LinAlgDat

2024/2025

Projekt B

Projektet består af fire opgaver. Opgave 1 og 2 er rene matematikopgaver (ligesom dem i den skriftlige prøve). Opgave 3 har fokus på anvendelser af lineær algebra. Opgave 4 drejer sig om at implementere metoder og algoritmer fra lineær algebra i F# eller Python.

Besvarelsen af projektet skal bestå af følgende to filer. Filerne må ikke zippes og skal afleveres i Absalon.

- Én pdf-fil, skrevet i LaTeX, med løsninger til opgaverne 1, 2 og 3. Første side i pdf-filen skal være en forside indeholdende forfatterens fulde navn, KU-id og holdnummer.
- Én F#- eller Python-fil med løsninger til Opgave 4 (se opgaveformuleringen for detaljer).

Ved bedømmelsen af projektet lægges naturligvis vægt på korrekthed, men det er også vigtigt, at fremstillingen er klar og overskuelig. Mellemregninger skal medtages og koden skal kommenteres i passende omfang. Projektet skal laves individuelt. Afskrift betragtes som eksamenssnyd.

Programmeringsdelen rettes bl.a. ved at koden bliver afprøvet på hemmeligholdt testdata. Der vil blive udleveret tilsvarende testscripts, som man selv kan teste koden på før aflevering.

Der er adgang til hjælp ved projekthjælp-øvelserne og studiecaféerne på DIKU. Tidsfrister for aflevering, retning, mm. af projektet er beskrevet i dokumentet *Kursusoversigt*. Man er selv ansvarlig for at holde sig orienteret herom.

Besvarelser der er afleveret for sent vil som udgangspunkt ikke blive rettet. Der er ikke mulighed for genaflevering. Aflevér derfor i god tid, også selvom der er dele af opgaverne man ikke har nået.

Opgave 1 (25%)

Betragt for hvert $a \in \mathbb{R}$ den lineære transformation $T_a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$T_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 - x_2 - x_3 \\ (a-1)x_2 - x_3 \\ 2x_2 + (a+2)x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den matrix $\mathbf{M}_a$ som opfylder $T_a(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_a\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Lad $a \notin \{-1, 0\}$ være vilkårlig. Vis, at T_a er bijektiv og bestem den inverse T_a^{-1}.

(c) Bestem for $a = -1$ og $a = 0$ baser for $\operatorname{ran} T_a$ og $\ker T_a$ og angiv disse underrums dimensioner.

(d) Bestem for $a = -1$ og $a = 0$ et generelt udtryk for potensmatricen $(\mathbf{M}_a)^n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

(e) Betragt nedenstående linje og plan i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L} = \{(t, t, -2t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{og} \qquad \mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\}.$$

Vis, at der for ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder $T_a(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ og $T_a(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$.

Opgave 2 **(25%)** Betragt følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Det oplyses, at $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ og $\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er baser for samme underrum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Bestem basisskiftmatricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

(b) Bestem koordinaterne for vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ mht. basen $\mathcal{B}$ og mht. basen $\mathcal{C}$.

(c) Gør rede for, at $\mathbf{v}_2$ tilhører $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.
Gør rede for, at $\mathbf{v}_1$ hverken tilhører $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$ eller $\operatorname{span}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

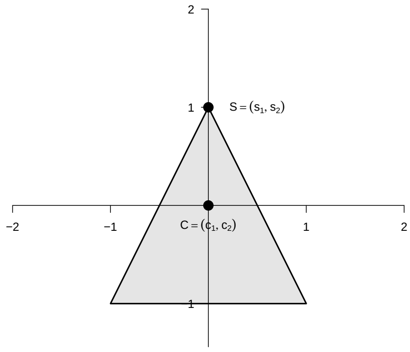
(d) Bestem for ethvert $x \in \mathbb{R}$ dimensionen af underrummet $\mathcal{V}_x = \operatorname{span}\{x\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1 + x\mathbf{u}_2\}$.

Endelig betragtes x_3x_4-planen i $\mathbb{R}^4$, dvs. underrummet $\mathcal{W} = \{\, (0, 0, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

(e) Vis, at fællesmængden $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ er en linje gennem origo og bestem en retningsvektor for denne.

Opgave 3 (25%)

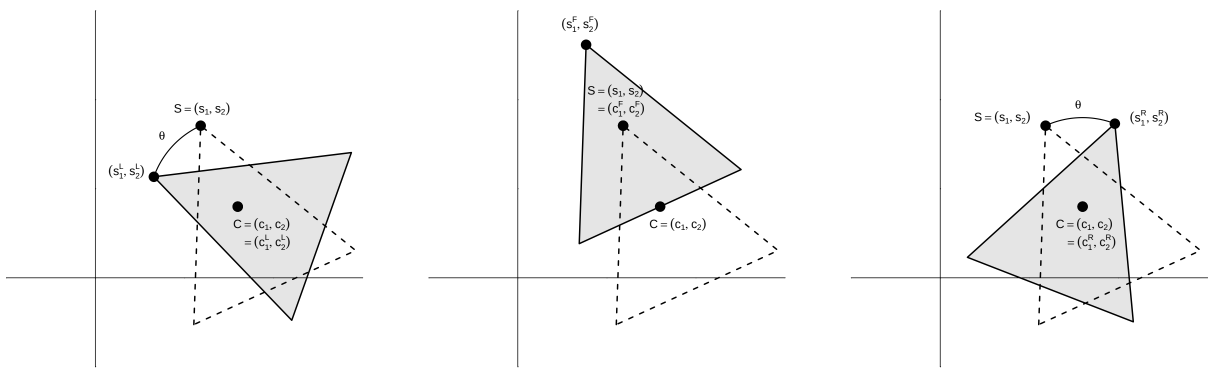
I et computerspil – som fx *Asteroids* (Atari Inc, 1979) – styrer spilleren et trekantformet rumskip i et 2D-koordinatsystem ved hjælp af piletasterne $\boxed{\leftarrow}$, $\boxed{\uparrow}$ og $\boxed{\rightarrow}$. Rent grafisk ser rumskibet ud som på figuren nedenfor. Fra et matematisk synspunkt er rumskibets position i koordinatsystemet bestemt ved positionen af to punkter: rumskibets *centrum* $C = (c_1, c_2)$ og *spids* $S = (s_1, s_2)$.



Rumskibets position ved spillets start

Ved spillets start er rumskibet placeret som på figuren ovenfor, dvs. $C = (0,0)$ og $S = (0,1)$. Effekten ved tryk på piletasterne $\boxed{\leftarrow}$ (Left rotate), $\boxed{\uparrow}$ (Forward) og $\boxed{\rightarrow}$ (Right rotate) er:

- Ved tryk på $\boxed{\leftarrow}$ / $\boxed{\rightarrow}$ roteres rumskibet omkring sit centrum en vis vinkel θ mod / med uret.
- Ved tryk på $\boxed{\uparrow}$ parallelforskydes rumskibet efter vektoren $\overrightarrow{CS}$ (vektoren fra C til S).



Ved tryk på $\boxed{\leftarrow}$ Ved tryk på $\boxed{\uparrow}$ Ved tryk på $\boxed{\rightarrow}$

Antag nu, at rumskibets centrum og spids har koordinatsæt hhv. $C = (c_1, c_2)$ og $S = (s_1, s_2)$. Vi indfører følgende betegnelser:

(c_1^L, c_2^L) og (s_1^L, s_2^L) er koordinaterne for hhv. rumskibets centrum og spids efter tryk på $\boxed{\leftarrow}$

(c_1^F, c_2^F) og (s_1^F, s_2^F) er koordinaterne for hhv. rumskibets centrum og spids efter tryk på $\boxed{\uparrow}$

(c_1^R, c_2^R) og (s_1^R, s_2^R) er koordinaterne for hhv. rumskibets centrum og spids efter tryk på $\boxed{\rightarrow}$

Vi samler de fire tal c_1, c_2, s_1, s_2, som fastlægger rumskibets position, i én vektor $(c_1, c_2, s_1, s_2) \in \mathbb{R}^4$.

(a) Bestem en 4×4 matrix $\mathbf{F}$ som opfylder

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Vink: Ved tryk på $\boxed{\uparrow}$ parallelforskydes rumskibet med vektoren $\overrightarrow{CS} = \left(\begin{smallmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Gør rede for, at der gælder formlerne

$$\begin{pmatrix} c_1^L \\ c_2^L \\ s_1^L \\ s_2^L \end{pmatrix} = \mathbf{L}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} c_1^R \\ c_2^R \\ s_1^R \\ s_2^R \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

hvor $\mathbf{L}_\theta$ og $\mathbf{R}_\theta$ er følgende 4×4 matricer:

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Følgende vink/oplysninger må frit benyttes:

- *Ved tryk på* $\boxed{\leftarrow}$ *er rumskibets centrum uændret, så* $c_1^L = c_1$ *og* $c_2^L = c_2$.
- *Rotationsmatricen* $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ *drejer som bekendt en vektor* θ *grader* ***mod uret*** *omkring* ***origo****.* *Ved tryk på* $\boxed{\leftarrow}$ *drejes vektoren* $\overrightarrow{CS} = \left(\begin{smallmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{smallmatrix}\right)$*, som går fra rumskibets centrum til dets spids,* θ *grader mod uret omkring* ***rumskibets centrum****. Dette betyder at* $\left(\begin{smallmatrix} s_1^L \\ s_2^L \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} s_1 - c_1 \\ s_2 - c_2 \end{smallmatrix}\right)$. *Regn nu videre på dette udtryk og bestem* s_1^L *og* s_2^L *udtrykt ved* c_1, c_2, s_1, s_2.
- *Matricen* $\mathbf{R}_\theta$ *kan bestemmes når først* $\mathbf{L}_\theta$ *er fundet ved at benytte, at* $\mathbf{R}_\theta = \mathbf{L}_{-\theta}$.

(c) Lad $\theta = 20^\circ$ og antag, at rumskibet er i sin startposition, dvs. $C = (0,0)$ og $S = (0,1)$.

Bestem positionen af rumskibets centrum og spids efter følgende tastkombination (der læses fra venstre mod højre):

$$\boxed{\uparrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\rightarrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\uparrow}\ \boxed{\leftarrow}\ \boxed{\leftarrow}\ \boxed{\leftarrow}\ \boxed{\uparrow}$$

(Man får brug for at multiplicere et antal 4×4 matricer i en passende rækkefølge. Hertil kan man fx benytte udvalgte funktioner fra Opgave 4, altså programmeringsopgaven, i Projekt A.)

(d) Lad stadigvæk $\theta = 20^\circ$. Forklar hvorfor der gælder $(\mathbf{R}_\theta)^{18} = \mathbf{I}_4$ (4×4 enhedsmatricen).

Opgave 4 [Programmering i F# eller Python] (25%)

I dette projekt skal du implementere en række operationer relateret til Gauss Elimination. Dette kræver en solid grundlæggende forståelse af elementære rækkeoperationer, fremadreduktion (forward reduction), baglænsreduktion (backward reduction) og reduceret trappeform (reduced echelon form). For at komme i gang med opgave, skal man først downloade projektfilerne. F# og Python filer er i Absalon. F# filer og tilgængelige via linket `https://absalon.ku.dk/files/9531685/`, mens Python-filer er tilgængelige via linket `https://absalon.ku.dk/files/9531687/`. For det andet man skal få et overblik over projektfilerne, prøve at åbne filerne og se på dem. Bemærk, at de fleste af filerne er identiske med dem, der er angivet i det foregående projekt. Der er kun få nye eller ændrede filer. Her er en kort oversigt over dem:

Programming i F#

Core/Vector.fs, Core/Matrix.fs, Core/VectorFactory.fs, Core/MatrixFactory.fs Disse filer, der allerede findes i projekt A, indeholder grundlæggende definitioner og metoder til vektorer og matricer.

ProjectB/GaussExtensions.fs Denne fil indeholder flere ufærdige metoder. *Dette er den eneste fil, du har lov til at ændre og den eneste fil, du må indsende til programmeringsdelen af Project B.*

ProjectB/RunTest.fsx Denne fil indeholder data for selvtest og kald til testfunktionerne i `TestProjectB.fs`.

ProjectB/TestProject.fs Denne fil bruges til at teste din implementering i `GaussExtensions.cs` mod testdataene i `RunTest.cs`.

Din opgave er at afslutte de uimplementerede metoder i `ProjectB/GaussExtensions.fs`. På næste side finder du en beskrivelse af de algoritmer, du skal følge, når du implementerer de fleste af disse metoder. Studér omhyggeligt disse algoritmer og læs kommentarerne over hver metode, før du begynder. Bemærk, at metoden `AugmentRight` fra Projekt A leveres, da det kan være nyttigt ved implementering af `GaussElimination`. Du er velkommen til at tilføje en ekstra hjælper metoder i `GaussExtensions.fs`, men det har du ikke lov til omdøbe eller på anden måde ændre typesignaturen for en af de eksisterende metoder. Når du indsender din løsning til programmeringsdelen af Projekt B, må du kun uploade filen `ProjectB/GaussExtensions.fs`.

Byg og kør projektet. Byg scripts leveres til at bygge og/eller kører koden, enten ved hjælp af dotnet. De er kort dokumenteret i filen README.md. Hvis dotnet klager over rammeværket, kan du redigere filen `projectB.fsproj` (det er en xml/tekstfil) og ændre rammenummeret i den (det er som standard sat til `net6.0`, du kan eventuelt ændre det til `net7.0`). Men scriptet forsøger automatisk at få det aktuelle rammenummer.
Gå ikke i panik, hvis ingen af bygge/kompileringsmetoderne nævnt ovenfor lyder bekendt for dig. Kontakt venligst TA'erne og/eller François og dem vil hjælpe dig.

Når du kopierer projektfilerne til din computer, bedes du kun bruge alfanumeriske ASCII-tegn (og måske understregningen '_' og prikken '.')[1], ikke nationale sprogspecifikke (såsom dansk æ, ø, å) i din mappes navne, kan/vil det forhindre `dotnet` for at køre korrekt, hvis overhovedet!

Programming in Python

Et par ændringer i forhold til projekt A. Mappen `Core` er nu i mappen `ProjectB`, den indeholder

Core/Vector.py, Core/Matrix.py Disse filer, der allerede findes i projekt A, indeholder grundlæggende definitioner og metoder til vektorer og matricer.

ProjectB/GaussExtensions.py Denne fil indeholder flere ufærdige metoder. *Dette er den eneste fil, du har lov til at ændre og den eneste fil, du må indsende til programmeringsdelen af Project B.*

data_projectB.py Denne fil indeholder data til selvtestning.

ProjektB/Test Denne fil indeholder testfunktionerne. Den importerer `data_projectB.py` og kører testfunktionerne mod disse data.

Din opgave er at afslutte de uimplementerede metoder i `ProjectB/GaussExtensions.py`. På næste side finder du en beskrivelse af de algoritmer, du skal følge, når du implementerer de fleste af disse metoder. Studér omhyggeligt disse algoritmer og læs kommentarerne over hver metode, før du begynder. Bemærk, at metoden `AugmentRight` fra Projekt A leveres, da det kan være nyttigt ved implementering af `GaussElimination`. Du er velkommen til at tilføje en ekstra hjælper metoder i `GaussExtensions.py`, men det har du ikke lov til omdøbe eller på anden måde ændre typesignaturen for en af de eksisterende metoder. Når du sender din løsning til programmeringsdelen af Projekt B, må du kun uploade filen `ProjectB/GaussExtensions.py`.

Kør projektet.

- Gå til ProjectB folderen.
- Windows:
  `C:\path_to\ProjectB> python TestProjectB.py`
  Linux/MacOs
  `/path_to/ProjectB$ python TestProjectB.py`

Elemetære rækkeoperationer.

Erstatning (svarende til rækkenumrene i og j og et reelt tal m): $\mathbf{r}_i + m\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i$.

Udskiftning (svarende til rækkenumrene i og j): $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$.

Skalering (svarende til et rækkenummer i et reelt tal, der ikke er nul c): $c\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i$.

Bemærk, at i rækkeudskiftning skal du bruge "$+m$" (som i forelæsningerne) og ikke "$-m$" (som i lærebogen).

Algoritme: Fremadreduktion (forward reduction). Let $\mathbf{M}$ be an $m \times n$ matrix.

[1]ASCII: American Standard Code for Information Interchange, 26 x 2 standard alfabetiske tegn (store og små bogstaver), tal samt tegnsætning, klammer og andre almindelige tegn. Ingen accent eller sprogspecifikke tegn. De alfanumeriske tegn er 'ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz0123456789'.

Trin 1 Find den første ikke-nul kolonne fra venstre i **M** og kald den kolonne j. Dette er *pivotkolonnen*.

Trin 2 Vælg den første (fra toppen) ikke-nul-indgang p_j i kolonne j. Tallet p_j kaldes *pivot* for kolonne j og rækken, hvori pivoten optræder, kaldes *pivotrækken*. Skift pivotrækken og den første række, og brug derefter erstatninger til at reducere alle indtastninger, der ikke er nul, under p_j til nul.

Trin 3 Dæk den første række til for at danne en undermatrix af den aktuelle matrix med en række mindre. Hvis submatrixen ikke har nogen rækker eller alle nul rækker, så stop; ellers anvender **Trin 1** og **Trin 2** til submatrixen. Fortsæt på denne måde, og dæk altid den første række i den nuværende undermatrix for at danne en ny undermatrix med en række mindre.

Algorithm: Baglænsreduktion (backward reduction). Lad **U** være en echelonform for en $m \times n$ matrix. Vælg den sidste pivotkolonne til højre i **U**.

Trin 1 Skaler pivotrækken for at give pivotværdi 1 og brug pivotrækken i erstatninger for at reducere alle indtastninger over pivoten til nul.

Trin 2 Gentag **Trin 1** for hver pivotkolonne i **U** til venstre for den netop behandlede. Stop efter at alle pivotkolonner er blevet behandlet.

Appendix Output fra F# og Python skulle ligne hinanden.

```
Test results
==============================

Tests for the ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) function
===========================================================
ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) Values [PASSED]
ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) Dims [PASSED]
ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) All [PASSED]

End of test for the ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) function.
-----------------------------------------------------------

Tests for the ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) function
===========================================================
ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) Values [PASSED]
ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) Dims [PASSED]
ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) All [PASSED]

End of test for the ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) function.
-----------------------------------------------------------
...

...

...

Summary
==============================
Tests of ElementaryRowReplacement(Matrix, int, float, int) passed/total: [3/3]
Tests of ElementaryRowInterchange(Matrix, int, int) passed/total: [3/3]
Tests of ElementaryRowScaling(Matrix, int, float) passed/total: [3/3]
Tests of ForwardReduction(Matrix) passed/total:    [3/3]
Tests of BackwardReduction(Matrix) passed/total:   [3/3]
Tests of GaussElimination(Matrix, Vector) passed/total: [3/3]
```

Henrik Holm (holm@math.ku.dk)
Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)
Jon Sporring (sporring@di.ku.dk)