Типовой расчет по матиематике
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля
4 модуль

ФИО

Студент группы P3113

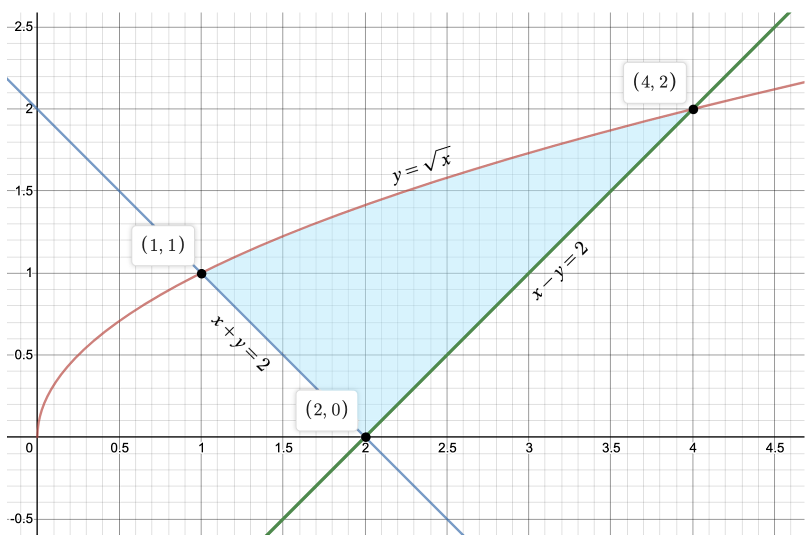
Вариант №

27 мая 2020 г.

I. Плоская область D ограничена заданными линиями.

$y = \sqrt{x}, x + y = 2, x - y = 2$

1) Сделайте схематический рисунок области D.



2) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.

$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{x}} dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{x}} dy = \int_1^2(\sqrt{x} - (2-x))dx +$

$+ \int_2^4(\sqrt{x} - (x-2))dx = \int_1^2 xdx + \int_1^2 \sqrt{x}dx - 2\int_1^2 1dx + = -\int_2^4 xdx + \int_2^4 \sqrt{x}dx + 2\int_2^4 1dx =$

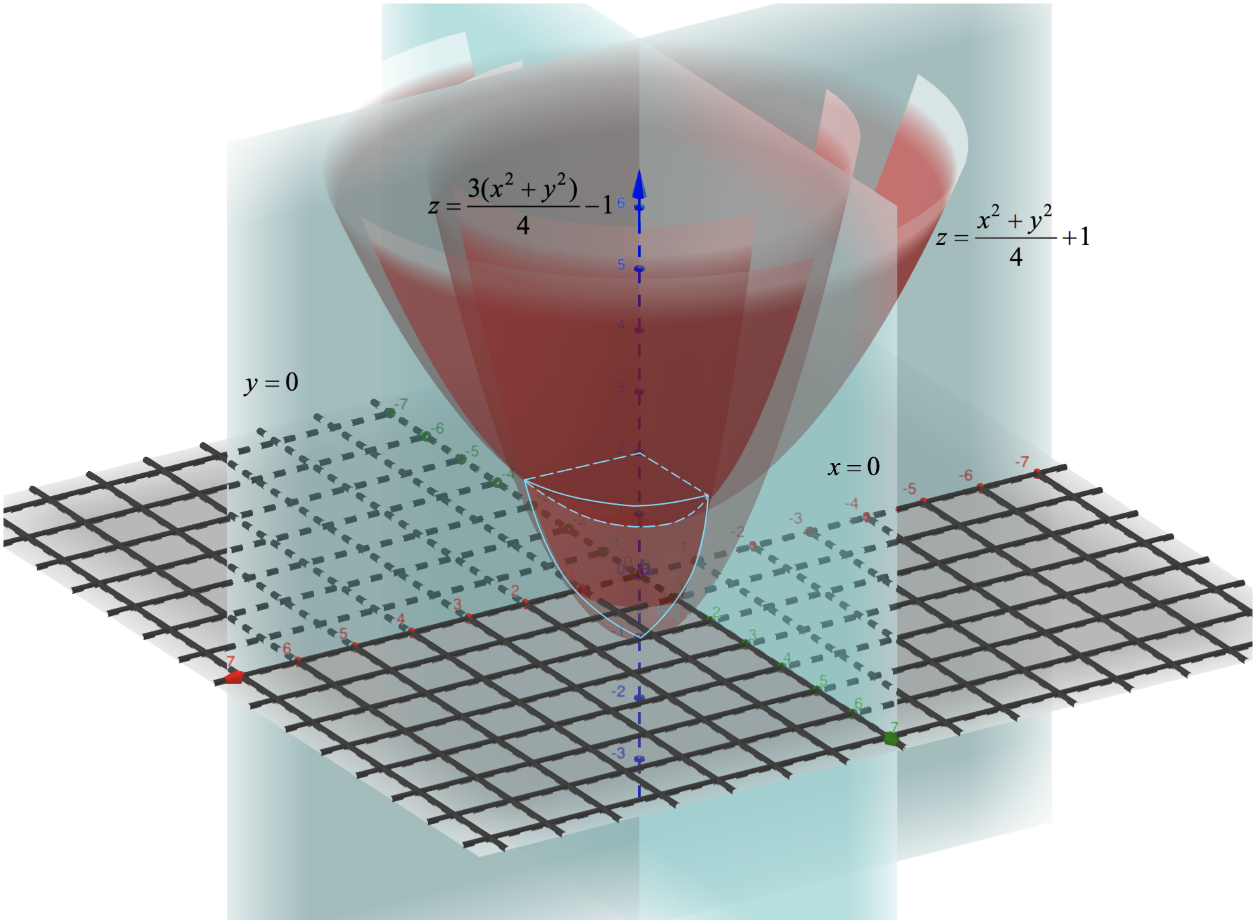
$= \frac{1}{6}(8\sqrt{2} - 7) + \frac{2}{3}(5 - 2\sqrt{2}) = 2\frac{1}{6}$

Ответ: $2\frac{1}{6}$

II. Тело T ограничено заданными поверхностями.

$z = \frac{x^2+y^2}{4} + 1, z = \frac{3\left(x^2+y^2\right)}{4} - 1, x = 0, y = 0$ при $x \geq 0, y \geq 0$

1) Сделайте схематический рисунок тела T.



2) С помощью тройного интеграла найдите объем тела T, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.
=

Ответ:

III. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями а) $y = f(x)$ при $x_1 \leq x \leq x_2$ б) $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t_1 \leq t \leq t_2$, если плотность вещества равна $\rho(x, y)$.

а) $y = \sin x, \rho(x, y) = y \cos x, x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$

Ответ:

б) $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}, \rho(x,y) = \frac{1}{y}, t_1 = 0, t_2 = 1$

Ответ:

IV. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2 \\ z = \chi(t) \end{cases}$, если плотность вещества равна $\rho(x,y,z)$.

$\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 3t \quad , \rho(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, t_1 = 0, t_2 = 4 \\ z = 4\cos t \end{cases}$

Ответ:

V. Дано векторное поле $\vec{a}$ и плоскость σ, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной $KLMK$, где $K\ L, M-$ точки пересечения плоскости σ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно.

$\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (z-2)\vec{k}, \sigma : 2x + 2y - 3z = 6$

1) Найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через часть S плоскости σ, вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали $\vec{n}$, направленной от начала координат $O(0;0;0)$

2) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через полную поверхность тетраэдра L в сторону внешней нормали.

3) Найдите циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

VI. Дано векторное поле $\vec{a}(M)$.

$\vec{a} = (2xy+2)\vec{i} + (x^2 - 2yz - y^2)\,\vec{j} + (z^2 - y^2)\,\vec{k}$

1) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.

2) Если поле потенциально, найдите его потенциал.