시계열자료분석팀

5팀

김규범 김민지 김준서 안세현 정희철

1 모형의 식별

자기상관함수 Auto-Correlation Function (ACF)

자기상관함수의 성질

$$\rho(0) = 1$$

$$\rho(-h) = \rho(h)$$

$$|\rho(h)| \le 1, |\gamma(h)| \le \gamma(0)$$

 $\rho(h)$

시차가 h인 시계열 간의 상관관계를 의미 정상성을 만족할 경우 시점이 아닌 시차에만 의존하는 것

1 모형의 식별

부분자기상관함수 Partial Auto-Correlation Function (PACF)

부분자기상관함수

부분상관함수

 X_{t+k} 사이에 존재하는

$$\rho_{XY,Z} = \frac{E\{[X - E(X|Z)] \cdot [Y - E(Y|Z)]\}}{\sqrt{E[X - E(X|Z)]^2 \cdot E[Y - E(Y|Z)]^2}}$$

* Z는 X, Y의 상관관계에 영향을 주는 요소

부분 (Partial) ?

자기회귀모형 AR (Auto-Regressive Model)

AR 모형

$$AR(p): X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$= \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \dots + \phi_p B^p X_t + Z_t$$

$$\therefore Z_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t$$



2 AR

AR 모형의 조건

정상성과 인과성

정상성

시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음

인과성

t시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명될 수 있음

AR 모형의 조건

$$X_{t} = \phi_{1}X_{t-1} + Z_{t}$$

$$X_{t} = \phi_{1}(\phi_{1}X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_{t}$$

$$X_{t} = \phi_{1}^{2}X_{t-2} + \phi_{1}Z_{t-1} + Z_{t}$$

$$\vdots$$

$$X_{t} = \phi_{1}^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^{M} \phi_{1}^{j} Z_{t-j}$$

AR 모형의 조건

$|\phi_1| < 1$

$$X_{t} = \phi_{1}^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^{M} \phi_{1}^{j} Z_{t-j}$$

$$\lim_{M \to \infty} \phi_{1}^{M+1} X_{t-M-1} = 0$$

 $\sum_{j=0}^{M} \phi_1^{j} Z_{t-j}$: 정상시계열의 선형결합

정상성과 오차항으로 설명되는 **인과성을 만족**

3 MA

MA (Moving Average) 모형

MA 모형

과거 시점의 오차항을 이용해 관측값 설명 $(Z_t \sim WN(0, \sigma^2))$

MA(1) 모형 1시점 전까지의 오차들의 선형 결합으로 표현

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

MA(q) 모형 q시점 전까지의 오차들의 선형 결합으로 표현

$$X_{t} = Z_{t} - \theta_{1} Z_{t-1} - \theta_{2} Z_{t-2} \cdots - \theta_{q} Z_{t-q}$$

 $BX_t = X_{t-1}$ **후향 연산자**로 표현 가능

3 MA

MA (Moving Average) 모형

특성 함수

과거 시점의 오차항을 이용하여 관측값을 설명 $(Z_t \sim WN(0, \sigma^2))$

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \dots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$= Z_t - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 Z_t - \dots - \theta_q B^q Z_t$$

$$= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) Z_t$$
특성함수 $\theta(B)$

 $X_t = \theta(B)Z_t$ 로 표현 가능

3 MA

MA 모형의 조건

MA모형의 조건

1. 백색 잡음 가정하는 오차항의 선형 결합

[MA모형 "가역성" 만족 조건]

 a_{AA} " $\theta(B) = 0의 근의 절댓값" <math>> 1$ 가역성

정상 시계열의 선형 결합으로 표현 과거 오차항의 선형 결합으로 표현

추가적인 조건 필요

쌍대성(Duality)의 의미

쌍대성(Duality)

AR과 MA의 쌍대성

유한차수의 AR 과정을 무한차수의 MA 과정으로

$$\begin{split} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + Z_t \\ &= \phi_1 (\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t \\ &= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\ &= \phi_1^2 (\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t \\ &= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \sum_{j=0}^M \phi_1^j Z_{t-j} \end{split}$$

쌍대성(Duality)의 의미

쌍대성(Duality)

AR과 MA의 쌍대성

유한차수의 MA 과정을 무한차수의 AR 과정으로

$$\begin{split} X_t &= Z_t - \theta_1 B Z_t \\ X_t &= (1 - \theta_1 B) Z_t \ \to \ Z_t = \frac{1}{1 - \theta_1 B} X_t \\ (1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \cdots) X_t &= Z_t \\ X_t &+ \theta_1 B X_t + \theta_1^2 B^2 X_t + \cdots &= Z_t \\ X_t &= -\theta_1 B X_t - \theta_1^2 B^2 X_t - \cdots + Z_t \end{split}$$

5 ARMA

ARMA 모형

특성함수

1. ARMA 모형

$$X_{t} = \phi_{1}X_{t-1} + \phi_{2}X_{t-2} + \dots + \phi_{p}X_{t-p} + Z_{t} - \theta_{1}Z_{t-1} - \theta_{2}Z_{t-2} - \dots - \theta_{q}Z_{t-q}$$

2. ARMA 모형의 특성함수

$$\begin{split} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 \, Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \dots - \theta_q Z_{t-q} \\ &= \phi_1 B X_t + \phi_2 B^2 X_t + \dots + \phi_p B^p X_t + Z_t - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 Z_{t-2} - \dots - \theta_q B^q Z_t \\ & \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \right) X_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \right) Z_t \\ & \phi(B) X_t = \theta(B) Z_t \end{split}$$

ARMA 모형

모형의 조건

ARMA 모형은 AR의 조건과 MA의 조건인 정상성과 가역성을 모두 충족시켜야 함

$$X_{t} = \phi_{1}X_{t-1} + Z_{t} - \theta_{1}Z_{t-1}$$

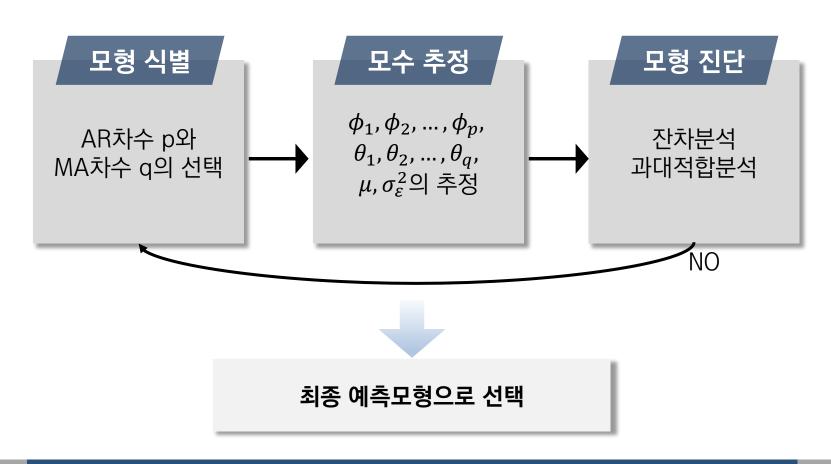
$$(1 - \phi_1 B)X_t = (1 - \theta_1 B)Z_t$$

 $1 - \phi_1 B = 0, 1 - \theta_1 B = 0$ 의 근의 절댓값이 모두 1보다 커야 함

● 모형의 적합

순서

주어진 시계열 자료를 가장 잘 설명해주는 모형은 어떻게 선택하는 것일까요?



● 모형의 적합

1. 모형의 식별

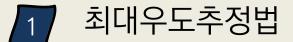
시계열 그래프와 ACF, PACF를 이용해 차분의 필요성과 ARMA 모형의 차수인 p와 q를 잠정적으로 선택하는 단계

AIC =
$$n \ln \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} + 2(p+q)$$
 \rightarrow 가장 작은 값을 가진 모형 선택

SBC =
$$n \ln \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} + (p+q) \ln n$$
 \rightarrow 가장 작은 값을 가진 모형 선택

● 모형의 적합

2. 모수의 추정



관측된 시계열의 결합확률밀도함수인 가능도함수를 최대로 하는 모수의 추정량을 구하는 방법

2 최소제곱추정법 오차제곱합을 최소로 하는 추정법

3 적률추정법

모집단의 적률에 대응되는 표본적률의 방정식을 풀어 추정량을 구하는 방법

● 모형의 적합

3. 모형 진단

잔차 플랏, 잔차의 ACF와 PACF 등을 사용한

잔차 분석과 과대적합을 이용해 잠정모형의 적합 정도를 진단



잠정모형의 타당성이 입증된다면, 최종적으로 모형이 적합된 것으로 판단



예측모형으로 사용

6 정리

어 정리

1) 정상성과 가역성

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
정상성	조건필요	자체만족	조건필요
가역성	자체만족	조건필요	조건필요

2) 모형의 ACF와 PACF 패턴

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
ACF	지수적으로 감소	q+1차부터 절단	지수적으로 감소
PACF	p+1차부터 절단	지수적으로 감소	지수적으로 감소