

# **Informe pràctica Modelització del trànsit**

Mètodes Numèrics II

3r de Física

Universitat Autònoma de Barcelona

Autors:

Josep Rubí Bort  
Marc Prades Alegre  
Marc Pujol Ramon  
Sara Fibla Salgado

## Índex

<b>1</b>	<b>Introducció teòrica</b>	<b>1</b>
1.1	Presentació del problema . . . . .	1
1.2	Model físic . . . . .	1
1.3	Normalització . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Mètode de resolució i dades utilitzades</b>	<b>3</b>
2.1	Posicions i velocitats en funció del temps . . . . .	3
2.2	Error numèric . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Resultats i discussió</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Problema obert: Simulació d'un semàfor</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Annex</b>	<b>9</b>
6.1	Solució analítica . . . . .	9
6.2	Equacions de Runge-Kutta de 4rt ordre . . . . .	10
6.3	Paràmetres . . . . .	10
6.4	Posicions i velocitats: altres situacions . . . . .	10
6.5	Distàncies mínimes en funció del temps de reacció: altres situacions . . . . .	12
6.6	Error en funció del temps: altres situacions . . . . .	13
6.7	Codis utilitzats . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>13</b>

# 1 Introducció teòrica

## 1.1 Presentació del problema

En l'actualitat, l'automòbil es tracta del mitjà de transport predilecte per la majoria de la població. No obstant, a zones densament poblades la formació d'embussos sobtats suposa un greu problema. Per tal de fer un estudi del flux del trànsit amb l'objectiu d'optimitzar la circulació i millorar la seguretat dels conductors, en les darreres dècades s'ha fomentat la implementació de diversos models matemàtics empírics.

Aquest és precisament l'objecte d'estudi d'aquesta pràctica. Per simplificar el sistema, es suposarà una sola via d'un sol carril amb un nombre de vehicles fixat, on inicialment tots els vehicles circulen a una mateixa velocitat i mantenint una distància de seguretat. A partir d'aquí es simularan diferents situacions i s'estudiarà la resposta del sistema a aquestes, en funció de certs paràmetres com el temps de reacció dels conductors.

Es realitzarà un estudi pel cas simplificat on tots els vehicles i conductors tenen les mateixes característiques i posteriorment s'augmentarà el grau de realisme introduint el cas on aquestes característiques són diferents per cadascun.

## 1.2 Model físic

En el model utilitzat es considera un sistema d' $N$  vehicles circulant en fila i amb una acceleració que ve determinada per la diferència de posicions i la diferència de velocitats entre el propi vehicle i el vehicle del davant<sup>1</sup>, de manera que es tracta d'imitar el comportament dels conductors reals. També es té en compte el temps de reacció dels conductors en el fet que, en l'acceleració, es considera la posició i velocitat del vehicle de davant en un instant de temps anterior a l'actual. Concretament, l'equació que seguiran els cotxes  $i = 2, 3, \dots, N$  serà

$$\ddot{x}^i(t) = -\frac{C^i}{m^i} \frac{\dot{x}^i(t) - \dot{x}^{i-1}(t - \tau^i)}{|x^i(t) - (x^{i-1}(t - \tau^i) - L^{i-1})|}, \quad (1.1)$$

on  $m^i$  és la massa del vehicle  $i$ ,  $x^i$  és la posició de la part frontal d'aquest vehicle,  $C^i$  és una constant de proporcionalitat associada al vehicle,  $t$  és el temps,  $\tau^i$  correspon al temps de reacció d'aquest conductor,  $x^{i-1}$  correspon a la posició de la part frontal del vehicle  $i - 1$  i  $L^{i-1}$  és la longitud del vehicle  $i - 1$ . Els punts indiquen derivades temporals. El vehicle 1 serà una condició de contorn, és a dir, la seva funció de posició en funció del temps vindrà descrita per una funció escollida (i en conseqüència estarà determinada sense necessitat d'aplicar cap mètode numèric). Inicialment cada vehicle estarà separat del de davant una distància  $d_i$ . Aquest problema admet una solució analítica, presentada a l'Annex (6.1).

Les tres situacions que s'estudiaran vindran marcades per un canvi sobtat en el comportament del primer cotxe. La primera es parametritzarà de la següent manera:

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = v & \text{si } t \leq t_c, \\ \dot{x}^1(t) = 0.2 v & \text{si } t > t_c, \end{cases} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>En la distància entre cotxes es considera la part frontal del propi cotxe i la part de darrere del vehicle de davant, simulant així que es vol evitar un xoc entre aquestes dues parts dels cotxes.

on s'estableix  $t_c = 1$  s. La segona situació correspondrà a

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = v & \text{si } t \leq t_c, \\ \dot{x}^1(t) = v \left( 1 - \frac{t-t_c}{t_a} e^{1-\frac{t-t_c}{t_a}} \right) & \text{si } t > t_c, \end{cases} \quad (1.3)$$

on  $t_a = 1$  s. Finalment, l'últim cas que es tindrà en compte és

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = v & \text{si } t \leq t_c, \\ \dot{x}^1(t) = v (1 - \sin^2(w(t - t_c))) & \text{si } t > t_c, \end{cases} \quad (1.4)$$

on  $w$  té un valor de  $0.4 \text{ s}^{-1}$ . Cal notar doncs que el primer cas intenta representar una frenada brusca del primer vehicle, tot i que no és una simulació perfectament realista degut a que requereix una acceleració infinita (en sentit contrari a la velocitat) per poder reduir la velocitat instantàniament. El segon cas pot representar diverses situacions que es poden donar en el dia a dia, com per exemple reduir la velocitat de manera brusca (de manera més realista que en el cas anterior) fins a 0 per la causa que sigui, per després tornar-la a augmentar més gradualment. Per altra banda el tercer cas pot representar, per exemple, una situació hipotètica on el conductor es va trobant diferents obstacles o senyals de limitació de velocitat.

### 1.3 Normalització

Per normalitzar l'Eq.(1.1), s'escull una longitud pròpia  $l_0 = d_0 + L_0$  on  $d_0$  és una de les distàncies de separació inicials i  $L_0$  correspon a la longitud d'un dels vehicles, escollint sempre el mateix valor. Per tant, serà convenient definir les noves variables  $\hat{t} = \frac{t}{t_0}$ ,  $\hat{x}^i = \frac{x^i}{l_0}$  de manera que

$$t_0 = \frac{m_0 l_0}{C_0}, \quad (1.5)$$

on  $m_0$  i  $C_0$  són una de les masses i una de les constants de proporcionalitat, que de nou tindran els mateixos valors al llarg de tota la pràctica. Implementant els nous paràmetres, l'equació inicial s'expressa com

$$\ddot{\hat{x}}^i(\hat{t}) = -q^i \frac{\dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) - \dot{\hat{x}}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i)}{|\hat{x}^i(\hat{t}) - (\hat{x}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i) - \hat{L}^{i-1})|}, \quad (1.6)$$

on  $\hat{\tau}^i = \frac{\tau^i}{t_0}$ ,  $q^i = \frac{m_0 C^i}{m^i C_0}$  és una constant que depèn del vehicle, i que valdrà 1 en el cas on tots els vehicles són iguals, i  $\hat{L}^{i-1} = \frac{L^{i-1}}{l_0}$ . Aquesta normalització permet obtenir una expressió per un temps característic en funció de les dades inicials del problema. Es pot observar com el paràmetre  $C_0$  modifica l'escala de temps del problema, doncs apareix en l'expressió del temps característic, com es veu a l'Eq.(1.5).

Amb les variables normalitzades, la definició de la velocitat (normalitzada) queda

$$\dot{\hat{x}}^i = \frac{d\hat{x}^i}{d\hat{t}}. \quad (1.7)$$

## 2 Mètode de resolució i dades utilitzades

### 2.1 Posicions i velocitats en funció del temps

Per tal de trobar l'evolució temporal de les posicions i velocitats dels cotxes, s'utilitzarà el mètode d'integració de Runge-Kutta de quart ordre amb el sistema d'equacions definit per les Eqs. (1.6) i (1.7), detallat a l'Annex (6.2).

Com s'ha explicat prèviament, es tractaran dos casos: en el primer cas tots els cotxes tindran els mateixos paràmetres, és a dir, que tots els cotxes tindran el mateix temps de reacció, longitud, massa, constant de proporcionalitat i mantindran la mateixa distància de seguretat inicial. En el segon cas, per tractar amb un model més realista, es consideraran tots aquests paràmetres diferents per cotxes diferents, simulant així el fet que els conductors poden frenar més o menys bruscament, poden deixar diferents distàncies de seguretat, (de certa forma, alguns conductors es posen més propers als cotxes de davant que altres), i poden tenir temps de reacció diferents (la gent més jove no reaccionarà en un temps igual que gent d'edat més avançada).

Pel cas on tots els paràmetres són iguals, la distància de seguretat inicial serà  $d = 26$  m i la velocitat inicial  $v = 120$  km/h. El valor de  $\hat{t}$  anirà de 0 a 7.112, tot i que el mètode numèric només s'aplicarà a partir de  $\hat{t} = \frac{t_c}{t_0}$  (en els temps previs es considerarà que tots els vehicles es mouen amb velocitat constant  $v$ , ja que estan en equilibri)<sup>2</sup>. Es considerarà  $N = 5$  i que la posició inicial del primer cotxe és  $x = 0$  m. Per tant, la posició inicial del vehicle  $i$  serà  $-30(i - 1)$  m. La posició i velocitat del primer cotxe evolucionaran segons el casos mencionats prèviament. S'escollirà  $m = 1500$  kg,  $C = 20000$  kg m s<sup>-1</sup>,  $L = 4$  m,  $\tau = 0.51975$  s, ja que són valors prou representatius<sup>3</sup>.

Pel cas de paràmetres diferents, s'escullen les mateixes  $v$  i posició inicial del primer cotxe. El temps normalitzat  $\hat{t}$  també anirà de 0 a 7.112 (el mètode numèric també es començarà a aplicar a partir del mateix  $\hat{t}$  que abans) i es tractaran les mateixes situacions. Els altres paràmetres es presenten a l'Annex (6.3).

### 2.2 Error numèric

L'error numèric s'ha avaluat mitjançant un valor que a partir de les lleis físiques se sap que s'ha de conservar. En aquest cas una de les variables que es conserven és l'energia total, tenint en compte el treball realitzat. Aquesta energia, en forma normalitzada, s'expressa com

$$E^i(\hat{t}) = \frac{1}{2} \frac{m^i}{m_0} (\dot{x}^i(\hat{t}))^2 - W^i(\hat{t}). \quad (2.1)$$

En el càlcul d'aquest error no s'inclou el primer vehicle, ja que aquest segueix una funció definida independent dels altres vehicles i per tant no requereix l'aplicació de cap mètode numèric.  $W^i(\hat{t})$  és el treball (normalitzat) realitzat sobre aquest vehicle des d'un cert instant de temps fins el temps  $t$ . Aquest treball es calcula utilitzant

<sup>2</sup>En tot moment s'establirà  $\tau < t_c$ , el que garanteix que l'equació (1.1) estigui ben definida.

<sup>3</sup>Per exemple, el temps de reacció mitjà per una persona entre 41 i 54 anys (un grup bastant representatiu dels conductors)<sup>[1]</sup> és 0.52 s, així que s'ha considerat adient utilitzar-lo, però per causes relatives a la discretització temporal s'ha modificat lleugerament, tal i com s'explica a l'Annex (6.2)

$$W^i(\hat{t}) = \sum_{k=t_c/t_0}^{\hat{t}} \frac{d\hat{t} F^i(k)}{6} (R_1^i(k) + 2R_2^i(k) + 2R_3^i(k) + R_4^i(k)). \quad (2.2)$$

El sumatori comença al valor indicat perquè pels instants previs ja se sap que l'energia es conserva, doncs tots els vehicles es mouen amb velocitat constant. Alhora,  $F^i(k)$  ve donat per

$$F^i(k) = -G^i \frac{\hat{x}^i(k) - \hat{x}^{i-1}(k - \hat{\tau}^i)}{|\hat{x}^i(k) - (\hat{x}^{i-1}(k - \hat{\tau}^i) - \hat{L}^{i-1})|}, \quad (2.3)$$

on  $G^i = \frac{C^i}{C_0}$ . Per tant, es pot definir un error relatiu per cada vehicle en un temps determinat mitjançant

$$Err^i(\hat{t}) = \frac{E_0^i - E^i(\hat{t})}{E_0^i} \cdot 100, \quad (2.4)$$

essent  $E_0$  l'energia cinètica normalitzada inicial, és a dir, el resultat d'aplicar (2.1) a  $\hat{t} = 0$  sense el treball tal i com està definit (l'expressió de  $F^i(k)$  no està ben definida per  $k < \hat{\tau}^i$ ), doncs el treball real és 0.

A l'Annex (6.7) es donen els enllaços als codis on s'han implementat tots aquests mètodes.

### 3 Resultats i discussió

El cas estudiat més a fons serà el cas definit per l'Eq.(1.3). Això és degut a que es considera el més realista. La resta d'ells es mostren a l'Annex (6.4). Com s'ha explicat abans, aquest model consisteix en una disminució brusca de la velocitat del primer cotxe i un posterior augment més lent. La resposta dels altres vehicles, en termes de l'evolució temporal de les seves posicions i velocitats, tenint característiques idèntiques, es mostra a la Fig 3.1.

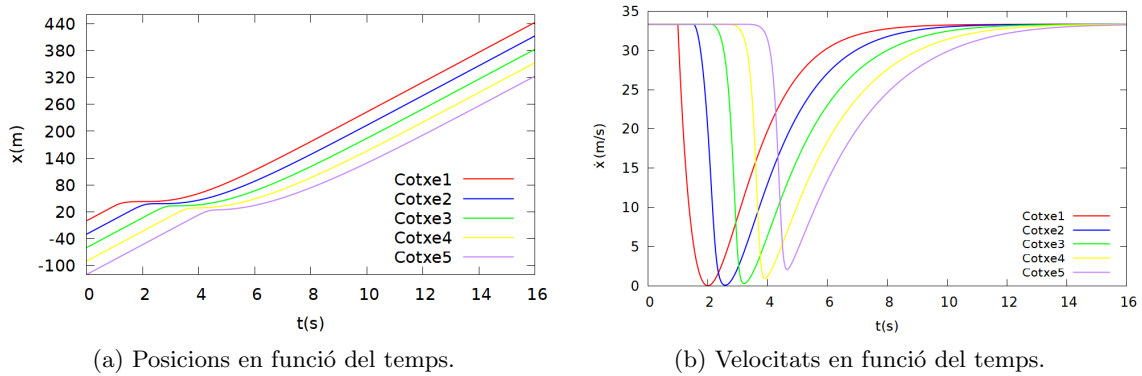


Fig. 3.1: Posicions i velocitats dels vehicles en funció del temps per la situació definida a l'Eq.(1.3) amb els paràmetres idèntics per cada vehicle.

Primerament, a la Fig. 3.1a es pot observar que els cotxes tenen un comportament semblant però desfasat en el temps. La semblança és a causa del model físic emprat (Eq.(1.1)) per descriure el moviment dels vehicles, mentre que les causes principals del desfasament observat són, probablement, el temps de reacció dels conductors i el fet que cada vehicle actua en resposta al comportament del vehicle de davant. Els vehicles arriben a acostar-se entre ells (cotxes consecutius) molt més que ho estaven al principi, però sense arribar a co

l'isionar. Tret de la part on els cotxes frenen i acceleren, el comportament de la posició en funció del temps és lineal, com caldria esperar.

Per altra banda, a la Fig. 3.1b es pot observar també un comportament molt semblant entre els diferents cotxes, essent cada funció una versió molt semblant però desfasada de la del primer cotxe (per les mateixes causes que en el gràfic de posicions). En aquest cas les diferències són més clares, doncs cada cotxe ha de frenar lleugerament menys que l'immediatament anterior, arribant només el primer cotxe a una velocitat nul·la.

A la Fig. 3.2 es mostra la mateixa situació que abans però pel cas més realista on les característiques de vehicles i conductors són diferents.

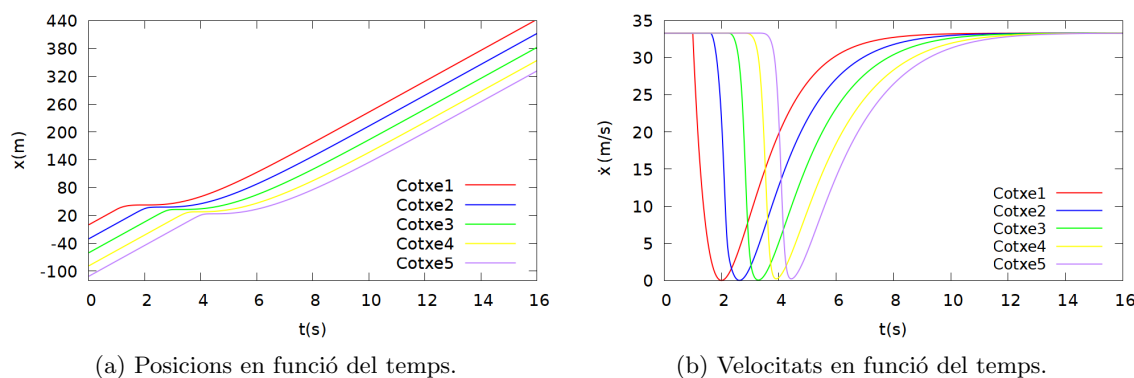


Fig. 3.2: Posicions i velocitats dels vehicles en funció del temps per la situació definida a l'Eq.(1.3) amb els paràmetres diferents per cada vehicle.

En general s'observa una gran similitud amb el cas de paràmetres iguals. Tot i així, es pot apreciar que certs cotxes s'acosten més entre ells, sense arribar a xocar en cap cas.

No obstant, es pot observar una diferència major en el gràfic de velocitats. En aquest cas es pot veure que les velocitats de tots els cotxes s'apropen a 0 m/s, tot i que el quart i cinquè cotxe no arriben a velocitat nul·la (costa d'apreciar, però).

A continuació es realitza un estudi de com es comporten els cotxes en funció del temps de reacció. Un bon paràmetre per descriure aquest comportament és la distància mínima entre els cotxes que s'assoleix en el temps en què dura la simulació. A la Fig. 3.3 es mostra una comparació de les representacions d'aquest paràmetre en funció del temps de reacció (per la situació de l'Eq. (1.3)) entre el cas on les característiques són iguals per tots els vehicles i el cas on són diferents. Cal mencionar que en el cas dels paràmetres diferents, aquest cop s'ha agafat un temps de reacció idèntic per tots els vehicles per realitzar un estudi més ben definit. De fet, aquest cas només serveix d'exemple concret, ja que si es consideressin diferents temps de reacció hi hauria un gran nombre de combinacions possibles per estudiar, que segurament donarien resultats molt variats.

Pel cas on totes les característiques són iguals, es pot veure que la distància mínima va disminuint fins que els cotxes sobtadament comencen a xocar (distància mínima nul·la) quan el temps de reacció s'acosta als 0.8 s. Cal tenir en compte que 0.79 s és el temps que dona la relació  $d/v$  (distància inicial entre vehicles dividida per la velocitat inicial). Això vol dir que quan el mètode numèric es comença a aplicar, cada vehicle excepte el primer actua en funció de la posició i velocitat del de davant en un temps 0.79 s anterior, fent que la resposta sigui en funció de la posició del de davant retardada una distància  $d$  respecte la real, és a dir, coincidint amb la pròpia posició (per temps de reacció més grans, la

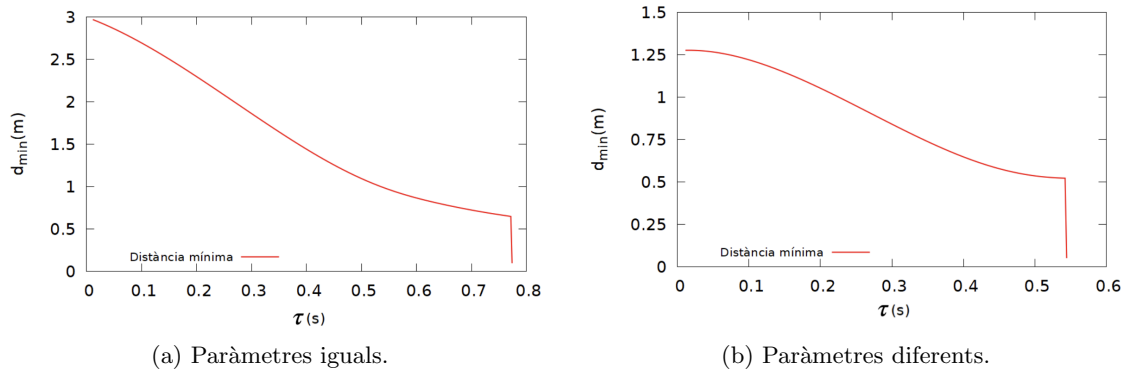


Fig. 3.3: Distància mínima entre vehicles en funció del temps de reacció per la situació definida per l'Eq.(1.3), en els casos de vehicles iguals i diferents.

resposta es dona en funció de posicions del vehicle de davant cada vegada més retardades, arribant a quedar per darrere del propi vehicle). Per tant, el model perd realisme de manera significativa a partir d'aquest temps de reacció. És possible que aquest límit tingui bastant a veure amb el fet que hi hagi xocs, doncs el fet que cada cotxe "percebi" el de davant com si estigués darrere seu (o pràcticament a sobre seu) pot donar lloc a una evolució caòtica del sistema. Així doncs, a partir de  $\tau = 0.79$  s la predicció del model no es considera vàlida pels motius que s'han comentat.

Pel cas de paràmetres diferents es veu una tendència decreixent similar però que arriba al zero en un temps anterior (al voltant de 0.55 s). El valor mínim de  $d_i/v$  és 0.54 s. Per tant, es pot utilitzar el mateix argument que en el cas anterior com una de les possibles causes dels xocs. A l'Annex (6.5) es presenta l'estudi del temps de reacció per les altres situacions.

Els valors numèrics de l'error, tal i com s'ha definit prèviament, es mostren a la Fig. 3.4. Són els errors per cada vehicle en la situació definida a l'Eq.(1.3) i pel cas de vehicles i conductors idèntics.

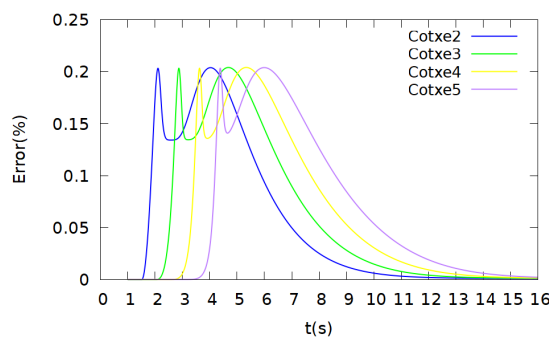


Fig. 3.4: Error de cada vehicle en funció del temps per la situació definida a l'Eq.(1.3), amb paràmetres idèntics per cada vehicle.

Tal i com s'ha explicat abans, l'error es comença a calcular a partir de  $t = t_c$ , que és quan es comença a aplicar el mètode numèric perquè el primer vehicle canvia la seva velocitat i el sistema surt de l'equilibri.

En aquest gràfic es poden fer un parell d'observacions importants més. La primera és



l'ordre de magnitud que té l'error, que no supera al 0.25 %. En segon lloc cal observar com l'error disminueix quan el sistema es troba de nou en l'equilibri, és a dir, que es pot veure que per a temps cada cop més grans, a partir d'un cert valor, l'error tendeix a 0. Això indica que l'energia acaba (pràcticament) conservant-se, el que significa que tots els excessos o defectes d'energia introduïts a causa de les aproximacions realitzades en el mètode acaben cancel·lant-se (No obstant, la manera en què es calcula el treball en l'error també és aproximada). A l'Annex (6.6) es presenta un estudi de l'error per les altres situacions.

## 4 Problema obert: Simulació d'un semàfor

Per tal d'aproximar la simulació al trànsit que es trobaria en una via interurbana, s'ha implementat al model una variació que simula un semàfor. Concretament, s'ha imposat que el primer cotxe desacceleri de forma brusca fins a aturar-se, i conseqüentment s'espera que els següents vehicles segueixin aquesta tendència. Els paràmetres són iguals per cada vehicle. La funció escollida per la velocitat del primer vehicle és

$$\dot{x}^1(t) = \begin{cases} v & \text{si } t \leq t_c, \\ \dot{x}^1(t) = v \left( 1 - \frac{t-t_c}{t_a} e^{1-\frac{t-t_c}{t_a}} \right) & \text{si } t_c < t \leq t_{\text{parat}}, \\ \dot{x}^1(t) = 0 & \text{si } t_{\text{parat}} < t \leq t_{\text{arr}}, \\ \dot{x}^1(t) = v \frac{\ln(1+(t-t_{\text{arr}})t_a)}{4} & \text{si } t_{\text{arr}} < t. \end{cases} \quad (4.1)$$

Per la darrera equació, a més a més, s'ha imposat la condició que quan  $\dot{x}^1(t) = v$  i  $t > t_{\text{arr}}$  simultàniament,  $\dot{x}^1$  es mantingui constant en el temps per tal d'evitar que la velocitat creixi indefinidament. Per una banda,  $t_{\text{parat}} = 2$  s correspon al temps en què el cotxe 1 arriba a velocitat nul·la, i d'altra banda  $t_{\text{arr}}$  s'ha definit com  $t_{\text{arr}} = t_{\text{parat}} + 90$  s. Altrament, a l'hora de reprendre el moviment s'ha implementat una funció logarítmica per tal de reproduir el comportament que segueix un vehicle en iniciar la marxa.

A la Fig. 4.1 es mostren les posicions i velocitats dels vehicles en funció del temps, amb la variació del semàfor.

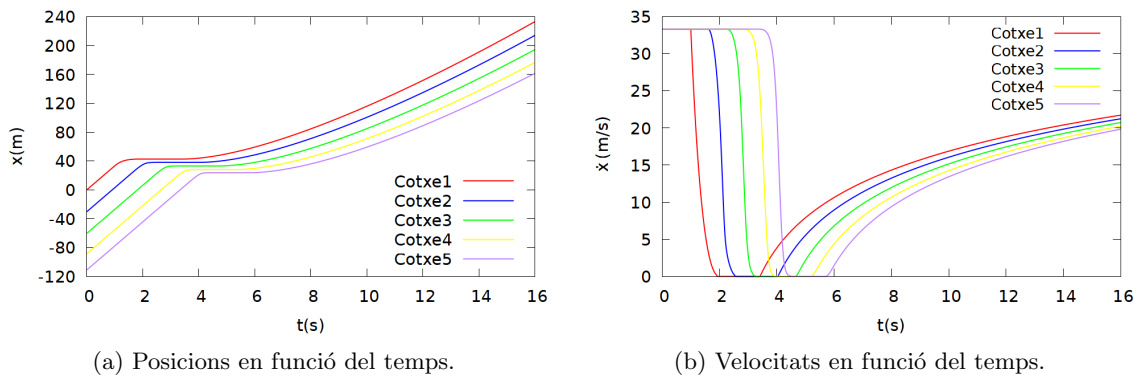


Fig. 4.1: Posicions i velocitats de cada vehicle en funció del temps per la situació del semàfor, amb els paràmetres iguals per tots els vehicles.

Es pot comprovar, en els dos gràfics, que a partir de l'instant  $t = 1.5$  s els vehicles comencen a disminuir la velocitat a mesura que s'acosten al de davant seu, fins a aturar-se, per després reiniciar el moviment de forma progressiva, havent estat un determinat temps aturats. Per tant, la simulació del semàfor és satisfactòria.

## 5 Conclusions

En aquesta pràctica s'han modelitzat diferents situacions comunes en el trànsit d'un carril de carretera interurbana, amb certes simplificacions. Principalment, s'ha estudiat la resposta d'un conjunt de vehicles a una frenada brusca del vehicle que lidera el grup seguida d'una acceleració lleugerament més progressiva, i s'ha analitzat aquesta resposta en funció del temps de reacció dels conductors.

S'ha observat que les posicions i velocitats de cada vehicle seguien una evolució temporal molt similar a la del primer cotxe, però desfasada en el temps. Aquest desfasament té dues causes principals: el temps de reacció dels conductors i el fet que cada conductor actua en resposta al comportament del vehicle de davant (la conseqüència ha de ser posterior a la causa). El fet que les evolucions temporals siguin tant semblants s'atribueix al model físic emprat.

A més a més, s'han comparat els resultats obtinguts en dos casos: un cas simplificat on tots els vehicles i conductors són iguals, i un cas més realista on tenen característiques diferents. S'ha pogut concloure que l'elecció del cas tenia una notable influència en els resultats. En particular, s'ha vist que els vehicles xocaven a partir d'uns 0.8 s (cas simplificat) i 0.55 s (cas realista) de temps de reacció, però s'ha pogut concloure que aquests xocs probablement siguin a causa d'una pèrdua de realisme del model físic utilitzat quan s'estableixen temps de reacció iguals o més grans que aquests valors, per cada cas concret.

Finalment, s'ha simulat el comportament del trànsit amb un semàfor i s'han obtinguts els resultats esperats.

## 6 Annex

### 6.1 Solució analítica

Integrant l'Eq.(1.1) respecte el temps, s'obté

$$\dot{x}^i(\rho^i) = \frac{C^i}{m^i} \ln\left(\frac{1}{\rho^i}\right) + D, \quad (6.1)$$

on  $\rho^i = |x^i - (x^{i-1} - L^{i-1})|^{-1}$  i  $D$  és una constant d'integració, que pot ser determinada pel següent argument: el fet que el primer cotxe (condició de contorn) tingui una velocitat màxima implica que pels altres cotxes també succeirà el mateix i això determinarà un valor mínim que  $\rho^i$  pot prendre. Aquesta condició es pot demostrar considerant inicialment la velocitat del primer cotxe; si en algun moment el cotxe 2 superés aquesta velocitat per una quantitat ínfima (idealment, en el límit quan tendeix a zero), immediatament començaria a disminuir la seva velocitat, com es veu en l'Eq.(6.1). En efecte, si la velocitat es fa més gran que la del primer cotxe (en un temps anterior definit pel temps de reacció), la quantitat  $|x^2 - (x^1 - L^1)|$  es fa més petita,  $\rho^2$  augmenta i per tant  $\dot{x}^2$  disminueix. Com la velocitat del cotxe 2 està limitada, es pot aplicar el mateix raonament pel cotxe 3 i així successivament. Per tant, en fer que el primer cotxe tingui una velocitat màxima s'imposa automàticament un valor  $v_{max}$  per cada cotxe al qual li correspon un valor de  $\rho^i$ , anomenat  $\rho_c^i$ . Imposant  $\dot{x}^i(\rho_c^i) = v_{max}$  s'arriba a<sup>4</sup>

$$\dot{x}^i(\rho_c^i) = v_{max} + \frac{C^i}{m^i} \ln\left(\frac{\rho_c^i}{\rho^i}\right). \quad (6.2)$$

Així doncs, per definició el flux s'expressa de la forma

$$J^i(\rho^i) = \rho^i \left( v_{max} + \frac{C^i}{m^i} \ln\left(\frac{\rho_c^i}{\rho^i}\right) \right). \quad (6.3)$$

Es pot comprovar que el flux assoleix un màxim per  $\rho^i = \rho_c e^{\frac{v_{max} m^i}{C^i} - 1}$ . La circulació òptima es dona quan es maximitzen els fluxos associats a tots els cotxes (excepte el primer, que no en té perquè no té cap cotxe davant seu i no es pot definir una  $\rho^1$  en aquest cas).

D'aquesta manera, es troba un altre rol per la constant de proporcionalitat  $C^i$ ; modifica la dependència de la velocitat i el flux respecte  $\rho^i$  i determina el valor del flux màxim.

<sup>4</sup>La solució analítica presentada no és igual que la mostrada a les classes de teoria perquè s'ha definit l'acceleració de manera lleugerament diferent (afegint el terme  $L^{i-1}$ ). Això té importants conseqüències, com el fet que no existeixi un valor màxim de  $\rho^i$ , tal i com s'ha definit aquest paràmetre.

## 6.2 Equacions de Runge-Kutta de 4rt ordre

Per treballar amb aquest mètode es necessita calcular els coeficients

$$\begin{aligned}
 K_1^i(\hat{t}) &= -\frac{\dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) - \dot{\hat{x}}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i)}{|\hat{x}^i(\hat{t}) - (\hat{x}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i) - \hat{L}^{i-1})|}, & R_1^i(\hat{t}) &= \dot{\hat{x}}^i(\hat{t}), \\
 K_2^i(\hat{t}) &= -\frac{\dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) + K_1^i(\hat{t})d\hat{t}/2 - \dot{\hat{x}}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i)}{|\hat{x}^i(\hat{t}) + R_1^i(\hat{t})d\hat{t}/2 - (\hat{x}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i) - \hat{L}^{i-1})|}, & R_2^i(\hat{t}) &= \dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) + R_1^i(\hat{t})d\hat{t}/2, \\
 K_3^i(\hat{t}) &= -\frac{\dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) + K_2^i(\hat{t})d\hat{t}/2 - \dot{\hat{x}}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i)}{|\hat{x}^i(\hat{t}) + R_2^i(\hat{t})d\hat{t}/2 - (\hat{x}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i) - \hat{L}^{i-1})|}, & R_3^i(\hat{t}) &= \dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) + R_2^i(\hat{t})d\hat{t}/2, \\
 K_4^i(\hat{t}) &= -\frac{\dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) + K_3^i(\hat{t})d\hat{t} - \dot{\hat{x}}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i)}{|\hat{x}^i(\hat{t}) + R_3^i(\hat{t})d\hat{t} - (\hat{x}^{i-1}(\hat{t} - \hat{\tau}^i) - \hat{L}^{i-1})|}, & R_4^i(\hat{t}) &= \dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) + R_3^i(\hat{t})d\hat{t},
 \end{aligned}$$

on  $d\hat{t}$  és l'interval de temps normalitzat de la discretització temporal (s'ha escollit sempre  $d\hat{t} = 0.001$ ), i el subíndex  $i$  fa referència al cotxe  $i$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ). El valors escollits per  $\tau^i$  són sempre múltiples de  $dt = d\hat{t} t_0$ , que són més òptims pel codi. Per exemple, pel cas on tots els vehicles i conductors són iguals, aquest valor és  $\tau = 231 dt$  (o, en forma normalitzada,  $\hat{\tau} = 231 d\hat{t}$ ).

Amb aquests coeficients es troben les posicions i les velocitats normalitzades en el pròxim instant de temps, donades per

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^i(\hat{t} + d\hat{t}) = \dot{\hat{x}}^i(\hat{t}) + (K_1^i(\hat{t}) + 2K_2^i(\hat{t}) + 2K_3^i(\hat{t}) + K_4^i(\hat{t}))\frac{d\hat{t}}{6} \\ \hat{x}^i(\hat{t} + d\hat{t}) = \hat{x}^i(\hat{t}) + (R_1^i(\hat{t}) + 2R_2^i(\hat{t}) + 2R_3^i(\hat{t}) + R_4^i(\hat{t}))\frac{d\hat{t}}{6} \end{cases}$$

## 6.3 Paràmetres

Taula 6.1: Paràmetres utilitzats en el cas on els vehicles són diferents.

Variables	Cotxe 1	Cotxe 2	Cotxe 3	Cotxe 4	Cotxe 5
$m^i$ (Kg)	1400	1950	1165	1280	1100
$L^i$ (m)	4.37	4.322	4.06	4.227	4.475
$d^i$ (m)	20	26	26	24	18
$\tau^i$ (s)	0.60975	0.60975	0.51975	0.51975	0.6795
$\tau^i/dt$	271	271	231	231	302
$C^i$ (Kg·m/s)	21000	19000	20000	22000	18000

## 6.4 Posicions i velocitats: altres situacions

A la Fig. 6.1 es mostra una representació de l'evolució temporal de les posicions i velocitats de cada vehicle per la situació definida a l'Eq.(1.2), una frenada instantània del primer vehicle. Les característiques de tots els vehicles són iguals.

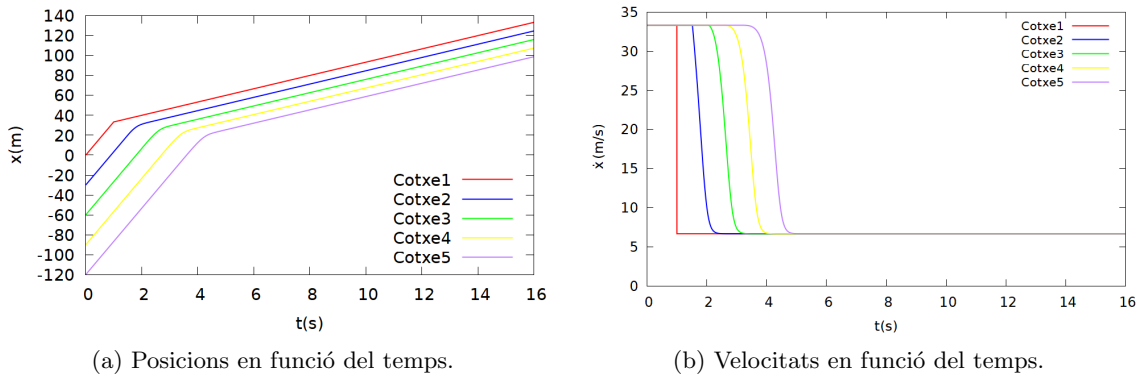


Fig. 6.1: Posicions i velocitats dels cotxes en funció del temps per la situació definida a l'Eq.(1.2), amb vehicles i conductors iguals.

Es veu que les posicions dels automòbils (exceptuant el primer) tenen un canvi de pendent més suau (no hi ha vèrtex/canvi instantani de velocitat) que el primer, tot i repetir la mateixa tendència que aquest. En cap cas hi ha col·lisió. Per altra banda, en el gràfic de velocitats s'observa clarament el canvi abrupte de velocitat del primer cotxe, enunciat a l'Eq.(1.2), mentre que la resta de vehicles frenen gradualment, i cada cotxe té una desacceleració més suau que l'anterior (triga més temps a arribar a la velocitat d'equilibri).

Els resultats per la situació definida a l'Eq.(1.4), descrivint una velocitat oscil·lant del primer vehicle amb el temps, es mostren a la Fig. 6.2. Les característiques de tots els vehicles són iguals.

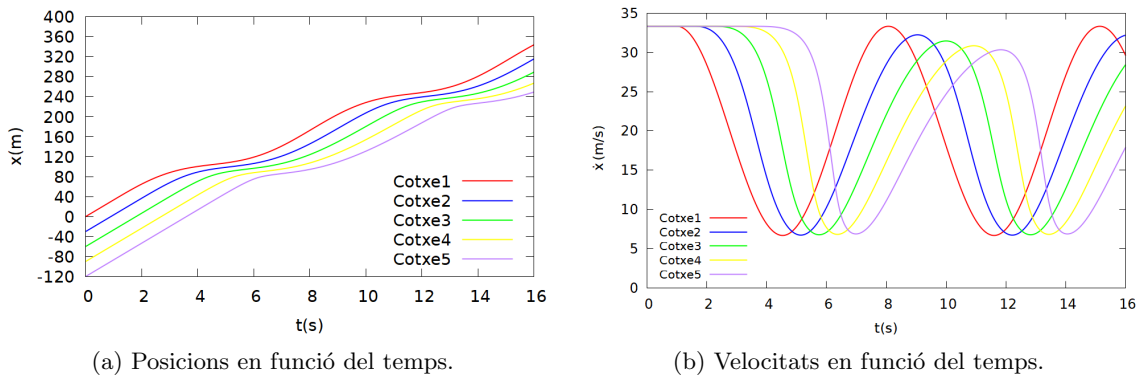


Fig. 6.2: Posicions i velocitats dels cotxes en funció del temps per la situació definida a l'Eq.(1.4), amb vehicles i conductors iguals.

Com en les altres situacions, s'observa clarament la semblança entre les funcions posició i velocitat en funció del temps de tots els vehicles. És interessant destacar com en el gràfic de posicions es veu que periòdicament hi ha certs vehicles que s'acosten molt en comparació amb la seva separació inicial, però en cap cas hi ha xocs. També és convenient destacar que en el gràfic de velocitats els cotxes 4 i 5 pateixen oscil·lacions no simètriques.

### 6.5 Distàncies mínimes en funció del temps de reacció: altres situacions

Pel cas on tots els vehicles i conductors tenen les mateixes característiques, a la Fig. 6.3 es mostra la distància mínima entre vehicles (en tota la simulació) en funció del temps de reacció per les situacions definides a l'Eq.(1.2) i l'Eq.(1.4).

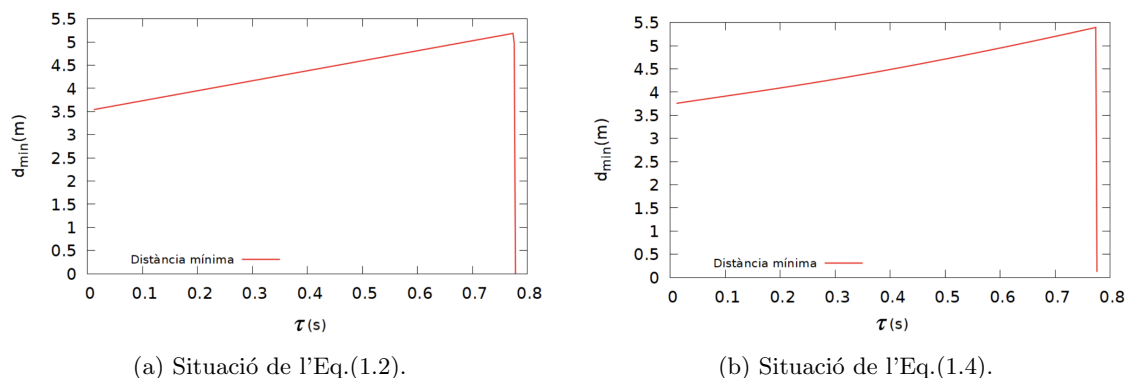


Fig. 6.3: Distàncies mínimes entre vehicles (en tota la simulació) en funció del temps de reacció per les situacions de l'Eq.(1.2) i l'Eq.(1.4) amb tots els vehicles i conductors iguals.

En ambdues situacions es veu un creixement lineal de la distància fins que, al voltant de 0.8 s, aquesta cau a zero de cop (hi ha un xoc). El motiu és probablement el mateix que el que s'ha explicat a la secció *Resultats i Discussió*.

Pel cas on els vehicles i conductors tenen diferents característiques (excepte el temps de reacció), a la Fig 6.4 es mostra la distància mínima entre vehicles (en tota la simulació) en funció del temps de reacció per les situacions definides a l'Eq.(1.2) i l'Eq.(1.4).

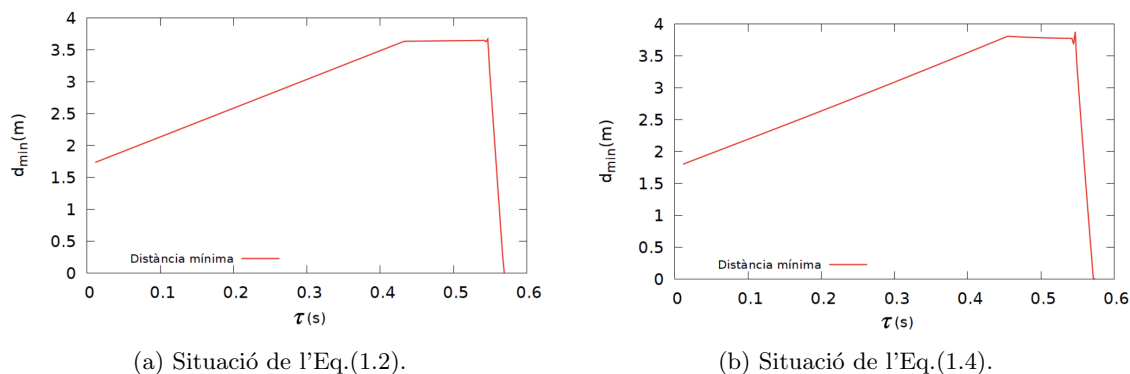


Fig. 6.4: Distàncies mínimes entre vehicles (en tota la simulació) en funció del temps de reacció per les situacions de l'Eq.(1.2) i l'Eq.(1.4) i amb característiques diferents per vehicles i conductors diferents.

La diferència més notable que apareix en la versió més realista del model respecte a l'anterior és l'altiplà que apareix entre 0.4 i 0.55 s aproximadament. També es pot veure com la caiguda abrupta de la distància a zero es dona en un temps menor que abans (0.55 s aproximadament). El motiu és probablement el mateix que el que s'ha explicat a la secció *Resultats i Discussió*. Les dues situacions segueixen tenint gràfics quasi idèntics.

## 6.6 Error en funció del temps: altres situacions

A continuació s'ensenya l'error associat a cada vehicle en funció del temps per les situacions de l'Eq.(1.2) i l'Eq.(1.4), essent els paràmetres de tots els vehicles iguals.

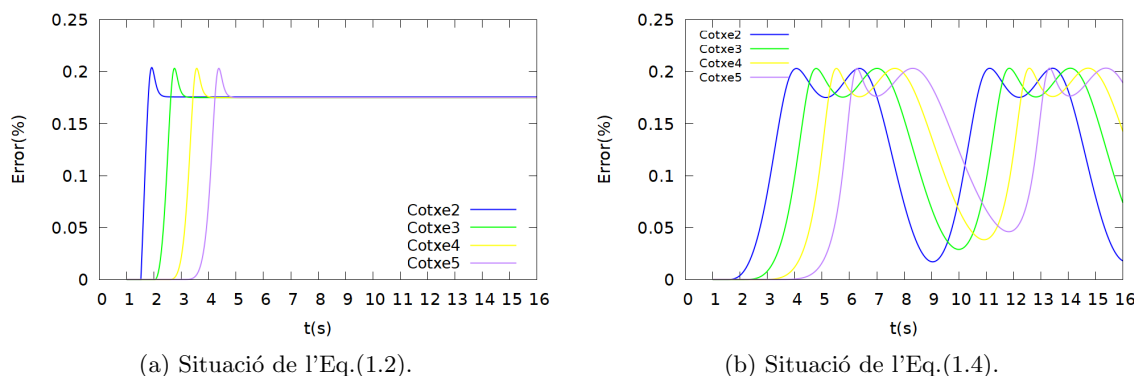


Fig. 6.5: Errors de cada vehicle en funció del temps per les situacions definides a l'Eq.(1.2) i l'Eq.(1.4), amb paràmetres idèntics per cada vehicle.

Cal destacar com en la situació de l'Eq.(1.2) l'error no tendeix a 0 un cop els vehicles tornen a l'equilibri, possiblement degut a la disminució instantània de la velocitat del primer vehicle, que causa una desacceleració brusca en els altres vehicles, i per tant el mètode és més susceptible a generar error (per disminuir l'error es podria intentar fer una discretització més fina del temps al voltant de  $t = t_c$ ). Pel que fa a la situació de l'Eq.(1.4), es veu com l'error va oscil·lant degut a que sempre hi ha una acceleració i els vehicles no tornen a l'equilibri (velocitats constants).

## 6.7 Codis utilitzats

En aquest apartat s'inclouen els codis emprats per les simulacions.

1. [Mètode de Runge-Kutta amb el corresponent error](#)
2. [Estudi de la distància mínima en funció del temps de reacció](#)
3. [Problema obert: Simulació d'un semàfor](#)

## 7 Bibliografia

### Referències

- [1] HIROSHI MAKISHITA, KATSUYA MATSUNAG. *Differences of drivers' reaction times according to age and mental workload* National Research Institute of Police Science (NRIPS), Japan. (DOI:10.1016/j.aap.2007.08.012)