선형대수학팀

3팀
이재현
김규범
김민지
이정우
조혜현

INDEX

노름의 공식

$$L_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

p는 노름의 **차수**

ex. p가 1이면 L1 Norm, p가 2이면 L2 Norm

내적(Inner Products)

내적(Inner Products)

각 성분끼리의 곱의 합

$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n)$, $y = (y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n)$ 일 때,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

직교성(Orthogonality)

직교(Orthogonal)

두 벡터 사이의 각도가 **90°(직각)**

$$cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$$ 에서 $\theta = 90°$ 이면

$$" \boldsymbol{x \cdot y = 0} "$$

직교성(Orthogonality)

직교행렬(Orthogonal Matrix)

"$\mathbf{AA^T = A^TA = I}$", "$\mathbf{A^T = A^{-1}}$"를 만족하는 **정사각행렬**

열벡터들이 **정규직교**

직교행렬을 이용한 선형 변환은

input vector x의 크기가 변하지 않음

집합의 직교성

두 벡터의 직교성을 집합에 일반화

즉, 벡터들의 집합 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$에서 각 x_i가 서로 직교하는 집합

직교집합(Orthogonal Set)

$x_i \cdot x_j = 0$,

where $i \neq j$

정규직교집합(Orthonormal Set)

$x_i \cdot x_j = 0$, where $i \neq j$

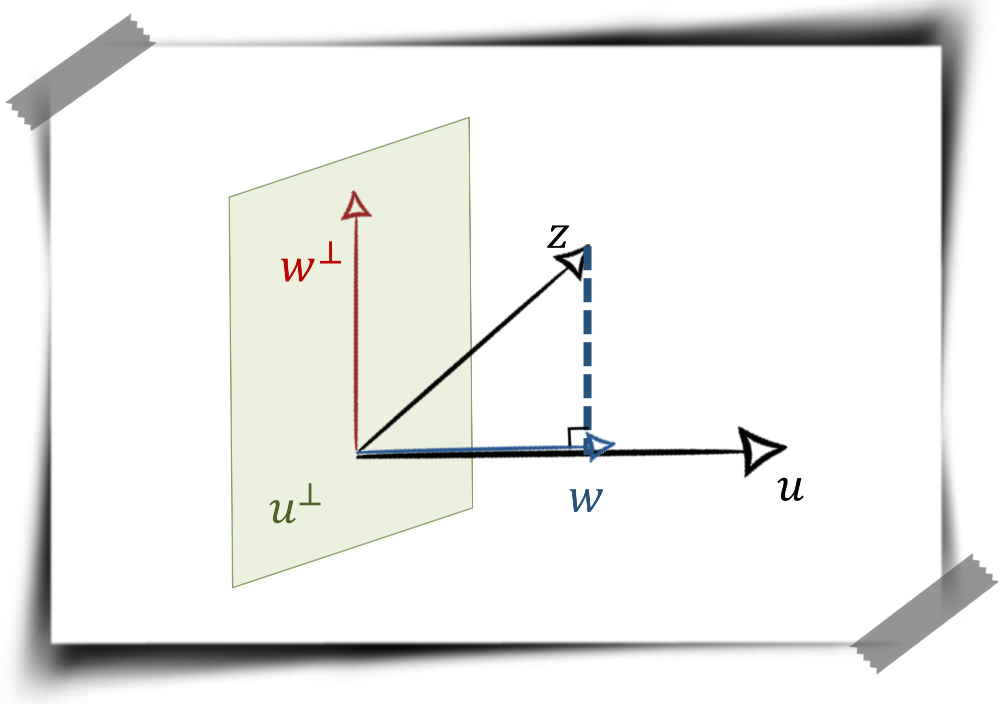
&

$\|x_i\| = 1$

직교여공간(Orthogonal complement)

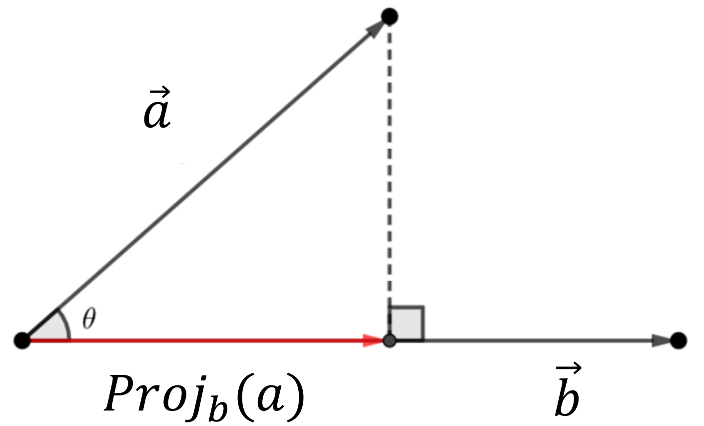
직교여공간(Orthogonal Complement)

집합 S가 공집합이 아닌 R^n에 속하는 벡터의 집합일 때, S에 속하는 **모든 벡터들에 직교하는 벡터들의 집합**



2 기하학적 접근의 응용

정사영

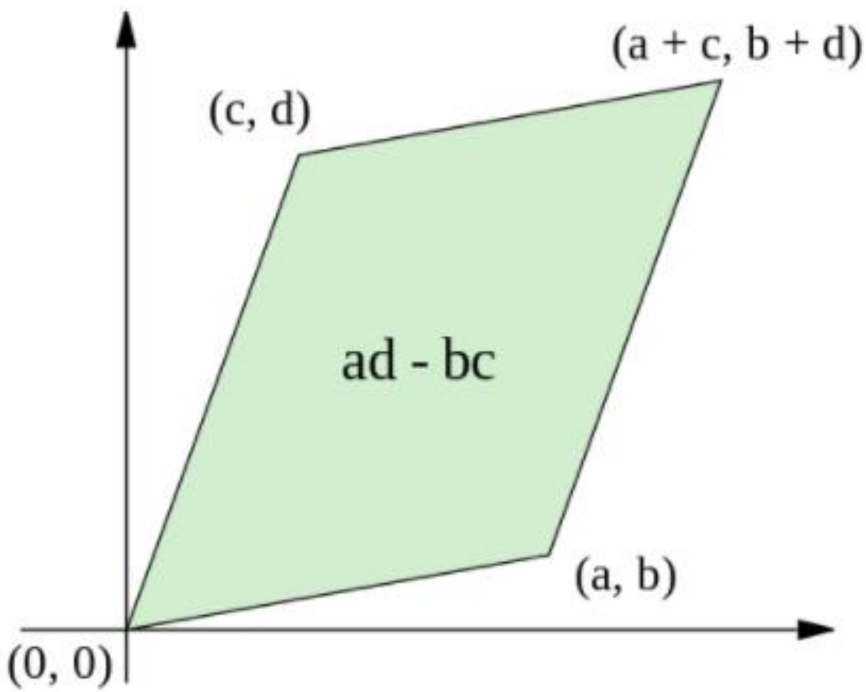


$$Proj_b(a)\text{의 크기} = \|a\| cos\theta = \|a\| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|a\|\|b\|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|b\|}$$

$$Proj_b(a)\text{의 방향} = \frac{\vec{b}}{\|b\|}$$

$$Proj_b(a) = \text{크기} \cdot \text{방향} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|b\|^2}\vec{b}$$

행렬식(Determinant)



행렬식

- 정사각행렬이 실수에 대응되는 함수
  행렬 A에 대해 **det(A)**로 나타냄
- det(A) = 0 ↔ A의 역행렬이 존재하지 않음
- A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 일 때, det(A) = $ad - bc$

행렬식 및 대각합

대각합(Trace)

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 에 대해 $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
- 정사각행렬 A의 대각합(trace)은 대각성분의 합

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$ 일 때 tr(A) = 1+ 7 + 2 = 10

정사각행렬

고유값과 고유벡터

고유값과 고유벡터

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에 대해 영벡터를 제외한 $x \in \mathbb{R}^{n}$에서

$Ax = \lambda x$ 일 때, λ를 고유값, x를 고유벡터라고 함

n x n 정사각행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

고유벡터 $(\neq \vec{0})$

$$A\,\mathrm{x} = \lambda\,\mathrm{x}$$

고유값

$$Ax = \lambda x = \lambda I x$$

$$Ax - \lambda I x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Ax = λx 에서
고유벡터 x가 존재하기 위한 조건?

$(A-\lambda I)x = 0$ 에서 영벡터가 아닌 x가 존재해야 함

만약 $(A-\lambda I)$의 역행렬이 존재한다면

$\mathrm{x} = (A-\lambda I)^{-1}0$ 이 되므로 x는 영벡터가 되어

고유벡터라고 할 수 없음

이는 $\det(A-\lambda I) = 0$를 만족해야 함을 의미

양확정행렬 (Positive definite matrix)

양확정행렬

"양수를 확실히 만드는 행렬"에서 유래

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 영벡터를 제외한 임의의 $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T A x > 0$

Example

A = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$

x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 로 표기하면,

$$x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 20x_2^2$$

이 때, $2x_1^2 + 12x_1x_2 + 20x_2^2 = 2(x_1 + 3x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$

따라서 A는 양확정행렬

촐레스키분해(Cholesky Decomposition)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L^T}$$

대칭 & 양확정 행렬인 행렬 A 에 대해 다음이 성립

1) 0이 아닌 성분이 양수로 구성된 하삼각 행렬 L에 대해 $A = LL^T$ 을 만족
2) 이때 L은 행렬 A에 대해 유일하게 존재하며 촐레스키 팩터라고 정의

촐레스키 분해 → ***행렬식 계산을 간단화***

대각행렬이란?

대각행렬(Diagonl Matrix)

대각선에만 0이 아닌 성분이 있고,
그 외의 성분은 모두 0인 행렬

$$D = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

대각행렬은 **행렬식**, **거듭제곱**, **역행렬 계산** 등에서 굉장한 이점을 지님.

고유값 분해란?

고유값 분해(EigenDecomposition; EVD)

어떤 정사각행렬 $D \in \mathbb{R}^{nxn}$에 대해

A의 고유벡터들이 $\mathbb{R}^{n}$의 기저를 형성할 때,

$A = PDP^{-1}$만들 수 있음

↓

$P \in \mathbb{R}^{nxn}$이며,

D는 각 대각 성분이 A의 고유값으로 구성된 대각행렬

위의 과정을 **고유값 분해**라고 부름

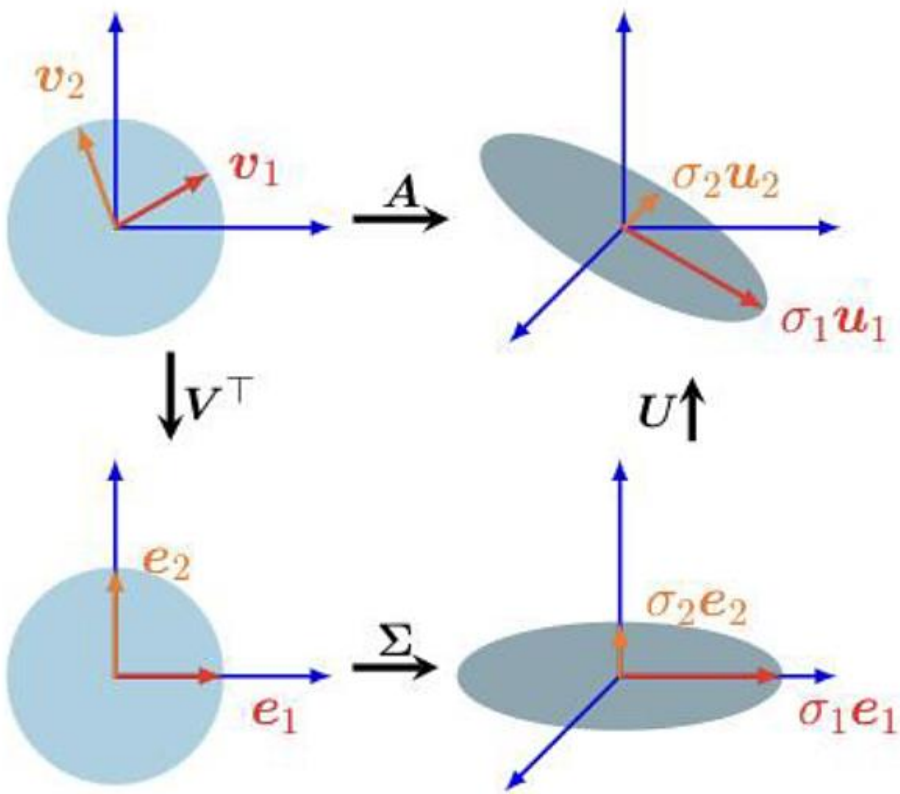
특이값 분해의 개념

특이값 분해

- A : m x n 행렬이며 계수(rank)가 $0 \le \text{rank}(A) \le \min(m,n)$
- V^T : n x n 행렬, U : m x m 행렬, Σ : m x n 행렬
- U와 V는 직교행렬이며 Σ는 성분이 $\Sigma_{ii} \neq 0$, $\Sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$인 행렬

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{U} \times \underset{m \times n}{\Sigma} \times \underset{n \times n}{V^T}$$

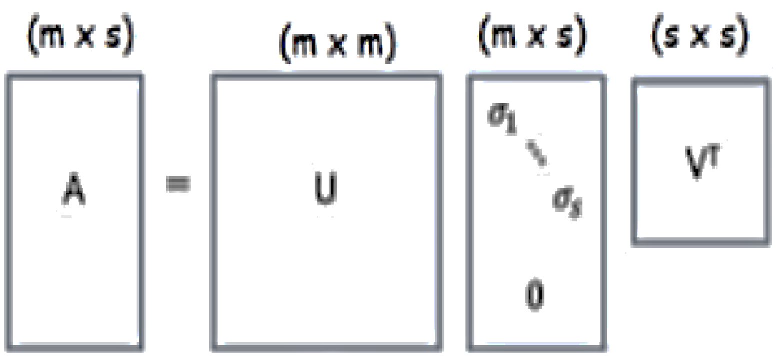
특이값 분해의 기하학적 해석



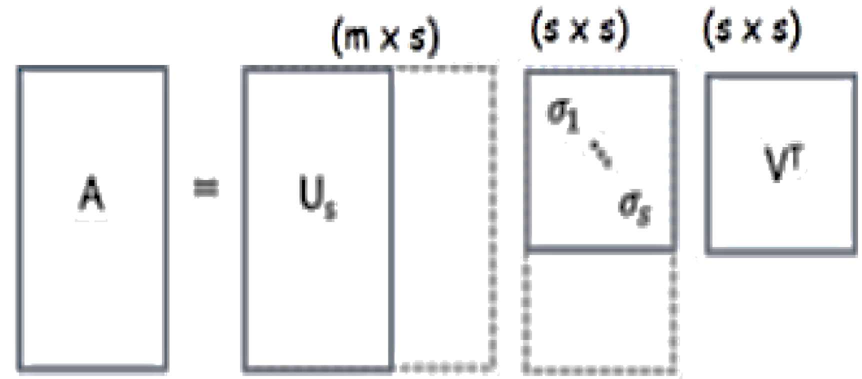
- V^T : Domain(정의역)에서 표준 기저에서 다른 기저로 변환 (Basis Change)
- Σ : 새로운 기저에서 값 스케일링
- U : 회전(Rotation)을 통해 Codomain(공역)에서 기저 변환

Reduced SVD

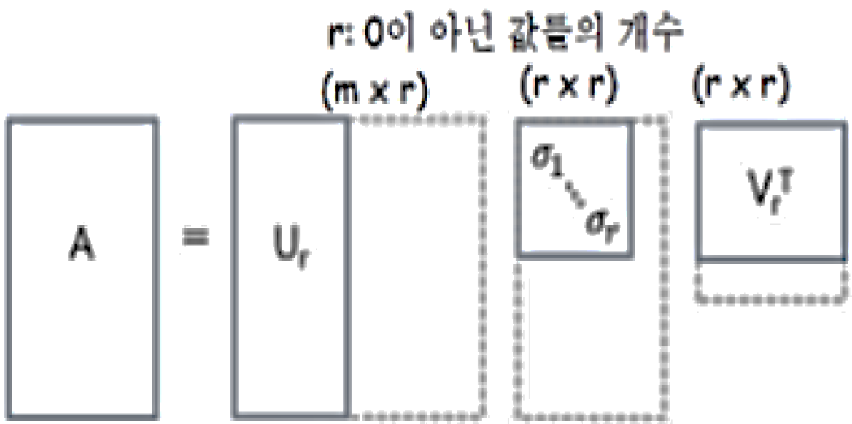
Reduced SVD의 종류들



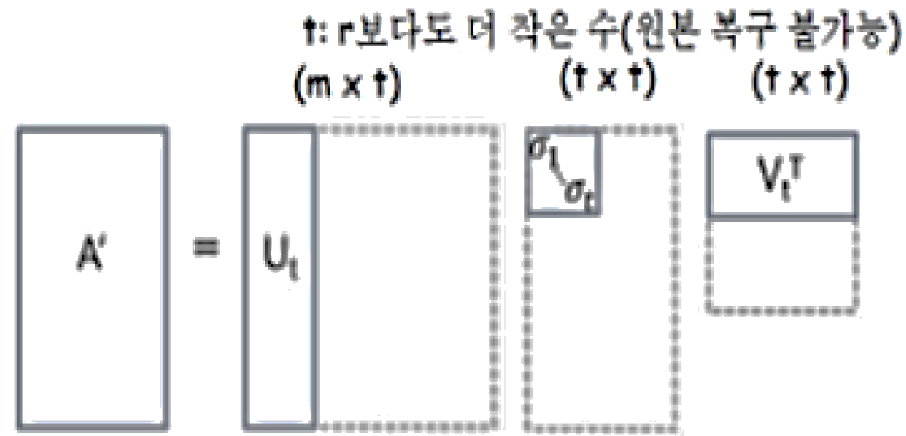
<그림 2> full SVD



<그림 3> thin SVD



<그림 4> Compact SVD



<그림 5> Truncated SVD