시계열자료분석팀

5팀

김규범
김민지
김준서
안세현
정희철

- 자기상관함수 Auto-Correlation Function (ACF)

자기상관함수의 성질

$$\rho(0) = 1$$

$$\rho(-h) = \rho(h)$$

$$|\rho(h)| \leq 1, |\gamma(h)| \leq \gamma(0)$$

$\rho(h)$

시차가 h인 시계열 간의 상관관계를 의미

정상성을 만족할 경우 시점이 아닌 시차에만 의존하는 것

- 부분자기상관함수 Partial Auto-Correlation Function (PACF)

부분자기상관함수

부분상관함수

X_t 와 X_{t+k} 사이에 존재하는

$$\rho_{XY,Z} = \frac{E\{[X - E(X|Z)] \cdot [Y - E(Y|Z)]\}}{\sqrt{E[X - E(X|Z)]^2 \cdot E[Y - E(Y|Z)]^2}}$$

* Z는 X, Y의 상관관계에 영향을 주는 요소

부분 (Partial) ?

- 자기회귀모형 AR (Auto-Regressive Model)

AR 모형

$$AR(p) : X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$= \phi_1 BX_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^p X_t + Z_t$$

$$\therefore \ Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t$$

특성함수 $\phi(B)$

AR 모형의 조건

정상성과 인과성

정상성

시계열의 확률적 특성이

시점에 의존하지 않음

인과성

t시점의 관측값이

과거시점의 오차항으로

설명될 수 있음

2 AR

AR 모형의 조건

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$X_t = \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t$$

$$X_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$\vdots$$

$$X_t = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

AR 모형의 조건

$|\phi_1| < 1$

$$X_t = \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

$$\lim_{M \to \infty} \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} = 0$$

$\sum_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$: 정상시계열의 선형결합

정상성과 오차항으로 설명되는 **인과성을 만족**

MA (Moving Average) 모형

MA 모형

과거 시점의 오차항을 이용해 관측값 설명 ($Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$)

MA(1) 모형	1시점 전까지의 오차들의 선형 결합으로 표현 $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$
MA(q) 모형	q시점 전까지의 오차들의 선형 결합으로 표현 $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} \cdots - \theta_q Z_{t-q}$

$BX_t = X_{t-1}$ **후향 연산자**로 표현 가능

MA (Moving Average) 모형

특성 함수

과거 시점의 오차항을 이용하여 관측값을 설명 ($Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$)

$$
\begin{aligned}
X_t &= Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \\
&= Z_t - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 Z_t - \cdots - \theta_q B^q Z_t \\
&= \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) Z_t
\end{aligned}
$$

특성함수 θ(B)

$X_t = \theta(B) Z_t$ 로 표현 가능

MA 모형의 조건

MA모형의 조건

1. 백색 잡음 가정하는 오차항의 선형 결합

[MA모형 “가역성” 만족 조건]

“$\theta(B)$ = 0의 근의 절댓값” 〉 1

정상성	인과성	가역성
정상 시계열의 선형 결합으로 표현	과거 오차항의 선형 결합으로 표현	**추가적인 조건 필요**

● 쌍대성(Duality)의 의미

쌍대성(Duality)

AR과 MA의 쌍대성

유한차수의 AR 과정을 **무한차수의** MA 과정으로

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t$$

$$= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$\vdots$$

$$= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

● 쌍대성(Duality)의 의미

쌍대성(Duality)

AR과 MA의 쌍대성

유한차수의 MA 과정을 **무한차수의 AR** 과정으로

$$X_t = Z_t - \theta_1 B Z_t$$

$$X_t = (1 - \theta_1 B) Z_t \rightarrow Z_t = \frac{1}{1 - \theta_1 B} X_t$$

$$(1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \cdots) X_t = Z_t$$

$$X_t + \theta_1 B X_t + \theta_1^2 B^2 X_t + \cdots = Z_t$$

$$X_t = -\theta_1 B X_t - \theta_1^2 B^2 X_t - \cdots + Z_t$$

ARMA 모형

특성함수

1. ARMA 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

2. ARMA 모형의 특성함수

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$= \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \cdots + \phi_p B^p X_t + Z_t - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q B^q Z_t$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) X_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) Z_t$$

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

ARMA 모형

모형의 조건

ARMA 모형은 AR의 조건과 MA의 조건인 정상성과 가역성을 모두 충족시켜야 함

ARMA(1,1)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 B)X_t = (1 - \theta_1 B)Z_t$$

$1 - \phi_1 B = 0, 1 - \theta_1 B = 0$의 근의 절댓값이 모두 1보다 커야 함

모형의 적합

순서

주어진 시계열 자료를 가장 잘 설명해주는 모형은 어떻게 선택하는 것일까요?

모형 식별

AR차수 p와
MA차수 q의 선택

모수 추정

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p,$
$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q,$
$\mu, \sigma_\varepsilon^2$의 추정

모형 진단

잔차분석
과대적합분석

NO

최종 예측모형으로 선택

모형의 적합

1. 모형의 식별

시계열 그래프와 ACF, PACF를 이용해 차분의 필요성과

ARMA 모형의 차수인 p와 q를 잠정적으로 선택하는 단계

AIC = $n \ln \hat{\sigma}^2{}_{\varepsilon} + 2(p+q)$ → 가장 작은 값을 가진 모형 선택

SBC = $n \ln \hat{\sigma}^2{}_{\varepsilon} + (p+q) \ln n$ → 가장 작은 값을 가진 모형 선택

● 모형의 적합

2. 모수의 추정

1 최대우도추정법

관측된 시계열의 결합확률밀도함수인 가능도함수를 최대로 하는 모수의 추정량을 구하는 방법

2 최소제곱추정법

오차제곱합을 최소로 하는 추정법

3 적률추정법

모집단의 적률에 대응되는 표본적률의 방정식을 풀어 추정량을 구하는 방법

모형의 적합

3. 모형 진단

잔차 플랏, 잔차의 ACF와 PACF 등을 사용한

잔차 분석과 과대적합을 이용해 잠정모형의 적합 정도를 진단

↓

잠정모형의 타당성이 입증된다면,

최종적으로 모형이 적합된 것으로 판단

↓

예측모형으로 사용

정리

1) 정상성과 가역성

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
정상성	조건필요	자체만족	조건필요
가역성	자체만족	조건필요	조건필요

2) 모형의 ACF와 PACF 패턴

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
ACF	지수적으로 감소	q+1차부터 절단	지수적으로 감소
PACF	p+1차부터 절단	지수적으로 감소	지수적으로 감소