Korektnosť a úplnosť výrokovologických tabiel

6. prednáška

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Ján Kľuka, Ján Mazák

Letný semester 2022/2023

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Obsah 6. prednášky

- Dôkazy a výrokovologické tablá
  - Výrokovologické tablá — opakovanie
  - Korektnosť tabiel
  - Testovanie nesplniteľnosti, splniteľnosti a falzifikovateľnosti
  - Úplnosť
  - Nové korektné pravidlá

Rekapitulácia a plán

Minulý týždeň:

- Sformalizovali sme dôkazy sporom pomocou tabiel.
- Vyslovili, ale nedokázali tvrdenie o **korektnosti tabiel**:
  uzavreté tablo dokazuje výrokovologickú **nesplniteľnosť**
- a dôsledky pre dokazovanie vyplývania a tautológií.

Dnes:

- **Dokážeme** korektnosť tabiel.
- Preskúmame, čo vedia tablá povedať o **splniteľnosti**.
- **Dokážeme** úplnosť tabiel.

Dôkazy a výrokovologické tablá

Dôkazy a výrokovologické tablá

Výrokovologické tablá – opakovanie

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre S^+***) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

***Analytické tablo pre množinu označených formúl** S^+* (skrátene ***tablo pre** S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - $\boldsymbol{\beta}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

  α: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.

  β: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

  S^+: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Definícia 5.1 (Tablo pre množinu označených formúl [Smullyan, 1979])

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre*** S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

  α: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.

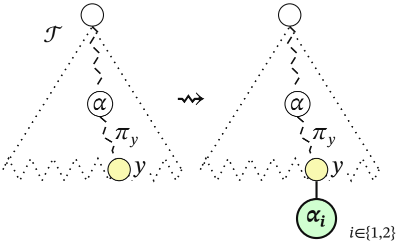
  β: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

  S^+: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

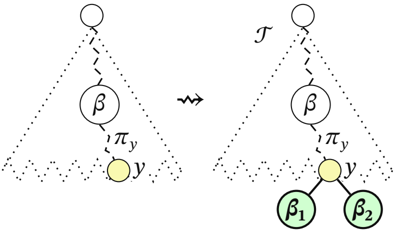
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo **Možné priame rozšírenie** **Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

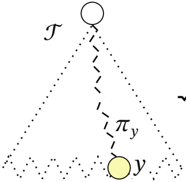
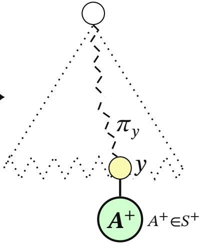


$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Tablá a tablové pravidlá (pokračovanie)

Pôvodné tablo	Možné priame rozšírenie	Pravidlá a označené formuly v nich	
		$\dfrac{}{A^+}$	$A^+ \in S^+$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 5.2

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa ***vyskytuje na vetve*** π v $\mathcal{T}$
vtt X^+ sa nachádza v niektorom vrchole na π.
Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \mathrm{formulas}(\pi)$.

Tablo $\sim$ dôkaz sporom. Vetvenie $\sim$ rozbor možných prípadov.

$\implies$ Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 5.3

Vetva π tabla $\mathcal{T}$ je ***uzavretá*** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}\, X$ a $\mathbf{T}\, X$ pre nejakú formulu X.
Inak je π ***otvorená***.

Tablo $\mathcal{T}$ ***je uzavreté*** vtt *každá* jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je ***otvorené*** vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

Príklad — vetvy a uzavretosť

Príklad 5.4 (Vetvy a uzavretosť)

Určme vetvy v table a zistime, či sú uzavreté a či je uzavreté tablo:

1. $\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathtt{A}) \rightarrow (\mathrm{p}(\mathtt{B}) \land \mathrm{p}(\mathtt{C})))$ S^{+}
2. $\mathbf{T}((\mathrm{p}(\mathtt{B}) \lor \mathrm{p}(\mathtt{D})) \rightarrow \mathrm{p}(\mathtt{E}))$ S^{+}
3. $\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathtt{F}) \rightarrow \neg\mathrm{p}(\mathtt{E}))$ S^{+}
4. $\mathbf{F}(\mathrm{p}(\mathtt{A}) \rightarrow \neg\mathrm{p}(\mathtt{F}))$ S^{+}
5. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathtt{A})$ $\alpha 4$
6. $\mathbf{F}\,\neg\mathrm{p}(\mathtt{F})$ $\alpha 4$
7. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathtt{F})$ $\alpha 6$

- 8. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathtt{F})$ $\beta 3$
  $*7, 8$
- 9. $\mathbf{T}\,\neg\mathrm{p}(\mathtt{E})$ $\beta 3$
  10. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathtt{E})$ $\alpha 9$
  - 11. $\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathtt{A})$ $\beta 1$
    $*5, 11$
  - 12. $\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathtt{B}) \land \mathrm{p}(\mathtt{C}))$ $\beta 1$
    13. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathtt{B})$ $\alpha 12$
    - 14. $\mathbf{F}(\mathrm{p}(\mathtt{B}) \lor \mathrm{p}(\mathtt{D}))$ $\beta 2$
    - 15. $\mathbf{T}\,\mathrm{p}(\mathtt{E})$ $\beta 2$
      $*10,15$

Dôkazy a výrokovologické tablá

Korektnosť tabiel

Korektnosť tablového kalkulu

Veta 5.16 (Korektnosť tablového kalkulu [Smullyan, 1979])

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 5.17

Nech S je výrokovologická teória a X je výrokovologická formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}\,A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$ (skrát. $S \vdash_{\mathrm{p}} X$), tak z S výrokovologicky vyplýva X ($S \vDash_{\mathrm{p}} X$).

Dôsledok 5.18

Nech X je výrokovologická formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ (skrátene $\vdash_{\mathrm{p}} X$), tak X je tautológia ($\vDash_{\mathrm{p}} X$).

Korektnosť — idea dôkazu

Aby sme dokázali korektnosť tabiel, dokážeme postupne dve lemy:

K1: Ak máme tablo pre splniteľnú množinu S^+
s aspoň jednou splniteľnou vetvou,
tak každé jeho **priame rozšírenie** má tiež splniteľnú vetvu.

K2: Každé tablo pre splniteľnú množinu S^+
má aspoň jednu splniteľnú vetvu.

Z toho ľahko sporom dokážeme, že množina, pre ktorú sme našli uzavreté tablo je nesplniteľná.

Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Všimnime si:

Vetva sa správa ako konjunkcia svojich označených formúl — všetky musia byť naraz pravdivé.

Tablo sa správa ako disjunkcia vetiev — niektorá musí byť pravdivá.

Definícia 5.19

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+, nech π je vetva tabla $\mathcal{T}$ a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Potom:

- ***vetva π je pravdivá vo v*** ($v \models_p \pi$) vtt vo v sú pravdivé **všetky** označené formuly vyskytujúce sa na vetve π.
- ***tablo $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v*** ($v \models_p \mathcal{T}$) vtt **niektorá** vetva v table $\mathcal{T}$ je pravdivá.

Korektnosť — pravdivosť priameho rozšírenia tabla

Pomocou predchádzajúcej definície sformulujeme lemu K1 takto:

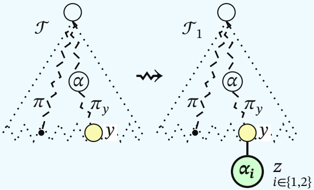
Lema 5.20 (K1)

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je výrokovologické ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.
Ak S^+ a $\mathcal{T}$ sú pravdivé vo v,
tak aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v.

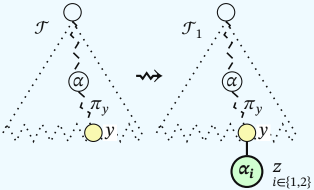
Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models_p S^+$ a nech $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v. Potom je pravdivá niektorá vetva v $\mathcal{T}$. Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom α, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.

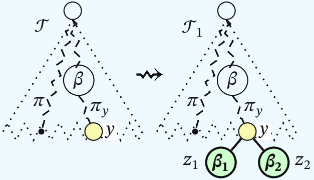


Ak $\pi = \pi_y$, tak α je pravdivá vo v, pretože α je na π. Potom aj α_1 a α_2 sú pravdivé vo v (pozorovanie 5.8). Vetva π_z v table $\mathcal{T}_1$ rozširuje vetvu π pravdivú vo v o vrchol z obsahujúci ozn. formulu α_1 alebo α_2 pravdivú vo v. Preto π_z je pravdivá vo v, a teda aj tablo $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.

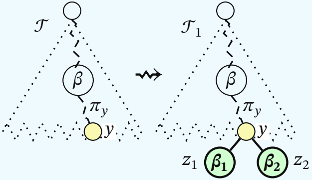
Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models_p S^+$ a nech $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v. Potom je pravdivá niektorá vetva v $\mathcal{T}$. Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom β, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.



Ak $\pi = \pi_y$, tak $v \models_p \beta$, pretože β je na π. Potom $v \models_p \beta_1$ alebo $v \models_p \beta_2$ (poz. 5.11).

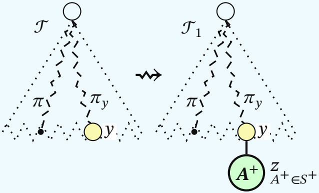
Ak $v \models_p \beta_1$,
tak $v \models_p \pi_{z_1}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$.

Ak $v \models_p \beta_2$,
tak $v \models_p \pi_{z_2}$, a teda $v \models_p \mathcal{T}_1$.

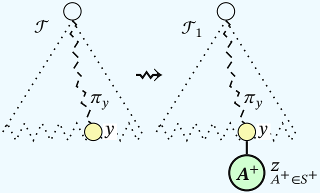
Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models_p S^+$ a nech $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v. Potom je pravdivá niektorá vetva v $\mathcal{T}$. Zoberme jednu takú vetvu a označme ju π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom S^+, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje formulu $A^+ \in S^+$.



Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π, a teda aj $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v.



Ak $\pi = \pi_y$, tak π_z v table $\mathcal{T}_1$ je pravdivá vo v, pretože je rozšírením vetvy π pravdivej vo v o vrchol z obsahujúci formulu A^+ pravdivú vo v (pretože $v \models_p S^+$ a $A^+ \in S^+$). Preto tablo $\mathcal{T}_1$ je pravdivé vo v. $\square$

Korektnosť — pravdivosť množiny a tabla pre ňu

Lema 5.21 (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$.
Ak S^+ je pravdivá vo v, tak aj $\mathcal{T}$ je pravdivé vo v.

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models_p S^+$. Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ dokážeme, že vo v je pravdivé každé tablo $\mathcal{T}$ pre S^+.

Ak má $\mathcal{T}$ jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $A^+ \in S^+$, ktorá je pravdivá vo v. Preto je pravdivá jediná vetva v $\mathcal{T}$, teda aj $\mathcal{T}$.

Ak $\mathcal{T}$ má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla $\mathcal{T}_0$, ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako $\mathcal{T}$.
Podľa indukčného predpokladu je $\mathcal{T}_0$ pravdivé vo v.
Podľa lemy K1 je potom vo v pravdivé aj $\mathcal{T}$. □

Dôkaz vety o korektnosti 5.16.

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+.

Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, v ktorom je S^+ pravdivá. Označme ho v.

Potom podľa lemy K2 je vo v pravdivé tablo $\mathcal{T}$, teda vo v je pravdivá niektorá vetva π v $\mathcal{T}$.

Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, aj vetva π je uzavretá. Na π sa teda nachádzajú označené formuly $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ pre nejakú formulu X.

Pretože π je pravdivá vo v, musia byť vo v pravdivé všetky formuly na nej. Ale $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X$ vtt $v \models_{\mathrm{p}} X$ a $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X$ vtt $v \not\models_{\mathrm{p}} X$.

Teda $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ nemôžu byť obe pravdivé, čo je spor. $\square$

Dôkazy a výrokovologické tablá

Testovanie nesplniteľnosti, splniteľnosti a falzifikovateľnosti

Úplná vetva a tablo

Príklad 5.22

Zistime tablom, či

$$\{((\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{spravny}(\mathtt{p})) \land (\mathtt{citatelny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{rychly}(\mathtt{p})))\}$$
$$\vDash_{\mathrm{p}} (\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \land (\mathtt{spravny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{citatelny}(\mathtt{p}))).$$

Vybudujeme tablo pre množinu označených formúl:

$$S^{+} = \{\mathbf{T}((\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{spravny}(\mathtt{p})) \land (\mathtt{citatelny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{rychly}(\mathtt{p}))),$$
$$\mathbf{F}(\mathtt{rychly}(\mathtt{p}) \land (\mathtt{spravny}(\mathtt{p}) \lor \mathtt{citatelny}(\mathtt{p})))\}$$

Podarí sa nám ho uzavrieť?

Úplná vetva a tablo

Nech v príklade tablové pravidlá používame akokoľvek,

- **nenájdeme uzavreté** tablo, ale
- ak pravidlá nepoužívame opakovane na rovnakú formulu v rovnakej vetve, po čase **vybudujeme úplné** a **otvorené** tablo.

Definícia 5.23 (Úplná vetva a úplné tablo)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+.

Vetva π v table $\mathcal{T}$ ***je úplná*** vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú označenú formulu α, ktorá sa vyskytuje na π, sa **obidve** označené formuly α_1 a α_2 vyskytujú na π;
- pre každú označenú formulu β, ktorá sa vyskytuje na π, sa **aspoň jedna** z označených formúl β_1, β_2 vyskytuje na π;
- **každá** $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π.

Tablo $\mathcal{T}$ ***je úplné*** vtt **každá** jeho vetva je buď **úplná alebo uzavretá**.

Otvorené tablo a splniteľnosť

Z **otvoreného** a **úplného** tabla pre S^+ môžeme vytvoriť ohodnotenie v:

1. nájdeme otvorenú vetvu π,
2. pre každý atóm A
   - ak sa na π nachádza $\mathbf{T}\,A$, definujeme $v(A) = t$;
   - ak sa na π nachádza $\mathbf{F}\,A$, definujeme $v(A) = f$;
   - inak definujeme $v(A)$ ľubovoľne.

V tomto v je pravdivá π, a preto je v ňom **pravdivá aj S^+** (všetky formuly z S^+ sa vyskytujú na π, lebo π je úplná).

Otázka

- Dá sa vždy nájsť úplné tablo pre S^+?
- Naozaj sa z úplného otvoreného tabla dá vytvoriť model S^+?

Existencia úplného tabla

Lema 5.24 (o existencii úplného tabla)

Nech S^+ je konečná množina označených formúl.

Potom existuje úplné tablo pre S^+.

Dôkaz.

Vybudujme tablo $\mathcal{T}_0$ pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním spravidla S^+ postupne doplníme ostatné.

Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla $\mathcal{T}_i$, ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná.
Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α, ale nenachádza sa **niektorá** z formúl α_1 a α_2.
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β, ale nenachádza sa **ani jedna** z formúl β_1 a β_2.

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme pravidlo α.
Ak platí druhá možnosť, aplikujeme pravidlo β.
Získame tablo $\mathcal{T}_{i+1}$, s ktorým proces opakujeme.

Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo $\mathcal{T}_n$, v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná.
Teda každá vetva v $\mathcal{T}_n$ je buď uzavretá alebo úplná, čiže $\mathcal{T}_n$ je úplné. $\square$

Dôkazy a výrokovologické tablá

Úplnosť

Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia 5.25

Množina označených formúl S^+ sa nazýva *nadol nasýtená* vtt platí:

H$_0$: v S^+ sa nevyskytujú naraz $\mathbf{T}\,A$ a $\mathbf{F}\,A$
pre žiaden predikátový atóm A;

H$_1$: ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;

H$_2$: ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 5.26

Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla $\mathcal{T}$.
Potom množina všetkých označených formúl na π je nadol nasýtená.

Lema 5.27 (Hintikkova)

Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.

Dôkaz Hintikkovej lemy.

Chceme dokázať, že existuje ohodnotenie v, v ktorom sú pravdivé všetky označené formuly z S^+. Definujme v pre každý predikátový atóm A takto:

$$v(A) = \begin{cases} t, & \text{ak } \mathbf{T}\, A \in S^+; \\ f, & \text{ak } \mathbf{F}\, A \in S^+; \\ t, & \text{ak ani } \mathbf{T}\, A \text{ ani } \mathbf{F}\, A \text{ nie sú v } S^+. \end{cases}$$

v je korektne definované vďaka H_0 (každému atómu priradí t alebo f, žiadnemu nepriradí obe).

Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+:

1° Všetky označené predikátové atómy (formuly stupňa 0) z S^+ sú pravdivé vo v.

2° Nech $X^+ \in S^+$ a nech platí IP: Vo v sú pravdivé všetky formuly z S^+ nižšieho stupňa ako X^+. X^+ je buď α alebo β:

Ak X^+ je α, potom obidve $\alpha_1, \alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa ako X^+, a teda podľa indukčného predpokladu sú pravdivé vo v, preto (podľa poz. 5.8) je v ňom pravdivá aj α.

Ak X^+ je β, potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek, má nižší stupeň ako X^+, teda podľa IP je pravdivá vo v, a preto (podľa poz. 5.11) je vo v pravdivá aj β. □

Úplnosť

Úplnosť kalkulu *neformálne*:
Ak je nejaké tvrdenie pravdivé, tak existuje jeho dôkaz v kalkule.

Veta 5.28 (o úplnosti tablového kalkulu [Smullyan, 1979])

Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl. Potom existuje uzavreté tablo pre S^+.

Dôsledok 5.29

Nech S je konečná teória a X je formula. Ak $S \vDash_{\mathrm{p}} X$, tak $S \vdash_{\mathrm{p}} X$.

Dôsledok 5.30

Nech X je formula. Ak $\vDash_{\mathrm{p}} X$, tak $\vdash_{\mathrm{p}} X$.

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Úplnosť — dôkaz

Dôkaz vety o úplnosti.

Zoberme ľubovoľnú konečnú nesplniteľnú množinu označených formúl S^+.

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo $\mathcal{T}$, teda také, že každá vetva je buď *uzavretá* alebo *úplná*.

Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol nasýtená. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+, bola by aj S^+ splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+.

Preto musia byť všetky vetvy tabla $\mathcal{T}$ uzavreté. $\square$

Dôkazy a výrokovologické tablá

Nové korektné pravidlá

Problémy so základnými pravidlami

Základné tablové pravidlá sú jednoduché, ľahko overiteľné a analytické — z (ne)pravdivosti zloženej formuly odvodzujú (ne)pravdivosť jej priamych podformúl.

Nie sú ale úplne pohodlné ani prirodzené, hlavne β.

Príklad 5.31

Dokážme, že pre všetky formuly A, B, C, X, Y, Z:

$$\{(A \to C), (B \to C), (C \to X), (C \to Y), ((X \land Y) \to Z)\} \vdash_{\mathrm{p}} ((A \lor B) \to Z)$$

Všimnime si:

- časté použitia pravidla β na implikáciu, kde sa jedna vetva ihneď uzavrie;
- opakovanie jedného podstromu dôkazu.

Riešenie príkladu 5.31

Tablo pre

$$S^+ = \{\, \mathbf{T}(A \to C), \mathbf{T}(B \to C), \mathbf{T}(C \to X), \mathbf{T}(C \to Y), \mathbf{T}((X \land Y) \to Z),$$
$$\mathbf{F}((A \lor B) \to Z)\}$$

1. $\mathbf{T}\,(A \to C)$	S^+
2. $\mathbf{T}\,(B \to C)$	S^+
3. $\mathbf{T}\,(C \to X)$	S^+
4. $\mathbf{T}\,(C \to Y)$	S^+
5. $\mathbf{T}\,((X \land Y) \to Z)$	S^+
6. $\mathbf{F}\,((A \lor B) \to Z)$	S^+
7. $\mathbf{T}\,(A \lor B)$	$\alpha 6$
8. $\mathbf{F}\,Z$	$\alpha 6$

- 9. $\mathbf{F}\,(X \land Y)\ \beta 5$
  - 10. $\mathbf{T}\,A\ \beta 7$
    - 11. $\mathbf{F}\,A\ \beta 1$ — $*\ 10, 11$
    - 12. $\mathbf{T}\,C\ \beta 1$
      - 13. $\mathbf{F}\,C\ \beta 3$ — $*\ 12, 13$
      - 14. $\mathbf{T}\,X\ \beta 3$
        - 15. $\mathbf{F}\,C\ \beta 4$ — $*\ 12, 15$
        - 16. $\mathbf{T}\,Y\ \beta 4$
          - 17. $\mathbf{F}\,X\ \beta 9$ — $*\ 14, 17$
          - 18. $\mathbf{F}\,Y\ \beta 9$ — $*\ 16, 18$
  - 19. $\mathbf{T}\,B\ \beta 7$
    - 20. $\mathbf{F}\,B\ \beta 2$ — $*\ 19, 20$
    - 21. $\mathbf{T}\,C\ \beta 2$
      - 22. $\mathbf{F}\,C\ \beta 3$ — $*\ 21, 22$
      - 23. $\mathbf{T}\,X\ \beta 3$
        - 24. $\mathbf{F}\,C\ \beta 4$ — $*\ 21, 24$
        - 25. $\mathbf{T}\,Y\ \beta 4$
          - 26. $\mathbf{F}\,X\ \beta 9$ — $*\ 23, 26$
          - 27. $\mathbf{F}\,Y\ \beta 9$ — $*\ 25, 27$
- 28. $\mathbf{T}\,Z\ \beta 5$ — $*\ 8, 28$

Odstránenie problémov — nové pravidlá

Keby tablový kalkul obsahoval napríklad veľmi prirodzené pravidlá *modus ponens*, *modus tolens* a *rez*:

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \tag{MP}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \tag{MT}$$

$$\frac{}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{F}\,X} \tag{cut}$$

dôkaz v príklade by sa dal sprehľadniť a odstránila by sa duplicita.

Riešenie príkladu 5.31 s modus ponens a modus tolens

1.	$\mathbf{T}(A \to C)$	S^+
2.	$\mathbf{T}(B \to C)$	S^+
3.	$\mathbf{T}(C \to X)$	S^+
4.	$\mathbf{T}(C \to Y)$	S^+
5.	$\mathbf{T}((X \land Y) \to Z)$	S^+
6.	$\mathbf{F}((A \lor B) \to Z)$	S^+
7.	$\mathbf{T}(A \lor B)$	$\alpha 6$
8.	$\mathbf{F}\, Z$	$\alpha 6$
9.	$\mathbf{F}(X \land Y)$	MT $5, 8$

10.	$\mathbf{T}\, A$	$\beta 7$	16.	$\mathbf{T}\, B$	$\beta 7$
11.	$\mathbf{T}\, C$	MP $1, 10$	17.	$\mathbf{T}\, C$	MP $2, 16$
12.	$\mathbf{T}\, X$	MP $3, 11$	18.	$\mathbf{T}\, X$	MP $3, 17$
13.	$\mathbf{T}\, Y$	MP $4, 11$	19.	$\mathbf{T}\, Y$	MP $4, 17$

14. $\mathbf{F}\, X$ $\beta 9$	15. $\mathbf{F}\, Y$ $\beta 9$	20. $\mathbf{F}\, X$ $\beta 9$	21. $\mathbf{F}\, Y$ $\beta 9$
$* \; 12, 14$	$* \; 13, 15$	$* \; 18, 20$	$* \; 19, 21$

Riešenie príkladu 5.31 s rezom, modus ponens a modus tolens

$$
\begin{array}{lll}
1. & \mathbf{T}(A \to C) & S^+ \\
2. & \mathbf{T}(B \to C) & S^+ \\
3. & \mathbf{T}(C \to X) & S^+ \\
4. & \mathbf{T}(C \to Y) & S^+ \\
5. & \mathbf{T}((X \land Y) \to Z) & S^+ \\
6. & \mathbf{F}((A \lor B) \to Z) & S^+ \\
7. & \mathbf{T}(A \lor B) & \alpha 6 \\
8. & \mathbf{F}\,Z & \alpha 6 \\
9. & \mathbf{F}(X \land Y) & \text{MT } 5, 8
\end{array}
$$

<table>
<tr>
<td colspan="2">10. $\mathbf{T}\,C$ cut
11. $\mathbf{T}\,X$ MP $3, 10$
12. $\mathbf{T}\,Y$ MP $4, 10$</td>
<td colspan="2">15. $\mathbf{F}\,C$ cut</td>
</tr>
<tr>
<td>13. $\mathbf{F}\,X$ $\beta 9$
$* \; 11, 13$</td>
<td>14. $\mathbf{F}\,Y$ $\beta 9$
$* \; 12, 14$</td>
<td>16. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 7$
17. $\mathbf{T}\,C$ MP $1, 16$
$* \; 15, 17$</td>
<td>18. $\mathbf{T}\,B$ $\beta 7$
19. $\mathbf{F}\,B$ MT $2, 15$
$* \; 18, 19$</td>
</tr>
</table>

Ingrediencie korektnosti a úplnosti tabiel

Všimnite si:

Na dokázanie **korektnosti** tablového kalkulu stačilo, aby mali pravidlá vlastnosť:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2} \qquad \frac{}{A^+}\ A^+ \in S^+$$

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie, v ktorom je pravdivá S^+.
Ak je vo v pravdivá premisa, tak je vo v pravdivý aspoň jeden záver.

- Vďaka tejto vlastnosti zo splniteľnej množiny S^+ skonštruujeme iba splniteľné tablá.
- Netreba opačnú implikáciu (ak je vo v pravdivý aspoň jeden záver, tak je vo v pravdivá premisa).

Na dôkaz **úplnosti** stačili pravidlá (S^+), α, β, pretože stačia na vybudovanie úplného tabla.

Nové pravidlo

Čo sa stane, ak pridáme nové pravidlo, napríklad modus ponens:

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \quad ? \qquad \text{(MP)}$$

Upravíme definíciu priameho rozšírenia:

Úprava definície tabla

… Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

α: $\cdots$

⋮

MP: Ak sa na vetve π_y nachádzajú *obe* formuly $\mathbf{T}(X \to Y)$ a $\mathbf{T}\,X$, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci $\mathbf{T}\,Y$.

Nové pravidlo vs. korektnosť a úplnosť

Korektnosť tabiel s MP:

Pri dôkaze lemy K1

> *Nech S^+ je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie pre $\mathcal{L}$. Ak sú S^+ a $\mathcal{T}$ pravdivé vo v, tak je vo v pravdivé aj každé priame rozšírenie tabla $\mathcal{T}$.*

využijeme

Tvrdenie 5.32 (Korektnosť pravidla MP)

Nech X a Y sú ľubovoľné formuly a v je ľubovoľné ohodnotenie. Ak sú vo v pravdivé $\mathbf{T}(X \to Y)$ a $\mathbf{T}\,X$, tak je vo v pravdivá $\mathbf{T}\,Y$.

Dôkaz.

Keďže $v \models_p \mathbf{T}(X \to Y)$, tak $v \models_p (X \to Y)$, teda $v \not\models_p X$ alebo $v \models_p Y$.
Pretože ale $v \models_p \mathbf{T}\,X$, tak $v \models_p X$. Takže $v \models_p Y$, a teda $v \models_p \mathbf{T}\,Y$. $\square$

Dôkaz lemy K2 a samotnej vety o korektnosti — bez zmeny.

Úplnosť — bez zmeny, úplné tablo vybudujú základné pravidlá.

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — problém

Zadefinovať vo všeobecnosti, čo je pravidlo a kedy je korektné, nie je také jednoduché.

Potrebujeme zachytiť, že pravidlo:

- má premisy, ktoré nejaký tvar a zdieľajú nejaké podformuly, napr. moduls tolens (MT) má premisy $\mathbf{T}(X \to Y)$ a $\mathbf{F}\,Y$;
- odvodzuje z nich závery, ktoré tiež zdieľajú podformuly s premisami, napr. $\mathbf{F}\,X$ (alebo medzi sebou v prípade rezu).

pre všetky možné zdieľané podformuly, v našom príklade X a Y.

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — vzor

Pravidlo sa dá predstaviť nasledovne:

Pravidlo má vzor — dvojicu tvorenú vzormi premís a záverov, kde spoločné podformuly predstavujú konkrétne atómy, napr. vzor pravidla MT:

$$\frac{\mathbf{T}(\mathrm{p}(\mathrm{c}) \to \mathrm{q}(\mathrm{c})) \quad \mathbf{F}\,\mathrm{q}(\mathrm{c})}{\mathbf{F}\,\mathrm{p}(\mathrm{c})}$$

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — inštancia

Každý konkrétny prípad — inštancia pravidla vznikne substitúciou ľubovoľných formúl za atómy vo vzore:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}(\mathtt{p}(\mathtt{c}) \to \mathtt{q}(\mathtt{c}))_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})),\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})]} \\ \mathbf{F}\,\mathtt{q}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})),\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})]}\end{array}}{\mathbf{F}\,\mathtt{p}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})),\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})]}}$$

$$= \frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}((\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a})) \to \mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})) \\ \mathbf{F}\,\mathtt{kupi}(\mathtt{B},\mathtt{a})\end{array}}{\mathbf{F}(\mathtt{sedan}(\mathtt{a}) \land \mathtt{biely}(\mathtt{a}))}$$

Tablové pravidlá vo všeobecnosti — pravidlo

Samotné pravidlo je množina všetkých inštancií vzoru:

$$\mathsf{MT} = \left\{ \left. \frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}(\mathtt{p}(\mathtt{c}) \to \mathtt{q}(\mathtt{c}))_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|X,\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|Y]} \\ \mathbf{F}\,\mathtt{q}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|X,\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|Y]}\end{array}}{\mathbf{F}\,\mathtt{p}(\mathtt{c})_{[\mathtt{p}(\mathtt{c})|X,\ \mathtt{q}(\mathtt{c})|Y]}} \;\right|\; X, Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \right\}$$

Samozrejme, *konkrétne* pravidlo vieme zapísať aj bez substitúcie:

$$\mathsf{MT} = \left\{ \left. \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \;\right|\; X, Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \right\}$$

Definícia 5.33 (Vzor tablového pravidla)

Nech $n \geq 0$ a $k > 0$ sú prirodzené čísla, nech $P_1^+, \dots, P_n^+$, $C_1^+, \dots, C_k^+$ sú označené formuly.

Dvojicu tvorenú n-ticou $(P_1^+, \dots, P_n^+)$ a k-ticou $(C_1^+, \dots, C_k^+)$ a zapisovanú

$$\begin{array}{c} P_1^+ \quad \cdots \quad P_n^+ \\ \hline C_1^+ \;\big|\; \cdots \;\big|\; C_k^+ \end{array}$$

nazývame *vzorom tablového pravidla*.

Označené formuly $P_1^+, \dots, P_n^+$ nazývame *vzory premís*, označené formuly $C_1^+, \dots, C_k^+$ nazývame *vzory záverov*.

Definícia 5.34 (Tablové pravidlo a jeho inštancia)

Nech

$$\begin{array}{c|c|c} P_1^+ & \cdots & P_n^+ \\ \hline C_1^+ & \cdots & C_k^+ \end{array}$$

je vzor tablového pravidla a $a_1, \ldots, a_m$ sú všetky atómy, ktoré sa vyskytujú v označených formulách $P_1^+, \ldots, P_n^+, C_1^+, \ldots, C_k^+$.

Tablové pravidlo R je množina

$$R = \left\{ \begin{array}{c|c|c} P_1^+{}_{[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m]} & \cdots & P_n^+{}_{[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m]} \\ \hline C_1^+{}_{[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m]} & \cdots & C_k^+{}_{[a_1|X_1,\ldots,a_m|X_m]} \end{array} \;\middle|\; X_1, \ldots, X_m \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \right\},$$

Každý prvok množiny R nazývame *inštanciou* pravidla R.

Nové pravidlá vo všeobecnosti

Keď už vieme, čo je pravidlo, môžeme povedať, kedy je korektné:

Definícia 5.35 (Tablové pravidlo a jeho korektnosť)

Tablové pravidlo R je ***korektné*** vtt
pre každú inštanciu pravidla R

$$\frac{P_1^+ \quad \cdots \quad P_n^+}{C_1^+ \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; C_k^+}$$

a pre každé ohodnotenie v platí, že
ak sú vo v pravdivé **všetky** premisy $P_1^+, \ldots, P_n^+$,
tak je vo v pravdivý **niektorý** záver $C_1^+, \ldots, C_k^+$.

Nové pravidlá vo všeobecnosti

Úprava definície tabla

…

- …
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

  $\vdots$

  ***R*:** Ak sa pre nejakú inštanciu pravidla R

$$\frac{P_1^+ \quad \dots \quad P_n^+}{C_1^+ \;\big|\; \dots \;\big|\; C_k^+}$$

  na vetve π_y nachádzajú *všetky* premisy $P_1^+, \dots, P_n^+$, tak k uzlu y pripojíme k nových vrcholov obsahujúcich postupne závery $C_1^+, \dots, C_k^+$.

Príklad: Korektnosť rezu

To, že rez

$$\begin{array}{c|c} \hline \mathbf{T}\,X & \mathbf{F}\,X \end{array}$$

je korektné pravidlo, dokážeme veľmi ľahko:

Tvrdenie 5.36 (Korektnosť pravidla rezu)

Nech X je ľubovoľná formula a v je ľubovoľné ohodnotenie.
Potom je vo v pravdivý niektorý zo záverov pravidla rezu
$\mathbf{T}\,X$ *alebo* $\mathbf{F}\,X$.

Dôkaz.

Formula X je vo v buď pravdivá alebo nepravdivá.
V prvom prípade $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{T}\,X$. V druhom prípade $v \models_{\mathrm{p}} \mathbf{F}\,X$.
Teda v oboch prípadoch platí, že vo v je pravdivý niektorý zo záverov $\mathbf{T}\,X$ alebo $\mathbf{F}\,X$ pravidla rezu. $\square$

Literatúra

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.