시계열자료분석팀

5팀

오정민
강현주
김민정
김정민
배지현

INDEX

ARIMA의 표현

$$ARIMA(p, d, q)$$

$$(1 - \emptyset_1 B - \emptyset_2 B^2 - \cdots - \emptyset_p B^p)(1 - B)^d X_t$$

$$= (1 + B\emptyset_1 + B^2\emptyset_2 + \cdots + \emptyset_q B^q) Z_t$$

특성함수로 표현 $\emptyset(B)(1 - B)^d X_t = \emptyset(B) Z_t$

EX) ARIMA(1, 1, 1)

$$(1 + B\emptyset_1) Z_t = (1 - \emptyset_1 B)(1 - B) X_t$$

SARIMA

SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)

$$\rightarrow \phi(B)\Phi(B^{12})(1-B)^d(1-B^{12})^D X_t$$
$$= \theta(B)\Phi(B^{12})Z_t, Z_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

SARIMA

트렌드와 계절성을 한 번에 제거해 줄 수 있는 모델!

SARIMA

SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)

p,q	P,Q
비계절적 요소	**계절적 요소**
한 주기 내에서 acf와 pacf 판단	**주기마다 있는 acf와 pacf 판단**

ARFIMA란?

ARFIMA(p, d, q)

$$\emptyset(B)(1-B)^d X_t = \emptyset(B) Z_t,\ 0<d<0.5$$

(식은 ARIMA랑 동일)

ARFIMA(0, d, 0) : $(1-B)^d X_t = Z_t$, $0<d<0.5$

ARFIMA란?

왜 ARFIMA가 Long Term Memory Process 인가?

ARFIMA(0, d, 0)일 때

ACF $p(h) = \dfrac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)}$

$h \to \infty$일때, 주어진 식은 h^{2d-1}로 수렴

➔ 0으로 빠르게 수렴하지 않음!

➔ 그 합 역시 무한대로 발산

ARCH

: **A**uto **R**egressive **C**onditional **H**eteroscedasticity

변동성을 설명하기 위한 비선형 모델

ARCH(p)

$\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1) \quad \alpha_0 > 0,\ \alpha_j \geq 0, j = 1,\ 2, \dots$

σ_t : t시점의 변동성의 standard deviation

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 {u^2}_{t-1} + \cdots + \alpha_p {u^2}_{t-p}$$

현재시점의 변동성

의존

과거 오차항의 제곱

시간의 경과에 따라 변화하는 이분산의 특성을 가짐!

GARCH

표현 GARCH의 장점

: Generalized ARCH

GARCH(p, q)

$\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$

$\alpha_0 > 0,\ \alpha_j \geq 0,\ \beta_k \geq 0,\ j,k = 1,\ 2, \ldots$

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j {u^2}_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \beta_k {\sigma^2}_{t-j}$$

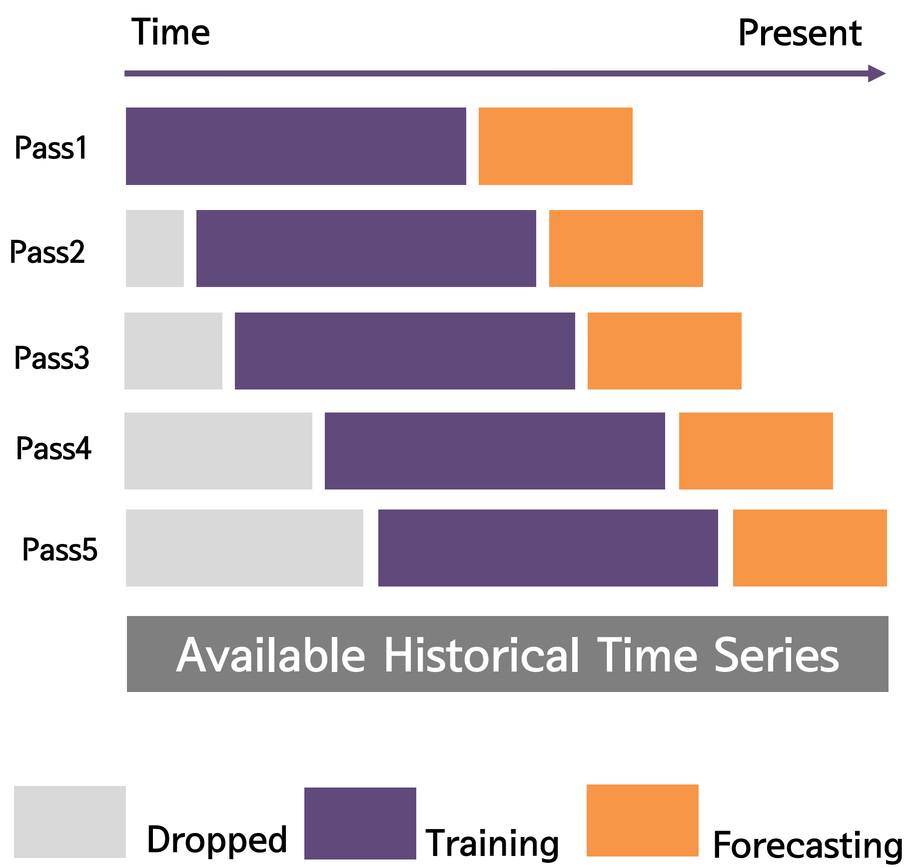
t시점의 변동성

p시점 전까지의 오차항의 제곱

q시점 전까지의 변동성

Time Series CV

Fixed rolling window forecast



sample에서 old data point들이 drop 되면서 new data point들이 추가되는 방식

window size, 즉 학습하는 데이터 양이 일정

Rolling window

ARCH(∞) = GARCH(1, 1) 증명

GARCH(1, 1)

$$\sigma_t^2 = w + \alpha u^2{}_{t-1} + \beta \sigma^2{}_{t-1}$$

$$= w + \alpha u^2{}_{t-1} + \beta(w + \alpha u^2{}_{t-2} + \beta \sigma^2{}_{t-2})$$

$$= w + \alpha u^2{}_{t-1} + \beta w + \beta \alpha u^2{}_{t-2} + \beta^2 \sigma^2{}_{t-2}$$

$$= w + \alpha u^2{}_{t-1} + \beta w + \beta \alpha u^2{}_{t-2} + \beta^2(w + \alpha u^2{}_{t-3} + \beta \sigma^2{}_{t-3})$$

$$= w + \alpha u^2{}_{t-1} + \beta w + \beta \alpha u^2{}_{t-2} + \beta^2 w + \beta^2 \alpha u^2{}_{t-3} + \beta^3 \sigma^2{}_{t-3}$$

$$= \cdots$$

ARCH(∞) = GARCH(1, 1) 증명

GARCH(1, 1)

$$\sigma_t^2 = w + \alpha u^2{}_{t-1} + \beta w + \beta\alpha u^2{}_{t-2} + \beta^2 w + \beta^2\alpha u^2{}_{t-3} + \beta^3\sigma^2{}_{t-3}$$

$$= w(1 + \beta + \beta^2) + \alpha(u^2{}_{t-1} + \beta u^2{}_{t-2} + \beta^2 u^2{}_{t-3}) + \beta^3\sigma^2{}_{t-3}$$

$$= \cdots$$

$$= w(1 + \beta + \beta^2 + \cdots)$$

$$+\alpha(u^2{}_{t-1} + \beta u^2{}_{t-2} + \beta^2 u^2{}_{t-3} + \cdots) + \beta^\infty\sigma^2{}_0$$

$$= \frac{w}{1-\beta} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha\beta^{j-1}\ u_{t-j}^2 \quad \longleftrightarrow \quad \text{ARCH}(\infty)$$