선형대수학팀

3팀
박이현
송지현
유종석
김민서
이주형

벡터와 스칼라

벡터(Vector)

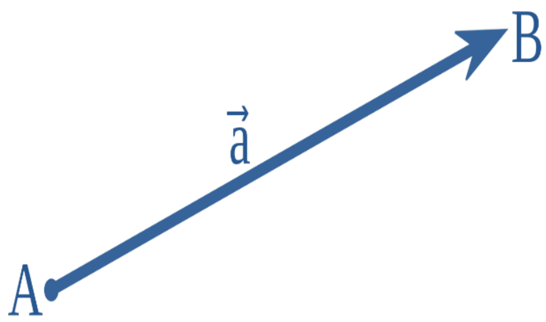
크기와 **방향**을 동시에 나타내는 단위

공간 내에서 일반적으로 **화살표**로 표시

스칼라(Scalar)

크기만 나타내는 단위

일반적으로 **상수**라고 표현



방향 : 끝 부분을 가리키는 방향

크기 : 시작과 끝 사이의 거리

영벡터 : 시작점과 끝점이 0인 벡터

벡터의 기본 연산 & 행렬

벡터의 기본 연산은 두 가지에 대해 닫혀있음

벡터의 덧셈

$$u + v = v + u$$
$$(u + v) + w = u + (v + w)$$
$$u + 0 = 0 + u = u$$
$$u + (-u) = -u + u = 0$$

벡터의 스칼라배

$$c(u + v) = cu + du$$
$$(c + d)u = cu + du$$
$$c(du) = (cd)u$$
$$1u = u$$

행렬(Matrix)

수나 식을 직사각형 모양의 행과 열로 배열한 것

원소 : 성분(entry)이라고도 하며, 행렬 내 요소 각각의 단위를 의미

선형방정식과 선형시스템

선형방정식이란?

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

$y = x$ 처럼 변수들이 **선형 관계**를 갖는 방정식 / 방정식 내 **최고 차수가 1**

$y = x^2$와 같은 방정식은 최고 차수가 2차 이상인 **비선형방정식**

선형시스템이란?

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

선형방정식이 여러 개 존재하는 **연립선형방정식**

일반적으로, $A\boldsymbol{x} = b$ 형태로 표기

Elementary Row Operation (ERO)

기본 행 연산
(ERO)

① 두 행의 위치 교환

② 한 행에 대해 상수배

③ 한 행에 대해 상수배 후 다른 행과 덧셈

$$x + 2y + 3z = 7$$
$$3x + y - 2z = 9$$

×3

$$x + 2y + 3z = 7$$
$$3x + 6y + 9z = 21$$

$$2x + 3y + 5z = 8$$
$$x + y + z = 3$$
$$y + 3z = 2$$

ERO를 통해 복잡한 선형시스템을 간단한 행렬로 표현 가능!

행사다리꼴(Row Echelon Form, REF)

행사다리꼴(Row Echelon Form)

ERO를 이용해 계단형으로 간단히 만든 선형시스템

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 6 \\ 0x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

확장행렬

(Augmented Matrix)

변수의 계수와 상수항만 표기

행사다리꼴의 성립조건

① **0으로만 구성된 행**은 0이 아닌 값이 존재하는 행보다 **아래에 위치**

② 각 행의 **Leading entry**는 앞 행의 Leading entry보다 **우측에 위치**

③ Column 내의 leading entry보다 **아래에 위치한 값**들은 **모두 0**일 것

4,5번이 추가되면

RREF!

④ 0으로만 구성되지 않은 행의 **leading entry가 1**일 것

⑤ **leading 1**은 해당 열의 원소 중 **유일한 0이 아닌 값**이어야 함

가우스-조던 소거법(Gauss-Jordan Elimination)

가우스-조던 소거법

ERO를 통해 복잡한 선형시스템을

기약행사다리꼴로 변환해 간단하게 연립방정식을 푸는 방법

① **원소가 모두 0인 행렬**을 가장 아래로 옮김

② **첫번째 열의 수가 0이 아닌 행**을 제일 위로 옮김

③ 다른 행의 첫 열의 수가 0이 되도록 첫 행을 상수배해서 다른 행에 더함

④ 첫 행과 열을 제외한 나머지 부분에 **①~③의 과정 반복**

⑤ 각 열에 한 개 이하의 leading 1이 존재하도록 거꾸로 ERO 진행

2 선형방정식과 선형시스템

선형시스템에서의 해집합

① 해집합이 **단 하나만 존재** (unique solution)

② 해집합이 **무수히 많이 존재** (infinitely many solution)

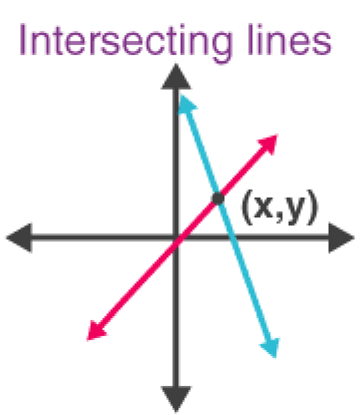
→ 해가 존재 (consistent)

③ 해집합이 **존재하지 않음** (No solution)

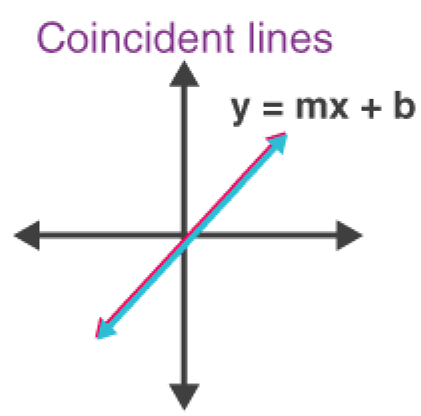
→ 해가 존재 X (inconsistent)

2차원 평면에서의 시각화

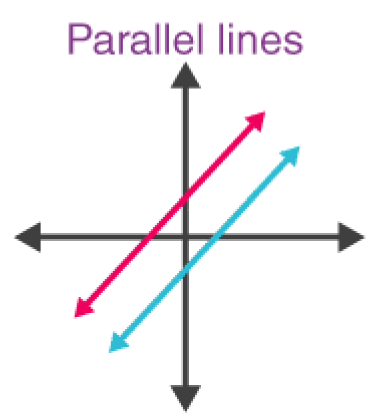
① 해집합 단 하나 존재



② 해집합 무수히 많음



③ 해집합 존재 X



선형결합과 공간생성

선형결합 (Linear Combination)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

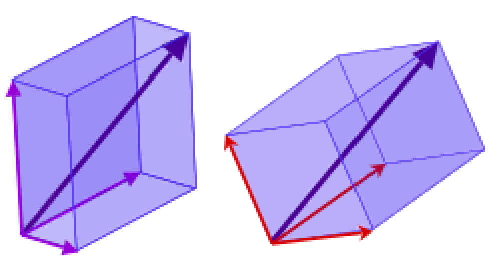
상수 $a_1, a_2, \ldots a_n$ 와 변수 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 가 각각 상수배되어 더해진 상태

여전히 최고차수는 1이기 때문에 **선형을 만족**

기저 벡터 (Basis Vector)

벡터 공간 형성의 기본이 되는 **벡터**

기저 벡터에 상수배를 하면 해당 축에 대해 벡터의 크기 조정 가능



$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

벡터 선형결합을 통해 공간을 만들어낼 수 있는데,

이를 공간생성(span)이라 함

선형결합과 공간생성

선형시스템에서 해의 존재 여부

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

선형시스템(선형방정식)을 푼다는 것의 의미는?

두 열벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$를 선형결합함으로써 형성된 벡터공간에
열벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$가 존재하는지에 대한 물음

해가 존재 → 두 벡터의 선형결합을 통해 만든 공간에 존재

해가 없음 → 두 벡터의 선형결합을 통해 만든 공간에 없음

3 선형결합과 선형독립

선형독립과 선형종속

n개의 벡터 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대한 벡터의 **선형결합**

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$$

선형독립 (Linearly independent)

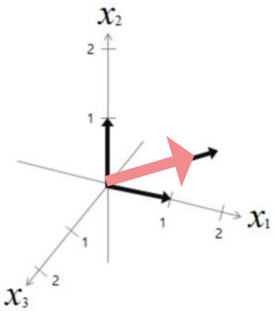
상수 c가 모두 0인 경우를 의미

선형종속 (Linearly dependent)

0이 아닌 상수 c가 존재할 경우를 의미

① **선형종속**인 경우

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$



한 벡터는 다른 벡터들의

선형결합으로 표현 가능

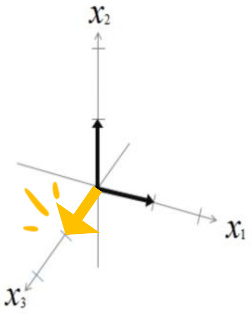
x_3방향 벡터를 선형결합으로 형성할 수 없음

따라서, 전체 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 를 만들 수 없음

$$span(v_1, v_2, v_3) \neq \mathbb{R}^3$$

② **선형독립**인 경우

$$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$



한 벡터는 다른 벡터들의

선형결합으로 표현 불가능

선형독립이 된 3개의 벡터만으로

벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 를 표현할 수 있음

$$span(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$$

선형변환이란?

선형변환 (Linear Transformation)

임의의 벡터 u, v 와 스칼라 a에 대해

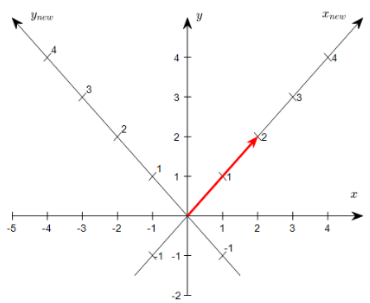
① T(au) = aT(u) / ② T(u + v) = T(u) + T(v)를 만족하면, **선형변환**임

기저변환

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + y \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

선형변환은 기저(basis)를 변환시키는 역할을 함

기저변환에 대한 해석



출처 : 공돌이의 수학정리노트, 기저의 변환

1. 기존에 존재하던 기저벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 를 변화시켜

<u>새로운 형태의 기저벡터</u>로 변환함!

→ 기존의 기저벡터를 새로운 형태의 기저벡터로 mapping시킬 수 있음

2. <u>변환된 기저벡터를 선형결합</u>해서 새로운 벡터를 형성할 수 있음

좌표축 자체가 변하는 것으로 이해

공간 형성(span)

공간 형성 (span)

벡터들의 **선형 결합**으로 **벡터공간** V이 **생성**되는 것

선형 독립인 벡터 x_1, x_2, x_3으로 3차원 공간을

나타낼 수 있음 $\rightarrow$ $span(x1, x2, x3) = \mathbb{R}^3$

기저 (Basis)

어떤 벡터 공간 V를 span하는 가장 작은 집합

기저에 속한 벡터들 $(v_1, v_2, \ldots v_n)$이 기저가 될 조건

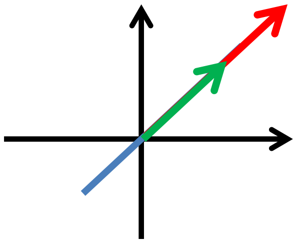
① 서로 **선형 독립 상태**이고

② 벡터 공간 V를 **span** 해야 함 $\Leftrightarrow$ $span\{v_1, v_2, \ldots v_n\} = \mathrm{V}$

부분공간 (Linear Combination)

벡터공간 V의 정의들을 만족하는 크기가 작은 벡터 공간

집합에서의 부분집합 = 벡터 공간에서의 부분공간



① 두 벡터의 덧셈과 곱셈에 닫혀있음

② 원점을 지남 (덧셈의 항등원이 존재)

$\Rightarrow$ **파란 직선**은 2차원 벡터공간 V의 **부분공간**

행공간, 열공간, 영공간

행공간 (Row Space)

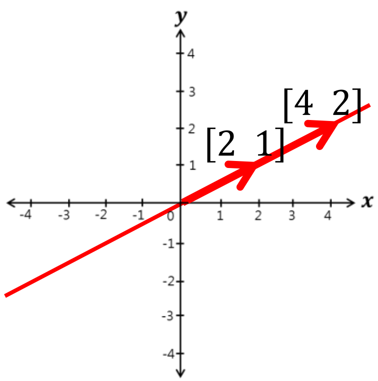
행들의 선형 결합을 통해 만들 수 있는 부분공간

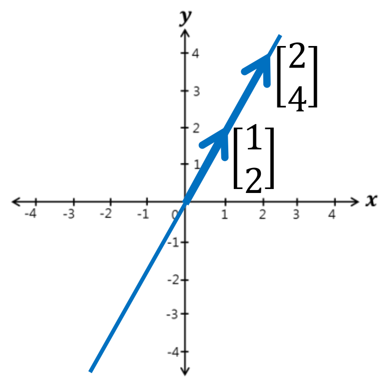
열공간 (Column Space)

열들의 선형 결합을 통해 만들 수 있는 부분공간

영공간 (Null Space)

$Ax = 0$을 만족하는 벡터 x로 구성된 부분공간





$$Ax = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

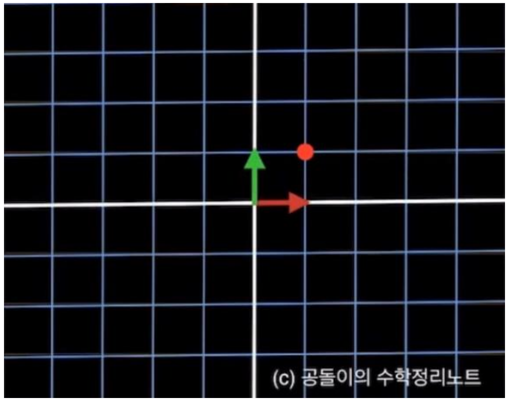
A의 행공간과 내적곱 했을 때의 내적값이 0벡터

→ x_1, x_2는 영공간에 속하는 벡터

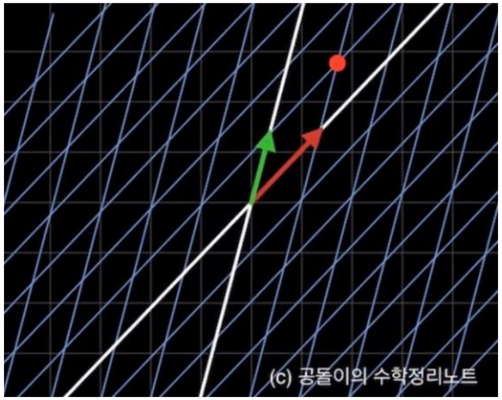
5 벡터공간

영공간, 행공간, 열공간의 관계

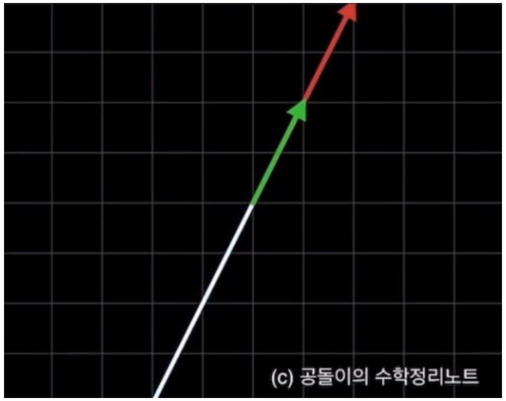
행공간과 영공간의 원소들이 행렬을 통해 선형변환되어 열공간으로 매핑



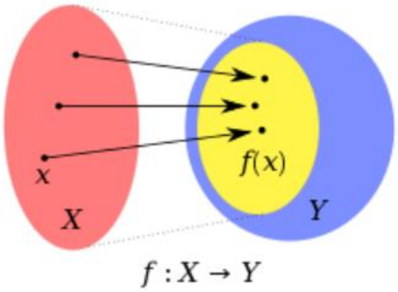
⇒



⇒



즉, 선형변환시 기저축이 변환되며 기존 차원의 원소들이 모두 열공간으로 매핑



함수 개념 적용

함수 : 정의역의 원소들이 함수를 통해 치역에 대응

선형대수: 행공간과 영공간의 원소들이 행렬을 통해 열공간으로 매핑

함수	선형대수
X : **정의역 /** $f(x)$: **치역 /** f : **함수**	X : **행공간 + 영공간 /** $f(x)$: **열공간 /** f : **행렬**