# Výrokovologické spojky

2. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák

Letný semester 2022/2023

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# Obsah 2. prednášky

# Rekapitulácia

Minulý týždeň sme si povedali:

- čo sú symboly jazyka *atomických formúl* logiky prvého rádu;
- čo sú atomické formuly;
- čo sú štruktúry:
  - modely stavu sveta,
  - neprázdna doména + interpretačná funkcia,
  - konštanty označujú objekty,
  - predikáty označujú vzťahy a vlastnosti;
- kedy sú atomické formuly pravdivé v danej štruktúre.
- Jazyk atomických formúl je oproti slovenčine veľmi slabý.
- Môžu byť pravdivé vo veľmi čudných štruktúrach.

# Výrokovologické spojky

# Výrokovologické spojky

Atomické formuly logiky prvého rádu môžeme spájať do zložitejších tvrdení **výrokovologickými spojkami**.

- Zodpovedajú spojkám v slovenčine, ktorými vytvárame súvetia.
- Významom spojky je vždy **boolovská funkcia**,
  teda funkcia na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov.
  Pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí
  **iba** od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

**Príklad 2.1**

Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

# Nevýrokovologické spojky

**Negatívny príklad**

Spojka *pretože* nie je výrokovologická.

**Dôkaz.**

Uvažujme o výroku *„Karol je doma, pretože Jarka je v škole"*.

Je pravdivý v situácii: Je 18:00 a Karol je doma, aby nakŕmil psíka. Ten by inak musel čakať na Jarku, ktorá šla dopoludnia do školy a vráti až o 19:30.

Nie je pravdivý v situácii: Jarka išla ráno do školy, ale Karol ostal doma, lebo je chorý. S Jarkinou prítomnosťou v škole to nesúvisí.

V oboch situáciách sú výroky *„Karol je doma"* aj *„Jarka je v škole"* pravdivé, ale pravdivostná hodnota zloženého výroku je rôzna.
Nezávisí iba od pravdivostných hodnôt podvýrokov
(ale od existencie vzťahu príčina-následok medzi nimi).

Spojka *pretože* teda nie je je funkciou na pravdivostných hodnotách. □

# Výrokovologické spojky

## Boolovské spojky

# Negácia

Negácia $\neg$ je **unárna** spojka — má jeden argument, formulu.

Zodpovedá výrazom *nie*, „*nie je pravda, že* … “, predpone *ne-*.

Ľubovoľne vnárateľná.

Formula *vytvorená* negáciou sa **nezátvorkuje**.

Okolo argumentu negácie **nepridávame** zátvorky,
ale môže ich mať on sám, ak to jeho štruktúra vyžaduje.

**Príklad 2.2**

| | |
|---|---|
| $\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol})$ | Karol **nie** je doma. |
| $\neg\mathtt{Jarka} \doteq \mathtt{Karol}$ | Jarka **nie** je Karol. |
| $\neg\neg\neg\mathtt{poslúcha}(\mathtt{Cilka})$ | **Nie** je pravda, že **nie** je pravda, že Cilka **ne**poslúcha. |
| $\cancel{(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))}$ | nesprávna |
| $\cancel{\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))}$ | syntax |

## Konjunkcia

Konjunkcia $\wedge$ je binárna spojka.

Zodpovedá spojkám *a*, *aj*, *i*, *tiež*, *ale*, *avšak*, *no*, *hoci*, *ani*, *ba (aj/ani)*, …

Formalizujeme ňou zlučovacie, stupňovacie a odporovacie súvetia:

- Jarka je doma aj Karol je doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \wedge \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka je v škole, no Karol je doma.
  $(\mathtt{v\_škole}(\mathtt{Jarka}) \wedge \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Ani Jarka nie je doma, ani Karol tam nie je.
  $(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \wedge \neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Nielen Jarka je chorá, ale aj Karol je chorý.
  $(\mathtt{chorý}(\mathtt{Jarka}) \wedge \mathtt{chorý}(\mathtt{Karol}))$

Zloženú formulu vždy zátvorkujeme.

# Formalizácia viacnásobných vetných členov konjunkciou

Zlučovacie viacnásobné vetné členy tiež formalizujeme ako konjunkcie:

- Jarka aj Karol sú doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Karol sa potkol a spadol.
  $(\mathtt{potkol\_sa}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{spadol}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka dostala Bobíka od mamy a otca.
  $(\mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Bobík}, \mathtt{mama}) \land \mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Bobík}, \mathtt{otec}))$

Podobne (jednoduché a viacnásobné zlučovacie) prívlastky vlastností:

- Eismann je ruský špión.
  $(\mathtt{Rus}(\mathtt{Eismann}) \land \mathtt{špión}(\mathtt{Eismann}))$
- Bobík je malý čierny psík.
  $\big((\mathtt{malý}(\mathtt{Bobík}) \land \mathtt{čierny}(\mathtt{Bobík})) \land \mathtt{pes}(\mathtt{Bobík})\big)$

# Stratené v preklade

Zlučovacie súvetia niekedy vyjadrujú časovú následnosť,
ktorá sa pri priamočiarom preklade do logiky prvého rádu **stráca**:

- Jarka a Karol sa stretli **a** išli do kina.
  $$(\mathtt{stretli\_sa}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Karol}) \land (\mathtt{do\_kina}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{do\_kina}(\mathtt{Karol})))$$
- Jarka a Karol išli do kina **a** stretli sa.
  $$((\mathtt{do\_kina}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{do\_kina}(\mathtt{Karol})) \land \mathtt{stretli\_sa}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Karol}))$$

# Disjunkcia

Disjunkcia $\lor$ je binárna spojka, ktorá zodpovedá spojkám *alebo*, *či* v **inkluzívnom** význame (môžu nastať aj obe možnosti). Inkluzívnu disjunkciu vyjadruje tiež *„alebo aj/i“* a častice *respektíve*, *eventuálne*, *poprípade*, *prípadne*.

Disjunkciou formalizujeme vylučovacie súvetia s inkluzívnym významom:

- Jarka je doma **alebo** Karol je doma.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Bobíka kúpe Jarka, prípadne ho kúpe Karol.
  $(\mathtt{kúpe}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Bobík}) \lor \mathtt{kúpe}(\mathtt{Karol}, \mathtt{Bobík}))$

Zloženú formulu vždy **zátvorkujeme**.

# Formalizácia viacnásobných vetných členov disjunkciou

Viacnásobné vetné členy s vylučovacou spojkou (v inkluzívnom význame) tiež prekladáme ako disjunkcie:

- Doma je Jarka alebo Karol.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$
- Jarka je doma alebo v škole.
  $(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{v\_škole}(\mathtt{Jarka}))$
- Jarka dostala Bobíka od mamy alebo otca.
  $(\mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Bobík}, \mathtt{mama}) \lor \mathtt{dostal}(\mathtt{Jarka}, \mathtt{Bobík}, \mathtt{otec}))$
- Bobík je čierny či tmavohnedý psík.
  $\big((\mathtt{čierny}(\mathtt{Bobík}) \lor \mathtt{tmavohnedý}(\mathtt{Bobík})) \land \mathtt{pes}(\mathtt{Bobík})\big)$

# Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie „*buď* …, *alebo* …“, „*buď* …, *buď* …“, „*alebo* …, *alebo* …“ spravidla (v matematike vždy) vyjadrujú exkluzívnu disjunkciu.

- Buď je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

# Exkluzívna disjunkcia

Konštrukcie *„buď …, alebo … “*, *„buď …, buď … “*, *„alebo …, alebo … “* spravidla (v matematike vždy) vyjadrujú exkluzívnu disjunkciu.

- Buď je batéria vybitá alebo svieti kontrolka.

Exkluzívnu disjunkciu môžeme vyjadriť zložitejšou formulou:

$$\big((\mathtt{vybitá}(\mathtt{batéria}) \lor \mathtt{svieti}(\mathtt{kontrolka})) \land \\ \neg(\mathtt{vybitá}(\mathtt{batéria}) \land \mathtt{svieti}(\mathtt{kontrolka}))\big).$$

Niekedy aj samotné *alebo* spája možnosti,
o ktorých vieme, že sú vzájomne výlučné
(na základe znalostí o fungovaní domény alebo z kontextu):

- Jarka sa nachádza doma alebo v škole.
  (Nemôže byť súčasne na dvoch miestach.)

Viď *Znalosti na pozadí* ďalej.

# Jednoznačnosť rozkladu

Formuly s binárnymi spojkami sú vždy uzátvorkované.
Dajú sa jednoznačne rozložiť na podformuly a interpretovať.

Slovenské tvrdenia so spojkami nie sú vždy jednoznačné:

- Karol je doma a Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.
  - ? $\big((\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík})\big)$
  - ? $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land (\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík}))\big)$
- Karol je doma alebo Jarka je doma a Bobík je šťastný.
  - ? $\big((\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík})\big)$
  - ? $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor (\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík}))\big)$

# Jednoznačnosť rozkladu v slovenčine

Slovenčina má prostriedky podobné zátvorkám:

- Viacnásobný vetný člen (+*obaja*, *niekto z*):
  - Karol aj Jarka sú (obaja) doma alebo je Bobík šťastný.
    $\big(\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})\big) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík})\big)$
  - Doma je Karol alebo Jarka a Bobík je šťastný.
    Niekto z dvojice Karol a Jarka je doma a Bobík je šťastný.
    $\big(\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka})\big) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík})\big)$
- Kombinácie spojok *buď* . . . , *alebo* . . . ; *alebo* . . . , *alebo* . . . ; *aj* . . . , *aj* . . . ; *ani* . . . , *ani* . . . ; a pod.
  - Karol je doma a buď je doma Jarka, alebo je Bobík šťastný, alebo jedno aj druhé.
    Aj Karol je doma, aj Jarka je doma alebo je Bobík šťastný.
    $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \land \big(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík})\big)\big)$
  - Alebo je doma Karol, alebo je doma Jarka a Bobík je šťastný, alebo aj aj.
    $\big(\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}) \lor \big(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{šťastný}(\mathtt{Bobík})\big)\big)$

# Oblasť platnosti negácie

Výskyt negácie sa vzťahuje na najkratšiu nasledujúcu formulu — oblasť platnosti tohto výskytu.

- $((\neg\,\texttt{doma(Karol)} \land \texttt{doma(Jarka)}) \lor \texttt{šťastný(Bobík)})$
- $(\neg(\texttt{doma(Karol)} \land \texttt{doma(Jarka)}) \lor \texttt{šťastný(Bobík)})$

Argument negácie je uzátvorkovaný práve vtedy, keď je priamo vytvorený binárnou spojkou:

✓ $\neg\neg(\texttt{doma(Karol)} \land \texttt{doma(Jarka)})$

✗ $\neg(\neg(\texttt{doma(Karol)} \land \texttt{doma(Jarka)}))$

**Zamyslite sa 2.1**

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg \mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

B. $\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

# Interakcia negácie s alebo v slovenčine

**Zamyslite sa 2.1**

Ako by ste sformalizovali: „Doma nie je Jarka alebo Karol“?

A. $(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

B. $\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \mathtt{doma}(\mathtt{Karol}))$

Zvyčajné chápanie v slovenčine je A.

Formalizácii B zodpovedá
„Nie je pravda, že Jarka alebo Karol je doma.“

# Negácia rovnostného atómu

Rovnosť nie je spojka, preto:

- ✓ $\neg\,\mathtt{Jarka} \doteq \mathtt{Karol}$ — Jarka nie je Karol.
- ✗ $\neg\,(\mathtt{Jarka} \doteq \mathtt{Karol})$

Zátvorky sú zbytočné, lebo čítanie
*„«Nie je pravda, že Jarka» sa rovná Karol“* je nezmyselné:

1. Syntakticky: Negácia sa vzťahuje na formulu.
   Konštanta nie je formula, rovnosť s oboma argumentmi je.
2. Sémanticky: Negácia je funkcia na pravdivostných hodnotách.
   Konštanty označujú objekty domény.
   Objekty nie sú pravdivé ani nepravdivé.

**Dohoda 2.3**

Formulu $\neg\,\tau \doteq \sigma$ budeme skrátene zapisovať $\tau \not\doteq \sigma$.

# Výrokovologické spojky

## Implikácia

# Implikácia

Implikácia → je binárna spojka približne zodpovedajúca podmienkovému podraďovaciemu súvetiu *ak* …, *tak* ….

Vo formule $(A \to B)$ hovoríme podformule $A$ **antecedent** a podformule $B$ **konzekvent**.

Formula vytvorená implikáciou je **nepravdivá** v **jedinom** prípade: antecedent je pravdivý a konzekvent nepravdivý.

⚠ Tomuto významu nezodpovedajú všetky súvetia *ak* …, *tak* …:

Napr. veta „*Ak* by *Sarah prišla*, *Jim* by *prišiel tiež*“ je nepravdivá, keď ňou chceme povedať, že si myslíme, že išli rovnakým autobusom, ale v skutočnosti Jim išiel iným a zmeškal ho.

Implikácia plne nevystihuje prípady, keď *ak* …, *tak* … vyjadruje (neboolovský) vzťah príčina-následok (ako *pretože*).

*Keď* …, *potom* … má často význam časovej následnosti, ktorý implikácia tiež nepostihuje.

# Nutná a postačujúca podmienka

Implikáciu vyjadrujú aj súvetia:

Jim príde, **ak** príde Kim. Jim príde, **iba ak** príde Kim.

Vedľajšie vety (*príde Kim*) sú **podmienkami** hlavnej vety (*Jim príde*).

Ale je medzi nimi **podstatný rozdiel**:

| | |
|---|---|
| Jim príde, <u>**ak** príde Kim</u>. | Jim príde, <u>**iba ak** príde Kim</u>. |
| **postačujúca** podmienka | **nutná** podmienka |

# Postačujúca podmienka

Jim príde, ak príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, stačí, aby prišla Kim.
- Teda, ak príde Kim, tak príde aj Jim.
- Nepravdivé, keď Kim príde, ale Jim nepríde.
- Zodpovedá teda $(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, ak }B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (B \to A)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, pokiaľ príde Kim.

# Nutná podmienka

Jim príde, iba ak príde Kim.

- Na to, aby prišiel Jim, je nevyhnutné, aby prišla Kim, ale nemusí to stačiť.
- Teda, ak Jim príde, tak príde aj Kim.
- Nepravdivé, keď Jim príde, ale Kim nepríde.
- Zodpovedá teda $(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \to \texttt{príde}(\texttt{Kim}))$.

Vo všeobecnosti:

$$A\text{, iba ak } B. \qquad \rightsquigarrow \qquad (A \to B)$$

Iné vyjadrenia:

- Jim príde, iba pokiaľ s Kim.
- Jim príde iba spolu s Kim.
- Jim nepríde bez Kim.

# Nutná a postačujúca podmienka rukolapne

Určite by sa vám páčilo, keby z pravidiel predmetu vyplývalo:

*Z logiky prejdete, **ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

**Stačilo** by prísť na obe časti skúšky a *nebolo by nutné* urobiť nič iné.

Žiaľ, z našich pravidiel vyplýva:

*Z logiky prejdete, **iba ak** prídete na písomnú aj ústnu skúšku.*

Prísť na obe časti skušky **je nutné**, ale na prejdenie to *nestačí*.

# Súvetia formalizované implikáciou

$(A \rightarrow B)$ formalizuje (okrem iných) zložené výroky:

- Ak $A$, tak $B$.
- Ak $A$, tak aj $B$.
- Ak $A$, $B$.
- Pokiaľ $A$, [tak (aj)] $B$.
- $A$, iba/len/jedine ak/pokiaľ(/keď) $B$.
- $A$ nastane iba spolu s $B$.
- $A$ nenastane bez $B$.
- $B$, ak/pokiaľ(/keď) $A$.

# Výrokovologické spojky

## Ekvivalencia

# Ekvivalencia

Ekvivalencia $\leftrightarrow$ vyjadruje, že ňou spojené výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Zodpovedá slovenským výrazom *ak a iba ak*; *vtedy a len vtedy, keď*; *práve vtedy, keď*; *rovnaký … ako …*; *taký … ako …*.

- Jim príde, ak a iba ak príde Kim.
  $(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \leftrightarrow \texttt{príde}(\texttt{Kim}))$
- Číslo $n$ je párne práve vtedy, keď $n^2$ je párne.
  $(\texttt{párne}(\texttt{n}) \leftrightarrow \texttt{párne}(\texttt{n}^2))$
- Müller je taký Nemec, ako je Stirlitz Rus.
  $(\texttt{Nemec}(\texttt{Müller}) \leftrightarrow \texttt{Rus}(\texttt{Stirlitz}))$

# Ekvivalencia

Ekvivalencia $(A \leftrightarrow B)$ zodpovedá tvrdeniu,
že $A$ je nutnou **aj** postačujúcou podmienkou $B$.

Budeme ju preto považovať za **skratku** za formulu

$$\big((A \to B) \land (B \to A)\big).$$

# Ďalšie spojky a vetné konštrukcie

V slovenčine a iných prirodzených aj umelých jazykoch sa dajú tvoriť aj oveľa komplikovanejšie podmienené tvrdenia:

- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole, *inak* má Jarka obavy.
- Karol je doma, *ak* je Jarka v škole,
  *inak* má Jarka obavy, *okrem* prípadov, keď je Bobík s ním.

Výrokovologické spojky sa dajú vytvoriť aj pre takéto konštrukcie, ale väčšinou sa to nerobí.

Na ich vyjadrenie stačia aj základné spojky. Mohli by sme pre ne vymyslieť označenie a považovať aj ako skratky, podobne ako ekvivalenciu.

# Výrokovologické spojky

## Syntax výrokovologických formúl

# Syntax a sémantika formúl s výrokovologickými spojkami

Podobne ako pri atomických formulách, aj pri formulách s výrokovologickými spojkami potrebujeme zadefinovať — presne a záväzne — ich syntax (skladbu) a sémantiku (význam).

Niektoré definície preberieme, iné rozšírime alebo modifikujeme, ďalšie pridáme.

Syntax výrokovologických formúl logiky prvého rádu špecifikuje:

- z čoho sa skladajú,
- čím sú a akú majú štruktúru.

## Symboly výrokovologickej časti logiky prvého rádu

### Definícia 2.4

*Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu* sú:

*mimologické symboly*, ktorými sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$;

*logické symboly*, ktorými sú

- *výrokovologické spojky* $\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie*);
- a *symbol rovnosti* $\doteq$;

*pomocné symboly* **(**, **)** a **,** (ľavá zátvorka, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné ani logické symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^{+}$.

# Atomické formuly

Definícia atomických formúl je takmer rovnaká ako doteraz:

**Definícia 2.5**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

*Rovnostný atóm* jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde $c_1$ a $c_2$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

*Predikátový atóm* jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \ldots, c_n)$, kde $P$ je predikátový symbol z $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ s aritou $n$ a $c_1, \ldots, c_n$ sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

*Atomickými formulami* (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_\mathcal{L}$.

# Čo sú výrokovologické formuly?

Majme jazyk $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Kim}, \mathtt{Jim}, \mathtt{Sarah}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{príde}^1\}$.

Čo sú formuly tohto jazyka?

- Samotné atómy, napr. $\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.
- Negácie atómov, napr. $\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$.
- Atómy alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$.
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $\big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \to (\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))\big)$.

Ako to presne a úplne popíšeme?

# Čo sú výrokovologické formuly?

Ako presne a úplne popíšeme, čo je formula?

Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly,
   ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
   - Podobne ako báza pri matematickej indukcii.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
   - Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii.
3. Zabezpečíme, že nič iné nie je formulou.

**Definícia 2.6**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
***Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ formúl jazyka $\mathcal{L}$*** je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je formulou z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak $A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$
a nazývame ju *negácia* formuly $A$.

2.2. Ak $A$ a $B$ sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$
a nazývame ich postupne *konjunkcia*, *disjunkcia* a *implikácia* formúl $A$ a $B$.

Každý prvok $A$ množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame ***formulou*** jazyka $\mathcal{L}$.

### Dohoda 2.7

Formuly označujeme meta premennými $A, B, C, X, Y, Z$, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

### Dohoda 2.8

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$.

Technicky $(\cdot \leftrightarrow \cdot) : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je funkcia na formulách definovaná ako $(A \leftrightarrow B) = \big((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)\big)$ pre každé dve formuly $A$ a $B$.

### Príklad 2.9

Ako by sme podľa definície 2.6 mohli dokázať, že $\big(\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \rightarrow (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))\big)$ je formula? Teda, ako by sme ju podľa definície 2.6 mohli vytvoriť?

# Vytvárajúca postupnosť

## Definícia 2.10

*Vytvárajúcou postupnosťou* nad jazykom $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu je ľubovoľná konečná postupnosť $A_0, \ldots, A_n$ postupností symbolov, ktorej každý člen

- je atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom $A$ je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde $A$ a $B$ sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

*Vytvárajúcou postupnosťou pre $X$* je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je $X$.

# Indukcia na konštrukciu formuly

**Veta 2.11 (Princíp indukcie na konštrukciu formuly)**

*Nech $P$ je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne*

1. *každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ má vlastnosť $P$,*

2.1. *ak formula $A$ má vlastnosť $P$, tak aj $\neg A$ má vlastnosť $P$,*

2.2. *ak formuly $A$ a $B$ majú vlastnosť $P$, tak aj každá z formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ má vlastnosť $P$,*

*tak všetky formuly majú vlastnosť $P$ ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).*

# Formula a existencia vytvárajúcej postupnosti

**Tvrdenie 2.12**

*Postupnosť symbolov $A$ je výrokovologickou formulou vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre $A$.*

**Osnova dôkazu.**

(⇒) Indukciou na konštrukciu formuly

(⇐) Indukciou na dĺžku vytvárajúcej postupnosti □

*vtt* skracuje „*vtedy a len vtedy, keď*“.

Vytvárajúcu postupnosť by sme mohli použiť na alternatívnu definíciu formúl.

# (Ne)jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly" takto?

**Definícia „formúl"**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ „formúl" jazyka $\mathcal{L}$ je (3.) **najmenšia** množina postupností symbolov, ktorá spĺňa všetky nasledujúce podmienky:

1. Každý atóm z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ je „formulou" z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.1. Ak $A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.2. Ak $A$ a $B$ sú v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosti symbolov $A \land B$, $A \lor B$ a $A \to B$ patria do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

2.3. ak $A$ patrí do $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj postupnosť symbolov $(A)$ je v $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Každý prvok $A$ množiny $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nazývame „formulou" jazyka $\mathcal{L}$.

Čo znamená „formula"
$(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \to \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$?

# Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

**Tvrdenie 2.13 (o jednoznačnosti rozkladu)**

*Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku $\mathcal{L}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:*

- $X$ *je atóm z* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.
- *Existuje práve jedna formula* $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ *taká, že* $X = \neg A$.
- *Existujú práve jedna dvojica formúl* $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ *a jedna spojka* $b \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$ *také, že* $X = (A\ b\ B)$.

# Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly
podľa definície formúl:

$$\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}),\ \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}),\ \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}),\ \mathtt{príde}(\mathtt{Kim}),$$
$$\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}),\ (\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})),$$
$$((\neg\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \land \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$$

ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné *ktoré* z predchádzajúcich formúl
  sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly
bez týchto problémov?

# Vytvárajúci strom

Konštrukciu si vieme predstaviť ako *strom*:

$$((\neg \texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg \texttt{príde}(\texttt{Sarah}))$$

$$(\neg \texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})) \qquad \neg \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$$

$$\neg \texttt{príde}(\texttt{Jim}) \qquad \texttt{príde}(\texttt{Kim}) \qquad \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$$

$$\texttt{príde}(\texttt{Jim})$$

Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zadefinujeme?

Podobne ako sa definuje napr. binárny vyhľadávací strom.

# Vytvárajúci strom formuly

**Definícia 2.14**

***Vytvárajúci strom*** $T$ pre formulu $X$ je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni $T$ je formula $X$,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu $A$,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \; b \; B)$, kde $b$ je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu $A$ a pravé formulu $B$,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

# Syntaktické vzťahy formúl

Uvažujme formulu:

$$((\neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah}))$$

Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$\texttt{príde}(\texttt{Sarah}), \neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}), (\neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})), \ldots$$

Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne*/*priamo* vznikla?

$$(\neg\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \land \texttt{príde}(\texttt{Kim})) \quad \texttt{a} \quad \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})$$

Ako tieto pojmy presne zadefinujeme?

# Podformuly

**Definícia 2.15 (Priama podformula)**

Pre všetky formuly $A$ a $B$:

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula $A$.
- Priamymi podformulami $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly $A$ (*ľavá* priama podformula) a $B$ (*pravá* priama podformula).

**Definícia 2.16 (Podformula)**

Vzťah ***byť podformulou*** je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca pre všetky formuly $X$, $Y$ a $Z$:

- $X$ je podformulou $X$.
- Ak $X$ je priamou podformulou $Y$, tak $X$ je podformulou $Y$.
- Ak $X$ je podformulou $Y$ a $Y$ je podformulou $Z$, tak $X$ je podformulou $Z$.

Formula $X$ je ***vlastnou podformulou*** formuly $Y$ práve vtedy, keď $X$ je podformulou $Y$ a $X \neq Y$.

# Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly.
  - Nič nemá mieru 0, ani atómy.
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
  - pridanie negácie,
  - spojenie formúl spojkou.

Túto lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*.

**Príklad 2.17**

Aký je stupeň formuly $\big((\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \land \neg(\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \to \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\big)$?

# Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme?

Podobne ako sme zadefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

# Stupeň formuly

### Definícia 2.18 (Stupeň formuly)

Pre všetky formuly $A$ a $B$ a všetky $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

- Atomická formula je stupňa $0$.
- Ak $A$ je formula stupňa $n$, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak $A$ je formula stupňa $n_1$ a $B$ je formula stupňa $n_2$, tak $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

### Definícia 2.18 (Stupeň formuly presnejšie a symbolicky)

***Stupeň*** $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme pre všetky formuly $A$, $B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ nasledovne:

- $\deg(A) = 0$, ak $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$,
- $\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \to B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$.

# Indukcia na stupeň formuly

Pomocou stupňa vieme indukciu na konštrukciu formuly zredukovať na špeciálny prípad matematickej indukcie:

**Veta 2.19 (Princíp indukcie na stupeň formuly)**

*Nech $P$ je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$). Ak platí súčasne*

1. *báza indukcie: každá formula stupňa $0$ má vlastnosť $P$,*
2. *indukčný krok: pre každú formulu $X$ z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako $\deg(X)$ majú vlastnosť $P$, vyplýva, že aj $X$ má vlastnosť $P$,*

*tak všetky formuly majú vlastnosť $P$ ($P = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).*

# Výrokovologické spojky

## Sémantika výrokovologických formúl

# Sémantika výrokovej logiky

Význam formúl výrokovologickej časti logiky prvého rádu popíšeme podobne ako význam atomických formúl pomocou **štruktúr**.

# Štruktúra pre jazyk

Definícia štruktúry takmer nemení:

**Definícia 2.20**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.
***Štruktúrou*** pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde
$D$ je ľubovoľná **neprázdna** množina nazývaná ***doména*** štruktúry $\mathcal{M}$;
$i$ je zobrazenie, nazývané ***interpretačná funkcia*** štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

- každému symbolu konštanty $c$ jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu $P$ jazyka $\mathcal{L}$ s aritou $n$ priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

# Pravdivosť formuly v štruktúre

## Definícia 2.21

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Reláciu ***formula $A$ je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$*** ($\mathcal{M} \models A$) definujeme **induktívne** pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly $P$ s aritou $n$ všetky konštanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$, a všetky formuly $A$, $B$ jazyka $\mathcal{L}$ nasledovne:

- $\mathcal{M} \models c_1 \doteq c_2$ vtt $i(c_1) = i(c_2)$,
- $\mathcal{M} \models P(c_1, \ldots, c_n)$ vtt $\big(i(c_1), \ldots, i(c_n)\big) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ a zároveň $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)$ vtt $\mathcal{M} \models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)$ vtt $\mathcal{M} \not\models A$ alebo $\mathcal{M} \models B$,

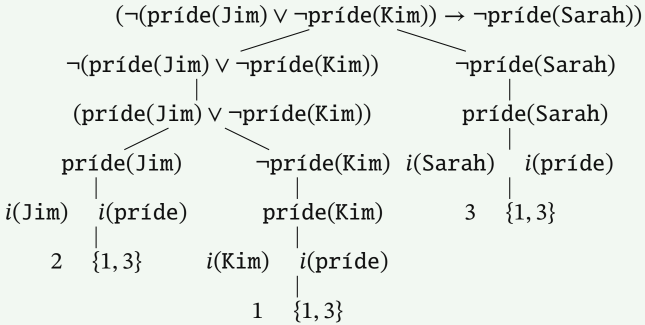
kde $\mathcal{M} \not\models A$ skracuje $A$ *nie je pravdivá v* $\mathcal{M}$.

# Vyhodnotenie pravdivosti formuly

**Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)**

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):



# Vyhodnotenie pravdivosti formuly

**Príklad 2.22 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)**

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Formuly vyhodnocujeme podľa definície postupom zdola nahor (od atómov cez zložitejšie podformuly k cieľovej formule):

- $\mathcal{M} \not\models (\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}))$
  - $\mathcal{M} \models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$
    - $\mathcal{M} \not\models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$
      - $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$
        - $i(\mathtt{Jim}) \notin i(\mathtt{príde})$
          - $2 \notin \{1, 3\}$
      - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$
        - $\mathcal{M} \models \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$
          - $i(\mathtt{Kim}) \in i(\mathtt{príde})$
            - $1 \in \{1, 3\}$
  - $\mathcal{M} \not\models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
    - $\mathcal{M} \models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
      - $i(\mathtt{Sarah}) \in i(\mathtt{príde})$
        - $3 \in \{1, 3\}$

# Vyhodnotenie pravdivosti formuly

**Príklad 2.23 (Vyhodnotenie pravdivosti formuly v štruktúre)**

Majme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk o party, kde $D = \{0, 1, 2, 3\}$, $i(\mathtt{Kim}) = 1$, $i(\mathtt{Jim}) = 2$, $i(\mathtt{Sarah}) = 3$, $i(\mathtt{príde}) = \{1, 3\}$.

Vyhodnotenie pravdivosti môžeme zapísať aj tabuľkou:

| | $p(J)$ | $p(K)$ | $\neg p(K)$ | $(p(J) \lor \neg p(K))$ | $\neg(p(J) \lor \neg p(K))$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{M}$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | |

| … | $p(S)$ | $\neg p(S)$ | $(\neg(p(J) \lor \neg p(K)) \to \neg p(S))$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{M}$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |

kde $p = \mathtt{príde}$, $K = \mathtt{Kim}$, $J = \mathtt{Jim}$ a $S = \mathtt{Sarah}$.

Všimnite si, že v záhlaví tabuľky
je vytvárajúca postupnosť vyhodnocovanej formuly.

**Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)**

**V akej štruktúre** $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt

**Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)**

**V akej štruktúre** $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo
$\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt

**Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)**

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo
$\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt

**Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)**

**V akej štruktúre** $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \to \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo
$\quad\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \lor \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Kim})$ alebo
$\quad\mathcal{M} \not\models \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})$
vtt

# Hľadanie štruktúry

**Príklad 2.24 (Nájdenie štruktúry, v ktorej je formula pravdivá)**

V akej štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ je pravdivá formula
$\mathcal{M} \models \big(\neg(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})\big)$?

Na zodpovedanie je dobré postupovať podľa definície pravdivosti zhora nadol (od cieľovej formuly cez podformuly k atómom):

$\mathcal{M} \models \big(\neg(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})\big)$
vtt $\mathcal{M} \not\models \neg(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim}))$ alebo
$\mathcal{M} \models \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models (\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \lor \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim}))$ alebo $\mathcal{M} \not\models \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$
vtt $\mathcal{M} \models \texttt{príde}(\texttt{Jim})$ alebo $\mathcal{M} \models \neg\texttt{príde}(\texttt{Kim})$ alebo
$\mathcal{M} \not\models \texttt{príde}(\texttt{Sarah})$
vtt $i(\texttt{Jim}) \in i(\texttt{príde})$ alebo $i(\texttt{Kim}) \notin i(\texttt{príde})$ alebo
$i(\texttt{Sarah}) \notin i(\texttt{príde})$.

# Výrokovologické spojky

## Teórie a ich modely

# Teórie v neformálnej logike

Medzi základnými logickými pojmami z úvodnej prednášky boli teória a model.

Neformálne je **teória** súbor tvrdení, ktoré pokladáme za pravdivé.

Zvyčajne popisujú našu predstavu o zákonitostiach platných v nejakej časti sveta a pozorovania o jej stave.

**Príklad 2.25**

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.
Organizujeme párty a P0: chceme, aby na ňu prišiel niekto z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepríde na párty, ak príde Kim.

P2: Jim príde na párty, len ak príde Kim.

P3: Sarah nepríde bez Jima.

# Výrokovologické teórie

V logike prvého rádu tvrdenia zapisujeme formulami.
Teóriu preto budeme chápať ako súbor (čiže množinu) formúl.

**Definícia 2.26**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu.

Každú množinu formúl jazyka $\mathcal{L}$ budeme nazývať ***teóriou*** v jazyku $\mathcal{L}$.

**Príklad 2.27**

$$
\begin{aligned}
T_{\text{party}} = \{&((\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \lor \texttt{príde}(\texttt{Jim})) \lor \texttt{príde}(\texttt{Sarah})),\\
&(\texttt{príde}(\texttt{Kim}) \to \neg\texttt{príde}(\texttt{Sarah})),\\
&(\texttt{príde}(\texttt{Jim}) \to \texttt{príde}(\texttt{Kim})),\\
&(\texttt{príde}(\texttt{Sarah}) \to \texttt{príde}(\texttt{Jim}))\}
\end{aligned}
$$

# Modely teórií

Neformálne je ***modelom*** teórie stav vybranej časti sveta, v ktorom sú všetky tvrdenia v teórii pravdivé.

Pre logiku prvého rádu stavy sveta vyjadrujú štruktúry.

**Príklad 2.28 (Model teórie o party)**

$$\mathcal{M} = (\{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{s}, \mathtt{e}, \mathtt{h}\}, i),$$

$$i(\mathtt{Kim}) = \mathtt{k}, \qquad i(\mathtt{Jim}) = \mathtt{j}, \qquad i(\mathtt{Sarah}) = \mathtt{s},$$

$$i(\mathtt{príde}) = \{\mathtt{k}, \mathtt{j}, \mathtt{e}\};$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathcal{M} \models ((\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Jim})) \lor \mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \\
\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Kim}) \rightarrow \neg\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah})) \\
\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Jim}) \rightarrow \mathtt{príde}(\mathtt{Kim})) \\
\mathcal{M} \models (\mathtt{príde}(\mathtt{Sarah}) \rightarrow \mathtt{príde}(\mathtt{Jim}))
\end{array}\right\} \mathcal{M} \models T_{\text{party}}$$

# Model teórie

**Definícia 2.29 (Model)**

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu a nech $T$ je teória v jazyku $\mathcal{L}$ a $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.

Teória $T$ je ***pravdivá*** v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models T$, vtt **každá** formula $X$ z $T$ je pravdivá v $\mathcal{M}$ (teda $\mathcal{M} \models X$).

Hovoríme tiež, že $\mathcal{M}$ je ***modelom*** $T$.

Teória $T$ je ***nepravdivá*** v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models T$, vtt $T$ nie je pravdivá v $\mathcal{M}$.

# Výrokovologické spojky

## Správnosť a vernosť formalizácie

# Skúška správnosti formalizácie

Správnou formalizáciou výroku je taká formula,
ktorá je pravdivá za tých istých okolností ako formalizovaný výrok.

Formuly dokážeme vyhodnocovať iba v štruktúrach.

Preto za tých istých okolností znamená v tých istých štruktúrach.

# Vernosť formalizácie

Výrok *„Nie je pravda, že Jarka a Karol sú doma“*
sa dá správne formalizovať ako

$$\neg(\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \land \mathtt{doma}(\mathtt{Karol})),$$

ale rovnako správna je aj formalizácia

$$(\neg\mathtt{doma}(\mathtt{Jarka}) \lor \neg\mathtt{doma}(\mathtt{Karol})),$$

lebo je pravdivá v rovnakých štruktúrach.

Pri formalizácii sa snažíme o správnosť, ale zároveň uprednostňujeme formalizácie, ktoré vernejšie zachytávajú štruktúru výroku.

Zvyšuje to pravdepodobnosť, že sme neurobili chybu,
a uľahčuje hľadanie chýb.

Prvá formalizácia je vernejšia ako druhá, a preto ju uprednostníme.

# Znalosti na pozadí

Na praktických cvičeniach ste sa stretli so znalosťami na pozadí (background knowledge): vzájomná výlučnosť vlastností *je Nemec* a *je Rus*, ktorá v úlohe nebola explicitne uvedená.

Uprednostňujeme ich vyjadrovanie samostatnými formulami.

Rovnaké dôvody ako pre vernosť.

# Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Niektoré tvrdenia **vyznievajú** silnejšie, ako naozaj sú:

- *„Prílohou sú zemiaky* alebo *šalát“*
  môže niekomu znieť ako exkluzívna disjunkcia.
- *„Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %“*
  znie mnohým ako ekvivalencia.

**Skutočnú časť významu** tvrdenia
**nemôžeme poprieť** v dodatku k pôvodnému tvrdeniu bez sporu s ním.

- Keď k tvrdeniu *„Karol a Jarka sú doma“*
  dodáme *„Ale Karol nie je doma,“* dostaneme sa do sporu.
  Takže *„Karol je doma“*
  je skutočne časťou významu pôvodného výroku.

# Skutočné súčasti významu a konverzačné implikatúry

Časť významu tvrdenia, ktorú **môžeme poprieť** dodatkami bez sporu s pôvodným tvrdením, sa nazýva ***konverzačná implikatúra*** (H. P. Grice). **Nie je skutočnou časťou významu** pôvodného tvrdenia.

- Prílohou sú zemiaky alebo šalát.
  *Ale môžete si (pol na pol alebo za príplatok) dať aj oboje.*

  Dodatok popiera exkluzívnosť, ale nie je v spore s tvrdením.
  Takže exkluzívnosť nie je súčasťou významu základného tvrdenia, je to iba konverzačná implikatúra.

- Prejdete, ak všetky úlohy vyriešite na 100 %.
  *Ale nemusíte mať všetko na 100 %, aby ste prešli.*

  Dodatok popiera implikáciu „*Prejdete*, iba ak *všetky úlohy vyriešite na 100 %,*“ ale nie je v spore s pôvodným tvrdením.
  Táto implikácia teda nie je skutočne časťou významu základného tvrdenia, je to len konverzačná implikatúra.