DIS: Aflevering 1

Jeppe Bonde Bakkensen | slr105
Holdnummer: 13

06/05/2025

Opgave 1

1.a

Bestemmer den matrix M_a som opfylder $T_a(x) = M_a x$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$ ved at aflæse konstantledende i matricen givet i opgaven

$$M_a = \begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{bmatrix}$$

1.b

For at T_a er bijektiv, skal T_a være både injektiv og surjektiv.
Injektiv: En lineær transformation $T_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er injektiv, hvis $\ker T_a = \{\mathbf{0}\}$.
Hvilken svarer til at bestemme nulrummet ved at løse det homogene system $T_a(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array}\right]$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{a-1}\,\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2\,\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(a+1)}{a-1} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{a-1}{a(a+1)}\,\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1]{\frac{1}{a-1}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{a}\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Da løsningen på det homogene system er den trivielle løsning, følger det at

$$\ker T_a = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad T_a \text{ er injektiv}$$

Surjektiv: En lineær transformation $T_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, er surjektiv hvis $\operatorname{ran} T_a = \mathbb{R}^3$, hvilket i dette tilfælde svarer til at $\operatorname{rank} T_a = 3$. Fra den reducerede række echelonform ses det, at matrixen har tre pivot 1-taller, og dermed:

$$\operatorname{rank}(T_a) = 3 \Rightarrow \operatorname{ran}(T_a) = \mathbb{R}^3$$

Konklusion: Da T_a både er injektiv og surjektiv, er transformationen bijektiv.

1.b (inverse) Finder den inverse T_a^{-1}:

$$T_a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{a-1}\,\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2\,\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a(a+1)}{a-1} & 0 & -\frac{2}{a-1} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{a-1}{a(a+1)}\,\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array}\right] \xrightarrow[\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1]{\frac{1}{a-1}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{a}\,\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{array}\right]$$

Konklusion: Den inverse matrix til T_a, hvor $a \neq \{-1, 0\}$ er :

$$T_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & \frac{a+2}{a(a+1)} & \frac{1}{a(a+1)} \\ 0 & -\frac{2}{a(a+1)} & \frac{a-1}{a(a+1)} \end{bmatrix}$$

1.c

Bestemmer baserne for $\operatorname{ran} T_a$ og $\ker T_a$ og bestemmer underrums dimensionerne for når $a = -1$ og $a = 0$. Finder nulrummet for $a = -1$, ved at løse det homogene system $T_a(x) = 0$.

$$T_{a=-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sætter $x_3 = t$, hvor $t \in \mathbb{R}$, og opstiller parameterfremstilling: $T_{a=-1}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}$$

Finder billedrummet og kernerummet af $T_{a=-1}$

$$\operatorname{ran} T_{a=-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \operatorname{ran} T_{a=-1} = 2$$

$$\ker T_{a=-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \ker T_{a=-1} = 1$$

Konklusion:
Dermed er

- $\operatorname{ran} T_{a=-1}$ en plan i $\mathbb{R}^3$
- $\ker T_{a=-1}$ er en ret linje gennem origo i $\mathbb{R}^3$

Finder nulrummet for $a = 0$, ved at løse det homogene system $T_a(x) = 0$.

$$T_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Anvender rækkeoperationer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-2\,\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sætter $x_1 = s$ og $x_3 = t$, hvor $s, t \in \mathbb{R}$, og opstiller parameterfremstilling: $T_{a=0}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R}$$

Finder billedrummet og kernerummet af $T_{a=0}$

$$\operatorname{ran} T_{a=0} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \operatorname{ran} T_{a=0} = 1$$

$$\ker T_{a=0} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \ker T_{a=0} = 2$$

Konklusion:
Dermed er

- $\operatorname{ran} T_{a=0}$ er en ret linje gennem origo i $\mathbb{R}^3$
- $\ker T_{a=0}$ en plan i $\mathbb{R}^3$

1.d

Bestemmer det generelle udtryk for potensmatricen $(\mathbf{M}_a)^n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$ når $a = -1$ og når $a = 0$.

For at bestemme den generelle potensmatrice for $a = -1$ udregnes $(\mathbf{M}_{-1})^2$ og $(\mathbf{M}_{-1})^3$ for at finde et generelt mønster i udviklingen:

$$\mathbf{M}_{-1}^2 = \mathbf{M}_{-1} \cdot \mathbf{M}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{-1}^3 = \mathbf{M}_{-1}^2 \cdot \mathbf{M}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{-1}$$

Ud fra mønstret i ovenstående udregninger ses det at den generelle potensmatrice for $(\mathbf{M}_{a=0})^n$ er givet ved:

$$(\mathbf{M}_{-1})^n = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

For at bevise at dette reelt er det generelle mønster for $(\mathbf{M}_{-1})^n$ anvender jeg induktion, hvor induktionshypotesen er:

Induktionshypotese

Antag at for et vilkårligt $n \geq 1$ gælder:

$$(\mathbf{M}_{-1})^n = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases}$$

Induktions-step

Viser at det også gælder for $n + 1$:

$$(\mathbf{M}_{-1})^{n+1} = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n+1 \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n+1 \text{ er lige} \end{cases}$$

Tilfælde 1: n er ulige

Når n er ulige, siger induktionshypotesen at $(\mathbf{M}_{-1})^n = \mathbf{M}_{-1}$, hvilket medfører at:

$$(\mathbf{M}_{-1})^{n+1} = \mathbf{M}_{-1} \cdot \mathbf{M}_{-1} = \mathbf{M}_{-1}^2$$

Da $n + 1$ nu er blevet lige, holder påstanden.

Tilfælde 2: n er lige

Når n er lige, siger induktionshypotesen at $(\mathbf{M}_{-1})^n = \mathbf{M}_{-1}^2$, hvilket medfører at:

$$(\mathbf{M}_{-1})^{n+1} = \mathbf{M}_{-1}^2 \cdot \mathbf{M}_{-1} = \mathbf{M}_{-1}^3$$

Ud fra tidligere udregninger har jeg vist at:

$$\mathbf{M}_{-1}^3 = \mathbf{M}_{-1}$$

Og når n er lige og man tilføjer $n+1$ bliver resultatet ulige, hvilket stemmer overens med påstanden.

Konklusion:
Ved induktion har jeg nu vist, at generelle potensmatrice for $(\mathbf{M}_{a=0})^n$ er givet ved:

$$(\mathbf{M}_{-1})^n = \begin{cases} \mathbf{M}_{-1}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ \mathbf{M}_{-1}^2, & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

På samme måde som ovenfor bestemmes den generelle potensmatrice for $a = 0$:

$$(\mathbf{M}_{a=0})^2 = \mathbf{M}_{a=0} \cdot \mathbf{M}_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{M}_{a=0})^2 = \mathbf{M}_{a=0} \cdot \mathbf{M}_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ud fra mønstret i ovenstående udregninger ses det at den generelle potensmatrice for $(\mathbf{M}_{a=0})^n$ er givet ved:

$$(\mathbf{M}_{a=0})^n = \mathbf{M}_{a=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$$

For at bevise at dette reelt er det generelle mønster for $(\mathbf{M}_0)^n$ anvender jeg induktion, hvor induktionshypotesen er:

Induktionshypotese
Antag at for et vilkårligt $n \geq 1$ gælder:

$$(\mathbf{M}_{a=0})^n = \mathbf{M}_{a=0} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Induktions-step
Viser at det også gælder for $n+1$:

$$(\mathbf{M}_0)^{n+1} = (\mathbf{M}_0)^n \cdot \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0$$

1.e
Vil vise at for ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$. Det er i opgaveteksten givet at

$$\mathcal{L} = \{(t, t, -2) \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Udregner $T_a(\mathcal{L})$

$$T_a \begin{pmatrix} t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - t + 2t \\ (a-1)t + 2t \\ 2t - 2(a+2)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + t \\ at + t \\ -2at - 2t \end{pmatrix} = (1+a)t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da $T_a(\mathcal{L})$ afhænger af t er $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$
Derudover vil jeg vise at for ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder $T_a(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$. Det er i opgaveteksten givet at

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R} \mid x_2 + x_3 = 0\}$$

Omskriver betingelsen for $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R} \mid x_2 = -x_3\}$$

Opgave 2

2.a

Bestemmer basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ ved at bestemme basisvektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ fra $\mathcal{C}$ som linearkombinationer af basisvektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ fra $\mathcal{B}$. Koordinaterne jeg finder fra linearkombinationer udgør søjlerne i basisskiftmatricen.

Finder basisvektorerne $\mathbf{v}_1$ som linearkombination af $\mathcal{B}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4]{\substack{-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3]{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4]{\substack{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\frac{3}{2}\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dvs. at koordinaterne for $\mathbf{v}_1$ som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Koordinaterne for $\mathbf{v}_1$ udgør første søjle i basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

På samme måde udregner jeg basisvektorerne $\mathbf{v}_2$ som linearkombination af $\mathcal{B}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4]{\substack{-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\frac{3}{2}\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ 3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dvs. at koordinaterne for $\mathbf{v}_2$ som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er

$$\mathbf{v}_2 = 0\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$$

Koordinaterne for $\mathbf{v}_2$ udgør anden søjle i basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

$$[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

På samme måde udregner jeg basisvektorerne $\mathbf{v}_3$ som linearkombination af $\mathcal{B}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \\ -2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \\ -\frac{3}{2}\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ 3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dvs. at koordinaterne for $\mathbf{v}_3$ som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Koordinaterne for $\mathbf{v}_3$ udgør tredje søjle i basisskiftmatricen $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

$$[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sætter nu søjlerne $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}}$ sammen til at danne basisskiftmatrice $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$:

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.b
For at bestemme koordinaterne for vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ mht. $\mathcal{C}$ anvender jeg

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7-1+3 \\ -2+0-1 \\ 3-1+2 \\ 1-3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ og vi lige har lagt de tre vektorer sammen, følger det direkte af therom 3.8 og definition 3.7 fra slidsne fra forlæsning 5 at, da

$$[x]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

for at bestemme koordinaten for x mht. $\mathcal{B}$ anvender jeg §3.2.5 på slidsne i uge 5 som sige at

$$[x]_\mathcal{B} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[x]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.c
For at afgøre om $\mathbf{v}_2 \in \text{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, anvender jeg, at basisskiftmatricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ fundet i opg. 2.a udtrykker hver vektor i $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ som en linearkombination af vektorerne i $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Fra basisskiftmatricen har vi:

$$[\mathbf{v}_2]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

hvilket betyder:

$$\mathbf{v}_2 = 0 \cdot \mathbf{u}_1 + (-1) \cdot \mathbf{u}_2 + (-1) \cdot \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3.$$

Jeg verificerere dette:

$$-\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2.$$

Dermed har vi vist, at $\mathbf{v}_2 \in \text{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, da $\mathbf{v_2}$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

På samme måde vil jeg nu gøre rede for at Gør rede for, at $\mathbf{v}_1$ hverken tilhører span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ eller span$\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Fra basisskiftmatricen har vi:

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

hvilket betyder, at

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

Det vil sige at for at udtrykke $\mathbf{v}_1$ som linearkombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, kræver det alle 3 basisvektorer i $\mathcal{B}$. Det er derfor ikke muligt at udtrykke $\mathbf{v_1}$, som en linearkombination af kun to af vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Dermed gælder:

$$\mathbf{v}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \quad \mathbf{v}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}, \quad \mathbf{v}_1 \notin \text{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}.$$

Det viser at $\mathbf{v}_1$ ikke ligger i spanet af nogle af de mulige par af basisvektorer i $\mathcal{B}$.

Opgave 3

3.a

Jeg skal bestemme den 4×4-matrix for F, således at følgende ligning er opfyldt:

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Af opgaveteksten fremgår det, at ved at trykke på op-pilen forskydes rumskibet i retningen af vektoren fra centrum C til spidsen S, som er defineret som:

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Ved at lægge vektoren $\overrightarrow{CS}$ til både centrum C og spidsen S, fremkommer de nye koordinater

$$C^F = C + \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$S^F = S + \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Samler de nye koordinater i en vektor i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Ud fra ovenstående udtryk kan den tilhørende lineærer transformation, aflæses, hvilket giver følgende 4×4-matrix $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.b

Jeg skal gøre rede for at følgende formler gælder

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} c_1^R \\ c_2^R \\ s_1^R \\ s_2^R \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\mathbf{L}_\theta$ og $\mathbf{R}_\theta$ er følgende 4×4 matricer:

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Af opgaveteksten fremgår det, at ved at tryk på venstre-pilen forbliver rumskibets centrum uændret,dvs.:

$$C^L = \begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Spidsen S roteres θ grader mod uret omkring rumskibets centrum, hvilket kan udtrykkes som::

$$\begin{pmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Udregner koordinaterne for S^L trinvist:

$$\begin{aligned} S_L = \begin{pmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (s_1 - c_1)\cos\theta - (s_2 - c_2)\sin\theta \\ (s_1 - c_1)\sin\theta + (s_2 - c_2)\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + (s_1 - c_1)\cos\theta - (s_2 - c_2)\sin\theta \\ c_2 + (s_1 - c_1)\sin\theta + (s_2 - c_2)\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)c_1 + \sin\theta c_2 + \cos\theta s_1 - \sin\theta s_2 \\ -\sin\theta c_1 + (1-\cos\theta)c_2 + \sin\theta s_1 + \cos\theta s_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Samler de nye koordinater i en vektor i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ (1-\cos\theta)c_1 + \sin\theta c_2 + \cos\theta s_1 - \sin\theta s_2 \\ -\sin\theta c_1 + (1-\cos\theta)c_2 + \sin\theta s_1 + \cos\theta s_2 \end{pmatrix}$$

Hver komponent i ovenstående vektor er en lineær kombination af c_1, c_2, s_1, s_2. Det betyder, at der findes en 4×4-matrix $\mathbf{L}_\theta$

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

For at finde matricen $\mathbf{R}_\theta$ kan man anvende at $\mathbf{R}_\theta = \mathbf{L}_{-\theta}$.
Da cosinus er en lige funktion vil det sige at cosinus ikke skifter fortegn når man tager $-\theta$

$$cos(-\theta) = \cos\theta$$

Sinus er derimod en ulige funktion så den ændre fortegn når man spejler funktionen omkring x-aksen.

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

For $\mathbf{R}_\theta$ medfører dette at $\mathbf{R}_\theta$ er givet ved matricen:

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3.c

Ved en vinkel på $\theta = 20$ og en startposition, hvor $C = (0, 0$ og $S = (0, 1)$, bestemmes den position af rumskibets centrum og spids efter tastkombination givet i opgaveteksten. Jeg har anvendt funktionen *MatrixProduct* fra Projekt A til at bestemme position af rumskibets centrum og spids. Nedenfor har jeg til venstre angivet den kode jeg har kørt, og til højre har jeg angivet outputtet efter hvert tryk

```
# Definerer startmatrix
start_matrix = (
Matrix.fromArray(
    [[0],
     [0],
     [0],
     [1]
    ]
))

# Definerer forward matrix
forward = (
Matrix.fromArray(
    [[0, 0, 1, 0],
     [0, 0, 0, 1],
     [-1, 0, 2, 0],
     [0, -1, 0, 2]
    ]
))

# Definerer left matrix
rotate_left = (
Matrix.fromArray(
    [[1, 0, 0, 0],
     [0, 1, 0, 0],
     [1-math.cos(20), math.sin(20), math.cos(20), -math.sin(20)],
     [-math.sin(20), 1-math.cos(20), math.sin(20), math.cos(20)]
    ]
))

# Definerer right matrix
rotate_right = (
Matrix.fromArray(
    [[1, 0, 0, 0],
     [0, 1, 0, 0],
     [1-math.cos(20), -math.sin(20), math.cos(20), math.sin(20)],
     [math.sin(20), 1-math.cos(20), -math.sin(20), math.cos(20)]
    ]
))

# Matrix operationer
matrix = MatrixProduct(forward, start_matrix)
matrix = MatrixProduct(rotate_right, matrix)
matrix = MatrixProduct(rotate_right, matrix)
matrix = MatrixProduct(forward, matrix)
matrix = MatrixProduct(forward, matrix)
matrix = MatrixProduct(rotate_left, matrix)
matrix = MatrixProduct(rotate_left, matrix)
matrix = MatrixProduct(rotate_left, matrix)
matrix = MatrixProduct(forward, matrix)
```

```
# 0: Startmatrix
[[0.00000],
 [0.00000],
 [0.00000],
 [1.00000]]
# 1: Forward
[[0.00000],
 [1.00000],
 [0.00000],
 [2.00000]]
# 2: Right
[[0.00000],
 [1.00000],
 [0.91295],
 [1.40808]]
# 3: Right
[[0.00000],
 [1.00000],
 [0.74511],
 [0.33306]]
# 4: Forward
[[0.74511],
 [0.33306],
 [1.49023],
 [-0.33388]]
# 5: Forward
[[1.49023],
 [-0.33388],
 [2.23534],
 [-1.00081]]
# 6: Left
[[1.49023],
 [-0.33388],
 [2.40317],
 [0.07421]]
# 7: Left
[[1.49023],
 [-0.33388],
 [1.49023],
 [0.66612]]
# 8: Left
[[1.49023],
 [-0.33388],
 [0.57728],
 [0.07421]]
# 9: Forward
[[0.57728],
 [0.07421],
 [-0.33566],
 [0.48229]]
```

Dvs. at slutpositionen af rumskibet centrum og spids efter tastkombinationen er givet ved:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.57728 \\ 0.07421 \\ 0.33566 \\ 0.48229 \end{pmatrix}$$

3.d

Jeg ønsker at vise, hvorfor det gælder, at $(\mathbf{R}_\theta)^{18} = \mathbf{I}_4$, når $\theta = 20°$.

når man trykket på højre-tasten roteres rumskibet $\theta = 20°$ omkring sin egen akse. Efter 18 tryk på højre-tasten har rumskibet roteret en hel omgang omkring sin egen akse, hvilket svarer til at til rumskibet vender tilbage til sin oprindelige position:

$$\cos(18 \cdot 20°) = \cos(360°) = 1, \qquad \sin(18 \cdot 20°) = \sin(360°) = 0$$

Hvis man sætter dette ind i matricen for $\mathbf{R}_\theta$:

$$(\mathbf{R}_{20})^{18} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos(360°) & -\sin(360°) & \cos(360°) & \sin(360°) \\ \sin(360°) & 1 - \cos(360°) & -\sin(360°) & \cos(360°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_4$$

Det vil sige, at efter 18 tryk er rumskibet vendt tilbage til sin udgangsposition. Det ses i rotationsmatricen, som svarer til identitetsmatricen $((\mathbf{R_{20}})^{18} = \mathbf{I}_4$.