Københavns Universitet
LinAlgDat - Project B

Victor Vangkilde Jørgensen - kft410
kft410@alumni.ku.dk
Hold 13 Mach

20. maj 2025

Indhold

1 Opgave **3**
- 1.a . . . 3
- 1.b . . . 3
- 1.c . . . 4
- 1.d . . . 5
- 1.e . . . 6

2 Opgave **7**
- 2.a . . . 7
- 2.b . . . 8
- 2.c . . . 9
- 2.d . . . 9
- 2.e . . . 11

3 **11**
- 3.a . . . 11
- 3.b . . . 12
- 3.c . . . 13
- 3.d . . . 14

4 Opgave **14**

1 Opgave

1.a

Vi forkaster x_1, x_2, x_3, og bruger deres konstanter til at aflæse M_a til:

$$\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, x_3 droppes, da disse kun indgik, da vi gangede $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ på T_a.

1.b

Vi ser først på, om T_a er injektiv. En transformation er injektiv, hvis kernen af transformationen kun er $\{0\}$. Det vil sige, at kun nulvektoren transformeret giver nulvektoren.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{a-1} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -2r_2 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+a}{a-1} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\frac{a-1}{a^2+a} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} +r_3 \\ +r_3 \cdot \frac{1}{a-1} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} +r_2 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{a} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Da $\ker T_a = \{0\}$, er T_a injektiv.

T_a er surjektiv, hvis dimensionen af det udspændte rum er det samme som mængden af pivotelementer.

$$dim(ran(T_a)) = rank(T_a) = 3$$

da vi har 3 pivotelementer.

Da søjlerne i T_a udspænder hele $\mathbb{R}^3$, er T_a surjektiv. T_a er dermed bijektiv, da den både er injektiv og surjektiv.

Vi bestemmer nu T_a^{-1}, ved at sætte enhedsmatricen på til højre, og reducere med Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{a-1} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -2r_2 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+a}{a-1} & 0 & -\frac{2}{a-1} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{a-1}{a^2+a} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right] \begin{array}{l} +r_3 \\ +r_3\cdot\frac{1}{a-1} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right] \begin{array}{l} +r_2 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{a} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right]$$

$$T_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{bmatrix}$$

1.c

Vi opstill igen T_a, hvor $a = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1+2 & 0 \end{array}\right] \; reducer \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \rightsquigarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_2 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi aflæser løsningerne til:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kigger vi nu på baserne for spannet af T_{-1}, ser vi, at vi kun skal benytte x_1 og x_2, da x_3 er en fri variable.

$$span(T_{-1}) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow dim(T_{-1}) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow dim(ran(T_{-1})) = 2$$

hvilket igen giver mening, da vi har 2 pivotelementer.

Da vi valgte at løse efter nulrummet for T_{-1}, har vi nu de løsninger, som udspænder netop dette:

$$ker(T_{-1}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow dim(ker(T_{-1})) = 1$$

Så dimensionen af $ran(T_{-1}) = 2$, og dimensionen af $ker(T_{-1}) = 1$

Vi gør det samme for $a = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & (0-1) & -1 & 0 \\ 0 & 2 & (0+2) & 0 \end{array}\right] \; reducer \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ +2r_2 \end{array} \rightsquigarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Her kan løsningerne aflæses til:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har 1 pivotelement, som vi finder i 2. søjle.

$$span(T_0) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow ran(T_0) = \mathbb{R}^1 \Rightarrow dim(ran(T_0)) = 1$$

og for kernen:

$$ker(T_0) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow dim(ker(T_0)) = 2$$

1.d

Ganger vi M_{-1} med sig selv, får vi:

$$M_{-1}^2 = M_{-1} \cdot M_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

og gør vi det endnu en gang, får vi:

$$M_{-1}^3 = M_{-1}^2 \cdot M_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

hvilket bringer os tilbage hvor vi startede.

Hvis vi gentog denne process, ville vi blot skifte fortegn hver gang vi ganger M_{-1} på. Vi kan dermed sige:

$$M_{-1}^n = \begin{cases} M_{-1} & \textit{hvis n er lige} \\ M_{-1}^2 & \textit{hvis n er ulige} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ganger vi M_0 med sig selv, får vi:

$$M_0^2 = M_0 \cdot M_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser, at hvis vi ganger denne matrice med sig selv, får vi blot den samme matrice igen. Da matricen er uændret, kan vi beskrive dette som:

$$M_0^n = M_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

1.e

Først bestemmer vi $T_a(\mathcal{L})$:

$$T_a(\mathcal{L}) = T_a \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,t - t - (-2t) \\ (a-1)\,t - (-2t) \\ 2t + (a+2)(-2t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,t - t + 2t \\ at - t + 2t \\ 2t - 2at - 4t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a\,t + t \\ at + t \\ -2at - 2t \end{bmatrix} = (a+1) \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix}$$

Som vi kan se, er $T_a(\mathcal{L})$ en delmængde af $\mathcal{L}$, da vi kan faktorisere $(t, t, -2t)$, så det bliver udtrykket af alle $a \in \mathbb{R}$.

Dernæst bestemmer vi $T_a(P)$:

$$T_a(\mathcal{P}) = T_a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 - x_2 - x_3 \\ (a-1)x_2 - x_3 \\ 2x_2 + (a+2)x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 - x_2 - x_3 \\ ax_2 - x_2 - x_3 \\ 2x_2 + ax_3 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

Vi husker, at der for $\mathcal{P}$ gælder, at:

$$x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -x_2$$

og vi kan dermed erstatte x_3 med $-x_2$:

$$\begin{bmatrix} ax_1 - x_2 + x_2 \\ ax_2 - x_2 + x_2 \\ 2x_2 - ax_2 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ -ax_2 \end{bmatrix}$$

Vi ser nu, at $\mathcal{P}$'s betingelse: $x_2 + x_3 = 0$ opfyldes, da $ax_2 - ax_2 = 0$. $T_a(\mathcal{P})$ må dermed være en delmængde af $\mathcal{P}$.

2 Opgave

2.a

Vi opstiller et ligningssystem i form af en totalmatrix, hvor vi sætter u_1, u_2, u_3 lig hhv. v_1, v_2, v_3, og finder løsningerne til disse, ved brug af Gauss-Jordan elimination.

$u_1 + u_2 + u_3 = v_1 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-2) \\ \cdot 2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -11 \\ 0 & 2 & -5 & -13 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \\ -r_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +3r_3 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1r_3 \\ +3r_3 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vores første kolonne i $P_{B \leftarrow C}$ er dermed: $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u_1 + u_2 + u_3 = v_2 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-2) \\ \cdot 2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \\ -r_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +3r_3 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1r_3 \\ +3r_3 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vores anden kolonne i $P_{B\leftarrow C}$ er dermed: $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u_1 + u_2 + u_3 = v_3 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-2) \\ \cdot 2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \\ -r_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ +3r_3 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1r_3 \\ +3r_3 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vores sidste kolonne i $P_{B\leftarrow C}$ er dermed: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sammensætter vi nu vores tre kolonner til en matrix, får vi:

$$P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.b

Som givet af opgaven, bestemmes x som $v_1 + v_2 + v_3$:

$$x = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da konstanterne foran v i hvert led er 1, og $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{C}$, er koordinaterne for x med henhold til $\mathcal{C}$:

$$[x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi benytter vores basisskriftmatrice til at transformere vores koordinater til basen $\mathcal{B}$ fra $\mathcal{C}$:

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.c

Vi ganger kolonne 2 i vores basisskriftmatrice på u_1 og u_2:

$$0 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + (-1) \cdot u_3 = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vi får v_2, så v_2 må dermed række spannet af u_2 og u_3, da den kan skrives som en linaerkombination af disse.

På samme måde skal vi vise, at v_1 hverken tilhører spannet af $\{u_1, u_2\}$, $\{u_2, u_3\}$ eller $\{u_1, u_3\}$.
Hvis vi tænker over hvad dette betyder, så skal vi kigge på basisskriftmatricen:

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot u_1 + (-4) \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$

hvilket betyder, at v_1 kun kan skrives som en linearkombination af u_1, u_2 og u_3, hvis de alle tre indgår. Ingen kombination af 2 vektorer blandt u_1, u_2, u_3 kan dermed række spannet af v_1.

2.d

Først udregner vi $xu_1 + u_2$ og $u_1 + xu_2$:

$$xu_1 + u_2 = \begin{bmatrix} 2x \\ x \\ -x \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x+1 \\ -x-1 \\ x+1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 + xu_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ -x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ x+1 \\ -x-1 \\ x+1 \end{bmatrix}$$

Vi løser nu totalmatricen med $xu_1 + u_2$ og $u_1 + xu_2$ som kolonner:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2x & 2 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \\ -x-1 & -x-1 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} x & 1 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -r_2 \\ -r_2 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} x & 1 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -r_1 \left[\begin{array}{cc|c} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi bemærker, at hvis $x = 1$, kan vi blot tilføje $-r_1$ til r_2, så vi ender med et pivotelement i alt.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

hvor spannet der rækkes kan beskrives ved basen: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, og dimensionen er 1, da dette er den eneste basisvektor.

Vi kan på samme måde, finde 1 pivotelement, hvis vi sætter $x = -1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] +r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot(-1) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

igen er spannet der rækkes beskrevet ved basisvektoren: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, og dimensionen er 1, da dette er den eneste vektor.

Hvis $x \neq \pm 1$ kan vi se, at vi vil få 2 pivotelementer og dermed 2 baser, hvilket giver en dimension på 2.
Vi kan altså beskrive mængden af dimensioner som:

$$dim(\mathcal{V}_x) = \begin{cases} 1 & for\ x = \pm 1 \\ \\ 2 & for\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

2.e

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + c \\ a + b - c \\ -a - b + 2c \\ a + b + 2c \end{bmatrix}$$

Vi får at vide, at $\mathcal{W} = \{(0, 0, x_3, x_4) \in \mathbb{R} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, og det skal derfor gælde, at de to første koordinater er lig 0:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \; r_1 \leftrightarrow r_2 \; \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \; -2r_1 \; \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \; \cdot(-\tfrac{1}{2}) \; \rightsquigarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \; -r_2 \; \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Vi kan nu lave en parameterfremstilling ud fra løsningerne:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

og retningsvektoren er dermed givet med koordinaterne som konstanter:

$$-\frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2 + u_3 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Retningsvektoren til linjen, som går gennem origo er dermed:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3

3.a

Vi får givet, at koordinatforskydningen svarer til:

$$\begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \\ s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix}$$

Tilføjer vi forskydningen til vores nuværende koordinater, kan vi beskrive spillerens nye position som:

$$\begin{bmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \\ s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hvor matricen skal ganges på fra venstre til spillerens nuværende positioner for at få de nye positioner af spidsen og centrum.

3.b

Rotation mod venstre er bestemt som:

$$\begin{bmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (s_1 - c_1)cos(\theta) - (s_2 - c_2)sin(\theta) \\ (s_1 - c_1)sin(\theta) + (s_2 - c_2)cos(\theta) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + (s_1 - c_1)cos(\theta) - (s_2 - c_2)sin(\theta) \\ c_2 + (s_1 - c_1)sin(\theta) + (s_2 - c_2)cos(\theta) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_1 \cdot cos(\theta) + c_2 \cdot sin(\theta) + s_1 \cdot cos(\theta) - s_2 \cdot sin(\theta) \\ -c_1 \cdot sin(\theta) + c_2 - c_2 \cdot cos(\theta) + s_1 \cdot sin(\theta) + s_2 \cdot cos(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1 - cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Og som der fremkommer i opgaven, er:

$$\begin{bmatrix} c_1^L \\ c_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den endelige matrix for rotation mod venstre er dermed bestemt ved følgende variable:

$$L_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Vi mindes, at $cos(\theta) = cos(-\theta)$ og $sin(-\theta) = -sin(\theta)$.
Rotation mod højre er dermed bestemt som:

$$R_\theta = L_{-\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(-\theta) & sin(-\theta) & cos(-\theta) & -sin(-\theta) \\ -sin(-\theta) & 1-cos(-\theta) & sin(-\theta) & cos(-\theta) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

3.c

Ved brug af matrixoperationerne fra python i *project A*, får vi følgende matricer efter vi ganger hhv. 'fremad', 'rotation til venstre' og 'rotation til højre' matricerne på til venstre:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \\ 1.00000 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.00000 \\ 0.00000 \\ 2.00000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.00000 \\ 0.00000 \\ 2.00000 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.00000 \\ 0.91295 \\ 1.40808 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & 1-cos(\theta) & -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.00000 \\ 0.91295 \\ 1.40808 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.00000 \\ 0.74511 \\ 0.33306 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 1.00000 \\ 0.74511 \\ 0.33306 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0.74511 \\ 0.33306 \\ 1.49023 \\ -0.33388 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.74511 \\ 0.33306 \\ 1.49023 \\ -0.33388 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 2.23534 \\ -1.00081 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 2.23534 \\ -1.00081 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 2.40317 \\ 0.07421 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 2.40317 \\ 0.07421 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 1.49023 \\ 0.66612 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ -sin(\theta) & 1-cos(\theta) & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 1.49023 \\ 0.66612 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 0.57728 \\ 0.07421 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.49023 \\ -0.33388 \\ 0.57728 \\ 0.07421 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0.57728 \\ 0.07421 \\ -0.33566 \\ 0.48229 \end{bmatrix}$$

Efter alle 9 multiplikationer fra venste ender vi med postionen af spilleren og sidsen svarende til matricen:

$$\begin{bmatrix} 0.57728 \\ 0.07421 \\ -0.33566 \\ 0.48229 \end{bmatrix}$$

3.d

At gange vores 'rotation mod højre' matrice på sig selv svarer til at gange det antal gange med vinkeln θ, da:

$$R_{\theta 1} \cdot R_{\theta 2} = R_{\theta 1 + \theta 2}$$

og

$$(R_\theta)^n = \prod_{i=1}^{n} R_{\theta i} = R_{\theta 1 + \theta 2 + \ \dots \ + \theta n}$$

Vi kan dermed beregne $(R_{20})^{18}$ til:

$$(R_{20})^{18} = \prod_{i=1}^{18} R_{20} = R_{20 \cdot 18} = R_{360}$$

Med vores nye vinkel beregnet, kan vi nu indsætte 360 på θ-s plads i R_θ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-cos(360) & -sin(360) & cos(360) & sin(360) \\ sin(360) & 1-cos(360) & -sin(360) & cos(360) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Således ender vi med enhedsmatricen I_4.

4 Opgave

Se vedhæftede python-fil.