Københavns Universitet: Lineær Algebra i Datalogi

Vitus Nyvang Legarth
gfn320

May 17, 2025

Contents

Opgave 1

(a)

For at bestemme M_a kan det aflæses hvordan den lineære transformation T_a transformere hver basisvektor.

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

Denne matrix transformere X på samme måde som T_a for $X \in \mathbb{R}^3$ og opfylder dermed $T_a(\mathbf{x}) = M_a \cdot \mathbf{x}$

(b)

En transformation T er bijektiv hvis den både er injektiv og surjektiv.

For at T er injektiv skal $ker(T) = \{0\}$, da der kun er ét output til hvert input. Dette betyder at der ikke skal være nogle frie variable efter en Gauss-Jordan elimination.

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

Da $a \neq 1$ må vi gerne regne med $\frac{1}{a-1}$.

$$R_2 \leftarrow R_2 \cdot \frac{1}{a-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 2 & a+2 \end{pmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & a+2+\frac{2}{a-1} \end{pmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 \cdot \frac{1}{a+2+\frac{2}{a-1}} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{a-1}R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da $a \neq 0$ må vi gerne regne med $\frac{1}{a}$

$$R_1 \leftarrow R_1 \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der er ikke nogle frie variable, så T er injektiv.

En transformation er surjektiv hvis $ranT = \mathbb{R}^m$, hvilket betyder at billedet af T er settet af alle mulige outputs fra transformationen. Dette er kun sandt hvis $rank(A) = m$.

Vi kan bruge den reducerede rækkeechelon form fra før.

Det ses her at $rank(A) = 3$ og $dim(A) = 3$.

Da $rank(A) = dim(A)$ er transoformationen surjektiv.

Da transformationen både er injektiv og surjektiv er den bijektiv.

Invers af T_a

For at finde den inverse af T_a, sættes den lig identitetsmatricen. Gauss-Jordan elimination udføres og når venstre side er blevet til identitetsmatricen er højre side blevet til den inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow R_2 \cdot \frac{1}{a-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+a}{a-1} & 0 & \frac{-2}{a-1} & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 \cdot \frac{a-1}{a^2+a} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow R_3 \cdot \frac{1}{a-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{array}\right)$$

Vi har derfor T_a^{-1}:

$$T_a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & \frac{a+2}{a^2+a} & \frac{1}{a^2+a} \\ 0 & -\frac{2}{a^2+a} & \frac{a-1}{a^2+a} \end{pmatrix}$$

(c)

For at finde basen til $ranT_a$ finder man pivot elementer i T_a. Kolonnerne i den med pivotelementer er en base for $ranT_a$.

For at finde basen til $kerT_a$ findes rækkeechelonformen af T_a, hvorefter man udtrykker pivot variablerne ud fra de frie variable.

Vi løser først for $a = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En base for $ranT_a$ for T_a hvor $a = -1$ er

$$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

Da der er to vektorer i basen til underrummet, har underrummet to dimensioner.
En base for $kerT_a$ for T_a hvor $a = -1$ findes ved at løse

$$\begin{aligned} x_1 = -(1/2)x_3 &= -(1/2)t \\ x_2 = -(1/2)x_3 &= -(1/2)t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Basen til kernen er derfor:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basen beskrives ved én vektor og underrummet har derfor kun én dimension.
Derefter løser vi for $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \leftarrow -R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} R_2 \leftarrow -R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har kun ét pivotelement. En base for $ranT_a$ for T_a hvor $a = 0$ er

$$\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

Da der er én vektorer i basen til underrummet, har underrummet én dimension.

En base for $kerT_a$ for T_a hvor $a = 0$ findes ved at løse

$$0x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Vi har altså to frie variable.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basen til kernen er:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Basen beskrives ved to vektore og underrummet har derfor to dimensioner.

(d)

Vi har

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

For at finde en general potensmatrice kan vi starte med at finde $(M_a)^2$ og $(M_a)^3$. Dette regnes ved matrixmultiplikation.

$$(M_{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(M_{-1})^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det ses at $(M_{-1})^3 = M_{-1}$ og vi har derfor en cyklus. Der er altså kun to stadier for M lige meget hvilket $n \in \mathbb{N}$ vi vælger.

Vi kan derfor lave udtrykket

$$(M_{-1})^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & (-1)^n \\ 0 & (-2)^n & (-1)^n \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Det samme kan gøres for M_0

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(M_0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi har $(M_0)^2 = M_0$ og M_0 ændrer sig derfor ikke når potensen ændrer sig.

Det generelle udtryk for $(M_0)^n$ er:

$$(M_0)^n = M_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(e)

Vi kan vise der for ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$, ved at tage et punkt $(t, t, -2t)$ i $\mathcal{L}$ og anvende den transformationen T_a på det. Hvis dette punkt er også er i $\mathcal{L}$ så gælder $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$.

Vi udregner $T_a(t, t, -2t)$.

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1) \cdot t \\ (a+1) \cdot t \\ (a+1) \cdot (-2t) \end{pmatrix} = (a+1) \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ -2t \end{pmatrix}$$

Vi kan altså udtrykke T_a for alle a ved hjælp af $\mathcal{L}$, og derfor gælder $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$.

Det samme kan gøres for $T_a(P)$.

Vi udregner $T_a(x_1, x_2, x_3)$.

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 - x_2 - x_3 \\ (a-1)x_2 - x_3 \\ 2x_2 + (a+2)x_3 \end{pmatrix} = (a+1) \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ -2t \end{pmatrix}$$

Opgave 2

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hvor $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ og $C = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Da vi skal bestemme basisskiftsmatricen $P_{B \leftarrow C}$ får vi følgende 3 ligniner:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= v_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 &= v_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 &= v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ a_{31} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Disse 3 ligninger kan løses ved at opstille dem som en totalmatrice og bruge Gauss-Jordan elimination.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + \frac{3}{2}R_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi har altså $a_{11} = 3$, $a_{12} = -4$, $a_{13} = 1$

Den næste ligning kan skrives som følgende totalmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Da koefficientmatricen er den samme som før, er rækkeoperationer også de samme som før:

$$\begin{aligned} R_1 &\leftarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 &\leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 &\leftarrow R_3 + R_1 \\ R_4 &\leftarrow R_4 - R_1 \\ R_3 &\leftarrow R_3 + R_2 \\ R_4 &\leftarrow R_4 - R_2 \\ R_4 &\leftarrow R_4 - 3R_3 \\ R_1 &\leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 &\leftarrow R_2 + \frac{3}{2}R_3 \end{aligned}$$

Anvender vi disse igen fås denne totalmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi har altså $a_{21} = 0$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = -1$

Den sidste ligning kan skrives med følgende totalmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Da koefficientmatricen er den samme som før, er rækkeoperationer også de samme som før:

$$\begin{aligned}
R_1 &\leftarrow \frac{1}{2}R_1\\
R_2 &\leftarrow R_2 - R_1\\
R_3 &\leftarrow R_3 + R_1\\
R_4 &\leftarrow R_4 - R_1\\
R_3 &\leftarrow R_3 + R_2\\
R_4 &\leftarrow R_4 - R_2\\
R_4 &\leftarrow R_4 - 3R_3\\
R_1 &\leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_3\\
R_2 &\leftarrow R_2 + \frac{3}{2}R_3
\end{aligned}$$

Anvender vi disse igen får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi har altså $a_{31} = 1$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 1$

Vi har nu alle a_i og kan opskrive $P_{B\leftarrow C}$ som

$$P_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1\\ -4 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

Vi har

$$x = \begin{pmatrix} 7\\ -2\\ 3\\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ -1\\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 2\\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\ -3\\ 4\\ 0 \end{pmatrix}$$

For at finde koordinaterne til basis B hvor $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, skal vi løse ligningen for x_1, x_2 og x_3:

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$$

$$\begin{pmatrix} 9\\ -3\\ 4\\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dette kan skrives med følgende totalmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Hvilket kan løses ved hjælp af Gauss-Jordan elimination:

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 15 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + \frac{3}{2}R_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Altså er $x_1 = 4$, $x_2 = -6$ og $x_3 = 1$ og koordinaterne til x mht. basen B er $(4, -6, 1)$.

Denne samme metode kan bruges til at finde koordinaterne til basen C:

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

Men da x er defineret som $x = v_1 + v_2 + v_3$ ses det hurtigt at $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 1$. Koordinaterne til X mht. basen C er altså (1,1,1).

Dette giver god mening, da x allerede er på base C form.

(c)

Vektoren v_2 tilhører $span\{u_2, u_3\}$ hvis der findes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ så

$$v_2 = x_1 u_2 + x_2 u_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dette kan skrives som:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Og på totalmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Totalmatricen løses ved hjælp af Gauss-Jordan elimination.

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = -1$$

Dette betyder at

$$u = -1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2$$

u er altså en del af $span\{u_2, u_3\}$

For at teste om v_1 tilhører $span\{u_1, u_2\}$ kan vi igen lave Gauss-Jordan for at se om der findes et x_1 og $x_2 \in \mathbb{R}$

$$v_1 = x_1 u_1 + x_2 u_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 11 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vi kan stoppe her da vi har en ligning der siger $0 = 1$. Ligningssystemet går altså ikke op.

Vi kan nu teste v_1 i $span\{u_1, u_3\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Igen kan vi stoppe tidligt da vi har en ligning hvor $0 = 8$

Til sidst kan vi teste v_1 i $span\{u_2, u_3\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftrightarrow R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Endnu engang har vi umuligt ligning, og v_1 er derfor heller ikke en del af $span\{u_2, u_3\}$.

Vi kan konkludere at v_1 hverken er i $span\{u_1, u_2\}$, $span\{u_1, u_3\}$ eller $span\{u_2, u_3\}$.