

1. Формулировка задачи

Как следует из названия, в данной работе нам нужно рассмотреть некоторый объект, называемый семимерной алгеброй Ли, и найти его интегральную поверхность.

Итак, по заданию мы имеем некоторую алгебру Ли, определённую в четырёхмерном комплексном пространстве и составленную путём сложения двух алгебр Ли: пятимерной и двумерной.

$$\mathfrak{g}_7 = \mathfrak{g}_5 + \mathfrak{g}_2 \quad (1)$$

Двумерная алгебра Ли имеет только один возможный вид, что принимается нами как аксиома: это векторное пространство из двух векторных полей, e_1 и e_2 , коммутатор между которыми равен одному из этих полей, например, e_1 .

Структура пятимерной алгебры Ли несколько сложнее. В нашем случае, вариантом задания определяется закономерность коммутаторов в пятимерной алгебре. Собственно, строка решаемого нами варианта выглядит следующим образом.

$[e_1, e_2]$	$[e_1, e_3]$	$[e_1, e_4]$	$[e_1, e_5]$	$[e_2, e_3]$	$[e_2, e_4]$	$[e_2, e_5]$	$[e_3, e_4]$	$[e_3, e_5]$	$[e_4, e_5]$
0	0	0	$2e_1$	e_1	0	$e_2 + e_3$	0	e_3	βe_4

При сложении этих двух алгебр вводится сквозная нумерация. Так векторные поля двумерной алгебры, ранее обозначенные как e_1 и e_2 в исследуемой семимерной алгебре Ли станут номеровать как e_6 и e_7 .

В задании также предполагается, что коммутаторы между парой векторов, один из которых принадлежит пятимерной подалгебре, а другой - двумерной, будут равны нулю. Это можно понять, исходя из соображений того, что общее (семимерное) векторное пространство распадается на два самостоятельных объекта, каждый из которых может быть рассмотрен в качестве алгебры Ли. В таком случае, векторные поля из этих двух самостоятельных объектов просто не могут иметь каких-то взаимосвязей и, как следствие, не коммутируют.

Мы рассматриваем векторные поля в четырёхмерном комплексном пространстве, и каждое из них будет описываться такой формулой:

$$e_i = a_i \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} + b_i \cdot \frac{\partial}{\partial z_2} + c_i \cdot \frac{\partial}{\partial z_3} + d_i \cdot \frac{\partial}{\partial z_4} \quad (2)$$

Данную запись мы можем сократить, записав только компоненты векторного поля: $e_i = (a_i(z), b_i(z), c_i(z), d_i(z))$. Здесь z - четырёхмерный комплексный вектор, описываемый набором комплексных переменных (z_1, z_2, z_3, z_4) .

2. Проверка свойств алгебры Ли

Как известно, алгебра Ли - это линейное пространство, в котором, дополнительно к операциям сложения векторов и умножения вектора на скаляр, свойственным линейному пространству, определена операция коммутации. Для этой операции будут характерны три свойства: билинейность, антикоммутативность, а также свойство удовлетворения тождеству Якоби. Перед началом работы с исследуемым объектом, убедимся, что заданная для него операция коммутации соответствует необходимым свойствам, а сам объект действительно является алгеброй Ли. Примем на веру, что сумма двух алгебр Ли даёт в результате тоже алгебру Ли. Двумерная часть нашей семимерной алгебры является алгеброй Ли, что утверждается нам с самого начала. Что же касается пятимерного векторного пространства, для него мы проверим данные свойства.

2.1. Билинейность и антикоммутативность

Свойство билинейности заключается в том, что для любых $e_i, e_j \in \mathfrak{g}_5$ выполняется условие $[e_i, e_j] \in \mathfrak{g}_5$. Иными словами, результат коммутатора любых двух векторов из \mathfrak{g}_5 должен иметь выражение в виде суперпозиции базисных векторных полей \mathfrak{g}_5 . Посмотрев на формулировку задачи, несложно заметить, что любой коммутатор в исследуемом пространстве действительно удовлетворяет поставленному условию.

Что же касается антикоммутативности, это свойство выражается в том, что для любых $e_i, e_j \in \mathfrak{g}_5$ выполняется условие $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$. В варианте задания все закономерности задаются для коммутаторов лишь в одном порядке, поэтому надо полагать, что свойство антикоммутативности принимается как данность.

2.2. Тождество Якоби

Свойство удовлетворения тождеству Якоби несколько сложнее и не столь очевидно, поэтому его мы рассмотрим отдельно. Оно выражается следующей формулой:

$$[[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] = 0,$$

- где $e_i, e_j, e_k \in \mathfrak{g}_5$. Вообще говоря, предполагается, что каждый вариант выбора тройки i, j, k имеет какие-то свои особенности и должен быть рассмотрен, включая любые варианты выбора, когда в тройку входят одни и те же числа. Однако несложно заметить, что для троек j, k, i , k, i, j результат этого выражения не изменится. Более того, для перестановок, использующих обратный порядок $(k, j, i, j, i, k, i, k, j)$, результат будет отличаться только знаком, что не критично для

нас, так как мы доказываем равенство данного выражения нулю. Таким образом, мы имеем право рассматривать только лишь одну единственную перестановку для каждых трёх векторных полей, что значительно облегчает нам жизнь.

С таким серьёзным упрощением, мы можем привести результаты проверки тождества для каждой комбинации.

$$\begin{aligned}
1, 2, 3 : [0, e_3] + [e_1, e_1] + [0, e_2] &= 0 \\
1, 2, 4 : [0, e_4] + [0, e_1] + [0, e_2] &= 0 \\
1, 2, 5 : [0, e_5] + [e_2 + e_3, e_1] + [-2e_1, e_2] &= 0 \\
1, 3, 4 : [0, e_4] + [0, e_1] + [0, e_3] &= 0 \\
1, 3, 5 : [0, e_5] + [e_3, e_1] + [-2e_1, e_3] &= 0 \\
2, 3, 4 : [e_1, e_4] + [0, e_2] + [0, e_3] &= 0 \\
2, 3, 5 : [e_1, e_5] + [e_3, e_2] + [-e_2 - e_3, e_3] &= 0 \\
2, 4, 5 : [0, e_5] + [\beta e_4, e_2] + [-e_2 - e_3, e_4] &= 0 \\
3, 4, 5 : [0, e_5] + [\beta e_4, e_3] + [-e_3, e_4] &= 0
\end{aligned}$$

После этих записей, остаётся неочевидной только верность равенства для тройки 2, 3, 5, поэтому распишем это равенство ещё немного:

$$2, 3, 5 : \underbrace{[e_1, e_5]}_{2e_1} + \underbrace{[e_3, e_2]}_{-e_1} + \underbrace{[-e_2 - e_3, e_3]}_{-e_1 - 0} = 0$$

Таким образом, тождество Якоби можно считать доказанным для исследуемого векторного пространства, а значит то, что мы называем \mathfrak{g}_5 , действительно является алгеброй Ли. Это, в свою очередь, означает, что исследуемый нами объект \mathfrak{g}_7 также является алгеброй Ли, и теперь мы можем приступить к непосредственной работе с ним.

3. Поиск векторных полей в явном виде

Проинтегрировать алгебру Ли означает найти её интегральную гиперповерхность. Нам известно, что искомая поверхность будет удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$Re(e_k(\Phi)|_M \equiv 0)(k = 1, \dots, 7). \quad (3)$$

Для дальнейшего поиска решений, нам необходимо выразить векторные поля e_k в явном виде. Для этого воспользуемся таким знанием: "Если семимерная алгебра векторных полей в четырёхмерном комплексном пространстве имеет невырожденные орбиты и 4-мерную абелеву подалгебру \mathfrak{h} , то базис такой подалгебры можно считать имеющим один из видов:

$$\begin{array}{c|c|c} e_1 : (1, 0, 0, 0) & e_1 : (1, 0, 0, 0) & e_1 : (1, 0, 0, 0) \\ e_2 : (0, 1, 0, 0) & e_2 : (0, 1, 0, 0) & e_2 : (0, 1, 0, 0) \\ e_3 : (0, 0, 1, 0) & e_3 : (0, 0, 1, 0) & e_3 : (a_3(z_4), b_3(z_4), 0, 0) \\ e_4 : (0, 0, 0, 1) & e_4 : (a_4(z_4), b_4(z_4), c_4(z_4), 0) & e_4 : (0, 0, 1, 0). \end{array}$$

Собственно, данное утверждение и определяет сценарий нашего дальнейшего поведения: мы будем искать в нашей алгебре абелеву подалгебру, и, затем, пытаться "примерить" на неё различные варианты базисов. В случае, если ни один из них нам не подойдёт, мы сможем со всей уверенностью положить, что данная алгебра Ли не имеет невырожденных орбит, что будет означать для нас невозможность существования искомой интегральной поверхности.

3.1. Выбор абелевой подалгебры

Как следует из определения абелевой подалгебры, это такое подмножество векторных полей \mathfrak{h} в \mathfrak{g}_7 , что для любых $e_i, e_j \in \mathfrak{h}$ будет выполняться $[e_i, e_j] = 0$. В нашем случае будут иметь место только лишь четырёхмерные варианты такой абелевой подалгебры. Туда могут войти вектора e_1, e_4 , а также на выбор либо e_2 , либо e_3 , но не оба вместе, поскольку между собой они имеют ненулевой коммутатор. Также к ним можно добавить один из векторов e_6 и e_7 , но, из аналогичных соображений, не оба сразу. В конце цонцов мы остановились на абелевой подалгебре $\mathfrak{h} = \{e_1, e_3, e_4, e_6\}$. Такой её выбор не хуже любого другого, и вполне имеет право на существование.

3.2. Попытка выпрямления первым вариантом базиса

Итак, начнём с первого, самого простого варианта базиса. Он предполагает для нас присваивание векторам абелевой подалгебры определённого вида, указанного ранее. После этого присваивания, нам нужно будет посредством расчёта коммутаторов найти явный вид векторных полей e_2 , e_5 и e_7 , не вошедших в подалгебру, а заодно убедиться, не противоречит ли такой явный вид векторных полей заданной условием задачи операции коммутации.

Начнём с векторного поля e_2 . $[e_1, e_2]$, как следует из таблицы, равен нулю. Опуская некоторые несложные, но довольно громоздкие записи, можем сказать, что коммутатор такого вида, с векторным полем, компонентами которого являются три нуля и одна единица, покажет нам зависимость другого векторного поля в коммутаторе от комплексной переменной, одной из составляющих вектора, на месте которой стоит единица. Применив это знание, можем сказать, что компоненты векторного поля e_2 все не зависят от переменной z_1 . По аналогичным соображениям, не будут они зависеть и от z_3 , z_4 (из коммутаторов $[e_4, e_2]$ и $[e_6, e_2]$, из которых оба равны нулю). Что же касается коммутатора $[e_3, e_2] = -e_1$, он при полной записи даёт нам такое уравнение:

$$[e_3, e_2](f) = \frac{\partial a_2(z)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

Это означает, что $a_2(z)$ примет в данном случае явный вид, который, за опущением некоторых излишних констант, можно описать следующим выражением:

$$e_2 : (-z_2; B_2; C_2; D_2); \quad (4)$$

- где заглавными буквами обозначены константы. Аналогичным образом получим, что e_5 и e_7 в данном случае примут явный вид такого характера:

$$e_5 : (2 \cdot z_1; z_2; \beta \cdot z_3; D_5); \quad (5)$$

$$e_7 : (A_7; B_7; C_7; z_4); \quad (6)$$

Однако, чтобы удостовериться, что данное решение нам действительно подходит, мы должны проверить ещё и оставшиеся коммутаторы: $[e_2, e_5]$, $[e_2, e_7]$ и $[e_5, e_7]$. Если какой-то из них не будет давать в результате то, что было задано в начальной таблице, то такой явный вид векторных полей нас не устроит. Собственно, у нас и возникает противоречие, в коммутаторе $[e_2, e_5]$:

$$\begin{aligned} [e_2, e_5](f) &= -2z_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} + B_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_2} + C_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_3} - z_2 \cdot (-1) \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} = \\ &= -z_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} + (B_2 + 1) \cdot \frac{\partial f}{\partial z_2} + C_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_3} + D_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_4} = (e_2 + e_3)(f). \end{aligned} \quad (7)$$

Из этой записи следует противоречие $B_2 = B_2 + 1$. Таким образом, мы можем сказать, что найденный явный вид нам не подходит, а значит, имеет смысл отбросить такой вариант базиса и рассмотреть другие.

3.3. Попытка выпрямления вторым вариантом базиса

В данном варианте базиса первые три вектора $\in \mathfrak{h}$, остаются такими же, а четвёртый принимает вид $e_6 : (a_6(z_4), b_6(z_4), c_6(z_4), 0)$. Очевидно, что раз у нас не изменились виды векторных полей и результаты их коммутаторов, то расчёты для них покажут то же самое, а именно, что вид искомых векторов будет:

$$e_2 : (-z_2 + a_2(z_4); b_2(z_4); c_2(z_4); d_2(z_4)); \quad (8)$$

$$e_5 : (2 \cdot z_1 + a_5(z_4); z_2 + b_5(z_4); \beta \cdot z_3 + c_5(z_4); d_5(z_4)); \quad (9)$$

$$e_7 : (a_7(z_4); b_7(z_4); c_7(z_4); d_7(z_4)); \quad (10)$$

Далее следует заметить ещё одну вещь: в случае, если мы встречаем явный вид алгебры, в котором хотя бы для шести векторных полей отсутствует какая-либо зависимость от одной из компонент, то есть на одном из мест a , b , c или d стоит 0, тогда такой явный вид описывает алгебру с интегральной поверхностью, не зависящей от одной из координат, а это считается вырождением, и нас в качестве решения не устраивает.

Исходя из этого, мы можем сказать, что для нахождения подходящих нам решений требуется, чтобы из d_2 , d_5 и d_7 минимум два значения были бы не нулевыми. На этом основании удобно рассмотреть два подслучая: положив одно из этих значений равным нулю и, для другого подслучая, не равным нулю. Допустим, это будет d_2 . Тогда в первом подслучае d_5 и d_7 обязаны не раняться нулю. Тогда мы можем "частично выпрямить" одно из полей e_5 и e_7 относительно компоненты d . Пускай это будет поле e_7 , и примет оно в таком случае вид $e_7 : (0, 0, 0, 1)$. Коммутаторы с этим вектором становятся довольно-таки простыми. Из коммутаторов $[e_2, e_7]$ и $[e_5, e_7]$ будет следовать отсутствие зависимости компонент векторных полей e_2 и e_5 от комплексной переменной z_4 . Тогда они могут быть записаны как $e_2 : (-z_2; B_2; C_2; 0)$ и $e_5 : (2 \cdot z_1; z_2; \beta \cdot z_3; D_5)$. Рассчитав коммутатор между ними, получим:

$$\begin{aligned} [e_2, e_5](f) &= -2z_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} + B_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_2} + \beta \cdot C_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_3} + z_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} = \\ &= -z_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} + (B_2 + 1) \cdot \frac{\partial f}{\partial z_2} + C_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда снова следует противоречие $B_2 = B_2 + 1$, из которого мы делаем вывод, что данный подслучай не даёт нам удовлетворительных решений.

Рассмотрим другой подслучай. Если $d_2 \neq 0$, то мы можем применить к нему процедуру частичного выпрямления относительно компоненты d . Тогда векторное поле e_2 примет вид $(-z_2, 0, 0, 1)$. Рассчитаем коммутаторы $[e_2, e_7]$ и $[e_2, e_6]$. Это укажет нам, что e_6 и e_7 в данном случае обязаны будут иметь виды $(-B_6 \cdot z_4; B_6; C_6; 0)$ и $(-B_7 \cdot z_4; B_7; C_7; D_7)$ соответственно. Распишем также коммутатор $[e_6, e_7]$, для которого получается:

$$[e_6, e_7](f) = D_7 \cdot B_6 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} = -B_6 \cdot z_4 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1} + B_6 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_2} + C_6 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_3}. \quad (12)$$

Отсюда видно, что для выполнения такого равенства B_6 и C_6 пришлось бы положить равными нулю, что привело бы к вырождению векторного поля e_6 . Значит, данный подслучай также не даёт нам решений, а вместе с ним и весь вариант базиса нам не подходит. Рассмотрим оставшийся третий вариант.

3.4. Попытка выпрямления третьим вариантом базиса

В данном варианте базиса первые два вектора $\in \mathfrak{h}$, остаются неизменными, для третьего можно сказать, что $e_4 : (a_4(z_4), b_4(z_4), 0, 0)$, а четвёртый принимает бывший вид третьего, то есть $e_6 : (0, 0, 1, 0)$. Зависимости от z_1 и z_2 не изменятся. От переменной z_3 , представленной теперь в векторном поле e_6 , компоненты полей e_2 и e_5 зависеть не будут, а у e_7 определится зависимость в третьей компоненте.

В результате таких рассуждений для искомым векторов будет получен следующий вид:

$$e_2 : (-z_2 + a_2(z_4); b_2(z_4); c_2(z_4); d_2(z_4)); \quad (13)$$

$$e_5 : (2 \cdot z_1 + a_5(z_4); z_2 + b_5(z_4); c_5(z_4); d_5(z_4)); \quad (14)$$

$$e_7 : (a_7(z_4); b_7(z_4); z_3 + c_7(z_4); d_7(z_4)); \quad (15)$$

Аналогично с предыдущим вариантом, теперь мы можем рассмотреть два подслучая: $d_2 = 0$ и $d_2 \neq 0$. В первом подслучае можем частично выпрямить e_7 до $(0, 0, z_3, 1)$. По аналогичному сценарию, там получается противоречие $B_2 = B_2 + 1$, а следовательно такой подслучай не даёт удобоваримых решений.

Что же касается другого подслучая, тут мы частично выпрямляем e_2 до $(-z_2, 0, 0, 1)$. Здесь ситуация получается более интересная, и в конце концов мы даже имеем некоторый явный вид векторных полей исследуемой алгебры, который, вроде бы, не имеет противоречий. Выглядит он так:

$$\begin{cases} e_1 & = & (1; 0; 0; 0); \\ e_3 & = & (0; 1; 0; 0); \\ e_6 & = & (0; 0; 1; 0); \\ e_2 & = & (-z_2; 0; 0; 1); \\ e_7 & = & (0; 0; z_3; 0); \\ e_5 = (2 \cdot z_1 - \frac{z_4^2}{2} + A_5 \cdot z_4 + A'_5; z_2 + z_4 + B_5; 0; z_4 + D_5); \\ e_4 & = & (B_4 \cdot z_4 + A_4; B_4; 0; 0). \end{cases} \quad (16)$$

Теперь, имея явное выражение для каждого из векторных полей, можно наконец-то приступить к главной задаче - интегрированию исследуемой алгебры Ли.

4. Интегрирование алгебры Ли

Как уже говорилось ранее, известно, что искомая поверхность будет удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных, описываемой выражением (3). Зная, что производная комплексной функции может быть расписана как $\frac{df}{dz} = \frac{1}{2}(\frac{df}{dx} + i \cdot \frac{df}{dy})$, приступим к поиску системы дифференциальных уравнений.

Для первых векторных полей e_1 , e_3 и e_6 , получим выражения $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0$ соответственно. Это значит, что для $i = 1, 2, 3$ будет справедливо $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \neq 0$. Тогда мы можем сказать, что, например, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = -1$, а Φ можно выразить в неявном виде как $\Phi = -y_1 + F$. Исходя из этого, рассчитаем остальные выражения.

$$Re(e_2(\Phi)) = Re\left((-x_2 - i \cdot y_2) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right)}_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_4} + i \cdot \frac{\partial F}{\partial y_4}\right)\right) = -\frac{1}{2} \cdot y_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_4} = 0$$

То есть для e_2 получим $\left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right) = y_2$.

$$Re(e_7(\Phi)) = Re\left((x_3 + i \cdot y_3) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + i \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}\right)}_0\right) = -\frac{1}{2} \cdot y_3 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = 0$$

То есть для e_2 получим $\left(\frac{\partial F}{\partial y_3}\right) \cdot y_3 = 0$.

По сути, если y_3 является в данном случае некоторой вещественной переменной, полученное выражение означает, функция Φ от этой переменной не зависит. В сочетании с установленным выше фактом её независимости от x_3 , это значит,

что функция полностью не зависит от переменной z_3 , что говорит о вырождении искомой интегральной поверхности. Отсюда можно заключить, что исследуемая нами алгебра Ли не имеет невырожденной интегральной поверхности.

Таким образом, несмотря на то, что мы нашли непротиворечивый явный вид векторных полей исследуемого пространства, на проверку оказалось, что его интегральная поверхность является вырожденной. Заметим также, что другого непротиворечивого явного вида для данной алгебры не найдётся, поскольку мы уже рассмотрели все три предлагаемых варианта базиса.

За сим ответом на задачу интегрирования данной алгебры Ли будет: "Исследуемая алгебра Ли не имеет невырожденных интегральных поверхностей".