Københavns Universitet
LinAlgDat - Project A

Victor Vangkilde Jørgensen - kft410
kft410@alumni.ku.dk
Hold 13 Mach

28. april 2025

Indhold

1 Opgave

1.a

Vi omskriver ligningssystemet til totalmatrix-form:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & a \\ a & a & 4a & a \\ 2 & 2 & 2a^2 & 0 \end{array}\right]$$

Vi benytter Gauss-Jordan elimination til at omskrive totalmatrix'en til en reduceret ræk-keeechelonform.
Først vælger vi, at tilføje $-ar_1$ til r_2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & a \\ 0 & -a & -4a & a-a^2 \\ 2 & 2 & 2a^2 & 0 \end{array}\right]$$

Herefter tilføjer vi $-2r_1$ til r_3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & a \\ 0 & -a & -4a & a-a^2 \\ 0 & -2 & 2a^2-16 & -2a \end{array}\right]$$

Vi tilføjer $\dfrac{2r_2}{-a}$ til r_3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & a \\ 0 & -a & -4a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2a^2-8 & -2a-\frac{2(a-a^2)}{a}=-2 \end{array}\right]$$

Vi tilføjer $\dfrac{2r_2}{a}$ til r_1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & -a & -4a & a-a^2 \\ 0 & 0 & 2a^2-8 & -2 \end{array}\right]$$

Vi tilføjer $\dfrac{2ar_3}{a^2-4}$ til r_2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & -a & 0 & a-a^2-\frac{4a}{(a^2-4)} \\ 0 & 0 & 2a^2-8 & -2 \end{array}\right]$$

Vi dividerer r_3 med $2a^2-8$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & -a & 0 & a-a^2-\frac{4a}{(a^2-4)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{2a^2-8}=-\frac{2}{2(a^2-4)}=\frac{1}{(4-a^2)} \end{array}\right]$$

Til sidst dividerer vi r_2 med $-a$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(a^3-a^2-4a+8)}{(a^2-4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(4-a^2)} \end{array}\right] \square$$

Vi har nu fået den løsning vi ledte efter, så vi er dermed færdige.

1.b

Vi opskriver igen vores ligningssystem som en totalmatrix, og erstatter denne gang a med 0:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2\cdot 0^2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] r_2 \; bytttes \; med \; r_3 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -2r_1 \; til \; r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] r_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -2r_2 \; til \; r_1 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi kan nu aflæse løsningerne til:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser nu, hvad vi får, når vi bruger den rækkereducerede totalmatrix fra tidligere, når vi erstatter a med 0:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(a^3-a^2-4a+8)}{(a^2-4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(4-a^2)} \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(0^3-0^2-4\cdot 0+8)}{(0^2-4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(4-0^2)} \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Denne matrix antyder en unik løsning, hvilket ikke afspejler hvad vi fandt lige før, hvor vi fandt uendelig mange løsninger. Dette skete sandstnligvis fordi at den rækkereducerede totalmatrix er lavet ud fra antagelsen, at $a \neq 0$.

1.c

Vi opskriver igen vores ligningssystem som en totalmatrix, og erstatter denne gang a med 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4\cdot 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2\cdot 2^2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right] r_2 \; bytttes \; med \; r_3 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] -2r_1 \; til \; r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] -r_3 \; til \; r_1 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] +r_3 \; til \; r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] +r_2 \; til \; r_1 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] r_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{array}\right] r_3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Vi kan nu aflæse løsningen til:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Lad os nu se, hvad vi får, når vi bruger den rækkereducerede totalmatrix fra tidligere, når vi erstatter a med 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(2^3-2^2-4\cdot 2+8)}{(2^2-4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(4-2^2)} \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{0} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{0} \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

Vi ser nu, at vi får division med 0, hvilket må betyde, at der ikke er nogen løsninger, når

$a = 2$.

1.d

Vi omskriver ligningssystemet til koefficientmatrice-form på venstre side, hvor $a = 1$, og sættr identitetmatricen på højre side:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4\cdot 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2\cdot 1^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathit{reducer} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -1r_1 \ til\ r_2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -2r_1 \ til\ r_3 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -14 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] -2r_2 \ til\ r_3 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] r_1\cdot 3,\ r_2\cdot(-3) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 24 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] +4r_3 \ til\ r_1 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & 12 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] +2r_3 \ til\ r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] -2r_2 \ til\ r_1 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] r_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right),\ r_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right),\ r_3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

2 Opgave

2.a

2.b

2.c

3 Opgave

3.a

Vi sætter et 1-tal i hver e_{uv}-element i matricen for hver edge $E(u, v)$ i grafen G_N:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

For at finde antallet af veje fra knude 4 til knude 1 med netop længde 8, skal vi kigge på element $(4,1)$ i N^8. Vi kan finde $(N^8)_{4,1}$ ved:

$$69 \cdot 0 + 45 \cdot 1 + 45 \cdot 1 + 18 \cdot 1 + 29 \cdot 1 = 137$$

unikke veje fra knude 4 til knude 1 med længde 8.

3.b

Linkmatricen A findes ved at tage N^T og dividere hvert element med antallet af udgående edges i dens column.

$$N^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

3.c

Vi opskriver vores ligningssystem som en totalmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 \end{array}\right] r_1{\cdot}2, r_2{\cdot}4,\ r_3{\cdot}4,\ r_4{\cdot}4,\ r_5{\cdot}4 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$+r_1\ til\ r_2, r_3, r_4, r_5 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] r_3 \cdot 3, r_5 \cdot 3 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & -12 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +r_2 \\ +r_2 \\ +r_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -10 & 0 \end{array}\right] \cdot 2 \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -10 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \rightsquigarrow \\ +r_3 \\ +r_3 \end{array}$$

4 Opgave

Se vedhæftede python-fil.