Københavns Universitet
Introduktion til diskret matematik og algoritmer - Problem set 4

Victor Vangkilde Jørgensen - kft410
kft410@alumni.ku.dk

March 21, 2025

Contents

1

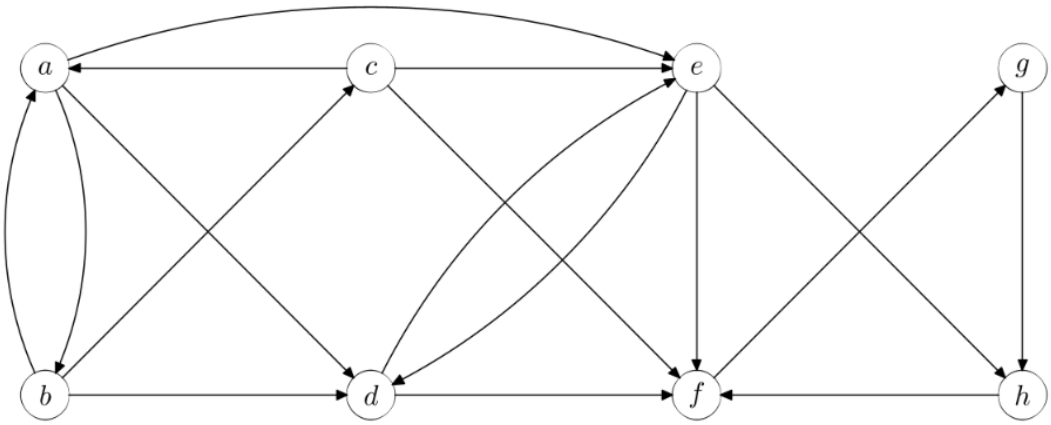


Figure 1: Directed graph G for which to compute strongly connected components in Problem 1a.

1.a

Vi opskriver vores directed graph som en adjacency list representation i lexicographic order:

$$a \to (b, d, e)$$
$$b \to (a, c, d)$$
$$c \to (a, e, f)$$
$$d \to (e, f)$$
$$e \to (d, f, h)$$
$$f \to (g)$$
$$g \to (h)$$
$$h \to (f)$$

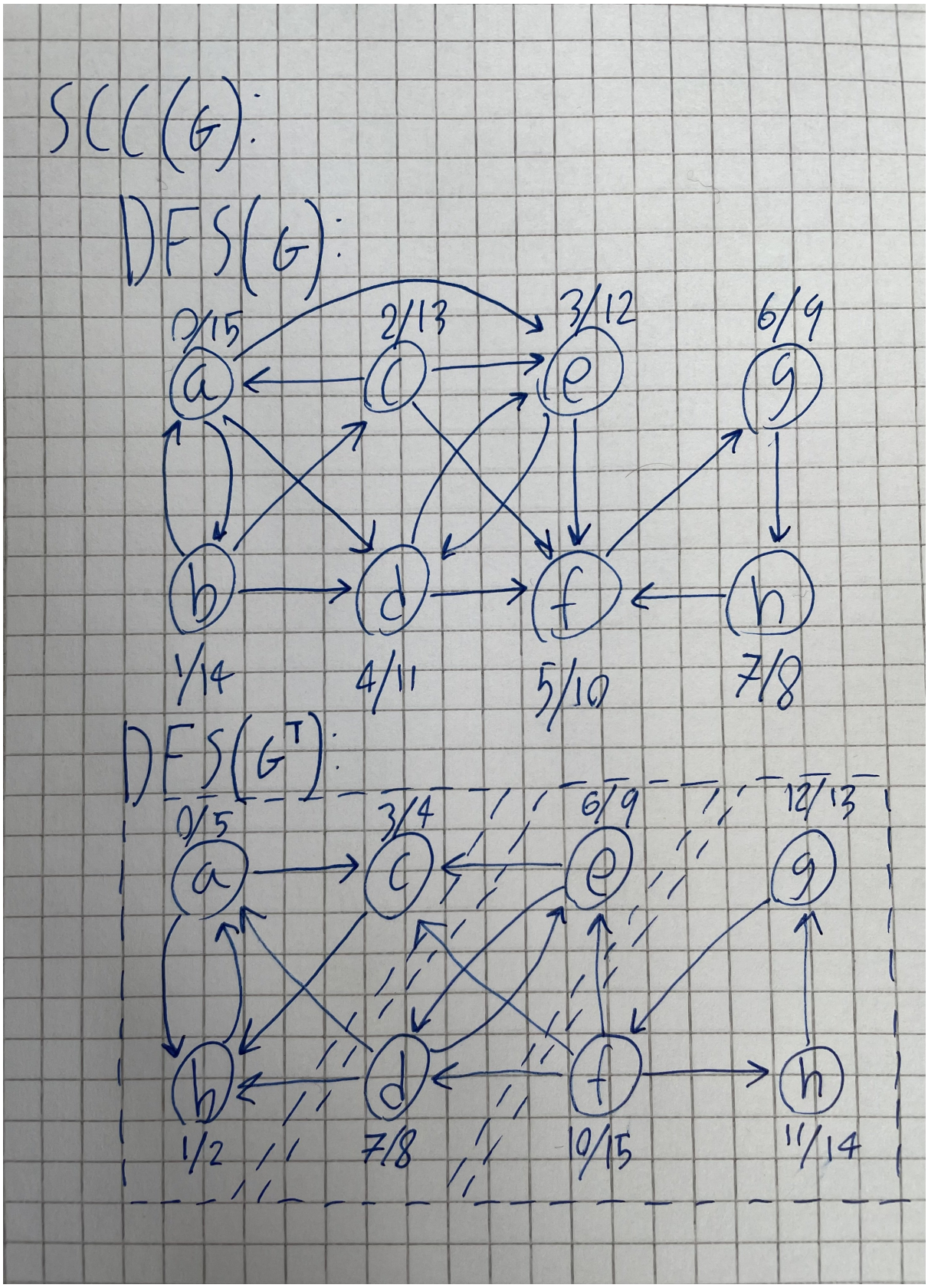


Figure 2: Gennemgang af $SCC(G)$.

For at beregne alle strongly connected components i en graf, skal vi køre DFS på grafen, og opbevare finish time'en for alle recursions. Dette har jeg gjort som vist i billedet

ovenover hvor der står $DFS(G)$. Jeg har noteret start og sluttiderne hvor hver vertex med *starttid/sluttid* over hver vertex. Starttiden bliver talt når recursion'en bliver kaldt på vertex'en, og sluttiden bliver noteret når recursion'en er færdig (DFS peger på en sort vertex).

Efter vi har kørt DFS noterer vi sluttiderne i decending order:

$$a, b, c, e, d, f, g, h$$

Nu transposer vi grafen, hvilket rent grafisk blot betyder, at vi 'vender' hver directed edge i grafen, således at $(v, u) \in E \rightarrow (u, v) \in E$. Herefter kører vi igen DPS, men vi køerer algoritmet på G^T. Vores start vertex sætter vi til den edge med højst sluttid fra tidligere (a i vores tildfælde). Herfra noterer vi hver visited vertex, og når en vertex peger på en sort vertex i en recursion, putter vi alle vertices, som ikke er i en ssc sammen i en ny ssc. Eksempelvis ser vi, at når vi har besøgt $\{a, b, c\}$ peger c på b, som er sort. Vi noterer derfor $\{a, b, c\}$ som en ssc.

1.b

2

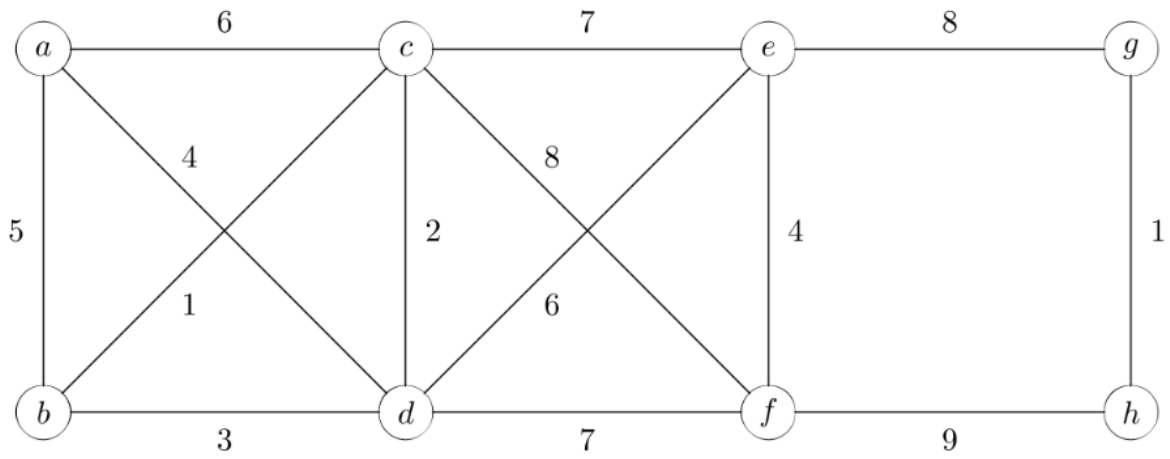
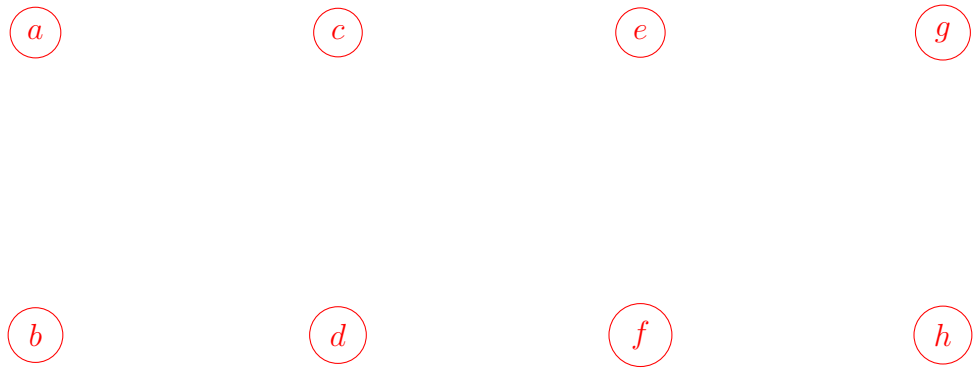


Figure 3: Undirected graph for which to compute minimum spanning tree in Problem 2a.

2.a

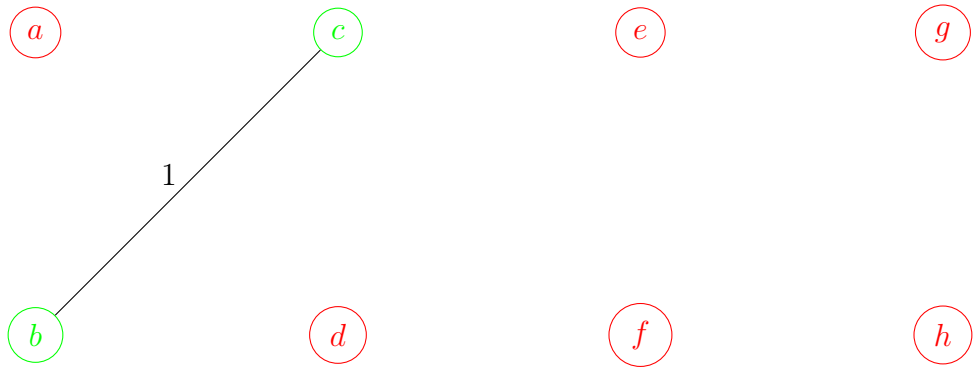
Vi har følgende vertices:



Som vi kan skrive op som subsets med alle connectede vertices. I begyndelsen har vi bare:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}$$

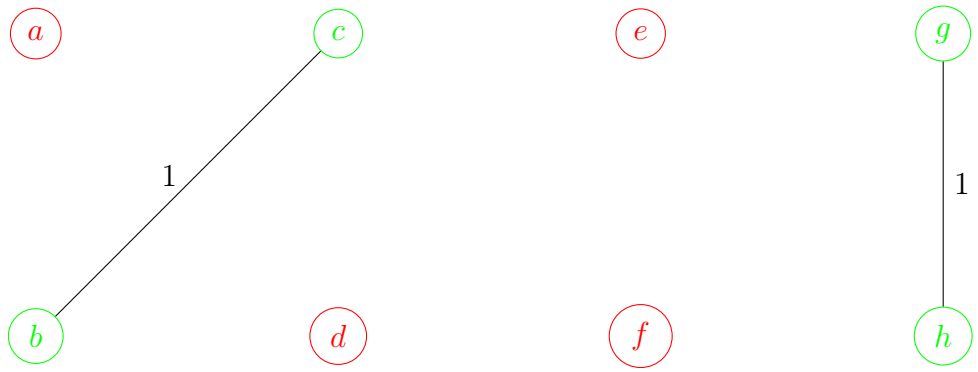
Vi ser, at $(b, c) \in E$ har lavest vægt, sammen med $(g, h) \in E$. I lexicographic order vælger vi først $(b, c) \in E$.
$(b, c) \in E$ connecter kun ikke-connetede vertices sammen, da disse er de eneste elementer i deres subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{b, c\}, \{a\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}$$

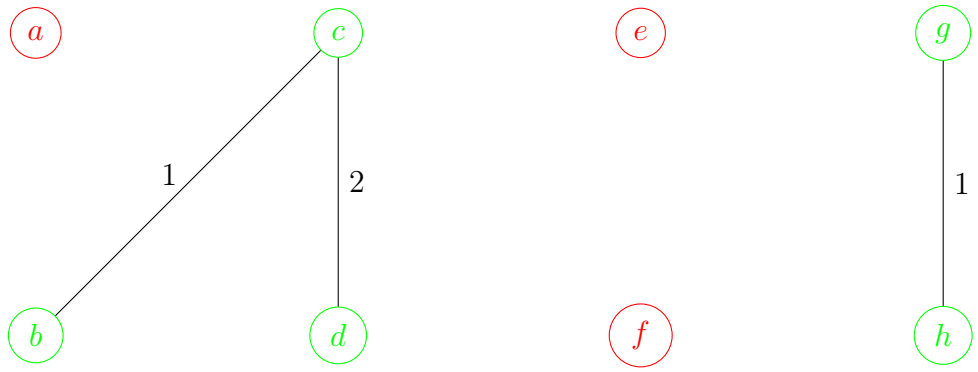
Vi kigger derefter på $(g, h) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight.
$(g, h) \in E$ connecter kun ikke-connetede vertices sammen, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{b, c\}, \{g, h\}, \{a\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}$$

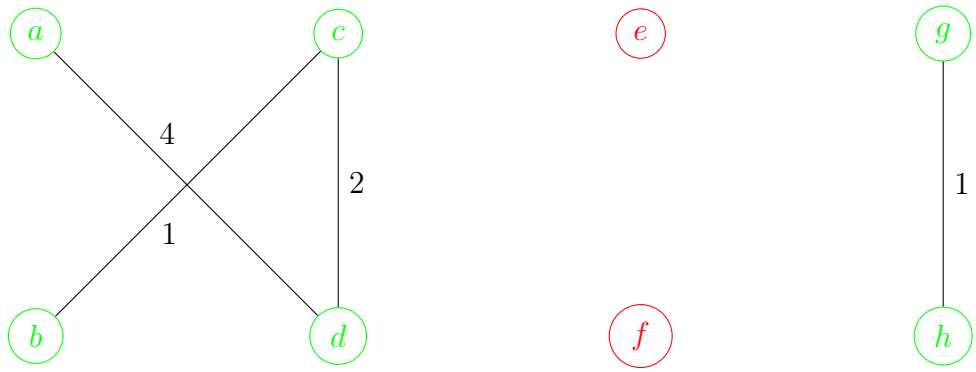
Vi kigger derefter på $(c, d) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(c, d) \in E$ connecter d, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{b, c, d\}, \{g, h\}, \{a\}, \{e\}, \{f\}$$

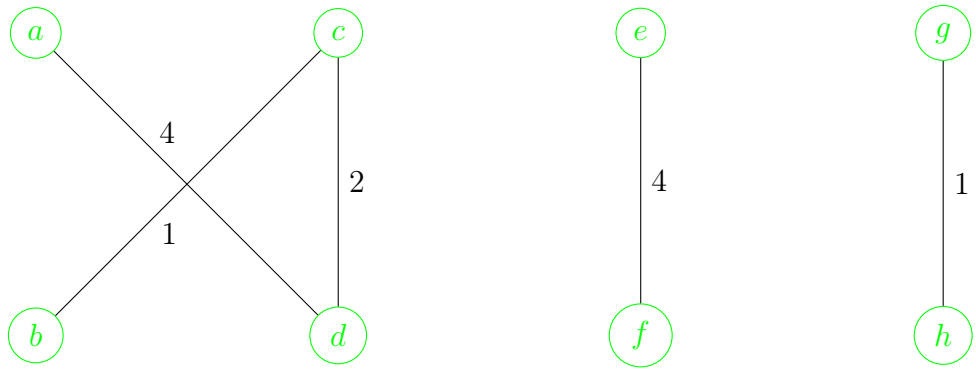
Vi kigger derefter på $(b, d) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. b og d, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(a, d) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(a, d) \in E$ connecter a, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d\}, \{g, h\}, \{e\}, \{f\}$$

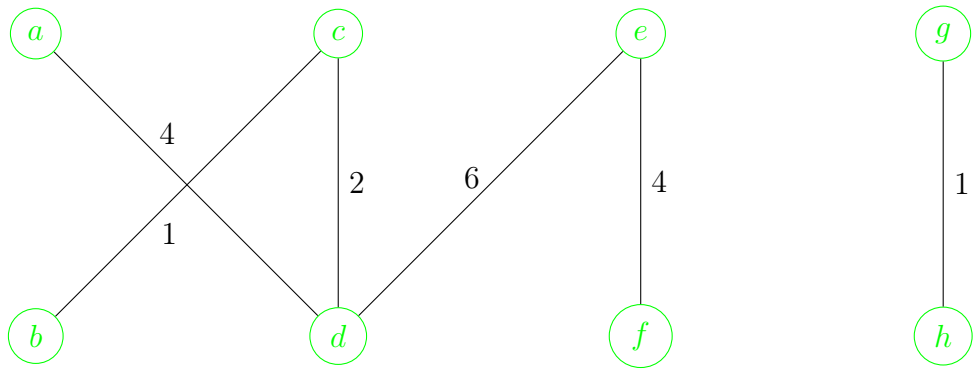
Vi kigger derefter på $(e, f) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(e, f) \in E$ connecter kun ikke-connetede vertices sammen, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}$$

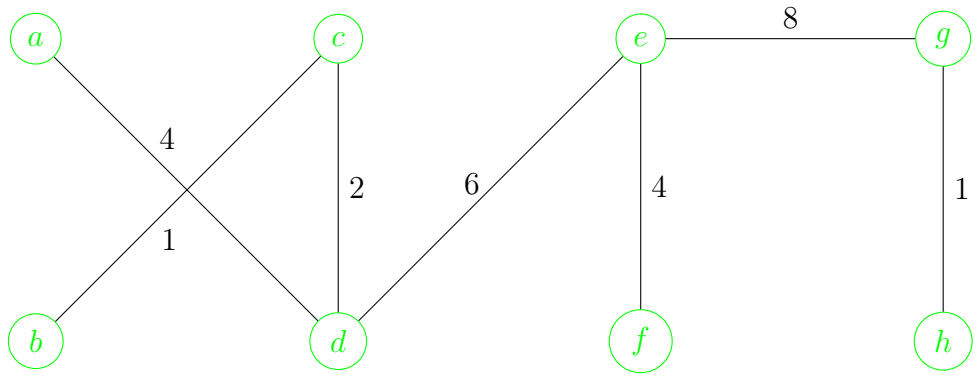
Vi kigger derefter på $(a, b) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. a og b, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(a, c) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. a og c, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(d, e) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(d, e) \in E$ connecter både e og f, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d, e, f\}, \{g, h\}$$

Vi kigger derefter på $(c, e) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. c og e, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(d, f) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. d og f, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(c, f) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. c og f, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(e, g) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(e, g) \in E$ connecter både e og g, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Vi ser, at vi har 7 edges og 8 vertices. Vi er dermed færdige, da antallet af edges svarer til antallet af vertices - 1, og alle vores vertices er i samme set, hvilket vil sige, at de er connected.

2.b

2.c

2.d

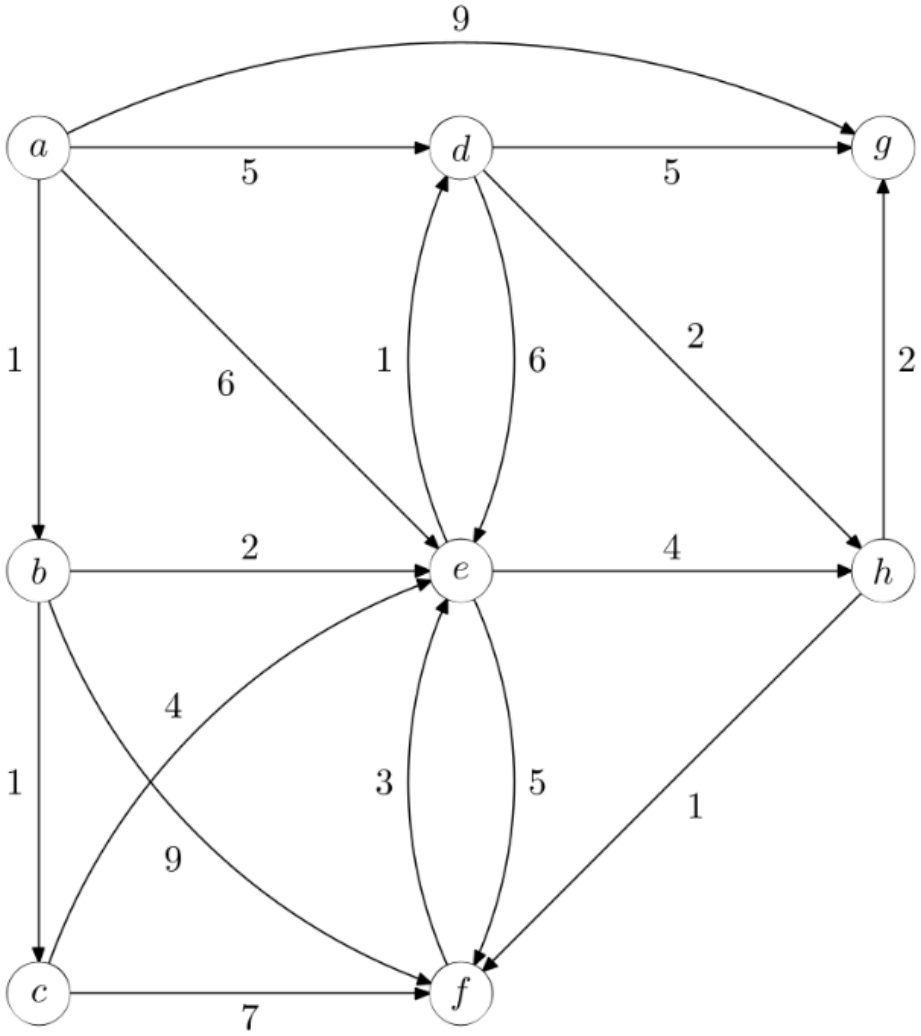


Figure 4: Directed graph Dijkstra's algorithm in Problem 3a.

3

3.a

Jeg opskriver vores weighted directed graph som adjacency list representation $(vertex, weight)$:

$$(a,0) \to ((b,1),(d,5),(e,6),(g,9))$$
$$(b,0) \to ((c,1),(e,2),(f,9))$$
$$(c,0) \to ((e,4),(f,7))$$
$$(d,0) \to ((e,6),(g,5),(h,2))$$
$$(e,0) \to ((d,1)(f,5),(h,4))$$
$$(f,0) \to (e,3)$$
$$(g,0) \to ()$$
$$(h,0) \to (f,1)$$

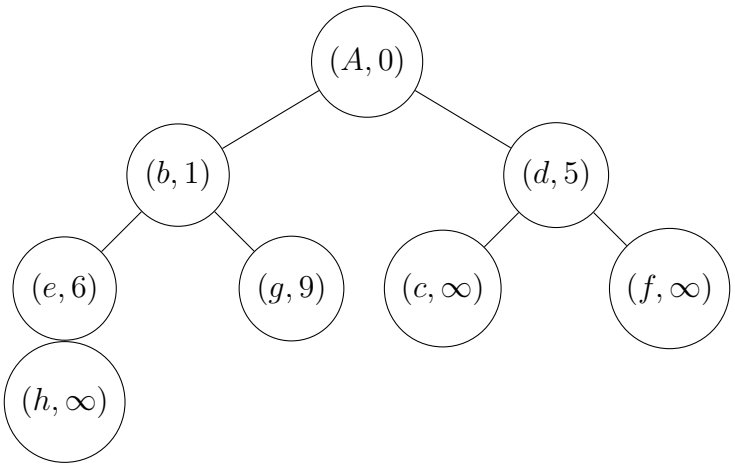
Udregning af distancer for $a's$ naboer:

$$[(b,1),(d,5),(e,6),(g,9)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A,0),(b,1),(c,\infty),(d,5),(e,6),(f,\infty),(g,9),(h,\infty)]$$

a er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive A i stedet.



Vi ser, at b er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $b's$ naboer:

$$[(c,1+1),(e,1+2),(f,1+9)] = [(c,2),(e,3),(f,10)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A,0),(B,1),(c,2),(e,3),(d,5),(g,9),(f,10),(h,\infty)]$$

b er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive B i stedet.

Vi ser, at c er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $c's$ naboer:

$$[(e, 2+4), (f, 2+7)] = [(e, 6), (f, 9)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (e, 3), (d, 5), (f, 9), (g, 9), (h, \infty)]$$

c er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive C i stedet.

Vi ser, at e er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $e's$ naboer:

$$[(d, 3+1), (f, 3+5), (h, 3+4)] = [(d, 4), (f, 8), (h, 7)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (d, 4), (h, 7), (f, 8), (g, 9)]$$

e er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive E i stedet.

Vi ser, at d er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $d's$ naboer:

$$[(g, 5+5), (h, 5+5), (e, 5+6)] = [(g, 10), (h, 10), (e, 11)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen, men ser, at der ikke nogen kortere afstande:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 4), (h, 7), (f, 8), (g, 9)]$$

d er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive D i stedet.

Vi ser, at h er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $h's$ naboer:

$$[(f, 7+1)] = [(f, 8)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen, men ser, at der ikke nogen kortere afstande:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 4), (H, 7), (f, 8), (g, 9)]$$

h er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive H i stedet.

Vi ser, at f er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $f's$ naboer:

$$[(e, 8+3)] = [(e, 11)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen, men ser, at der ikke nogen kortere afstande:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 4), (H, 7), (F, 8), (g, 9)]$$

f er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive F i stedet.

Vi ser, at g er den sidste ubesøgte vertex, og at g ikke har nogen naboer.

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 4), (H, 7), (F, 8), (G, 9)]$$

Vi markerer g som besøgt med G.

3.b

3.c

3.d