선형대수학팀

3팀
이재현
김규범
김민지
이정우
조혜현

INDEX

기본 개념

벡터(Vector)

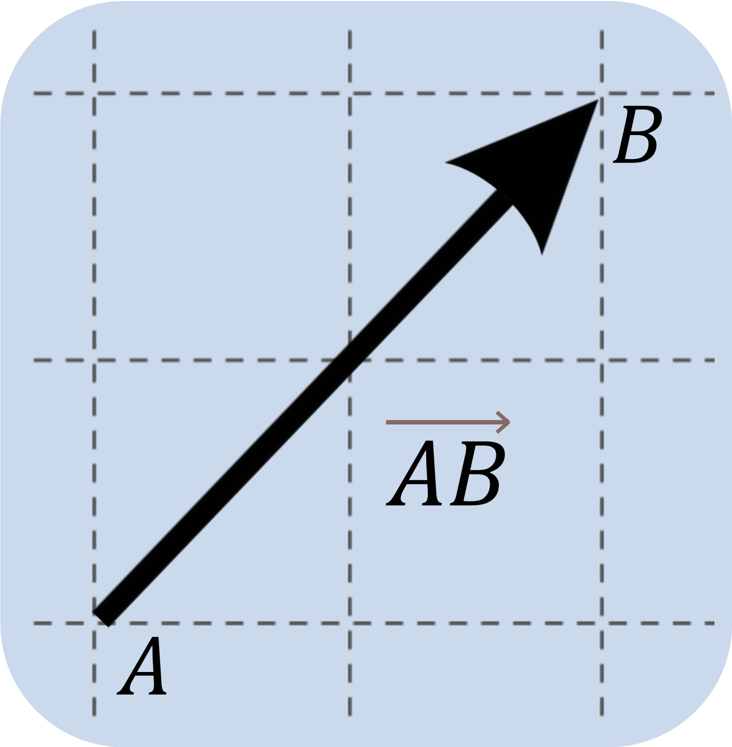
"크기"와 **"방향"**을 가진 단위

공간에서 화살표로 표기

방향 : 끝 부분을 가리키는 방향

크기 : 시작 지점과 끝 지점까지의 거리

cf. 스칼라(Scalar) - 크기만 가짐



기본 개념

행렬(Matrix)

수나 식을 직사각형 모양의 행과 열로 배열

행(m)과 열(n)의 개수로 크기($m \times n$) 표현

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

원소(element)

또는 성분(entry)

선형 방정식이란?

선형 방정식

최고 차수의 항의 차수가 1을 넘지 않는 다항식

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 의 형태

선형방정식의 집합 → **연립선형방정식** 혹은 **선형시스템**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b
\end{aligned}
$$

선형시스템 나열

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$\mathbf{A}\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$

m x n　　n x 1　　m x 1

Ax = b 판별 및 해 구하기

문자의 개수가 많거나 일반화된 해를 찾기 힘들 때

행렬과 벡터를 이용한 선형방정식의 꼴로 만들어 해결 가능!

"*Gauss-Jordan Elimination*"

Carl Friedrich Gauss

Wilhelm Jordan

계수만으로 행렬을 생성한 후

Elementary Row Operation을

이용하여

Reduced Row Echelon Form으로

만들어 연립선형방정식의 해를 구함

Ax = b 해 구하기

Row Echelon Form(REF)

다음과 같은, (1) ~ (3)을 만족하는 행렬

1) 한 행에서 제일 처음 나타나는 0이 아닌 수는 1이며,

이를 leading 1 혹은 pivot 이라고 함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Gauss – Jordan Elimination

Elamantary Row Operations 를 통해
RREF로 만들어
연립방정식의 해를 구하는 방법

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

x = 1, y = 2, z = -1

선형 변환이란?

선형 변환
(Linear Transformation)

$Ax = b$를 살펴보면, 열 벡터 x가 행렬A을 곱해서 열 벡터 b로 변형됨

x가 b로 mapping 되었다고 할 수 있음

T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$일 때,

임의의 벡터 u, v , 스칼라 a, b에 대해

① T(au) = aT(u)

② T$(u+v)$ = T(u) + T(v)

를 만족하는 경우, **선형변환**이라고 함

기저 변환이란?

기저 변환 (Basis Change)

x가 b로 변하는 선형 변환을 x를 이루고 있는 **기저 벡터공간 B**에서 **다른 기저 벡터공간 $\tilde{B}$로 의 변환**으로 생각할 수 있음

즉, 좌표축을 변환하는 것

Example

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이 행렬 A에 의해 $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$로 변환

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

선형변환 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$에 의해 기저 $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$에서

기저 $\tilde{B} = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \}$으로 변환

선형 결합(Linear Combination)

상수배와 **벡터합**의 연산 결과물

벡터

$$\alpha_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

상수

선형 독립(Linear Independent)

$\forall \boldsymbol{a_i} = \mathbf{0}$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

선형 방정식이 trivial solution만 가짐

벡터 $x_1, x_2, \cdots x_n$이 **선형 독립**이면,

어떤 벡터도 다른 벡터들의 **선형 결합으로 표현될 수 없음**

벡터공간의 엄밀한 정의

벡터 공간

벡터의 합과 상수배에 대해 닫혀 있으며,
다음과 같은 성질을 만족함

$+ : V \times V \rightarrow V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$

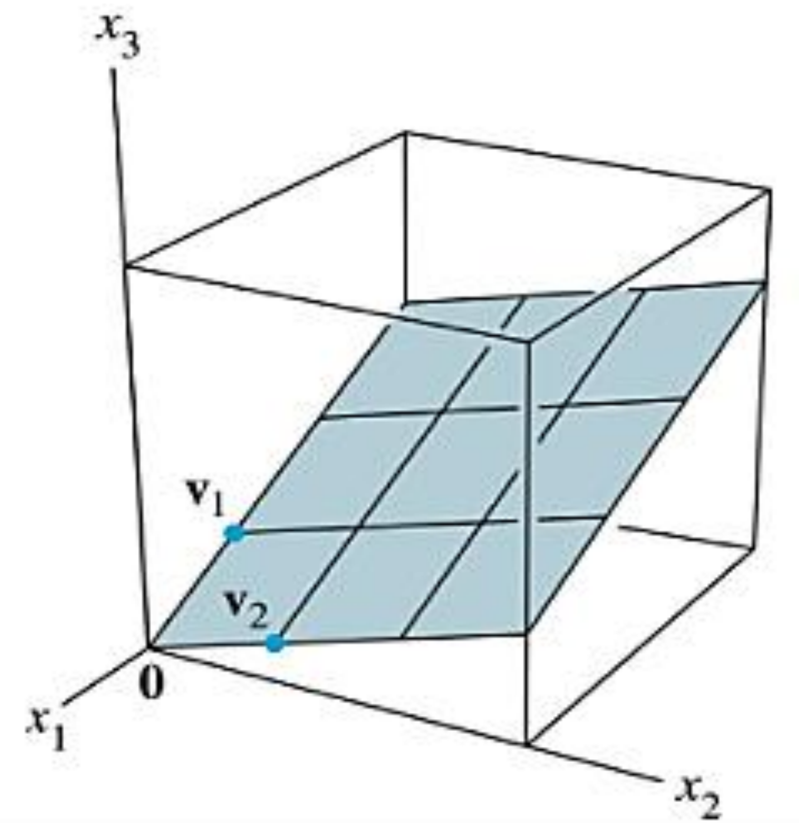
벡터의 합

$a + b = b + a$	교환법칙
$(a + b) + c = a + (b + c)$	결합법칙
$a + 0 = a$	항등원
$a + (-a) = 0$	역원

상수배

분배법칙	$c(a + b) = ca + cb$
결합법칙	$c(ka) = (ck)a$
	$(c + k)a = ca + ka$
항등원	$1a = a$

벡터공간

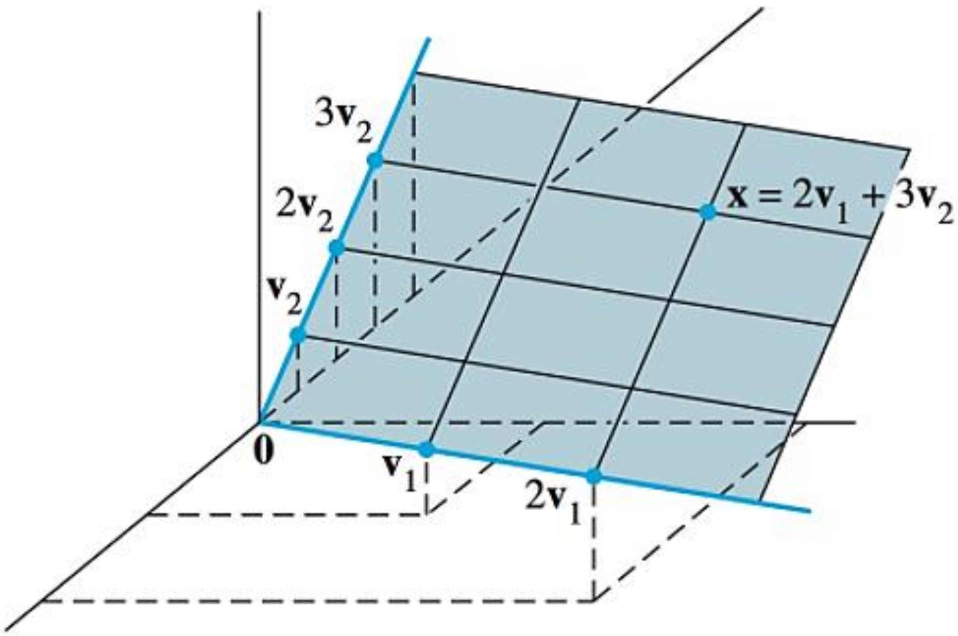


벡터 부분공간
(Vector Subspaces)

벡터 공간의 부분집합 중

벡터 공간의 조건을 만족하는 집합

Span



Span

벡터들의 선형결합에 의해
만들어지는 벡터공간

Span$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

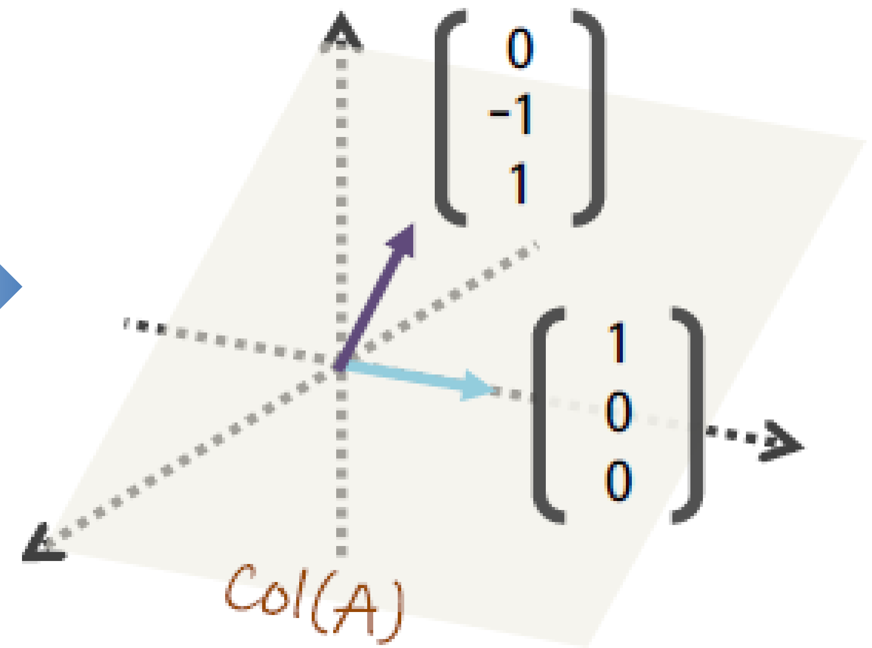
: 벡터 $v_1, v_2, \ldots, v_n$이
만들어내는 벡터공간

열공간

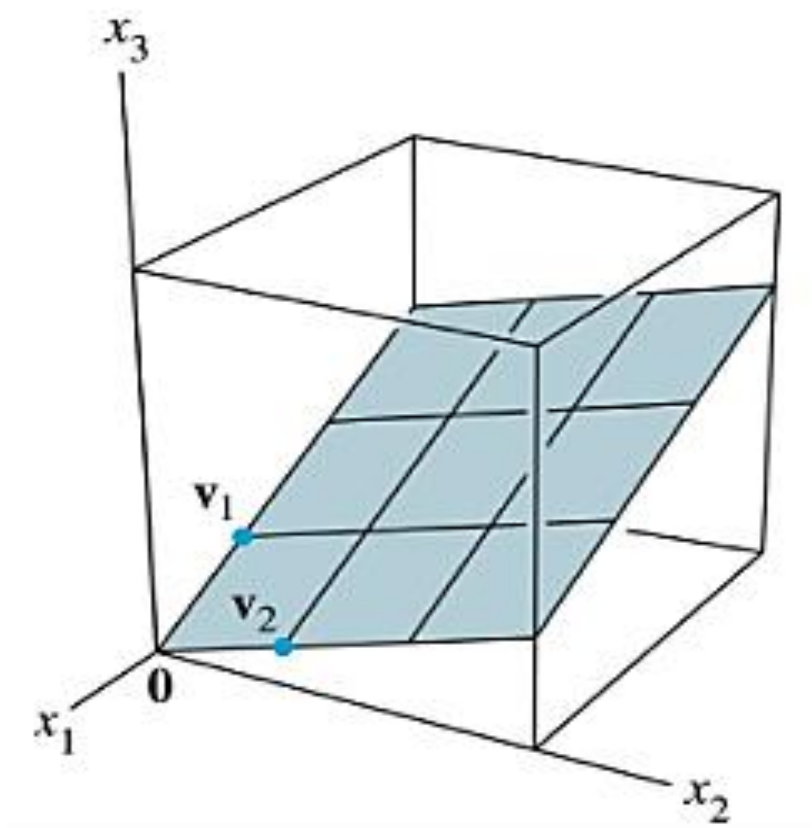
열공간 (Column Spaces)

행렬 A의 **열벡터의 span**으로 만들어지는 벡터 공간

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



차원과 행렬의 계수



차원
(Dimensions)

벡터 공간의 **기저**를 이루는

벡터의 개수

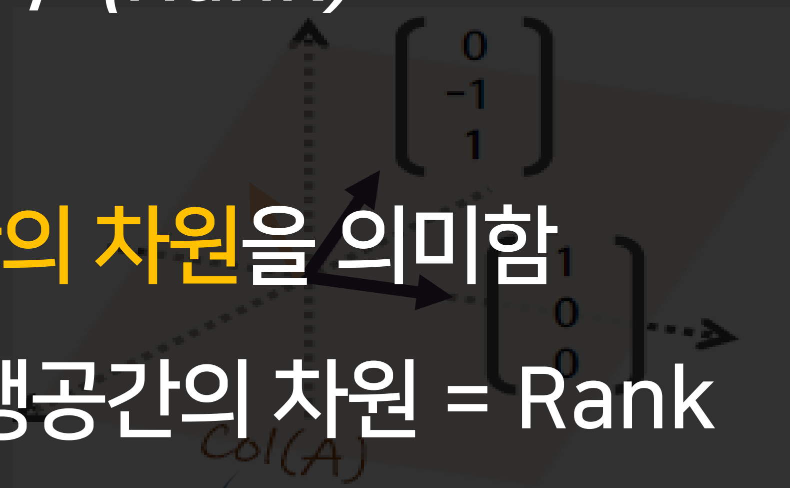
차원과 행렬의 계수

행렬의 계수 (Rank)

열공간의 차원

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot column : 2개



2차원 열공간

- Rank는 열공간의 차원을 의미함

열공간의 차원 = 행공간의 차원 = Rank

“열공간의 차원은 pivot column의 개수와 같음”