# Kvantifikátory

8. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2022/2023

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# Obsah 8. prednášky

# Kvantifikátory

# Kvantifikátory

## Kvantifikácia

# Prívlastky

Doteraz sme sa stretávali s prívlastkami, ktoré vyjadrovali vlastnosti alebo vzťahy konkrétnych jednotlivých objektov.

- Jurko kŕmi veľkú Vierkinu myš Ňufka.
  $(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, \mathtt{Ňufko}) \land \mathtt{veľký}(\mathtt{Ňufko}) \land \mathtt{patrí}(\mathtt{Ňufko}, \mathtt{Vierka}) \land \mathtt{myš}(\mathtt{Ňufko}))$

# Kvantifikované tvrdenia

V slovenských vetách sa ale používajú aj prívlastky ako
**každý**, **nejaká**, **tri**, **tí**, **všetky**, **žiadny**, **nijaké**
(gramaticky sú to zámená a číslovky).

- všetky veľké Vierkine myši; nejaké dieťa; traja muži v člne; žiadny Bratislavčan; väčšina škrečkov; tá skriňa v kúte; …

Nevyjadrujú vlastnosť konkrétnych objektov.

**Vyjadrujú počet (kvantitu) objektov**, ktoré majú nejaké vlastnosti alebo sú v nejakých vzťahoch.

Tvrdeniam, ktoré obsahujú tieto prívlastky,
sa preto v logike **kvantifikované tvrdenia**.

# Kvantifikácia a logické dôsledky

Kvantifikujúci prívlastok výrazne mení logické vlastnosti tvrdenia:

**Všetky** myši sú sivé.
Ňufko je myš.

---

Ňufko je sivý.

Je logický dôsledok.

**Väčšina** myší je sivá.
Ňufko je myš.

---

Ňufko je sivý.

Nie je log. dôsledkom,
ale je prijateľné.

**Žiadne** myši nie sú sivé.
Ňufko je myš.

---

Ňufko je sivý.

Nie je log. dôsledkom,
ani prijateľné.
Opak je pravdou.

Kvantifikácia sa nespráva ako funkcia na pravdivostných hodnotách — na rozdiel od logických spojok.

Vyjadruje vzťah súborov objektov
(tých, ktoré sú myšami, a tých, ktoré sú sivé).

# Skrytá kvantifikácia

Niektoré spojky a vzťahy implicitne vyjadrujú kvantifikáciu:

- Jurko kŕmi Ňufka, iba **keď** je noc.
  Jurko kŕmi Ňufka **vždy** v noci.
  V **každej** chvíli, v ktorej Jurko kŕmi Ňufka, je noc.
- V pondelok cvičí Klárka hru na flautu.
  V **každý** deň, ktorý je pondelkom, cvičí Klárka hru na flautu.
- Z $P$ **logicky vyplýva** $Q$.
  V **každom** stave sveta, v ktorom je pravdivé $P$, je pravdivé aj $Q$.

# Kvantifikátory

## Kvantifikátory a premenné

# Kvantifikátory logiky prvého rádu

Logika prvého rádu má iba dva symboly kvantifikátorov: $\forall$ a $\exists$.

Zodpovedajú zámenám **všetko** a **niečo**.

S pomocou predikátov, výrokovologických spojok a rovnosti ale dokážu vyjadriť napr. kvantifikácie:

- všetky veľké Vierkine myši; nejaké dieťa; traja muži v člne; žiadny Bratislavčan; zakaždým, keď.

Nedokážeme však nimi vyjadriť:

- väčšina škrečkov; málo študentov; nekonečne veľa prvočísel.

Kvantifikované *premenné označujú výhradne objekty z domény*, nemožno kvantifikovať množiny objektov ani nič zložitejšie.

## Premenné

Na vyjadrenie toho, na ktoré argumenty predikátov sa vzťahuje kvantifikátor, sa používajú indivíduové premenné.

*Indivíduová premenná*

- môže byť argumentom predikátu,
  podobne ako indivíduová konštanta;
- neoznačuje konkrétny objekt,
  na rozdiel od indivíduovej konštanty,
  ale prepája argumenty predikátov,
  na ktoré sa vzťahuje ten istý kvantifikátor.

V každom prvorádovom jazyku s kvantifikátormi je nekonečne veľa premenných — väčšinou malé písmená z konca abecedy, podľa potreby s dolnými indexmi: $u$, $v_4$, $w$, $x$, $y_{37}$, $z_{123}$.

# Termy a atómy

Možné argumenty predikátov a rovnosti, teda premenné a konštanty, súhrnne nazývame *termy*.

*Atomickými formulami* logiky prvého rádu s kvantifikátormi sú potom

- predikátové atómy $\mathtt{predikát}(\mathtt{term}_1, \dots, \mathtt{term}_k)$, kde $k$ je arita predikátu;
- rovnostné atómy $\mathtt{term}_1 \doteq \mathtt{term}_2$.

# Všeobecný kvantifikátor

***Všeobecný kvantifikátor*** $\forall$ zodpovedá obratom *všetko*, *každý/ktorýkoľvek/akýkoľvek/hociktorý/ľubovoľný objekt*, *všetky objekty*.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť $\forall x$ čítame **„pre každý objekt $x$“** (alebo trocha nepresne „pre každé $x$“).

**Oblasť platnosti** všeobecného kvantifikátora — **najkratšia ucelená** formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou — vyjadruje vlastnosť, ktorú prisudzujeme všetkým objektom, napr.:

- $\forall x\,\mathtt{doma}(x)$ — Pre každý objekt $x$ je pravda, že $x$ je doma. (Všetko je doma.) Veta „$x$ je doma“ je **výroková forma**, nie výrok. Jej pravdivosť sa dá jednoznačne určiť, iba keď poznáme hodnotu $x$.
- $\forall x(\mathtt{človek}(x) \to \mathtt{doma}(x))$ — Pre každý objekt $x$ je pravda, že ak $x$ je človek, tak $x$ je doma. (Každý človek je doma.)

# Existenčný kvantifikátor

***Existenčný kvantifikátor*** $\exists$ zodpovedá obratom *niečo*, *nejaký/niektorý/akýsi/aspoň jeden objekt*, *je/existuje taký objekt*.

Vždy **viaže** premennú uvedenú bezprostredne za ním.

Postupnosť $\exists x$ čítame **„pre nejaký objekt $x$“** (alebo trocha nepresne „pre nejaké $x$“).

**Oblasť platnosti** existenčného kvantifikátora — je **najkratšia ucelená** formula nasledujúca bezprostredne za viazanou premennou — vyjadruje vlastnosť, o ktorej tvrdíme, že ju má aspoň jeden objekt:

- $\exists x\, \mathtt{doma}(x)$ — Pre nejaký objekt $x$ je pravda, že $x$ je doma. (Niečo je doma.)
- $\exists x(\mathtt{človek}(x) \land \mathtt{doma}(x))$ — Pre nejaký objekt $x$ je pravda, že $x$ je človek a $x$ je doma. (Nejaký človek je doma.)

# Neexistencia

Neexistenciu v slovenčine zvyčajne vyjadruje *dvojitý zápor*: negatívne zámeno (nikto/nič/žiadne) a negatívne tvrdenie.

„Nikto nie je dokonalý“ môžeme sformalizovať

- s dôrazom na zámeno: $\neg\exists x\, \mathtt{dokonalý}(x)$;
- s dôrazom na negatívne tvrdenie: $\forall x\, \neg\mathtt{dokonalý}(x)$.

⚠ V oboch prípadoch použijeme iba jednu negáciu!

# Kvantifikátory

## Syntax relačnej logiky prvého rádu

# Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

## Definícia 6.1

*Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu* sú:

*indivíduové premenné* z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$;

*mimologické symboly,* ktorými sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$;
- *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

*logické symboly,* ktorými sú

- *logické spojky:* unárna $\neg$, binárne $\land$, $\lor$, $\rightarrow$,
- *symbol rovnosti* $\doteq$,
- *kvantifikátory:* *existenčný* $\exists$ a *všeobecný* $\forall$;

*pomocné symboly* **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú vzájomne disjunktné.
Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\operatorname{ar}(P) \in \mathbb{N}^{+}$.

## Označovanie symbolov rôznych druhov

Keď budeme hovoriť o ľubovoľnom jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme ***meta premenné***:
premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť **o** (po grécky *meta*) týchto symboloch.

**Dohoda 6.2**

Indivíduové premenné budeme spravidla označovať meta premennými $u, v, w, x, \dots, z$ s prípadnými dolnými indexmi.

Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými $a, b, c, d$ s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými $P, Q, R$ s prípadnými dolnými indexmi.

# Atomické formuly relačnej logiky prvého rádu

**Definícia 6.3 (Term)**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu. Indivíduové premenné z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ a konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ súhrnne nazývame ***termy*** jazyka $\mathcal{L}$.

**Definícia 6.4 (Atomické formuly)**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

***Rovnostný atóm*** jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$, kde $t_1$ a $t_2$ sú termy jazyka $\mathcal{L}$.

***Predikátový atóm*** jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \dots, t_n)$, kde $P$ je predikátový symbol s aritou $n$ a $t_1, \dots, t_n$ sú termy jazyka $\mathcal{L}$.

***Atomickými formulami*** (skrátene ***atómami***) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

### Definícia 6.5

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ všetkých ***formúl*** jazyka relačnej logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ je **najmenšia** množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. Inak povedané, $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
2. Ak $A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ju ***negácia*** formuly $A$.
3. Ak $A$ a $B$ sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne ***konjunkcia***, ***disjunkcia*** a ***implikácia*** formúl $A$ a $B$.
4. Ak $x$ je indivíduová premenná a $A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $\exists x\, A$ a $\forall x\, A$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a nazývame ich postupne ***existenčná*** a ***všeobecná kvantifikácia*** formuly $A$ vzhľadom na $x$.

Každý prvok $A$ množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame ***formulou*** jazyka $\mathcal{L}$.

# Príklady formúl

**Príklad 6.6**

Nech $\mathcal{L}$ je prvorádový jazyk, v ktorom $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$,
$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Jurko}, \mathtt{Vierka}, \mathtt{Ňufko}\}$
$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{myš}^1, \mathtt{škrečok}^1, \mathtt{biely}^1, \mathtt{patrí}^2\}$.

Formulami v jazyku $\mathcal{L}$ sú napríklad:

$\mathtt{myš}(\mathtt{Jurko})$, $\mathtt{myš}(x)$, $\mathtt{patrí}(y_2, \mathtt{Vierka})$, $\mathtt{patrí}(x, y)$,
$(\mathtt{myš}(x) \land \mathtt{biely}(x))$,
$\exists y\, \mathtt{patrí}(x, y)$,
$\big((\mathtt{myš}(x) \land \mathtt{biely}(x)) \to \exists y\, \mathtt{patrí}(x, y)\big)$,
$\forall x \big((\mathtt{myš}(x) \land \mathtt{biely}(x)) \to \exists y\, \mathtt{patrí}(x, y)\big)$

# Označovanie formúl a skratka ekvivalencie

Stále platia doterajšie dohody:

**Dohoda 6.7**

Formuly označujeme meta premennými $A, B, C, X, Y, Z$, s prípadnými dolnými indexmi.

**Dohoda 6.8**

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

# Oblasť platnosti kvantifikátora

**Dohoda 6.9**

Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk logiky prvého rádu. Všetky symboly, termy a formuly v nasledujúcich definíciách a tvrdeniach sú v jazyku $\mathcal{L}$.

**Definícia 6.10 (Oblasť platnosti kvantifikátora)**

Nech $A$ je postupnosť symbolov, nech $B$ je formula, nech $Q \in \{\forall, \exists\}$, nech $x$ je premenná.
V postupnosti $A = \dots Q\,x\,B \dots$ sa výskyt formuly $Q\,x\,B$ nazýva ***oblasť platnosti kvantifikátora** $Q\,x$ **v** $A$*.

**Príklad 6.11**

Vyznačme všetky oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ vo formule

$$\big((\forall x\, M(x) \land P(x,x)) \to \big(\forall x(P(x,y) \land \exists y\, M(y)) \lor \forall y\, M(y)\big)\big).$$

### Definícia 6.12 (Voľné a viazané výskyty premenných)

Nech $A$ je postupnosť symbolov, nech $x$ je premenná.

*Výskyt* premennej $x$ v $A$ je *viazaný* vtt
sa *nachádza v niektorej* oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ alebo $\exists x$ v $A$.

*Výskyt* premennej $x$ $A$ je *voľný* vtt
sa *nenachádza v žiadnej* oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ ani $\exists x$ v $A$.

### Príklad 6.13

$$
\begin{aligned}
&\neg P(x, y) \land K(y, x)\\
&\neg P(x, y) \land \exists \underline{y} K(\underline{y}, x)\\
&\exists \underline{y} (\neg P(x, \underline{y}) \land K(\underline{y}, x))\\
&\forall \underline{x} \exists \underline{y} (\neg P(\underline{x}, \underline{y}) \land K(\underline{y}, \underline{x}))\\
&\forall \underline{x} (\neg P(\underline{x}, y) \land \exists \underline{y} K(\underline{y}, \underline{x}))
\end{aligned}
$$

# Voľné a viazané premenné

## Definícia 6.14 (Voľné a viazané premenné)

Nech $A$ je formula alebo term, nech $x$ je premenná.

*Premenná* $x$ je *viazaná* v $A$ vtt

$x$ sa vyskytuje v $A$ a *všetky* výskyty $x$ v $A$ sú viazané.

*Premenná* $x$ je *voľná* v $A$ vtt $x$ má v $A$ *aspoň jeden voľný výskyt*.

Množinu voľných premenných formuly $A$ označíme $\mathrm{free}(A)$.

## Príklad 6.15

$$\mathrm{free}(\neg P(x, y) \land K(y, z)) = \{x, y, z\}$$
$$\mathrm{free}(\neg P(x, y) \land \exists y K(y, z)) = \{x, y, z\}$$
$$\mathrm{free}(\exists y(\neg P(x, y) \land K(y, z))) = \{x, z\}$$
$$\mathrm{free}(\exists y(\neg P(x, y) \land \forall z K(y, z))) = \{x\}$$
$$\mathrm{free}(\exists y \exists z(\forall x \neg P(x, y) \land K(y, z))) = \{\}$$

**Tvrdenie 6.16**

*Pre každú indivíduovú premennú $x$, každý symbol konštanty $a$, každú aritu $n > 0$, každý predikátový symbol $P$ s aritou $n$, všetky termy $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a všetky formuly $A$, $B$ platí:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{free}(\,x\,) &= \{x\}\\
\operatorname{free}(\,a\,) &= \{\}\\
\operatorname{free}(\,t_1 \doteq t_2\,) &= \operatorname{free}(t_1) \cup \operatorname{free}(t_2)\\
\operatorname{free}(\,P(t_1, \ldots, t_n)\,) &= \operatorname{free}(t_1) \cup \cdots \cup \operatorname{free}(t_n)\\
\operatorname{free}(\,\neg A\,) &= \operatorname{free}(A)\\
\operatorname{free}(\,(A \land B)\,) &= \operatorname{free}(\,(A \lor B)\,) = \operatorname{free}(\,(A \to B)\,) =\\
&= \operatorname{free}(A) \cup \operatorname{free}(B)\\
\operatorname{free}(\,\forall x\, A\,) &= \operatorname{free}(\,\exists x\, A\,) = \operatorname{free}(A) \setminus \{x\}
\end{aligned}$$

# Uzavreté formuly a teórie

**Definícia 6.17 (Uzavretá formula, teória)**

Formula $A$ jazyka $\mathcal{L}$ je ***uzavretá*** vtt
žiadna premenná nie je voľná v $A$
(teda $\mathrm{free}(A) = \emptyset$).

***Teóriou*** v jazyku $\mathcal{L}$ je každá
spočítateľná množinu uzavretých formúl jazyka $\mathcal{L}$.

**Príklad 6.18**

Ktoré z týchto formúl sú uzavreté?

- $\exists x\, P(x, x)$,
- $\exists y\, P(x, y)$,
- $\big((M(x) \land B(x)) \to \exists y\, P(x, y)\big)$,
- $\forall x\big((M(x) \land B(x)) \to \exists y\, P(x, y)\big)$.

# Kvantifikátory

## Sémantika relačnej logiky prvého rádu

### Definícia 6.19

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.
***Štruktúrou*** pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde
$D$ je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná ***doména*** štruktúry $\mathcal{M}$;
$i$ je zobrazenie, nazývané ***interpretačná funkcia*** štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každej indivíduovej konštante $c$ jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu $P$ jazyka $\mathcal{L}$ s aritou $n$ priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

### Dohoda 6.20

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$.

# Ohodnotenie indivíduových premenných

**Definícia 6.21**

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.
*Ohodnotenie indivíduových premenných* je ľubovoľná funkcia $e : \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \to D$ (priraďuje premenným prvky domény).

Nech ďalej $x$ je indivíduová premenná z $\mathcal{L}$ a $d$ je prvok $D$.
Zápisom $e(x/d)$ označíme ohodnotenie indivíduových premenných, ktoré premennej $x$ priraďuje hodnotu $d$
a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako im priraďuje $e$, čiže

$$e(x/d)(y) = \begin{cases} d, & \text{ak } y = x, \\ e(y), & \text{ak } y \neq x, \end{cases}$$

alebo množinovo zapísané $e(x/d) = e \setminus \{x \mapsto e(x)\} \cup \{x \mapsto d\}$.

# Príklad ohodnotenia indivíduových premenných

Nech

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x_1, x_2, y, \ldots\}$$
$$D = \{{}_{\text{Alica}}, {}_{\text{Bonifác}}, {}_{\text{Cyril}}\}.$$

Ohodnotením (indivíduových) premenných je napríklad

$$e = \{x_1 \mapsto {}_{\text{Bonifác}}, x_2 \mapsto {}_{\text{Alica}}, y \mapsto {}_{\text{Bonifác}}, \ldots\}$$

Potom

$$e(y/{}_{\text{Cyril}}) = \{x_1 \mapsto {}_{\text{Bonifác}}, x_2 \mapsto {}_{\text{Alica}}, y \mapsto {}_{\text{Cyril}}, \ldots\}$$

# Hodnota termov

**Definícia 6.22**

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra, $e$ je ohodnotenie premenných. *Hodnotou termu $t$ v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných $e$* je prvok $t^{\mathcal{M}}[e]$ z $D$ určený nasledovne:

- $t^{\mathcal{M}}[e] = e(x)$, ak $t$ je premenná $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$,
- $t^{\mathcal{M}}[e] = i(a)$, ak $t$ je konštanta $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

# Splnenie atomickej formuly v štruktúre

Určenie významu **atomickej** formuly, napr. $\mathtt{patrí}(x, \mathtt{Vierka})$,
v danej štruktúre, napr. $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{👩_{\text{Viera}}, 👨_{\text{Juraj}}, 👩_{\text{Eva}}, 🐕, 🐈, 🐉, 🐎, 🕊, \}$$

$$i(\mathtt{Vierka}) = 👩_{\text{Viera}}, \qquad i(\mathtt{biely}) = \{🐉, 🐎, 🕊\} \qquad i(\mathtt{patrí}) = \{(🐎, 👩_{\text{Viera}}), (🐉, 👩_{\text{Eva}})\}$$

$$i(\mathtt{Jurko}) = 👨_{\text{Juraj}},$$

$$i(\mathtt{Ňufko}) = 🐉$$

pri ohodnotení premenných, napr.
$e = \{x \mapsto 🐉, y \mapsto 👩_{\text{Eva}}, \ldots\}$:

1. vyhodnotíme termy, ktoré sa vyskytujú vo formule:
   $x^{\mathcal{M}}[e] = e(x) = 🐉$ $\qquad \mathtt{Vierka}^{\mathcal{M}}[e] = i(\mathtt{Vierka}) = 👩_{\text{Viera}}$,
2. zistíme, či $(🐉, 👩_{\text{Viera}}) \in i(\mathtt{patrí})$: **nie**

Štruktúra $\mathcal{M}$ **nespĺňa** formulu $\mathtt{patrí}(x, \mathtt{Vierka})$ **pri ohodnotení** $e$
$\mathcal{M} \not\models \mathtt{patrí}(x, \mathtt{Vierka})\,[e]$

# Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$?

1. Vyskúšame **všetky** ohodnotenia, ktoré postupne priraďujú kvantifikovanej premennej $y$ jednotlivé prvky domény:

| $d$ | $e(y/d)$ | $\mathcal{M} \models^{?} \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e(y/d)]$ |
|---|---|---|
| 🚺$_{\text{Viera}}$ | $\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🚺$_{\text{Viera}}$, $x_1 \mapsto \ldots\}$ | $\not\models$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 🐉 | $\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🐉, $x_1 \mapsto \ldots\}$ | $\not\models$ |
| 🐎 | $\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🐎, $x_1 \mapsto \ldots\}$ | $\models$ |
| 🕊 | $\{x \mapsto$ 🐉, $y \mapsto$ 🕊, $x_1 \mapsto \ldots\}$ | $\not\models$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

2. $\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$ vtt
   **pre aspoň jedno** $d \in D$ máme $\mathcal{M} \models \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e(y/d)]$.

   Pravá strana je pravdivá pre $d =$ 🐎 — *svedok*.

   Takže $\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$.

# Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x,y))\,[e] \quad B = \mathtt{biely}, P = \mathtt{patrí}$

1. Vyskúšame **všetky** ohodnotenia, ktoré priraďujú kvantifikovanej premennej jednotlivé prvky domény:

| $d$ | $\mathcal{M} \models^{?} (B(x) \to P(x,y))\,[e(x/d)]$ | |
|---|---|---|
| Viera | $\models$ | lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
|  | $\models$ | lebo $\mathcal{M} \not\models B(x)\,[e(x/d)]$ |
|  | $\models$ | lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \models P(x,y)\,[e(x/d)]$ |
|  | $\not\models$ | lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x,y)\,[e(x/d)]$ |
|  | $\not\models$ | lebo $\mathcal{M} \models B(x)\,[e(x/d)]$ a $\mathcal{M} \not\models P(x,y)\,[e(x/d)]$ |

2. $\mathcal{M} \models \forall x\,(\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x,y))\,[e]$ vtt

   **pre všetky** $d \in D$ máme $\mathcal{M} \models (\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x,y))\,[e(x/d)]$.

   pravá strana je nepravdivá pre $d =$  a $d =$  — *kontrapríklady*.

   Takže $\mathcal{M} \not\models \forall x\,(\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x,y))\,[e]$.

## Splnenie všeobecne kvantifikovanej implikácie

⚠ Naša $\mathcal{M}$ spĺňa implikáciu $(\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$ pri $e(x/d)$ pre väčšinu $d \in D$ preto, že jej antecedent $\mathtt{biely}(x)$ je nesplnený.

To zodpovedá čítaniu formuly $\forall x(\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$ ako výroku „všetko biele patrí $y$“:

- Objekty, ktoré nie sú biele, neovplyvňujú pravdivosť tohto výroku ani pravdivosť implikácie $(\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$.
- Výrok aj implikácia sú nepravdivé iba vtedy, keď nejaký biely objekt nepatrí $y$.

Ak by nič nebolo biele,
teda by $\mathcal{M} \not\models \mathtt{biely}(x)[e(x/d)]$ pre všetky $d \in D$,
tak by aj formula $\forall x(\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))$
aj tvrdenie „všetko biele patrí $y$“
boli triviálne splnené.

# Nezávislosť od ohodnotenia viazanej premennej

Pri vyhodnocovaní splnenia kvantifikovanej formuly štruktúrou pri danom ohodnotení $e$

$$\mathcal{M} \models \exists y\, \mathtt{patrí}(y, \mathtt{Vierka})\,[e]$$

$$\mathcal{M} \models \forall x (\mathtt{biely}(x) \to \mathtt{patrí}(x, y))\,[e]$$

**nezáleží** na tom, akú hodnotu priraďuje pôvodné ohodnotenie $e$ viazanej premennej.

Priamu podformulu kvantifikovanej formuly vyhodnocujeme pri **nových** ohodnoteniach $e(y/d)$, resp. $e(x/d)$, cez všetky $d \in D$.

# Nezávislosť od ohodnotenia viazanej premennej

Pri vyhodnocovaní splnenia formuly s jedinou premennou, ktorá je kvantifikovaná, na pôvodnom ohodnotení vôbec nezáleží. Mohlo by sa preto zdať, že pre prácu s uzavretými formulami je naša definícia zbytočne zložitá.

Ale ak je premenných viac, ohodnotenie už môže ovplyvniť spĺňanie. Napr. pri vyhodnocovaní

$$\mathcal{M} \models \exists x \, \forall y \, \mathtt{patrí}(x, y) \, [e]$$

najprv zvolíme konkrétneho kandidáta na svedka $d$ pre $x$ a pri následnom vyhodnocovaní

$$\mathcal{M} \models \forall y \, \mathtt{patrí}(x, y) \, [e(x/d)]$$

hodnotu premennej $x$ používame, ale už ju nijako nevieme ovplyvniť.

## Splnenie formuly v štruktúre

### Definícia 6.23

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra, $e$ je ohodnotenie premenných.
Relácia ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa formulu $A$ pri ohodnotení $e$***
(skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú induktívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \vee B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ vtt pre **nejaký** prvok $d \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/d)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall x A[e]$ vtt pre **každý** prvok $d \in D$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/d)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly $P$ s aritou $n$,
všetky termy $t_1, t_2, \dots, t_n$, všetky premenné $x$ a všetky formuly $A$, $B$.

# Splnenie formuly v štruktúre pri ohodnotení · príklad

**Príklad 6.24**

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{array}{lll}
i(\texttt{Jurko}) = 1 & i(\texttt{myš}) = \{3, 4\} & i(\texttt{patrí}) = \{(3, 2), \\
i(\texttt{Vierka}) = 2 & i(\texttt{škrečok}) = \{5\} & \qquad\qquad (4, 2), \\
i(\texttt{Ňufko}) = 4 & i(\texttt{biely}) = \{4, 5\} & \qquad\qquad (5, 1)\}.
\end{array}$$

Nech $e = \{x \mapsto 3, y \mapsto 5, \ldots\}$.

Zistime, či

- $\mathcal{M} \models ((\texttt{myš}(x) \land \texttt{biely}(x)) \to \exists y\, \texttt{patrí}(x, y))\,[e]$
- $\mathcal{M} \models \forall x((\texttt{myš}(x) \land \texttt{biely}(x)) \to \exists y\, \texttt{patrí}(x, y))\,[e]$

## Pravdivosť uzavretej formuly

Neuzavreté formuly zodpovedajú výrokovým formám.
Ich splnenie v štruktúre závisí od ohodnotenia voľných premenných.

Uzavreté formuly zodpovedajú výrokom.
Ich splnenie v štruktúre nezávisí od ohodnotenia.
Preto pri nich môžeme hovoriť o **pravdivosti v štruktúre**.

**Definícia 6.25**

Nech $X$ je **uzavretá** formula jazyka $\mathcal{L}$, nech $T$ je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.

Formula $X$ je ***pravdivá*** v štruktúre $\mathcal{M}$ (skrátene $\mathcal{M} \models X$) vtt $\mathcal{M}$ spĺňa formulu $X$ pri každom ohodnotení $e$.
Vtedy tiež hovoríme, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** formuly $X$.

Teória $T$ je ***pravdivá*** v štruktúre $\mathcal{M}$ (skrátene $\mathcal{M} \models T$) vtt každá formula $X$ z $T$ je pravdivá v $\mathcal{M}$.
Vtedy tiež hovoríme, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** teórie $T$.

# Kvantifikátory

## Aristotelovské formy

# Štyri aristotelovské formy

Dávno pred kodifikáciou logiky prvého rádu sa kvantifikovanými tvrdeniami zaoberal staroveký grécky filozof Aristoteles.

Študoval najmä tvrdenia v tvaroch:

- Všetky $P$ sú $Q$.
- Niektoré $P$ sú $Q$.
- Žiadne $P$ nie sú $Q$.
- Niektoré $P$ nie sú $Q$.

ktorým dnes hovoríme **obmedzená kvantifikácia**.

# Všetky $P$ sú $Q$

Formu „Všetky $P$ sú $Q$“ (napr. „Všetky myši sú sivé“) formalizujeme

$$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$$

teda „Pre každý objekt $x$ je pravda, že
ak $x$ má vlastnosť $P$, tak $x$ má vlastnosť $Q$.“,
ekvivalentne „Pre každý objekt $x$ je pravda, že
$x$ nemá vlastnosť $P$ alebo $x$ má vlastnosť $Q$.“

Študenti túto formu niekedy nesprávne sformalizujú ako

$$\forall x(P(x) \land Q(x))$$

Pritom táto formalizácia neprejde jednoduchou skúškou —
stačí si ju prečítať:
„Každý objekt $x$ má súčasne vlastnosť $P$ aj vlastnosť $Q$,“
prirodzenejšie „Všetko je $P$ aj $Q$“ (napr. „Všetko je myš a je to sivé“).

# Všetky $P$ sú $Q$ — varianty

Forma „Všetky $P$ sú $Q$“ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je $P$ alebo $Q$ vzťah:

- Všetky myši kŕmi Jurko.
  Všetky myši sú také, že ich kŕmi Jurko.
  $\forall x(\texttt{myš}(x) \to \texttt{kŕmi}(\texttt{Jurko}, x))$
- Jurko kŕmi iba myši.
  Všetko, čo Jurko kŕmi, sú myši.
  $\forall x(\texttt{kŕmi}(\texttt{Jurko}, x) \to \texttt{myš}(x))$.

# Niektoré $P$ sú $Q$

Formu „Niektoré $P$ sú $Q$“ (napr. „Niektoré myši sú biele“) formalizujeme

$$\exists x\,(P(x) \land Q(x))$$

teda „Existuje aspoň taký jeden objekt $x$, že $x$ má vlastnosť $P$ a $x$ má vlastnosť $Q$.“

Študenti túto formu niekedy nesprávne sformalizujú ako

$$\exists x(P(x) \to Q(x))$$

Ani táto formalizácia neprejde čítacou skúškou:
„Existuje objekt $x$, ktorý nemá vlastnosť $P$ alebo má vlastnosť $Q$.“ prirodzenejšie „Niečo nie je $P$ alebo je $Q$“ (napr. „Niečo nie je myš alebo je to biele“ — je pravdivé vo svete, kde sú všetky myši sivé a je tam jeden človek).

# Niektoré $P$ sú $Q$ — varianty

Forma „Niektoré $P$ sú $Q$“ sa v prirodzených vetách niekedy rozpoznáva ťažšie, napríklad keď je $P$ alebo $Q$ vzťah.

- Jurko kŕmi nejaké myši.
  Jurko kŕmi (nejakú) myš.
  Niečo z toho, čo Jurko kŕmi, sú myši.
  $\exists x(\texttt{kŕmi}(\texttt{Jurko}, x) \land \texttt{myš}(x))$

Niektorých študentov prekvapuje, že pri tejto forme nezáleží na poradí $P$ a $Q$.

- Nejaké myši kŕmi Jurko.
  Niektoré myši sú také, že ich kŕmi Jurko.
  $\exists x(\texttt{kŕmi}(\texttt{Jurko}, x) \land \texttt{myš}(x))$

Je ale vernejšie poradie pri formalizácii zachovať:
$\exists x(\texttt{myš}(x) \land \texttt{kŕmi}(\texttt{Jurko}, x))$

# Žiadne $P$ nie sú $Q$

Formu „Žiadne $P$ nie sú $Q$“ (napr. „Žiadne myši nie sú červené“) formalizujeme (s dôrazom na „nie sú $Q$“)

$$\forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))$$

teda „Pre každý objekt $x$ je pravda, že
ak $x$ má vlastnosť $P$, tak $x$ nemá vlastnosť $Q$,“
„Každé $P$ nie je $Q$,“
alebo rovnako správne (s dôrazom na „žiadne“)

$$\neg\,\exists x\,(P(x) \land Q(x))$$

teda „Nie je pravda, že existuje taký objekt $x$, že
$x$ má vlastnosť $P$ a $x$ má vlastnosť $Q$.“

Ani pri tejto forme nezáleží na poradí $P$ a $Q$,
ale je **vernejšie** ho pri formalizácii zachovať.

# Niektoré $P$ nie sú $Q$

Formu „Niektoré $P$ nie sú $Q$“ (napr. „Niektoré myši nie sú sivé“) formalizujeme

$$\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$$

teda „Pre nejaký objekt $x$ je pravda, že
$x$ má vlastnosť $P$ a $x$ nemá vlastnosť $Q$.“

# Kvantifikátory

## Zamlčané a zdanlivo opačné kvantifikátory

# Zamlčaný všeobecný kvantifikátor

Niekedy kvantifikátor nie je explicitne vyjadrený príslušným zámenom.

Použitie všeobecného podstatného mena (zvyčajne, ale nie nutne v množnom čísle) v úlohe podmetu zvyčajne chápeme ako všeobecnú kvantifikáciu:

- Myši sú sivé.
  $\forall x(\texttt{myš}(x) \to \texttt{sivý}(x))$
- Myš je hlodavec.
  $\forall x(\texttt{myš}(x) \to \texttt{hlodavec}(x))$
- Kto je zodpovedný, ten je doma.
  $\forall x(\texttt{zodpovedný}(x) \to \texttt{doma}(x))$

# Zamlčaný existenčný kvantifikátor

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe **predmetu pozitívneho** prísudku zvyčajne chápeme ako **existenčnú** kvantifikáciu:

- Jurko kŕmi myš.
  $\exists x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \land \mathtt{myš}(x))$
- Bonifác si kúpil syr.
  $\exists x(\mathtt{kúpil}(\mathtt{Bonifác}, x) \land \mathtt{syr}(x))$

# Zamlčaná neexistencia

Použitie všeobecného podstatného mena v úlohe predmetu negatívneho prísudku zvyčajne chápeme ako vyjadrenie neexistencie:

- Bonifác si nekúpil syr.
  $\neg\exists x(\mathtt{kúpil}(\mathtt{Bonifác}, x) \land \mathtt{syr}(x))$
  $\forall x(\mathtt{kúpil}(\mathtt{Bonifác}, x) \to \neg\mathtt{syr}(x))$
- Jurko nekŕmi myši.
  $\forall x(\mathtt{myš}(x) \to \neg\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x))$
  $\forall x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \to \neg\mathtt{myš}(x))$
  $\neg\exists x(\mathtt{kŕmi}(\mathtt{Jurko}, x) \land \mathtt{myš}(x))$

# Opatrnosti nikdy nie je nazvyš

Ľudia neraz veci kvantifikujú nesprávne alebo neúplne (zvlášť pozor na ľudí pôsobiacich v inom odvetví, kde nepoznáte konvencie). Ako interpretovať tvrdenie „chlieb predávajú v potravinách“?

# Opatrnosti nikdy nie je nazvyš

Ľudia neraz veci kvantifikujú nesprávne alebo neúplne (zvlášť pozor na ľudí pôsobiacich v inom odvetví, kde nepoznáte konvencie). Ako interpretovať tvrdenie „chlieb predávajú v potravinách“?

- každý chlieb predávajú len v potravinách a nikde inde
- existuje druh chleba, ktorý predávajú len v miestnej predajni potravín
- existuje druh chleba, ktorý predávajú v každých potravinách
- existujú potraviny, ktoré predávajú aspoň jeden chlieb
- každé potraviny predávajú aspoň jeden chlieb
- …

## Zdanlivá existencia

V podmienkach sa občas vyskytujú neurčité zámená (niekto/niečo/niektorý/…), na ktoré sa ale odkazujeme v podmienenej vete:

- Ak je **niekto** doma, tak (*on*) je zodpovedný.
- Ak Jurko **niečo** kŕmi, má **to** rád.

Také tvrdenie nezodpovedá implikácii s existenčným kvantifikátorom:

✗ $(\exists x\, \mathtt{doma}(x) \to \mathtt{zodpovedn\acute{y}}(x))$

✗ $\exists x(\mathtt{doma}(x) \to \mathtt{zodpovedn\acute{y}}(x))$

ale zodpovedá **všeobecne kvantifikovanej implikácii**:

✓ $\forall x(\mathtt{doma}(x) \to \mathtt{zodpovedn\acute{y}}(x))$

✓ $\forall x(\mathtt{k\acute{r}mi}(\mathtt{Jurko}, x) \to \mathtt{m\acute{a\_r\acute{a}d}}(\mathtt{Jurko}, x))$

# Kvantifikátory

## Nutné a postačujúce podmienky

# Nutné a postačujúce podmienky

Tvrdenia so (zamlčanou) všeobecnou kvantifikáciou majú často formu podraďovacích súvetí:

1. Zodpovedný je **každý, kto** je doma.
2. Zodpovedný je **iba ten, kto** je doma.

pričom

- hlavná veta („Zodpovedný je … “) vyjadruje nejakú **vlastnosť**,
- vedľajšia veta („kto je doma“) vyjadruje **podmienku**, ktorá súvisí s touto vlastnosťou.

Aký je rozdiel medzi týmito podmienkami?

# Postačujúca podmienka

Prvé tvrdenie „Zodpovedný je **každý, kto** je doma.“:

- Hovorí, že na to, aby niekto bol zodpovedný,
  **stačí**, aby platila podmienka, že je doma.
- Inak povedané: Nie je možné, aby bol niekto doma,
  ale považovali sme ho za nezodpovedného.
- Byť doma je teda **postačujúcou** podmienkou zodpovednosti.
- Ekvivalentne:
  „Pre každého platí, že je zodpovedný, ak je doma.“
  „Pre každého platí, že ak je doma, tak je zodpovedný.“
- Formalizácia je teda $\forall x(\mathtt{doma}(x) \rightarrow \mathtt{zodpovedn\acute{y}}(x))$

# Nutná podmienka

Druhé tvrdenie „Zodpovedný je **iba ten, kto** je doma.“:

- Hovorí, že na to, aby niekto bol zodpovedný,
  je **nevyhnutné**, aby bol doma.
- Inak povedané: Keby niekto nebol doma, nebol by zodpovedný.
  Nie je možné, aby bol niekto zodpovedný, ale nebol doma.
- Byť doma je teda **nutnou** podmienkou zodpovednosti.
- Ekvivalentne:
  „Pre každého platí, že je zodpovedný, **iba** ak je doma.“
  „Pre každého platí, že ak **nie** je doma, tak **nie** je zodpovedný.“
  „Pre každého platí, že ak je zodpovedný, tak je doma.“
- Formalizácia je teda $\forall x(\mathtt{zodpovedn\acute{y}}(x) \rightarrow \mathtt{doma}(x))$

# Kvantifikátory

## Zložené kvantifikované vlastnosti

# Zložené kvantifikované vlastnosti

Často potrebujeme kvantifikovať objekty, ktoré majú zložité vlastnosti:

1. nejaká Jankina biela myš,
2. každý biely potkan, ktorého kŕmi Jurko.

Prvý druh kvantifikácií je zrejme existenčný a už vieme, že sa spravidla spája s konjunkciou.

Druhý druh kvantifikácií je zrejme všeobecný a vieme, že sa spravidla spája s implikáciou.

Použitie spojok ale závisí od pozície kvantifikácie vo vete.

# Zložené existenčne kvantifikované vlastnosti ako podmet

(Nejaká) Jankina biela myš je sýta.

- Veta má formu „Niektoré $P$ sú $Q$,“
  teda prekladáme ju ako $\exists x(P(x) \land Q(x))$.
  Pričom ale $P$ **je zložená** vlastnosť.
- Vlastnosť $P$ opisuje objekt,
  ktorý má zrejme byť súčasne Jankin, biely a má to byť myš.
  Preto $P$ vytvoríme z jednotlivých predikátov konjunkciou.

$$\exists x\big((\mathtt{patrí}(x, \mathtt{Janka}) \land \mathtt{biely}(x) \land \mathtt{myš}(x)) \land \mathtt{sýty}(x)\big)$$

# Zložené všeobecne kvantifikované vlastnosti ako podmet

(Všetky) Jankine biele myši sú sýte.

- Veta má formu „Všetky $P$ sú $Q$,“
  teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$,
  pričom $P$ **je zložená** vlastnosť.
- Vlastnosť $P$ opäť opisuje objekty,
  ktoré majú byť súčasne Jankine, biele a myši.
  Preto aj teraz $P$ vytvoríme konjunkciou.

$$\forall x\big((\mathtt{patrí}(x, \mathtt{Janka}) \land \mathtt{biely}(x) \land \mathtt{myš}(x)) \to \mathtt{sýty}(x)\big)$$

# Zložené existenčne kvantifikované vlastnosti ako predmet

Jurko má (nejakú) sýtu bielu myš.

- Aby sme zistili, ktorú aristotelovskú formu má veta, musíme ju preformulovať:
  (Nejaká) sýta biela myš je Jurkova.
- Veta má formu „Niektoré $P$ sú $Q$,“
  teda prekladáme ju ako $\exists x(P(x) \land Q(x))$,
  pričom $P$ je zložená vlastnosť.

$$\exists x\big((\texttt{sýty}(x) \land \texttt{myš}(x) \land \texttt{biely}(x)) \land \texttt{patrí}(x, \texttt{Jurko})\big)$$

# Zložené všeobecne kvantifikované vlastnosti ako predmet

Jurko má všetky sýte biele myši.

- Aj túto vetu musíme preformulovať:
  Všetky sýte biele myši sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky $P$ sú $Q$,“
  teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
  pričom $P$ je zložená vlastnosť.

$$\forall x\big((\mathtt{sýty}(x) \land \mathtt{biely}(x) \land \mathtt{myš}(x)) \to \mathtt{patrí}(x, \mathtt{Jurko})\big)$$

# Viacnásobné všeobecne kvantifikované prívlastky

Jurko má všetky myši a škrečky.

- Preformulujeme: Všetky myši a škrečky sú Jurkove.
- Veta má formu „Všetky $P$ sú $Q$," teda prekladáme ju ako $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
- $P$ je zložená vlastnosť. Ale ako je zložená?

✗ Keď „myši a škrečky" sformalizujeme $(\mathtt{myš}(x) \land \mathtt{škrečok}(x))$, $\forall x(P(x) \to Q(x))$ bude znamenať „Pre každé $x$, ak $x$ je myš a zároveň $x$ je škrečok, tak $x$ patrí Jurkovi."

- Vieme ale, že nič nie je naraz myš aj škrečok, takže podmienke (v našom svete) nevyhovuje žiaden objekt, takže Jurkovi nemusí nič patriť.

✓ Intuitívny význam („a" ako množinové zjednotenie) zachováme, keď „myši a škrečky" sformalizujeme $(\mathtt{myš}(x) \lor \mathtt{škrečok}(x))$.

$$\forall x\big((\mathtt{myš}(x) \lor \mathtt{škrečok}(x)) \to \mathtt{patrí}(x, \mathtt{Jurko})\big)$$

# Kvantifikátory

## Konverzačné implikatúry

# Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

Nie všetkým sa zdá intuitívne, že formula

$$\forall x(\mathtt{myš}(x) \rightarrow \mathtt{biela}(x))$$

je pravdivá vo svetoch, kde nie sú žiadne myši.

Dobrý spôsob, ako to pochopiť je, že uvedomiť si, že vo svete, kde nie sú myši, neexistuje kontrapríklad pre túto formulu — myš, ktorá by nebola biela.

Hovoríme, že v takom svete je táto formula triviálne pravdivá.

Podobne je vo svetoch bez myší triviálne pravdivá ešte prekvapujúcejšia formula:

$$\forall x(\mathtt{myš}(x) \rightarrow \mathtt{človek}(x))$$

# Triviálne pravdivé všeobecne kvantifikované implikácie

Tvrdenie „Každý prvák, ktorý si zapísal logiku, z nej dostal A,“
v sebe nesie implikatúru (domnelý dôsledok), že takí prváci existujú.

Ak je takéto tvrdenie nutne triviálne pravdivé, lebo objekty
z predpokladu neexistujú (napr. prváci si logiku nemôžu zapisovať),
intuitívne ho považujeme zavádzajúce.

Nič to ale nemení na fakte, že je pravdivé.

Existencia prváka, ktorý si zapísal logiku, je skutočne iba implikatúra.

Dodatok „Ale žiadny prvák si ju nikdy nezapísal“ (negácia implikatúry),
nie je s tvrdením v spore, ale objasňuje, že je triviálne pravdivé.

# „Niektoré“ neimplikuje „nie všetky“

Ďalšia implikatúra sa spája s tvrdeniami: „Niektoré $P$ sú $Q$.“

Niekomu sa môže „Niektoré $P$ sú $Q$“ zdať sporné s „Všetky $P$ sú $Q$.“
— Prečo by sme hovorili „niektoré $P$“, keď to platí pre všetky $P$?
Takýto človek považuje tvrdenie „Nie všetky $P$ sú $Q$“ za dôsledok tvrdenia „Niektoré $P$ sú $Q$“. Aj to je však iba implikatúra.

Keď ale na otázku „Dostal niekto Ačko?“ odpovieme
„Áno, niektorí študenti Ačko dostali. *Vlastne ho dostali všetci*,“
druhá veta prvú dopĺňa, ale neprotirečí jej,
hoci je negáciou implikatúry.

Ak chceme jasne vyjadriť domnelý význam, povieme
„Niektorí študenti Ačko dostali, ale nie všetci,“ čo formalizujeme formulou v tvare $(\exists x(P(x) \land Q(x)) \land \neg \forall x(P(x) \to Q(x)))$.