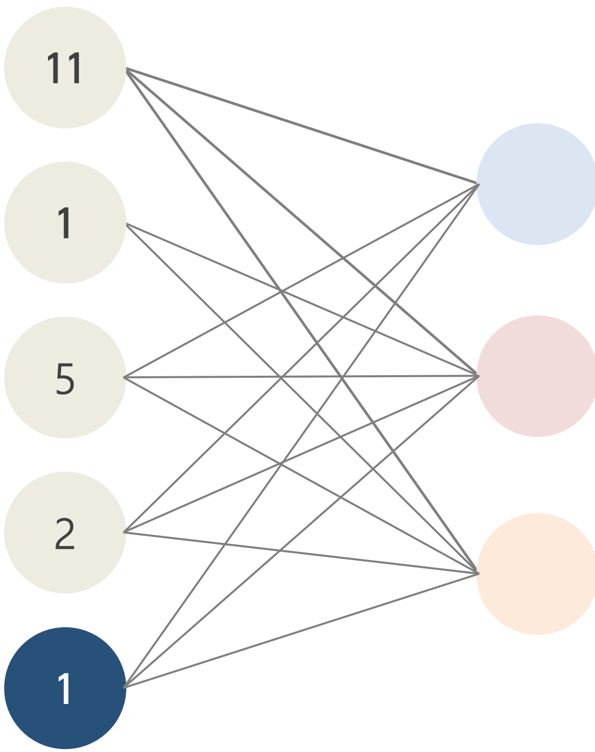
이동변환

$$Y = X + b$$





아핀변환과 딥러닝



가중치 행렬 Input node Bias Output

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.3 \\ 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.5 \\ -15.3 \\ 6.2 \end{pmatrix}$$

$$= 11 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.3 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1.5 \\ -3 & 1 & 2 & 4 & 1.3 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 3.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.5 \\ -15.3 \\ 6.2 \end{pmatrix}$$