선형대수학 1주차

3팀

김수인
오정민
이수진
홍세정
강현주

INDEX

1) 선형대수학의 필요성

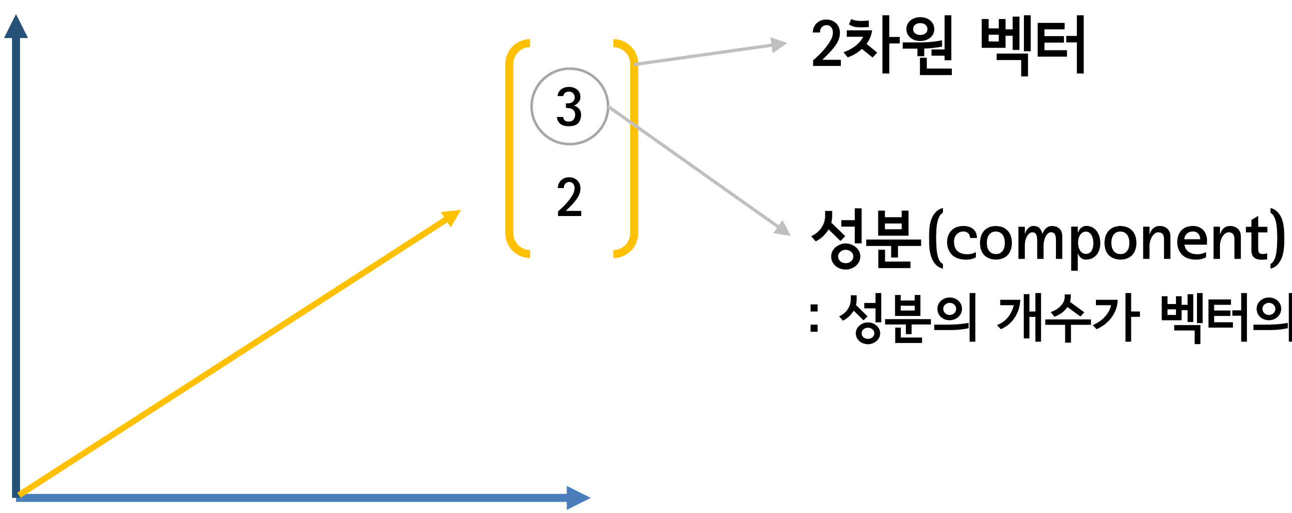
: 데이터 분석의 기초이자 필수

고차원에 존재하는 데이터를 효율적으로 다루기 위해서는 데이터프레임화, 차원축소 등 공간을 조작할 수 있어야 하고, 그 언어로 사용되는 것이 선형대수학이다.

1) 벡터란? : 선형대수학의 기본 단위

선형대수학적 관점

: 벡터를 공간 상에 위치, 물리학적 관점 + 컴퓨터적 관점



: 성분의 개수가 벡터의 차원을 결정

3) 선형결합

: 임의의 벡터들의 덧셈으로 새로운 벡터 생성

선형 결합(Linear Combination)

임의의 스칼라 a, b와

임의의 벡터 v, w에 대해서

av + bw 형태의 표현

$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ 의 선형 결합으로 모든 2차원 벡터를 만들 수 있다!

2) 선형변환에서 '선형'의 의미 :선형 결합 후 함수 값 = 각 벡터 함수값의 선형결합

Linear Transformation

"선형 변환"

T 변환의 정의역에 있는

임의의 u, v 벡터에 대해

$$T(cu+dv) = cT(u) + dT(v)$$

1) 행렬 : 선형변환(Linear Transformation) 의 표현

$$a\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

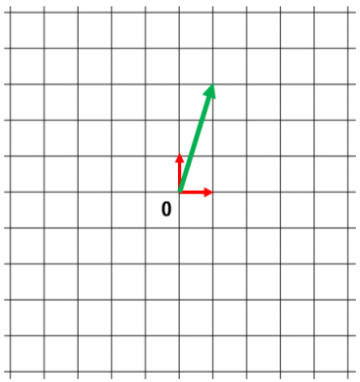
변환된 두 기저벡터의 선형결합은

변환된 두 기저벡터를 컬럼으로 가지는

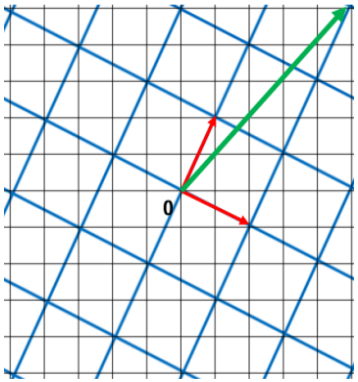
행렬과 벡터의 곱으로 표현 가능

6) 역행렬 : 선형변환 되돌리기

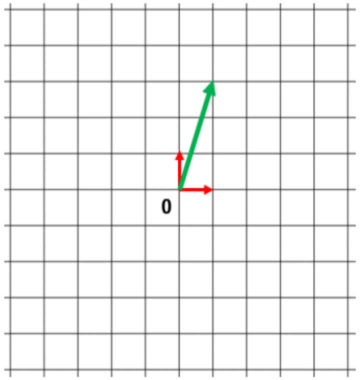
이미 실행된 선형 변환을 다시 되돌리는 행렬, A^{-1}



$$A \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



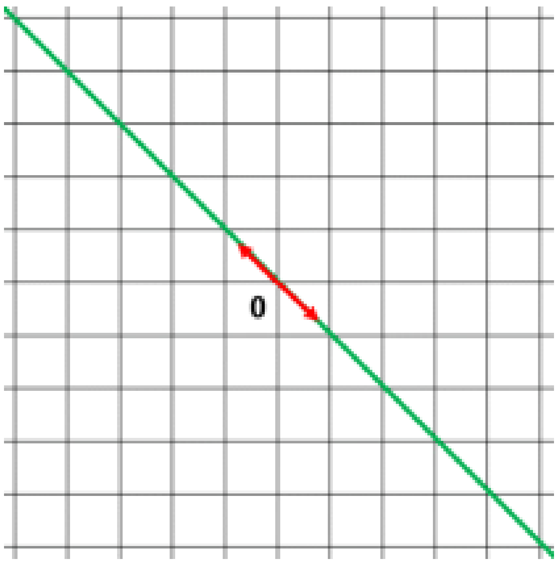
$$A^{-1} \quad \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$



① $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 일 때, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

② $A * A^{-1} = I$ (단위행렬)

6) 역행렬이 없는 경우 : 공간을 압축시키는 선형변환일 때



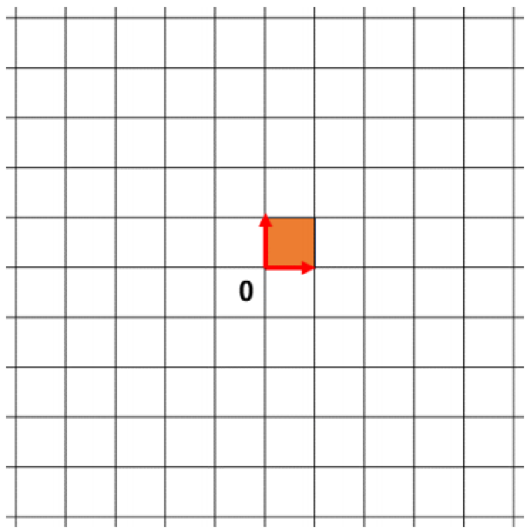
1차원으로 변형된 벡터가
다시 어떤 2차원 벡터로
변환되어야 하는지 알 수 없다.

A라는 선형변환이 **차원을 압축**시킨다면,
A의 역행렬은 존재 ✖

7) 행렬식 : 공간 변화 표현

행렬식은 선형변환이 공간을 얼마나 변환시키는지를 알려준다.

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 행렬의 Determinant 는 6, 공간의 크기를 6배로 확장!

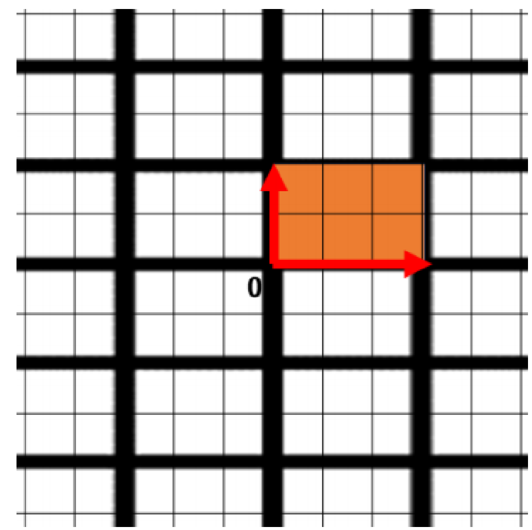


$\det A = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 넓이: 1*1

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 3배

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2배



$\det A = 6$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 넓이: 3*2

1) 아핀변환 :선형변환 + 이동변환

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\text{선형변환}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}_{\text{이동변환}}$$

Bias 항

아핀 변환은 선형 변환 + 이동 변환을 일컫는 말!

2) 아핀변환(Affine Transformation)을 선형변환으로 표현

아핀변환

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{선형변환}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}_{\text{이동변환}}$$

선형변환

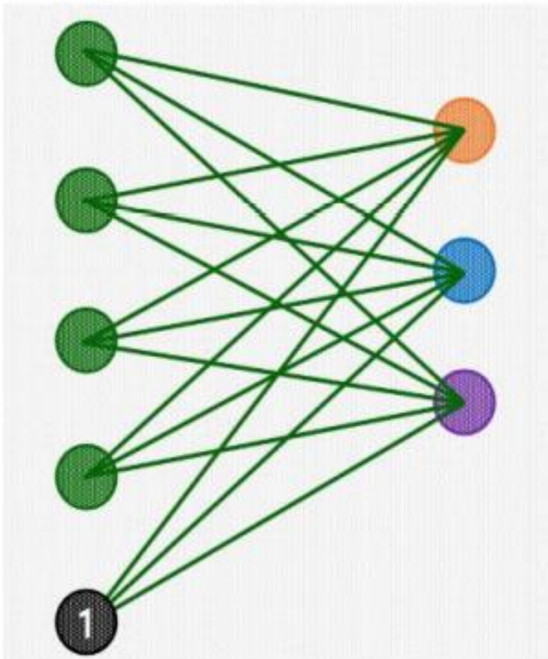
$$a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

*Matrix화

2차원 벡터 → 3차원 벡터

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) 아핀변환과 딥러닝 : Linear transformation + bias term



┌아핀변환

$$\begin{bmatrix} 0.2 & -0.5 & 0.1 & 2 \\ 1.5 & 1.3 & 2.1 & 1 \\ -.2 & 0.3 & 0.7 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56 \\ 231 \\ 24 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 \\ 3.2 \\ -1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -96.8 \\ 439.9 \\ 71.1 \end{bmatrix}$$

$$= 56 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.5 \\ -.2 \end{bmatrix} + 231 \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} + 24 \begin{bmatrix} 0.1 \\ 2.1 \\ 0.7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1.3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1.1 \\ 3.2 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.5 & 0.1 & 2 & 1.1 \\ 1.5 & 1.3 & 2.1 & 1 & 3.2 \\ -.2 & 0.3 & 0.7 & -1.3 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56 \\ 231 \\ 24 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

└선형변환으로도 표현 가능!