

DIS: Aflevering 1
Jeppe Bonde Bakkensen | slr105
Holdnummer: 13

06/05/2025

Opgave 1

1.a

Bestemmer den matrix M_a som opfylder $T_a(x) = M_a x$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$ ved at aflæse konstantledende i matrixen givet i opgaven

$$M_a = \begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{bmatrix}$$

1.b

For at T_a er bijektiv, skal T_a være både injektiv og surjektiv.

Injektiv: En lineær transformation er injektiv, hvis $\ker T_a = \{\mathbf{0}\}$.

Hvilken svarer til at bestemme nulrummet ved at løse det homogene system $T_a(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array} \right]$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{a-1} \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-2 \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(a+1)}{a-1} & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{a-1}{a(a+1)} \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{a-1} \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1, \frac{1}{a} \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Da løsningen på det homogene system er den trivielle løsning, følger det at

$$\ker T_a = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow T_a \text{ er injektiv}$$

Surjektiv: En lineær transformation, er surjektiv hvis $\text{ran } T_a = \mathbb{R}^m$, hvilket i dette tilfælde svarer til at $\text{rank } T_a = 3$. Fra den reducerede række echelonform ses det, at matrixen har tre pivot 1-taller, og dermed:

$$\text{rank}(T_a) = 3 \Rightarrow \text{ran}(T_a) = \mathbb{R}^3$$

Konklusion: Da T_a både er injektiv og surjektiv, er transformationen bijektiv.

1.b (inverse) Finder den inverse T_a^{-1} :

$$T_a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{a-1} \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(a+1)}{a-1} & 0 & -\frac{2}{a-1} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{a-1}{a(a+1)} \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{a-1} \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{a} \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Konklusion: Den inverse matrix til T_a , hvor $a \neq \{-1, 0\}$ er :

$$T_a^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array} \right]$$

1.c

Bestemmer baserne for $\text{ran } T_a$ og $\text{ker } T_a$ og bestemmer underrums dimensionerne for når $a = -1$ og $a = 0$.
 Finder nulrummet for $a = -1$, ved at løse det homogene system $T_a(x) = 0$.

$$T_{a=-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{-\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{-\frac{1}{2} \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Sætter $x_3 = t$, hvor $t \in \mathbb{R}$, og opstiller parameterfremstilling: $T_{a=-1}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}$$

Finder billedrummet og kernerummet af $T_{a=-1}$

$$\begin{aligned} \text{ran } T_{a=-1} &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \text{ran } T_{a=-1} = 2 \\ \text{ker } T_{a=-1} &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \text{ker } T_{a=-1} = 1 \end{aligned}$$

Konklusion:

Dermed er

- $\text{ran } T_{a=-1}$ en plan i \mathbb{R}^3
- $\text{ker } T_{a=-1}$ er en ret linje gennem origo i \mathbb{R}^3

Finder nulrummet for $a = 0$, ved at løse det homogene system $T_a(x) = 0$.

$$T_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 \\ -2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Sætter $x_1 = s$ og $x_3 = t$, hvor $s, t \in \mathbb{R}$, og opstiller parameterfremstilling: $T_{a=0}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}$$

Finder billedrummet og kernerummet af $T_{a=0}$

$$\begin{aligned} \text{ran } T_{a=0} &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \text{ran } T_{a=0} = 1 \\ \ker T_{a=0} &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \ker T_{a=0} = 2 \end{aligned}$$

Konklusion:

Dermed er

- $\text{ran } T_{a=0}$ er en ret linje gennem origo i \mathbb{R}^3
- $\ker T_{a=0}$ en plan i \mathbb{R}^3

1.d

Bestemmer det generelle udtryk for potensmatricen $(\mathbf{M}_a)^n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$ når $a = -1$ og når $a = 0$.

For at bestemme den generelle potensmatrice for $a = -1$ udregnes $(\mathbf{M}_{-1})^2$ og $(\mathbf{M}_{-1})^3$ for at finde et generelt mønster i udviklingen:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{-1}^2 &= \mathbf{M}_{-1} \cdot \mathbf{M}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{-1}^3 &= \mathbf{M}_{-1}^2 \cdot \mathbf{M}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{-1}\end{aligned}$$

Ud fra mønstret i ovenstående udregninger ses det at den generelle potensmatrice for $(\mathbf{M}_{a=0})^n$ er givet ved:

$$(\mathbf{M}_{-1})^n = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

For at bevise at dette reelt er det generelle mønster for $(\mathbf{M}_{-1})^n$ anvender jeg induktion. Ovenfor har jeg vist base-casen holder, hvortil jeg går direkte til induktionshypotesen som er:

Induktionshypotese

Antag at for et vilkårligt $n \geq 1$ gælder:

$$(\mathbf{M}_{-1})^n = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases}$$

Induktions-step

Viser at det også gælder for $n + 1$:

$$(\mathbf{M}_{-1})^{n+1} = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n + 1 \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n + 1 \text{ er lige} \end{cases}$$

Tilfælde 1: n er ulige

Når n er ulige, siger induktionshypotesen at $(\mathbf{M}_{-1})^n = \mathbf{M}_{-1}$, hvilket medfører at:

$$(\mathbf{M}_{-1})^{n+1} = \mathbf{M}_{-1} \cdot \mathbf{M}_{-1} = \mathbf{M}_{-1}^2$$

Når n er et ulige tal og man lægger en til bliver resultatet \mathbf{M}_{-1}^2 , hvilket betyder at induktionshypotesen holder.

Tilfælde 2: n er lige

Når n er lige, siger induktionshypotesen at $(\mathbf{M}_{-1})^n = \mathbf{M}_{-1}^2$, hvilket medfører at:

$$(\mathbf{M}_{-1})^{n+1} = \mathbf{M}_{-1}^2 \cdot \mathbf{M}_{-1} = \mathbf{M}_{-1}^3$$

Ud fra tidligere udregninger har jeg vist at:

$$\mathbf{M}_{-1}^3 = \mathbf{M}_{-1}$$

Når n er et lige tal og man lægger en til bliver resultatet \mathbf{M}_{-1} , hvilket betyder at induktionshypotesen holder.

Konklusion:

Ved induktion har jeg nu vist, at generelle potensmatrice for $(\mathbf{M}_{-1})^n$ er givet ved:

$$(\mathbf{M}_{-1})^n = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

På samme måde som ovenfor bestemmes den generelle potensmatrice for $a = 0$:

$$(\mathbf{M}_{a=0})^2 = \mathbf{M}_{a=0} \cdot \mathbf{M}_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_{a=0})^2 = \mathbf{M}_{a=0} \cdot \mathbf{M}_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ud fra mønstret i ovenstående udregninger ses det at den generelle potensmatrice for $(\mathbf{M}_{a=0})^n$ er givet ved:

$$(\mathbf{M}_{a=0})^n = \mathbf{M}_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$$

For at bevise at dette reelt er det generelle mønster for $(\mathbf{M}_0)^n$ anvender jeg induktion, hvor induktionshypotesen er:

Induktionshypotese

Antag at for et vilkårligt $n \geq 1$ gælder:

$$(\mathbf{M}_{a=0})^n = \mathbf{M}_{a=0} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Induktions-step

Viser at det også gælder for $n + 1$, hvor jeg anvender induktionshypotesen:

$$(\mathbf{M}_0)^{n+1} = (\mathbf{M}_0)^n \cdot \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0$$

Konklusion:

Ved induktion har jeg nu vist, at generelle potensmatrice for $(\mathbf{M}_0)^n$ er givet ved:

$$(\mathbf{M}_{a=0})^n = \mathbf{M}_{a=0} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

1.e

Vil vise at for ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$. Fra opgaveteksten er det givet at

$$\mathcal{L} = \{(t, t, -2) \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Udregner $T_a(\mathcal{L})$

$$T_a \begin{pmatrix} t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - t + 2t \\ (a-1)t + 2t \\ 2t - 2(a+2)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + t \\ at + t \\ -2at - 2t \end{pmatrix} = (1+a)t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da $T_a(\mathcal{L})$ afhænger af t er $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$.

Derudover vil jeg vise at for ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder $T_a(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$. Fra opgaveteksten er det givet at:

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid x_2 + x_3 = 0\}$$

Omskriver betingelsen for \mathcal{P}

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid x_2 = -x_3\}$$

Udregner $T_a(\mathcal{P})$

$$T_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 - x_2 - x_3 \\ (a-1)x_2 - x_3 \\ 2x_2 + (a+2)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + x_3 - x_3 \\ -x_3(a-1) - x_3 \\ -2x_3 + (a+2)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ -ax_3 + x_3 - x_3 \\ -2x_3 + ax_3 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ -ax_3 \\ ax_3 \end{pmatrix}$$

Da $x_2 + x_3 = 0$ er $T_a(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$.

Opgave 2

2.a

Bestemmer basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ ved at bestemme basisvektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ fra \mathcal{C} som linearkombinationer af basisvektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ fra \mathcal{B} . Koordinaterne jeg finder fra linearkombinationer udgør søjlerne i basisskiftmatricen.

Finder basisvektorerne \mathbf{v}_1 som linearkombination af \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \\ -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 \\ -\frac{3}{2}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ 3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Dvs. at koordinaterne for \mathbf{v}_1 som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Koordinaterne for \mathbf{v}_1 udgør første søjle i basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

På samme måde udregner jeg basisvektorerne \mathbf{v}_2 som linearkombination af \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \\ -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 \\ -\frac{3}{2}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ 3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Dvs. at koordinaterne for \mathbf{v}_2 som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er

$$\mathbf{v}_2 = 0\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$$

Koordinaterne for \mathbf{v}_2 udgør anden søjle i basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

$$[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

På samme måde udregner jeg basisvektorerne \mathbf{v}_3 som linearkombination af \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \\ -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \end{array}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 \\ -\frac{3}{2}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ 3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Dvs. at koordinaterne for \mathbf{v}_3 som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Koordinaterne for \mathbf{v}_3 udgør tredje søjle i basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

$$[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sætter nu søjlerne $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}}$ sammen til at danne basisskiftmatrice $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$:

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.b

For at bestemme koordinaterne for vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ mht. \mathcal{C} anvender jeg

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 - 1 + 3 \\ -2 + 0 - 1 \\ 3 - 1 + 2 \\ 1 - 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ og vi lige har lagt de tre vektorer sammen, følger det direkte af theorem 3.8 og definition 3.7 fra slidsne fra forlæsning 5 at, da

$$[x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

for at bestemme koordinaten for \mathbf{x} mht. \mathcal{B} anvender jeg §3.2.5 på slidsne i uge 5 som sige at

$$[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} [x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.c

For at afgøre om $\mathbf{v}_2 \in \text{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, anvendes basisskiftmatricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ fundet i opg. 2.a, som udtrykker hver vektor i $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ som en linearkombination af vektorerne i $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Fra basisskiftmatricen har vi:

$$[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

hvilket medfører:

$$\mathbf{v}_2 = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + (-1) \cdot \mathbf{u}_2 + (-1) \cdot \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3.$$

Jeg verificerer dette:

$$-\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2.$$

Dermed har vi vist, at $\mathbf{v}_2 \in \text{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, da \mathbf{v}_2 kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Gør nu rede for, at \mathbf{v}_1 hverken tilhører $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ eller $\text{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Fra basisskiftmatricen har vi:

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

hvilket betyder, at

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Det vil sige at for at udtrykke \mathbf{v}_1 som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, kræver det alle 3 basisvektorer i \mathcal{B} . Det er derfor ikke muligt at udtrykke \mathbf{v}_1 , som en linearkombination af kun to af vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Dermed gælder:

$$\mathbf{v}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \quad \mathbf{v}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}, \quad \mathbf{v}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}.$$

Det viser at \mathbf{v}_1 ikke ligger i spanet af nogle af de mulige par af basisvektorer i \mathcal{B} .

3.d

Bestemmer for ethvert $x \in \mathbb{R}$ dimensionen af underrummet $\mathcal{V} = \text{span}\{xu_1 + u_2, u_1 + xu_2\}$.

Udregner vektorerne

$$a = xu_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ x+1 \\ -x-1 \\ x+1 \end{pmatrix}, \quad b = u_1 + xu_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ x+1 \\ -x-1 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

Løser totalmatricen

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 2x & 2 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \\ -x-1 & -x & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{cc|c} x & 1 & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \\ -x-1 & -x & 0 \\ x+1 & x+1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -(x+1)\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \\ (x+1)\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \\ -(x+1)\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \\ \left[\begin{array}{cc|c} x & 1 & 0 \\ 1-x^2 & 0 & 0 \\ x^2-1 & 0 & 0 \\ 1-x^2 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|c} x & 1 & 0 \\ 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Hvis $x \neq \pm 1$ så er totalmatricen færdig udregnet.

Udregner totalmatricen for når $x = \pm 1$.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} x & 1 & 0 \\ 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\frac{1}{x}\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{x} & 0 \\ 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-(1-x^2)\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 \\ -x\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Det vil sige at dimensionen af \mathcal{V} er

$$\dim(\mathcal{V}_x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x = \pm 1 \\ 2 & \text{ellers} \end{cases}$$

2.e

For at bestemme fællesmængden for $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ bestemmes en linearkombination af $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_1 + c\mathbf{u}_1 \in \mathcal{W} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Opstiller ligningssystemet

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_1 + c\mathbf{u}_1 = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + c \\ a + b - c \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

For at $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ skal ligning 1 og 2 være lig nul.

$$\begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$$

Udregner totalmatricen for de 2 første ligninger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right]$$

Opskriver parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{r} = -u_1 + 3u_2 + 2u_3$$

Udregner retningsvektoren for $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$

$$\mathbf{r} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2 \\ -1 + 3 - 2 \\ 1 - 3 + 4 \\ -1 + 3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dvs. at

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Dermed er det vist at $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ er en retlinje, og da både \mathcal{U} og \mathcal{W} er underrum går linjen pr. definition gennem origo.

Opgave 3

3.a

Jeg skal bestemme den 4×4 -matrix for F , således at følgende ligning er opfyldt:

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Af opgaveteksten fremgår det, at ved at trykke på op-pilen forskydes rumskibet i retningen af vektoren fra centrum C til spidsen S , som er defineret som:

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Ved at lægge vektoren \overrightarrow{CS} til både centrum C og spidsen S , fremkommer de nye koordinater

$$C^F = C + \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$S^F = S + \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Samler de nye koordinater i en vektor i \mathbb{R}^4 .

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Ud fra ovenstående udtryk kan den tilhørende lineære transformation, aflæses, hvilket giver følgende 4×4 -matrix \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.b

Jeg skal gøre rede for at følgende formler gælder

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} c_1^R \\ c_2^R \\ s_1^R \\ s_2^R \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

hvor \mathbf{L}_θ og \mathbf{R}_θ er følgende 4×4 matricer:

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & 1 - \cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Af opgaveteksten fremgår det, at ved at tryk på venstre-pilen forbliver rumskibets centrum uændret, dvs.:

$$C^L = \begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Spidsen S roteres θ grader mod uret omkring rumskibets centrum, hvilket kan udtrykkes som::

$$\begin{pmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Udregner koordinaterne for S^L trinvist:

$$\begin{aligned} S_L = \begin{pmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (s_1 - c_1) \cos \theta - (s_2 - c_2) \sin \theta \\ (s_1 - c_1) \sin \theta + (s_2 - c_2) \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + (s_1 - c_1) \cos \theta - (s_2 - c_2) \sin \theta \\ c_2 + (s_1 - c_1) \sin \theta + (s_2 - c_2) \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta) c_1 + \sin \theta c_2 + \cos \theta s_1 - \sin \theta s_2 \\ -\sin \theta c_1 + (1 - \cos \theta) c_2 + \sin \theta s_1 + \cos \theta s_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Samler de nye koordinater i en vektor i \mathbb{R}^4 .

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ (1 - \cos \theta) c_1 + \sin \theta c_2 + \cos \theta s_1 - \sin \theta s_2 \\ -\sin \theta c_1 + (1 - \cos \theta) c_2 + \sin \theta s_1 + \cos \theta s_2 \end{pmatrix}$$

Hver komponent i ovenstående vektor er en lineær kombination af c_1, c_2, s_1, s_2 . Det betyder, at der findes en 4×4 -matrix \mathbf{L}_θ

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

For at finde matricen \mathbf{R}_θ kan man anvende at $\mathbf{R}_\theta = \mathbf{L}_{-\theta}$.

Da cosinus er en lige funktion vil det sige at cosinus ikke skifter fortegn når man tager $-\theta$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

Sinus er derimod en ulige funktion så den ændre fortegn når man spejler funktionen omkring x-aksen.

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

For \mathbf{R}_θ medfører dette at \mathbf{R}_θ er givet ved matricen:

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & 1 - \cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3.c

Ved en vinkel på $\theta = 20$ og en startposition, hvor $C = (0,0)$ og $S = (0,1)$, bestemmes den position af rumskibets centrum og spids efter tastkombination givet i opgaveteksten. Jeg har anvendt funktionen *MatrixProduct* fra Projekt A til at bestemme position af rumskibets centrum og spids. Nedenfor har jeg til venstre angivet den kode jeg har kørt, og til højre har jeg angivet outputtet efter hvert tryk

```

1 # Definerer startmatrix
2 start_matrix = (
3 Matrix.fromArray(
4     [[0],
5     [0],
6     [0],
7     [1]
8 ]
9 ))
10
11 # Definerer forward matrix
12 forward = (
13 Matrix.fromArray(
14     [[0, 0, 1, 0],
15     [0, 0, 0, 1],
16     [-1, 0, 2, 0],
17     [0, -1, 0, 2]
18 ]
19 ))
20
21 # Definerer left matrix
22 rotate_left = (
23 Matrix.fromArray(
24     [[1, 0, 0, 0],
25     [0, 1, 0, 0],
26     [1-math.cos(20), math.sin(20), math.cos(20), -math.sin(20)],
27     [-math.sin(20), 1-math.cos(20), math.sin(20), math.cos(20)]
28 ]
29 ))
30
31 # Definerer right matrix
32 rotate_right = (
33 Matrix.fromArray(
34     [[1, 0, 0, 0],
35     [0, 1, 0, 0],
36     [1-math.cos(20), -math.sin(20), math.cos(20), math.sin(20)],
37     [math.sin(20), 1-math.cos(20), -math.sin(20), math.cos(20)]
38 ]
39 ))
40
41 # Matrix operationer
42 matrix = MatrixProduct(forward, start_matrix)
43 matrix = MatrixProduct(rotate_right, matrix)
44 matrix = MatrixProduct(rotate_right, matrix)
45 matrix = MatrixProduct(forward, matrix)
46 matrix = MatrixProduct(forward, matrix)
47 matrix = MatrixProduct(rotate_left, matrix)
48 matrix = MatrixProduct(rotate_left, matrix)
49 matrix = MatrixProduct(rotate_left, matrix)
50 matrix = MatrixProduct(forward, matrix)

```

```

1 # 0: Startmatrix
2 [[0.00000],
3 [0.00000],
4 [0.00000],
5 [1.00000]]
6 # 1: Forward
7 [[0.00000],
8 [1.00000],
9 [0.00000],
10 [2.00000]]
11 # 2: Right
12 [[0.00000],
13 [1.00000],
14 [0.91295],
15 [1.40808]]
16 # 3: Right
17 [[0.00000],
18 [1.00000],
19 [0.74511],
20 [0.33306]]
21 # 4: Forward
22 [[0.74511],
23 [0.33306],
24 [1.49023],
25 [-0.33388]]
26 # 5: Forward
27 [[1.49023],
28 [-0.33388],
29 [2.23534],
30 [-1.00081]]
31 # 6: Left
32 [[1.49023],
33 [-0.33388],
34 [2.40317],
35 [0.07421]]
36 # 7: Left
37 [[1.49023],
38 [-0.33388],
39 [1.49023],
40 [0.66612]]
41 # 8: Left
42 [[1.49023],
43 [-0.33388],
44 [0.57728],
45 [0.07421]]
46 # 9: Forward
47 [[0.57728],
48 [0.07421],
49 [-0.33566],
50 [0.48229]]

```

Dvs. at slutpositionen af rumskibet centrum og spids efter tastkombinationen er givet ved:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57728 \\ 0.07421 \\ 0.33566 \\ 0.48229 \end{pmatrix}$$

3.d

Jeg ønsker at vise, hvorfor det gælder, at $(\mathbf{R}_\theta)^{18} = \mathbf{I}_4$, når $\theta = 20^\circ$.

når man trykker på højre-tasten roteres rumskibet $\theta = 20^\circ$ omkring sin egen akse. Efter 18 tryk på højre-tasten har rumskibet roteret en hel omgang omkring sin egen akse, hvilket svarer til at rumskibet vender tilbage til sin oprindelige position:

$$\cos(18 \cdot 20^\circ) = \cos(360^\circ) = 1, \quad \sin(18 \cdot 20^\circ) = \sin(360^\circ) = 0$$

Hvis man sætter dette ind i matricen for \mathbf{R}_θ :

$$(\mathbf{R}_{20})^{18} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos(360^\circ) & -\sin(360^\circ) & \cos(360^\circ) & \sin(360^\circ) \\ \sin(360^\circ) & 1 - \cos(360^\circ) & -\sin(360^\circ) & \cos(360^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_4$$

Det vil sige, at efter 18 tryk er rumskibet vendt tilbage til sin udgangsposition. Det ses i rotationsmatricen, som svarer til identitetsmatricen $((\mathbf{R}_{20})^{18} = \mathbf{I}_4$.