Københavns Universitet
Introduktion til diskret matematik og algoritmer - Problem set 3

Victor Vangkilde Jørgensen - kft410
kft410@alumni.ku.dk

March 19, 2025

Contents

1 Question 1 **3**

1.a 3

1.b 5

2 Question 2 **5**

2.a 5

2.b 9

2.c 9

2.d 9

3 Question 3 **10**

3.a 10

3.b 12

3.c 12

3.d 12

1

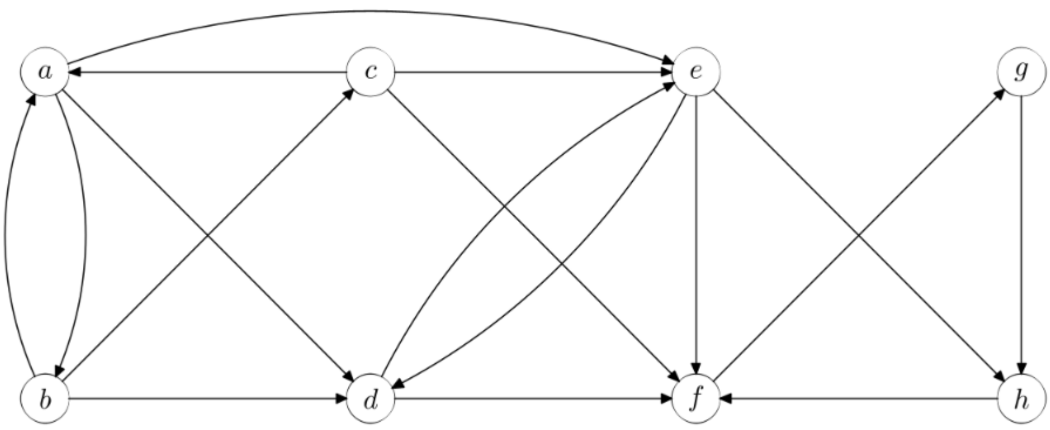


Figure 1: Directed graph G for which to compute strongly connected components in Problem 1a.

1.a

Vi opskriver vores directed graph som en adjacency list representation i lexicographic order:

$$
\begin{aligned}
a &\to (b, d, e) \\
b &\to (a, c, d) \\
c &\to (a, e, f) \\
d &\to (e, f) \\
e &\to (d, f, h) \\
f &\to (g) \\
g &\to (h) \\
h &\to (f)
\end{aligned}
$$

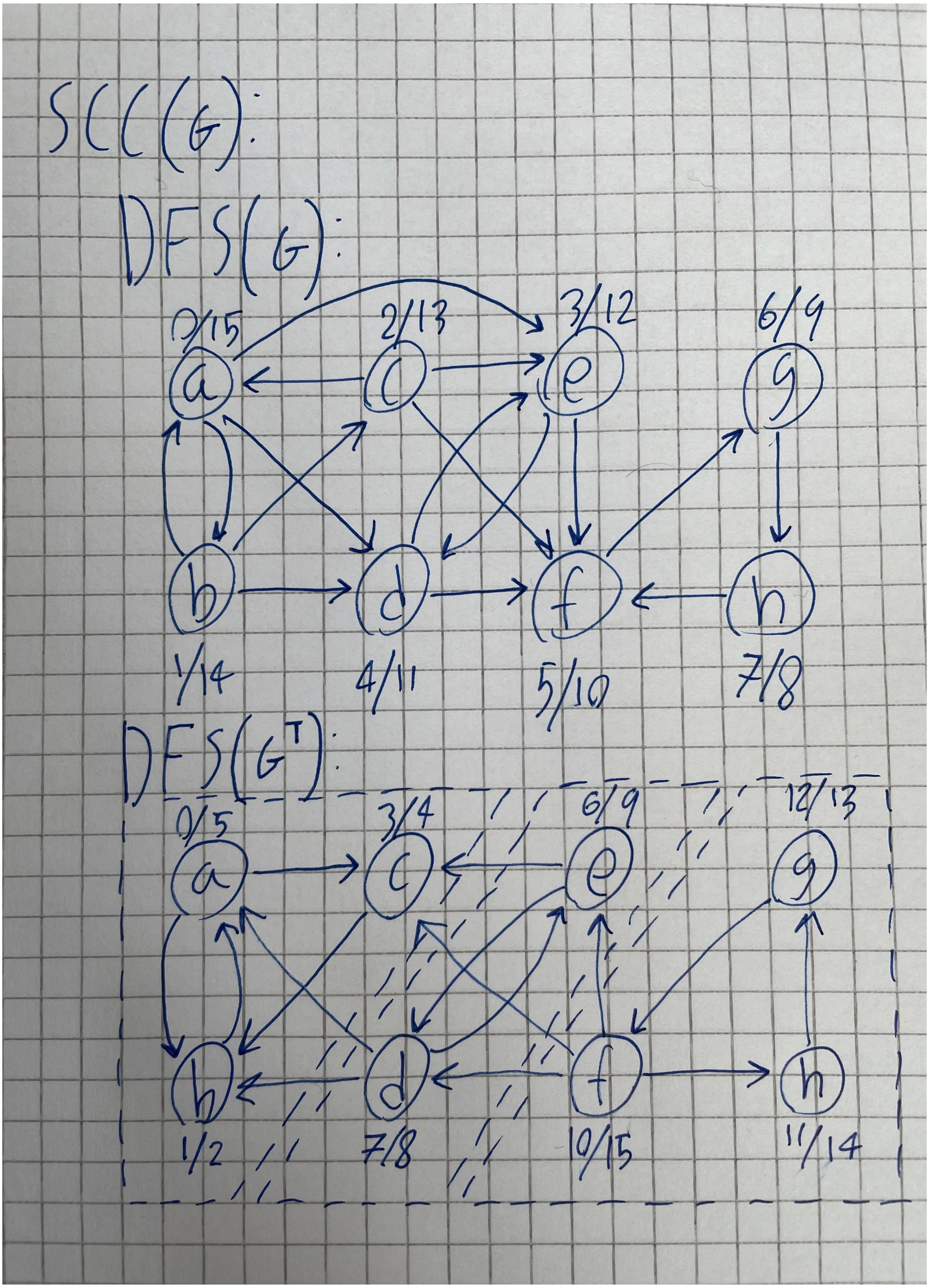


Figure 2: Gennemgang af $SCC(G)$.

1.b

2

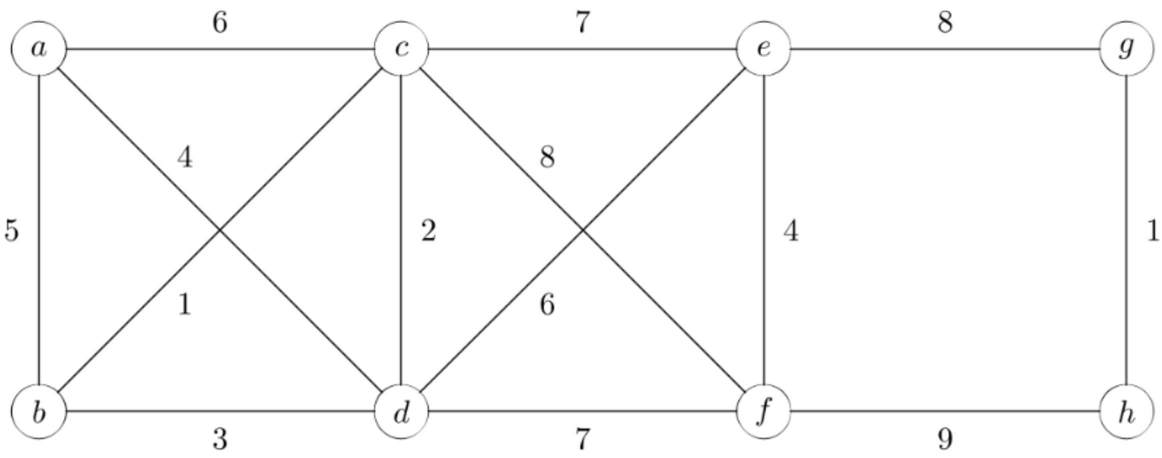
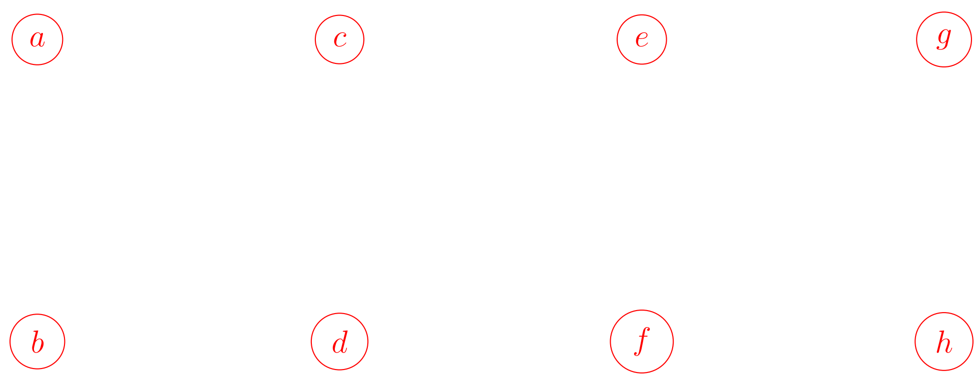


Figure 3: Undirected graph for which to compute minimum spanning tree in Problem 2a.

2.a

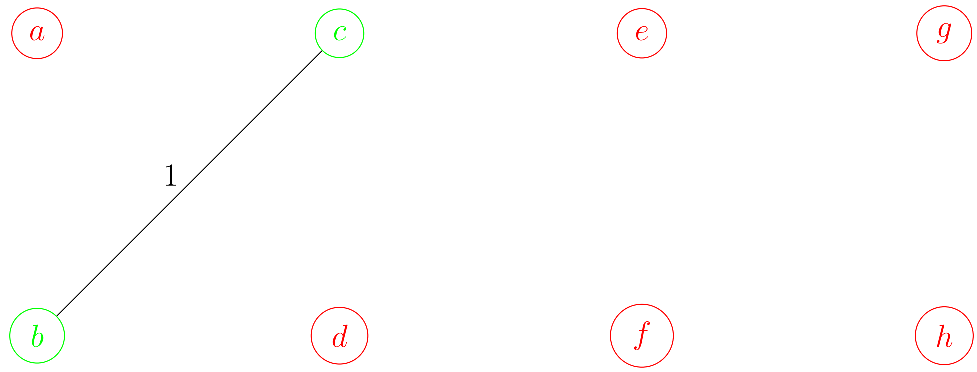
Vi har følgende vertices:



Som vi kan skrive op som subsets med alle connectede vertices. I begyndelsen har vi bare:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}$$

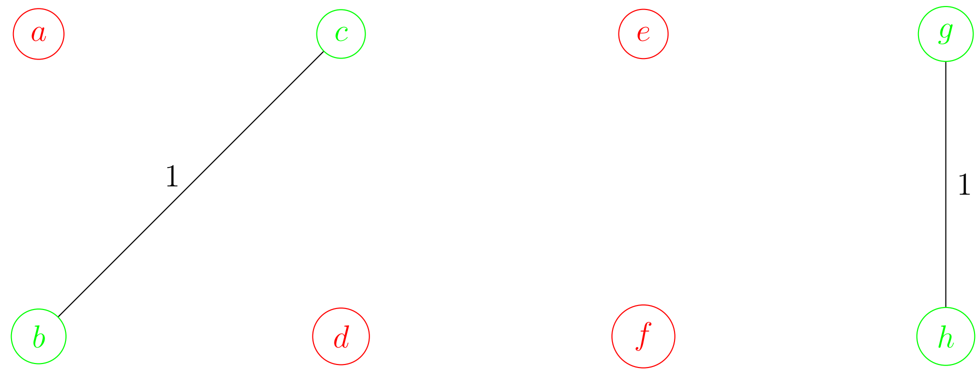
Vi ser, at $(b, c) \in E$ har lavest vægt, sammen med $(g, h) \in E$. I lexicographic order vælger vi først $(b, c) \in E$.
$(b, c) \in E$ connecter kun ikke-connetede vertices sammen, da disse er de eneste elementer i deres subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{b, c\}, \{a\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}$$

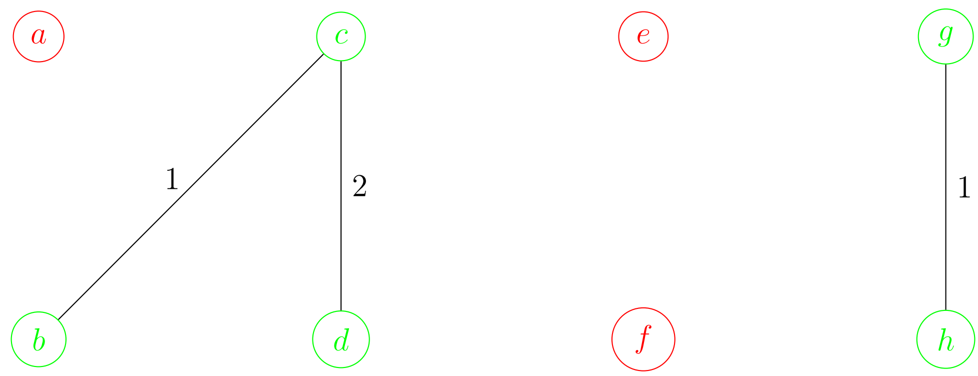
Vi kigger derefter på $(g, h) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(g, h) \in E$ connecter kun ikke-connetede vertices sammen, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{b, c\}, \{g, h\}, \{a\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}$$

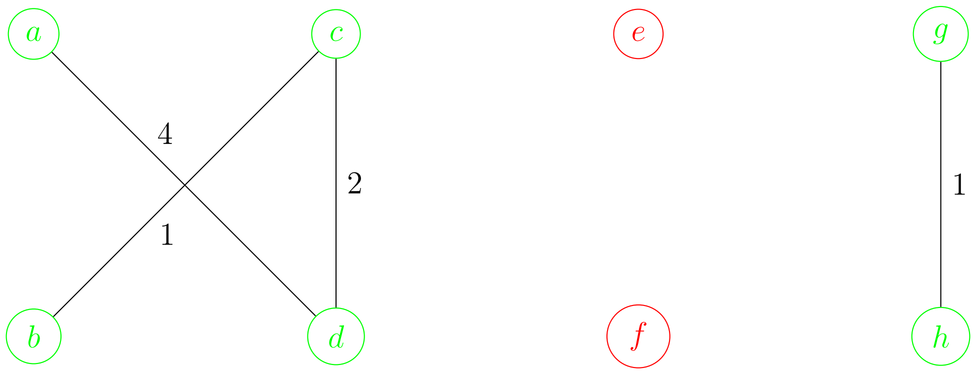
Vi kigger derefter på $(c, d) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(c, d) \in E$ connecter d, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{b, c, d\}, \{g, h\}, \{a\}, \{e\}, \{f\}$$

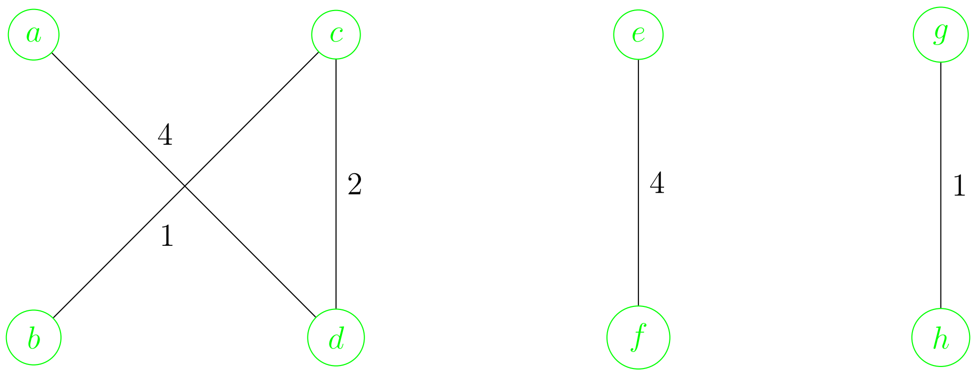
Vi kigger derefter på $(b, d) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. b og d, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(a, d) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(a, d) \in E$ connecter a, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d\}, \{g, h\}, \{e\}, \{f\}$$

Vi kigger derefter på $(e, f) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(e, f) \in E$ connecter kun ikke-connetede vertices sammen, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.

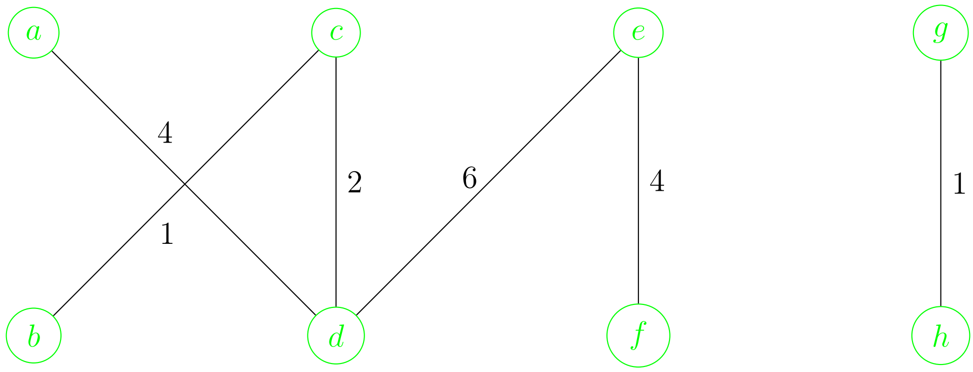


Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}$$

Vi kigger derefter på $(a, b) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. a og b, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer

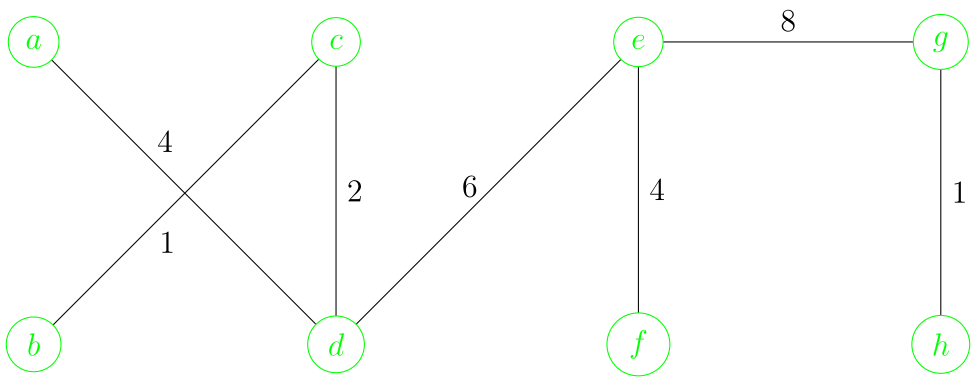
den edge.
Vi kigger derefter på $(a, c) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. a og c, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(d, e) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(d, e) \in E$ connecter både e og f, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d, e, f\}, \{g, h\}$$

Vi kigger derefter på $(c, e) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. c og e, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(d, f) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. d og f, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(c, f) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. c og f, er allerede connected gennem andre edges, da de er i samme subset, så vi ignorerer den edge.
Vi kigger derefter på $(e, g) \in E$, da denne edge er den næste i acending order af weight. $(e, g) \in E$ connecter både e og g, som ikke er connected gennem andre edges, da disse vertices er i forskellige subsets, så vi connecter dem.



Nu har vi nogle nye connectede vertices, så vi samler deres subsets:

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Vi ser, at vi har 7 edges og 8 vertices. Vi er dermed færdige, da antallet af edges svarer til antallet af vertices - 1, og alle vores vertices er i samme set, hvilket vil sige, at de er connected.

2.b

2.c

2.d

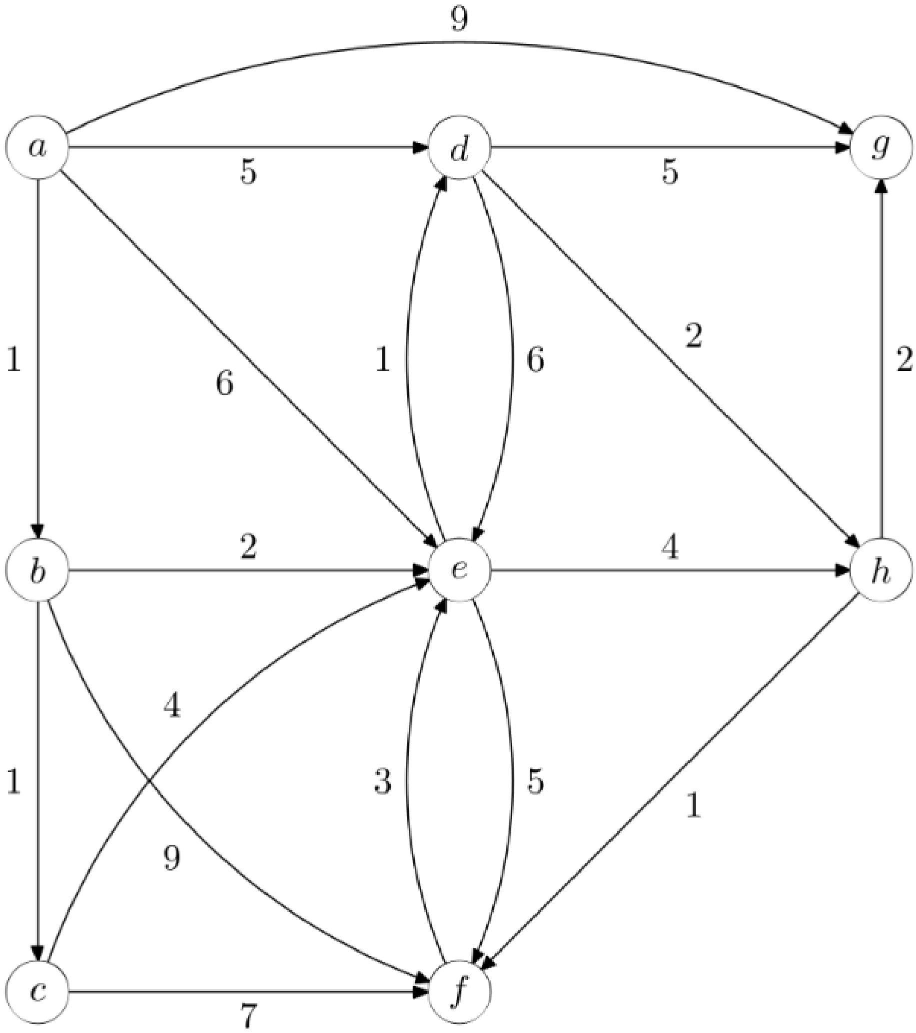


Figure 4: Directed graph Dijkstra's algorithm in Problem 3a.

3

3.a

Jeg opskriver vores weighted directed graph som adjacency list representation $(vertex, weight)$:

$$
\begin{aligned}
&(a,0) \to ((b,1),(d,5),(e,6),(g,9)) \\
&(b,0) \to ((c,1),(e,2),(f,9)) \\
&(c,0) \to ((e,4),(f,7)) \\
&(d,0) \to ((e,6),(g,5),(h,2)) \\
&(e,0) \to ((f,5),(h,4)) \\
&(f,0) \to (e,3) \\
&(g,0) \to () \\
&(h,0) \to (f,1)
\end{aligned}
$$

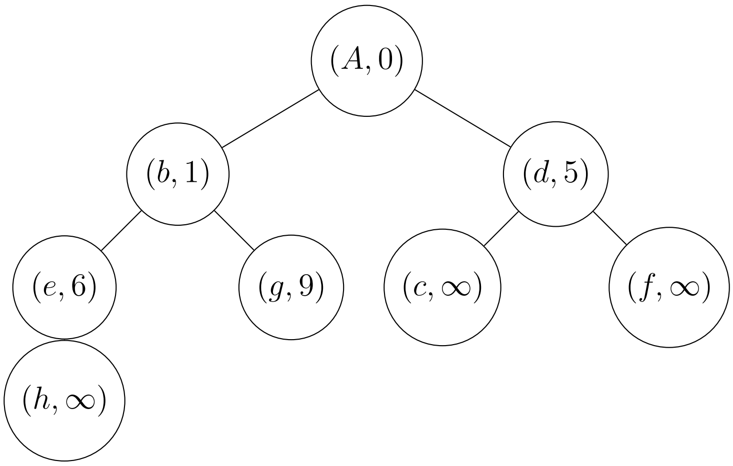
Udregning af distancer for $a's$ naboer:

$$[(b,1),(d,5),(e,6),(g,9)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A,0),(b,1),(c,\infty),(d,5),(e,6),(f,\infty),(g,9),(h,\infty)]$$

a er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive A i stedet.



Vi ser, at b er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $b's$ naboer:

$$[(c,1+1),(e,1+2),(f,1+9)] = [(c,2),(e,3),(f,10)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A,0),(B,1),(c,2),(e,3),(d,5),(g,9),(f,10),(h,\infty)]$$

b er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive B i stedet.

Vi ser, at c er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $c's$ naboer:

$$[(e, 2+4), (f, 2+7)] = [(e, 6), (f, 9)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (e, 3), (d, 5), (f, 9), (g, 9), (h, \infty)]$$

c er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive C i stedet.

Vi ser, at e er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $e's$ naboer:

$$[(f, 3+5), (h, 3+4)] = [(f, 8), (h, 7)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (d, 5), (h, 7), (f, 8), (g, 9)]$$

e er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive E i stedet.

Vi ser, at d er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $d's$ naboer:

$$[(g, 5+5), (h, 5+5), (e, 5+6)] = [(g, 10), (h, 10), (e, 11)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen, men ser, at der ikke nogen kortere afstande:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 5), (h, 7), (f, 8), (g, 9)]$$

d er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive D i stedet.

Vi ser, at h er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $h's$ naboer:

$$[(f, 7+1)] = [(f, 8)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen, men ser, at der ikke nogen kortere afstande:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 5), (H, 7), (f, 8), (g, 9)]$$

h er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive H i stedet.

Vi ser, at f er den ubesøgte vertex med kortest afstand fra a.
Udregning af nye distancer for $f's$ naboer:

$$[(e, 8+3)] = [(e, 11)]$$

Vi opdaterer nu de laveste værdier i grafen, men ser, at der ikke nogen kortere afstande:

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 5), (H, 7), (F, 8), (g, 9)]$$

f er nu besøgt, så det har jeg markeret ved at skrive F i stedet.

Vi ser, at g er den sidste ubesøgte vertex, og at g ikke har nogen naboer.

$$[(A, 0), (B, 1), (C, 2), (E, 3), (D, 5), (H, 7), (F, 8), (G, 9)]$$

Vi markerer g som besøgt med G.

3.b

3.c

3.d