시계열자료분석팀

5팀

김지원
권남택
최수진
최순일
홍서영

INDEX

1

정상시계열 모형 – AR /MA

- **오차항 Y_t의 공분산 행렬** (약정상성을 띤다고 가정)

i. 백색잡음인 경우

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(Y_1,Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1,Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_1,Y_n) \\ \mathrm{Cov}(Y_2,Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_2,Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_2,Y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(Y_n,Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_n,Y_2) & \dots & \mathrm{Cov}(Y_n,Y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

다른 시점과 독립이라 모두 0

분산($\gamma(0) = \delta^2$)만 알면 끝!

∴ 모델링 끝!

- 정상 시계열 모형의 종류

AR 모형
(Auto-Regressive)

MA 모형
(Moving Average)

ARMA 모형
(AR + MA)

"AR모형"

: 현 시점의 상태(관측치)를 과거 시점 상태들의 선형결합으로 나타내는 모형

X_t $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p},$

AR(1): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$

→ 1 시점 전의 관측치로 현재 관측치를 표현

AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$

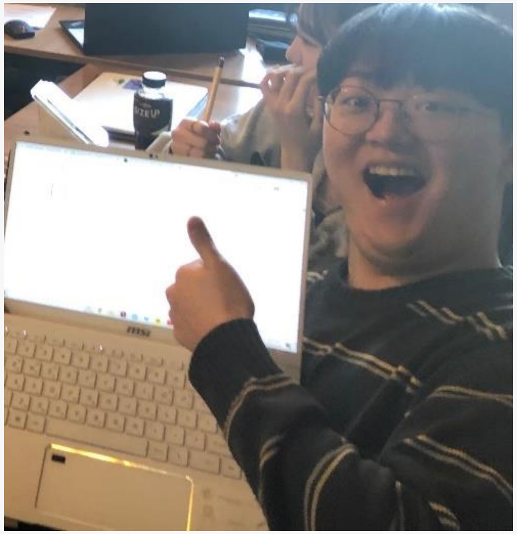
→ p 시점 전의 관측치들로 현재 관측치를 표현

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $\emptyset_p$: 자기회귀계수

"AR모형"

: 현 시점의 상태(관측치)를 **과거 시점 상태들**의 선형결합으로 나타내는 모형

- E.g.) 순일이의 시험성적은 이전 두 시험 성적에 영향을 받는다면?



AR(2): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t$

X_t : 순일이의 이번 시험 성적

X_{t-1}, X_{t-2}: 순일이의 이전 시험 성적들

ϕ_1, ϕ_2 : 이전 순일이의 시험 성적에 대한 가중치

Z_t : 우리가 예측하지 못한 정도(오차)

"MA모형"

: 현 시점의 상태(관측치)를 과거 시점 오차들의 선형결합으로 나타내는 모형

X_t $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-q}$

MA(1): $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$

→ **1 시점 전**의 오차항으로 현재 관측치를 표현

MA(q): $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$

→ **q 시점 전**의 오차항로 현재 관측치를 표현

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, θ_p : MA 매개변수

"MA모형"

< MA 모형의 가역성 만족 조건 >

$$X_t = (1 - B\theta_1 - B^2\theta_2 - \cdots - B^q\theta_q)Z_t$$

특성함수 $\boldsymbol{\theta(B)}$ = **0의 근의 절대값이 1보다 커야한다**

$\boldsymbol{\theta(B)\ :\ 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q}$

ex) MA(1)일때, $(1 - \boldsymbol{\theta} B) = 0$ 의 근은 $\frac{1}{\boldsymbol{\theta}}$

$\left|\frac{1}{\boldsymbol{\theta}}\right| > 1$ 이면, **가역성**이 만족된다!

AR 모형? Or MA 모형?

우리가 가지고 있는 시계열에 어떤 모형이 적절한지는 어떻게 알지?

AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$

→ **p 시점 전**의 관측치들로 현재 관측치를 표현

MA(q): $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$

→ **q 시점 전**의 오차항로 현재 관측치를 표현

Duality

“쌍대성”

- AR과 MA의 3가지 쌍대성

	AR	MA
조건	정상성 조건, 인과성 조건 필요	가역성 조건 필요
ACF	지수적으로 감소하는 ACF	절단된 ACF
PACF	절단된 PACF	지수적으로 감소하는 PACF

Duality

"쌍대성"

조건① + 조건②

AR(p) 모형에서의 인과성, 정상성 조건

MA(q) 모형에서의 가역성 조건

AR(n) ⇔ MA(∞)

유한차수의 AR을 무한차수의 MA과정으로,

MA(n) ⇔ AR(∞)

유한차수의 MA을 무한차수의 AR과정으로!

나타낼 수 있는 성질

※ 해당 수식은 부록 참조!

"ARMA(p,q)"

: 자기 회귀 이동 평균 과정, AR과 MA를 동시에 사용해 모수의 개수를 줄임

AR(p) MA(q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} + Z_t$$

→ p 시점 전의 관측치와 q 시점 전의 오차항으로 현재 관측치를 표현

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $\emptyset_p$: 자기회귀계수 θ_p : MA 매개변수

"ARMA(p,q)"

: 자기 회귀 이동 평균 과정, AR과 MA를 동시에 사용해 모수의 개수를 줄임

- **후향연산자를 사용한 표현**

$$X_t = \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^p X_t - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 Z_t - \cdots - \theta_q B^q Z_t + Z_t$$

$$= (\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \cdots + \phi_p B^p) X_t + (1 - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) Z_t$$

AR + MA

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 + \cdots - \phi_p B^p\right) X_t = (1 - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) Z_t$$

$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$ 로 나타낼 수 있다.