Funktionen mehrerer Variablen

FS 2024 – Prof. Dr. Bernhard Zgraggen

Autoren:
Laurin Heitzer,
Flurin Brechbühler,
Luca Loop

Version:
1.0.20250714
https://github.com/P4ntomime/funktionen-mehrerer-variablen

Inhaltsverzeichnis

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren 2
- 1.1 Dimensionen 2
- 1.2 Schnitte 2
- 1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinen, ... 2

2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat) 2
- 2.1 Partielle Ableitung 2
- 2.2 Gradient (Nabla-Operator) 2
- 2.3 Totale Ableitung 2
- 2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation) 2
- 2.5 DGL 3
- 2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren) 3
- 2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren 3
- 2.8 Taylor Approximation 2. Ordnung 3
- 2.9 Richtungs-Ableitung 3

3 Extrema von Funktionen finden 3
- 3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden 3
- 3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden 3
- 3.3 Lokales oder Globales Extremum 3
- 3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden 3
- 3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden 4
- 3.6 Weiszfeld-Iteration 4

4 Support Vector Machine (SVM) 4
- 4.1 Linear Trennbare Daten 4
- 4.2 Nicht linear Trennbare Daten 5

5 Koordinatensysteme 5
- 5.1 2D Koordinatensysteme 5
- 5.2 3D Koordinatensysteme 5

6 Integration 6
- 6.1 Allgemeines 6
- 6.2 Normalbereiche 6
- 6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli) 6
- 6.4 Jacobi Matrix und Determinante 6
- 6.5 Erster Metrischer Tensor 6
- 6.6 Längenintegrale 6
- 6.7 (Ober-)Flächenintegrale 7
- 6.8 Volumenintegrale 7
- 6.9 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale) 7
- 6.10 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale) 7

7 Vektoranalysis 7
- 7.1 Vektorfelder 7
- 7.2 Gradient 7
- 7.3 Vektorgradient 7
- 7.4 Divergenz (Volumenableitung) 8
- 7.5 Laplace Operator Delta 8
- 7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl) 8
- 7.7 Rechenregeln mit Nabla 8

8 Anwendungen 9
- 8.1 Integralsatz von Gauss 9
- 8.2 Integralsatz von Stokes 9
- 8.3 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung) 9
- 8.4 Prinzip von d'Alambert 9
- 8.5 Maxwell-Gleichungen 9

9 Anhang 9
- 9.1 Trigonometrie 9
- 9.2 Ableitungsregeln 10
- 9.3 Ableitungen 10

1 Dimensionen, Schnitte und Kontouren

1.1 Dimensionen

$$f : \mathbb{D}_f(\subsetneq \mathbb{R}^{m}) \longrightarrow \mathbb{W}_f(\subsetneq \mathbb{R}^{n})$$

m	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{D}_f$, wobei $m \in \mathbb{N}$
n	Anzahl Dimensionen von $\mathbb{W}_f$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$\vec{f}$	wenn Output vektoriell

⚠ Variablen sind abhängig von einander!

Multi-Variat:

f ist "Multi-Variat", wenn:

- Input mehrdimensional ist
- Output mehrdimensional ist
- Input **und** Output mehrdimensional sind

f ist nicht "Multi-Variat", wenn:

- Input **und** Output Skalare sind

1.1.1 Raumzeit

$$\left.\begin{matrix}\text{Raum 3D } (x;y;z)\ \mathbb{R}^3 \\ \text{Zeit 1D } (t)\ \mathbb{R}^1\end{matrix}\right\} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3 = \text{Raumzeit 4D } (t;x;y;z)$$

1.1.2 Stationärer Fall

$$t \to \infty \to \text{Stationär}$$

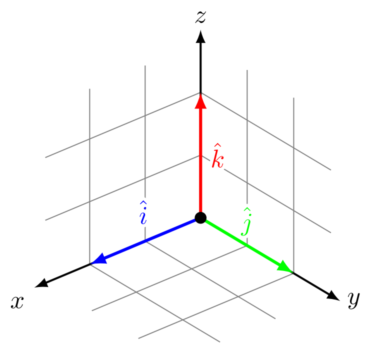
$$T(x;y;z) \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} \to 0$$

1.1.3 Einheitsvektoren (Koordinatenvektoren)

$$\hat{x} = \vec{i} = \hat{i} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \hat{j} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \hat{k} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



1.2 Schnitte

Schnitt = Restriktion → Teilmenge vom Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$

1.2.1 Partielle Funktion

- Nur **eine** Variable ist frei! (wählbar)
- **Alle** anderen Variablen sind fix!
  ⚠ $\mathbb{W}_f$ **Analyse!**

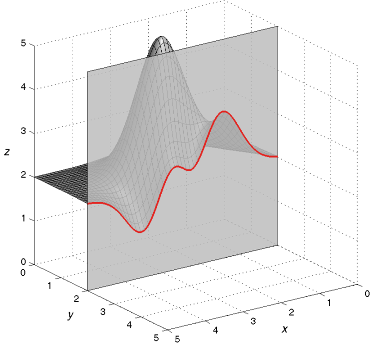
Beispiel: Schnitte

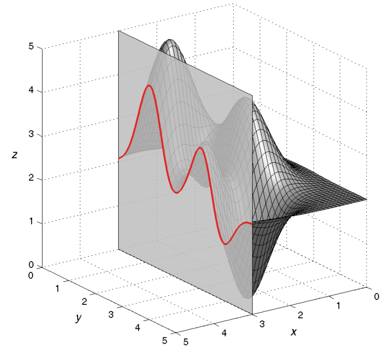
x-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur x,z-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y_0;f(x;y_0))$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow y_0 = 2$

y-Linien

- Fläche wird geschnitten mit Ebene, die parallel zur y,z-Ebene liegt.
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x_0;y;f(x_0;y))$
- x-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow x_0 = 3$
- y-Wert ist variabel





1.2.2 Bedingungen

Initialbedingungen	→	Beziehen sich auf die **Zeit**
Randbedingungen	→	Beziehen sich auf **räumliche Ebenen**

1.3 Kontouren, Levelsets, Niveaulinien, Höhenlinen, ...

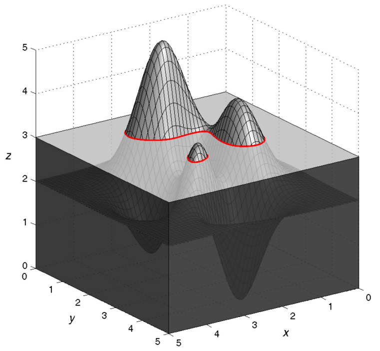
Bei **Kontouren**, **Levelsets**, **Niveaulinien** oder **Höhenlinien** ist der **Output** der Funktion f **konstant**.

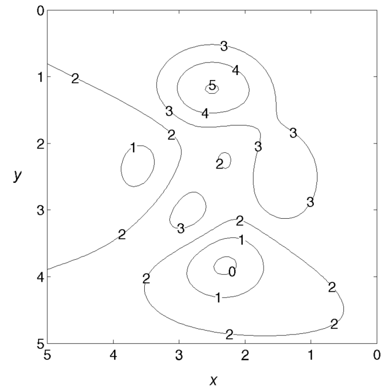
$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \text{const. wobei } \vec{x} \subset \mathbb{D}_f$$

Beispiel: Höhenlinien

Kontouren (Höhenlinien)

- Fläche wird geschnitten mit einer Ebene, die parallel zur x,y-Ebene liegt
- Bestehen aus den $(x;y;z)$ Punkten $(x;y;f(x;y) = z_0)$
- x-Wert ist variabel
- y-Wert ist variabel
- z-Wert ist fixiert $\Leftrightarrow z_0 = 3$





2 Ableitungen, DGL und Gradienten (bi-variat)

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{R} \quad \text{skalar}$$

2.1 Partielle Ableitung

Ableitung einer Partiellen Funktion.

Beispiel: Bi-Variate Funktion

$$f(x,y):\ y \text{ fixieren} = \text{const.} = y_0; \quad x \textbf{ einzige} \text{ freie Variable}$$

Notationen

$$\begin{aligned}
&\text{1. Ordnung:} && f(x;y_0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x;y_0) \\
&\text{2. Ordnung:} && \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \\
& && \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}
\end{aligned}$$

2.1.1 Schwarz-Symmetrie

Wenn f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} & f_{yx} **stetig** (sprungfrei) sind, dann gilt:

$$f_{xy} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

2.2 Gradient (Nabla-Operator)

Spaltenvektor mit partiellen Ableitungen

Kartesisch	**Zylindrisch**	**Sphärisch**
$\text{Vektorfeld} = \underbrace{\nabla}_{\text{"Gradient" / Nabla}} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \vdots\end{pmatrix}$	$\nabla f(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$	$\nabla f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\end{pmatrix}$

2.3 Totale Ableitung

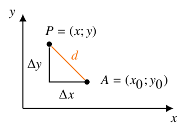
Für Fehlerrechnung benützt, da man hierbei die Abstände von $(x;y;z)$ zu einem festen Punkt $(x_0;y_0;z_0)$ erhält. (relative Koordinaten)

$$D(f;\underbrace{(x_0,y_0,\ldots)}_{\text{Arbeitspunkt}}) : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{1\times 2\text{ Matrix}} \mathbb{R}^1; \text{ "gute Approximation"}$$

$$f(x = x_0 + \Delta x; y = y_0 + \Delta y; \ldots) = (D_{11}; D_{12}) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + f(x_0;y_0) + R_1$$

Wobei R_1 dem "Rest" entspricht. (Ähnlich wie bei Taylorreihe)

$$\frac{R_1}{d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \to 0 \text{ ("gut", "schneller gegen 0 als } d\text{")}$$



$$D(f;(x_0;y_0)) = \left(D_{11} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0); D_{12} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$$

$$= (\nabla f)^{\text{tr}} \text{ wenn } \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig bei } A$$

2.4 Linearapproximation (Tangentialapproximation)

$$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \quad \text{linear in } \Delta x \text{ und } \Delta y$$

2.4.1 Tangentialebene

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + D(f;(x_0;y_0)) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$g(x;y) = f(x_0;y_0) + f_x(x_0;y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0;y_0)\cdot(y - y_0)$$

2.4.2 Tangentialer Anstieg (Totale Differential)

$$\mathrm{d}f \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \quad \text{bezüglich } A = \underbrace{(x_0;y_0)}$$

2.4.3 Differential-Trick (df Trick)

Auf Kontouren sei $\mathrm{d}f = 0$ (Kontourlinien). Daher lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

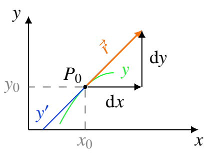
$$f = c = \text{const.} \quad |\,\mathrm{d}(\ldots)$$

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}c \stackrel{!}{=} 0$$

Bzw. für Kontourlinien: $f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y = 0$

2.4.4 Implizite (Steigungs-)Funktion

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x}{f_y \neq 0} \vee x'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y}{f_x \neq 0}$$



2.5 DGL

$$y' = \left(-\frac{f_x}{f_y}\right);\ y(x_0) = y_0$$

right-hand-side (r.h.s.) Funktion

2.6 Richtungselement (Tangentiallinie an Kontouren)

$$\vec{r} = \left(\mathrm{d}x = h; \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = -\frac{f_x}{f_y}\,\mathrm{d}x\right)^{\mathrm{tr}}$$

2.7 Gradientenfeld $\perp$ Kontouren

Skalarprodukt

$$\nabla f \bullet \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

2.8 Taylor Approximation 2. Ordnung

Man erinnert sich an die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n$$

in einer dimension.

Für höhere Dimensionen kann die Taylorreihe 2. Ordnung mit dem Nabla-Operator und der Hess Matrix als

$$f(x,y,\ldots) \approx f(x_0,y_0,\ldots) + \nabla f(x_0,y_0,\ldots)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \vdots\end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\Delta x & \Delta y & \ldots\end{pmatrix}\vec{H}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \vdots\end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

2.9 Richtungs-Ableitung

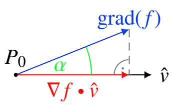
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} \stackrel{!}{=} D(f;(x_0;y_0))\cdot\hat{v} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \mathrm{grad}(f)^{\mathrm{tr}}\cdot\hat{v} = f_x\cdot v_1 + f_y\cdot v_2$$

Beispiel: Richtungs-Ableitung

$$\vec{x}:\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hat{e}_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial \hat{e}_1} = f_x\cdot 1 + f_y\cdot 0 = \underline{\underline{f_x}}$$

2.9.1 Spezialfälle

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\twoheadrightarrow$ rechter Winkel
- $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ extremal
  - $\alpha = 0$ (max): $\nabla f\cdot\hat{v} > 0$ $\twoheadrightarrow$ grad(f) liegt auf $\hat{v}$
  - $\alpha = \pi$ (min): $\nabla f\cdot\hat{v} < 0$ $\twoheadrightarrow$ grad(f) liegt invers auf $\hat{v}$



Trigo: $\nabla f\cdot\hat{v} \wedge \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}$ $\twoheadrightarrow$ $\cos(\alpha)\cdot|\nabla f|$

3 Extrema von Funktionen finden

Stationäritätsbedingung: $\nabla f \stackrel{!}{=} \vec{0}$

3.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**
   $$\nabla f = \begin{pmatrix}f_x\\f_y\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow \begin{matrix}f_x = 0\\ f_y = 0\end{matrix} \quad\Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$
2. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**
   $f_{xx} = \ldots \quad f_{xy} = f_{yx} = \ldots \quad f_{yy} = \ldots$
3. **Determinante Δ der Hesse-Matrix H bestimmen:**
   $\Delta = f_{xx}(x_0;y_0)\cdot f_{yy}(x_0;y_0) - \left(f_{xy}(x_0;y_0)\right)^2$
4. **Auswertung:**

$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0;y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0;y_0) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\Delta > 0$	AND	$f_{xx}(x_0;y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta > 0$	AND	$f_{yy}(x_0;y_0) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\Delta < 0$			$\Longrightarrow$	Sattelpunkt
$\Delta = 0$			?	Multi-variate-Taylor-logik ...

3.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen finden

1. **Gradient von f Null-setzten und kritische Stellen finden:**
   $$\nabla f = \begin{pmatrix}f_x\\f_y\\ \vdots\\ f_t\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow x_0, y_0, \ldots, t_0 \text{ bestimmen}$$
2. **Zweite Partielle Ableitungen für Hesse-Matrix H bestimmen:**
   $$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \ldots & f_{xt}\\ f_{yx} & f_{yy} & \ldots & f_{yt}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{tx} & f_{ty} & \ldots & f_{tt}\end{pmatrix}$$
   - Symmetrien beachten!
   - Nicht doppelt rechnen!
     $\twoheadrightarrow f_{xt} = f_{tx}$
3. **Hesse-Matrix H mit gefundenen Stellen füllen:**
   $$\mathbf{H}(x_0,y_0,\ldots t_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0,\ldots t_0) & f_{xy}(x_0,y_0,\ldots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0,y_0,\ldots t_0)\\ f_{yx}(x_0,y_0,\ldots t_0) & f_{yy}(x_0,y_0,\ldots t_0) & \cdots & f_{yt}(x_0,y_0,\ldots t_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{tx}(x_0,y_0,\ldots t_0) & f_{ty}(x_0,y_0,\ldots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0,y_0,\ldots t_0)\end{pmatrix}$$
4. **Eigenwerte λ_i der Hesse-Matrix bestimmen:**
   $\det(\mathbf{H}(x_0,y_0,\ldots t_0) - \lambda\cdot\mathbf{E}) = 0$
   Nullstellen λ_i finden $\to$ Eigenwerte

   Zur Erinnerung:
   $$\mathbf{E} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}, \quad \lambda\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}$$
   $\mathbf{H}(x_0,y_0,\ldots t_0) - \lambda\cdot\mathbf{E} = \ldots$
   $$\ldots = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0,\ldots t_0) - \lambda & f_{xy}(x_0,y_0,\ldots t_0) & \cdots & f_{xt}(x_0,y_0,\ldots t_0)\\ f_{yx}(x_0,y_0,\ldots t_0) & f_{yy}(x_0,y_0,\ldots t_0) - \lambda & \cdots & f_{yt}(x_0,y_0,\ldots t_0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{tx}(x_0,y_0,\ldots t_0) & f_{ty}(x_0,y_0,\ldots t_0) & \cdots & f_{tt}(x_0,y_0,\ldots t_0) - \lambda\end{pmatrix}$$
5. **Auswertung:**

$\lambda_i < 0 \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\lambda_i > 0 \ \forall i$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$	$\Longrightarrow$	Sattelpunkt

Erklärung:
- $\lambda_i < 0 \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind negativ
- $\lambda_i > 0 \ \forall i \Leftrightarrow$ Alle λ_i sind positiv

3.3 Lokales oder Globales Extremum

Für eine beliebige die Funktion $f(x,y,\ldots,t)$ gilt:

$f(x,y,\ldots,t) \leq M_{\max}$	$\forall(x,y,\ldots,t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Maximum
$f(x,y,\ldots,t) > M_{\max}$	$\exists(x,y,\ldots,t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Maximum
$f(x,y,\ldots,t) \geq M_{\min}$	$\forall(x,y,\ldots,t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	globales Minimum
$f(x,y,\ldots,t) < M_{\min}$	$\exists(x,y,\ldots,t) \in \mathbb{D}_f$	$\Rightarrow$	kein globales Minimum

$M_{\max}$: grösstes lokales Maximum
$M_{\min}$: kleinstes lokales Minimum

3.4 Extrema von Funktionen zweier Variablen mit NB finden

1. **Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:**
   Standardform: $n(x,y) \stackrel{!}{=} 0$ — Nebenbedingung: $x + y = 1$
   Standardform der Nebenbedingung: $x + y - 1 = 0$
2. **Lagrange-Funktion L aufstellen:**
   $\mathrm{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\cdot n(x,y)$ — Am besten gleich ausmultiplizieren
3. **Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzten und kritische Stellen finden:**
   $$\nabla\mathrm{L} = \begin{pmatrix}\mathrm{L}_x\\ \mathrm{L}_y\\ \mathrm{L}_\lambda\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow x_0 \text{ und } y_0 \text{ bestimmen}$$

4. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $\quad$ $L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots$

$L_{xx} = \dots$ $\quad$ $L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots$

$L_{yy} = \dots$ $\quad$ $L_{xy} = L_{yx} = \dots$

5. **Geänderte Hesse Matrix $\overline{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:**

$$\overline{\mathbf{H}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}(x_0,y_0) & L_{\lambda x}(x_0,y_0) & L_{\lambda y}(x_0,y_0) \\ L_{x\lambda}(x_0,y_0) & L_{xx}(x_0,y_0) & L_{xy}(x_0,y_0) \\ L_{y\lambda}(x_0,y_0) & L_{yx}(x_0,y_0) & L_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_x(x_0,y_0) & n_y(x_0,y_0) \\ n_x(x_0,y_0) & L_{xx}(x_0,y_0) & L_{xy}(x_0,y_0) \\ n_y(x_0,y_0) & L_{yx}(x_0,y_0) & L_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

6. **Determinante der geänderten Hesse Matrix bestimmen:**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = \dots$

7. **Auswertung**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = 0$	$\Longrightarrow$	keine Aussage möglich

3.5 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit NB finden

1. **Nebenbedingung (NB) in Standardform bringen:**

Standardform: $n(x, y, ..., t) \stackrel{!}{=} 0$

2. **Lagrange-Funktion L aufstellen:**

$L(x, y, ..., t, \lambda) = f(x, y, ..., t) + \lambda \cdot n(x, y, ..., t)$ Am besten gleich ausmultiplizieren

3. **Gradient der Lagrange-Funktion L Null-setzten und kritische Stellen finden:**

$$\nabla L = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ \vdots \\ L_t \\ L_\lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x_0, y_0, ..., t_0 \text{ bestimmen}$$

4. **Zweite Partielle Ableitungen bestimmen:**

$L_{\lambda\lambda} \stackrel{!}{=} 0$ $\quad$ $L_{\lambda x} = L_{x\lambda} = n_x = \dots$ $\quad$ $L_{xy} = L_{yx}$

$L_{xx} = \dots$ $\quad$ $L_{\lambda y} = L_{y\lambda} = n_y = \dots$ $\quad$ $L_{xt} = L_{tx}$

$L_{yy} = \dots$ $\quad$ $\vdots$ $\quad$ $L_{yt} = L_{ty}$

$\vdots$ $\quad$ $L_{\lambda t} = L_{t\lambda} = n_t = \dots$ $\quad$ $\vdots$

$L_{tt} = \dots$

5. **Geänderte Hesse Matrix $\overline{\mathbf{H}}$ aufstellen und kritische Stellen einsetzen:**

$$\overline{\mathbf{H}}({\color{red}x_0, y_0, \dots t_0}) = \begin{pmatrix} L_{\lambda\lambda}({\color{red}\dots}) & L_{\lambda x}({\color{red}\dots}) & L_{\lambda y}({\color{red}\dots}) & \cdots & L_{\lambda t}({\color{red}\dots}) \\ L_{x\lambda}({\color{red}\dots}) & L_{xx}({\color{red}\dots}) & L_{xy}({\color{red}\dots}) & \cdots & L_{xt}({\color{red}\dots}) \\ L_{y\lambda}({\color{red}\dots}) & L_{yx}({\color{red}\dots}) & L_{yy}({\color{red}\dots}) & \cdots & L_{yt}({\color{red}\dots}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{t\lambda}({\color{red}\dots}) & L_{tx}({\color{red}\dots}) & L_{ty}({\color{red}\dots}) & \cdots & L_{tt}({\color{red}\dots}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_x({\color{red}\dots}) & n_y({\color{red}\dots}) & \cdots & n_t({\color{red}\dots}) \\ n_x({\color{red}\dots}) & L_{xx}({\color{red}\dots}) & L_{\lambda y}({\color{red}\dots}) & \cdots & L_{xt}({\color{red}\dots}) \\ n_y({\color{red}\dots}) & L_{yx}({\color{red}\dots}) & L_{yy}({\color{red}\dots}) & \cdots & L_{yt}({\color{red}\dots}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_t({\color{red}\dots}) & L_{tx}({\color{red}\dots}) & L_{ty}({\color{red}\dots}) & \cdots & L_{tt}({\color{red}\dots}) \end{pmatrix}$$

6. **Determinante der geänderten Hesse Matrix bestimmen:**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = \dots$

7. **Auswertung**

$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) > 0$	$\Longrightarrow$	lokales Maximum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) < 0$	$\Longrightarrow$	lokales Minimum
$\det\left(\overline{\mathbf{H}}\right) = 0$	$\Longrightarrow$	keine Aussage möglich

3.6 Weiszfeld-Iteration

Der Weiszfeld-Algorithmus ist ein iteratives Verfahren zur Berechnung des geometrischen Medians eines Punktemenge im $\mathbb{R}^m$. Der geometrische Median ist der Punkt $\vec{x}$ der die Summe der gewichteten euklidischen Abstände zu gegebenen Punkten $\vec{p}_j$ minimiert:

$$\boxed{f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} r_j w_j = \sum_{j=1}^{N} \| \vec{x} - \vec{p}_j \| \, w_j \rightarrow min!}$$

Dabei ist $r_j = \| \vec{x} - \vec{p}_j \|$ der euklidische Abstand und $w_j \geq 0$ das **Gewicht** des Punktes $\vec{p}_j$. Statt die Minimumsbedingung direkt zu lösen, nutzt man die stationäre Bedingung:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \frac{\vec{x} - \vec{p}_j}{\| \vec{x} - \vec{p}_j \|} w_j = \vec{0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{x}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{w_j}{\|\vec{x}^{(k)} - \vec{p}_j\|} \vec{p}_j}{\sum_{j=1}^{N} \frac{w_j}{\|\vec{x}^{(k)} - \vec{p}_j\|}}}$$

Im oberen Schritt sieht man die Umformung von der stationären Bedingung zur Weiszfeld-Iteration. $\vec{x}^{(k)}$ sei der aktuelle Schätzwert. $\vec{x}^{(k+1)}$ ist der folgende Schätzwert.

4 Support Vector Machine (SVM)

Die Support Vector Machine kann verwendet werden, um ein Modell für das Zuordnen von Daten zu entwickeln. Dadurch wird ein Satz von Punkten, deren Klassifizierung bekannt ist, so linear getrennt, dass der Abstand von der trennenden Geraden zu den beiden Punktegruppen maximal wird. Es resultiert eine einfache Gleichung, mit der sich neue Daten klassifizieren lassen.

4.1 Linear Trennbare Daten

4.1.1 Allgemeines

Datenpunkte: (2D Beispiel)

$A : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_1}; y_1), \quad B : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_2}; y_2), \quad C : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_3}; y_3), \quad \cdots, \quad N : (\underbrace{(x_1, x_2)}_{\vec{x}_n}; y_n)$

$\vec{x}_j$ sind Datenvektoren

$y_j \in \{\pm 1\}$ klassifiziert die jeweiligen Datenvektoren

Hyperebenen:

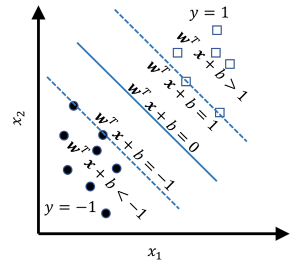
$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b = 0}$

$\vec{w}$: Normalenvektor, $\vec{w} \in \mathbb{R}^d$ und $\vec{w} \neq 0$

b: Konstante, $b \in \mathbb{R}$

Dimension der Hyperebene $= d - 1$

Abstand der Hyperebene zum Ursprung: $\frac{|b|}{|\vec{w}|}$



Klassifizierung:

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b > 0} \Rightarrow \vec{x}$ gehört zur Klasse $y = +1$

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x} + b < 0} \Rightarrow \vec{x}$ gehört zur Klasse $y = -1$

Klassifizierung der Trainigsdaten:

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \geq 0} \Rightarrow \vec{x}_j$ gehört zur Klasse $y = +1$

$\boxed{\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b \leq 0} \Rightarrow \vec{x}_j$ gehört zur Klasse $y = -1$

Zielfunktion:

$$\boxed{\frac{2}{|\vec{w}|} = \frac{2}{w}}$$

4.1.2 Das primale Optimierungsproblem

$$\boxed{\frac{1}{2}\vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2}\left|\vec{w}\right|^2 = \frac{1}{2}w^2 \rightarrow \text{min!} \quad \text{s.t.} \quad \left(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b\right) y_j \geq 1 \quad (j = 1, \cdots, N)}$$

4.1.3 Das duale Optimierungsproblem

Nebenbedingung:

$$\boxed{\underbrace{1 - \left(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b\right) y}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \leq 0 \Leftrightarrow g_j(\vec{w}^{tr}, b) \leq 0 \quad (j = 1, \cdots, N)}$$

Lagrange-Funktion:

Zusammengesetzt aus dem primalen Problem und den Nebenbedingungen.

$$\begin{aligned} L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha}) &= L(w_1, w_2, ..., w_d, b, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \\ &= \tfrac{1}{2}\vec{w}^{tr} \cdot \vec{w} + \textstyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(\underbrace{1 - \left(\vec{w}^{tr} \cdot \vec{x}_j + b\right) y_j}_{g_j(\vec{w}^{tr}, b)} \right) \end{aligned}$$

Stationaritätsbedingungen:

Aus der Bedingung, dass grad(L) $= 0$ sein muss, lassen sich folgende Formeln ableiten:

$$\boxed{\text{grad}_{\{\vec{w}^{tr}, b\}}\left(L(\vec{w}^{tr}, b, \vec{\alpha})\right) = \vec{0}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{w} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \vec{x}_j} \text{ und } \boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j = 0}$$

Das duale Problem:

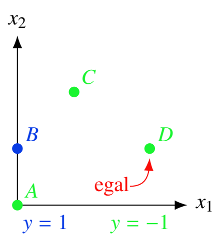
Die oben erhaltenen Summen können nun in die Lagrange-Fkt. eingesetzt werden. Daraus entsteht

$$\boxed{L(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^{N} \alpha_j \alpha_{j'} y_j y_{j'} \vec{x}_j^{tr} \cdot \vec{x}_{j'}}_{= \frac{1}{2}\vec{w}^{tr} \cdot \vec{w}} \quad \rightarrow \quad \text{max!} \quad \text{s.t.} \quad \alpha_j \geq 0 \wedge \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j = 0}$$

Vorgehen zum lösen des dualen Optimierungsproblems:

1. **Skizze mit Datenpunkten erstellen:**

- Einzelne Datenpunkte klassenweise farblich hervorheben
- Falls ein Datenpunkt der gleichen Klasse weit weg von den anderen ist
  $\Rightarrow$ diesen vergessen, da sein $\alpha = 0$ sein wird



2. **Nebenbedingungen, Es muss gelten:**
   - **a:** $\boxed{\alpha_j \geq 0}$
   - **b:** $\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j = 0}$

   Nach einem α unstellen und anschliessend jenes α (damit die Nebenbedingung miteinbezogen wird) in der Lagrange-Funktion ersetzen
3. **Kernel-Matrix aufstellen:**

$$\boxed{K\left(\vec{x}^{\text{tr}}; \vec{x}\right) = \vec{x} \bullet \vec{x}}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots \\ \hline \vec{x}_1^{\,tr} & K(\vec{x}_1^{\,tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_1^{\,tr}; \vec{x}_2) & \cdots \\ \vec{x}_2^{\,tr} & K(\vec{x}_2^{\,tr}; \vec{x}_1) & K(\vec{x}_2^{\,tr}; \vec{x}_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

   - Einträge sind die Ergebnisse der Skalarprodukte
4. **Lagrange-Funktion aufstellen:**

$$\boxed{\mathrm{L}(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^{N} \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \vec{x}_j \bullet \vec{x}_{j'} \quad \rightarrow \quad \text{max!}}$$

   - **2. b** und **3** brauchen
5. **Alle α finden durch Stationaritätsbedingung**

$$\boxed{\nabla \mathrm{L} = \vec{0}}$$

   $\Rightarrow$ ersetztes α mit gefundenen α berechnen
6. **$\vec{w}$ berechnen:**

$$\boxed{\vec{w} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j \vec{x}_j}$$

7. **Konstante b berechnen:**
   Datenpunkte mit der Klasse $y = 1$ oder $y = -1$ wählen und einsetzen
   - **Variante 1:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = +1$
     $\boxed{\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_{\dots} + b = 1} \Leftrightarrow \boxed{b = 1 - \vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots}$
   - **Variante 2:** Stützvektor-Datenpunkt mit $y = -1$
     $\boxed{\vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_{\dots} + b = -1} \Leftrightarrow \boxed{b = -1 - \vec{w}^{\text{tr}} \cdot \vec{x}_{\dots} = \dots}$

4.1.4 Euklidische Norm

Die euklidische Norm, ist eine in der Mathematik häufig verwendete Vektornorm. Im zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum entspricht die euklidische Norm der anschaulichen Länge oder dem Betrag eines Vektors und kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

$$\boxed{\left|\vec{v_d}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots + d^2}}$$

4.2 Nicht linear Trennbare Daten

Sollte ein Datensatz von nicht linear trennbaren Datenpunkten vorliegen, so muss dieser durch eine Transformation linear trennbar gemacht werden. Dadurch werden die Punkte oft in höhere Dimensionen gebracht. Das Finden einer geeigneten Transformation liegt nicht im Ramen dieses Moduls.
Der einzige Unterschied zu der Methode zum linearen trennen von Datenpunkten ist dann, dass stat mit den Datenpunkten $\vec{x}_i$ mit deren durch φ transformierten gegenstücken $\vec{\varphi}(\vec{x}_i)$ gerechnet wird.

4.2.1 Transformiertes duales Optimierungsproblem

Nebenbedingungen, Es muss gelten:

a: $\boxed{\alpha_j \geq 0}$

b: $\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j = 0}$

$$\boxed{\mathrm{L}(\vec{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,j'=1}^{N} \alpha_j \cdot \alpha_{j'} \cdot y_j \cdot y_{j'} \cdot \underbrace{\vec{z}_j \bullet \vec{z}_{j'}}_{\text{Kernel}} \quad \rightarrow \quad \text{max!}}$$

4.2.2 Kernelfunktionen ("Kernel-Trick")

$$\boxed{K\left(\vec{x}_j; \vec{x}_{j'}\right) = \vec{z}_j \bullet \vec{z}_{j'} = \vec{\varphi}(\vec{x}_j) \bullet \vec{\varphi}(\vec{x}_{j'})}$$

$$\boxed{\vec{w} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}_j)}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j \cdot K\left(\vec{x}_j; \vec{x}^*\right) + b > 0 \Longrightarrow \vec{x}^*} \text{ gehört zur Klasse } y = +1$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot y_j \cdot K\left(\vec{x}_j; \vec{x}^*\right) + b < 0 \Longrightarrow \vec{x}^*} \text{ gehört zur Klasse } y = -1$$

$\vec{x}^*$ steht für Test-Daten

Lösungsweg: gleiches Vorgehen wie beim linearen Fall.

5 Koordinatensysteme

5.1 2D Koordinatensysteme

Neben den Kartesischen Koordinatensystemen kommen in zweidimensionalen Räumen auch Polare Koordinatensysteme zum Einsatz. Die beiden Systeme können mit Hilfe der Trigonometrie in einander überführt werden.

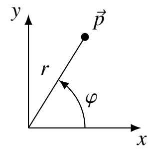
5.1.1 Umrechnung Kartesisch ↔ Polar

Polar zu Kartesisch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Kartesisch zu Polar

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$



Dabei ist zu beachten, dass $\tan^{-1}$ nur werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für φ jedoch $\varphi \in [0, \pi]$ gelten soll. φ wird also, je nach dem in welchem Quadranten sich $\vec{p}$ befindet, nach folgendem Schema berechnet:

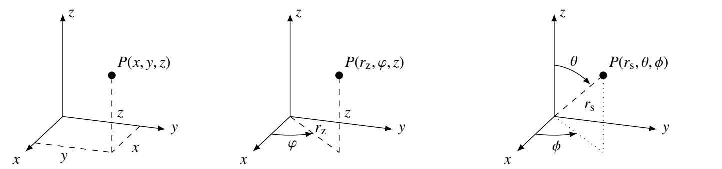
$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$
$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$2\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Um eine ganzes Integral vom einen Koordinatensystem ins andere zu überführen, muss zum einen die Funktion $f(x, y)$ zu $f(r, \varphi)$ (oder umgekehrt) umgeschrieben, sowie die differentiale angepasst werden. Hier dafür einige gängige Elemente:

	Kartesisch	**Polar**
x-Achsenelement	$\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
y-Achsenelement	$\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}x = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$
Linienelement	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y^2$	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$
Flächenelement	$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

5.2 3D Koordinatensysteme

Kartesisch — Zylindrisch — Sphärisch



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_z \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_s \sin\theta \\ \phi \\ r_s \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_s \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \mathrm{sgn}(y) \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r_z^2 + z^2} \\ \tan^{-1} \frac{r_z}{z} \\ \varphi \end{pmatrix}$$

5.2.1 Umrechnen zwischen Koordinatensystemen

Beim Umrechnen zwischen den Koordinatensystemen gelten im Grunde genommen die obigen Formeln. Dabei muss jedoch in einigen Fällen auf die Wertebereiche von den trigonometrischen Funktionen rücksicht genommen werden.

Zylindrisch → Kartesisch:
Sphärisch → Kartesisch:
Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Kartesisch → Zylindrisch:

Der Parameter ϕ wird analog zum zweidimensionalen Fall, je nach dem in welchem Quadranten sich P befindet, nach dem Schema rechts berechnet.

$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$\tan^{-1} \frac{y}{x}$
$\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$2\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

Sphärisch → Zylindrisch:
Kartesisch → Sphärisch:
Keine weiteren Berücksichtigungen nötig, die Berechnung erfolgt nach der Formel oben.

Zylindrisch → Sphärisch:

Auch hier macht der $\tan^{-1}$ Probleme, da er Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ liefert, für θ jedoch $\theta \in [0, \pi]$ gelten soll. Je nach dem, ob P sich oberhalb oder unterhalb der xy-Ebene befindet, wird θ wie rechts berechnet.

oberhalb der xy-Ebene (z)	$\tan^{-1} \frac{r_z}{z}$
unterhalb der xy-Ebene	$\pi + \tan^{-1} \frac{r_z}{z}$

6 Integration

6.1 Allgemeines

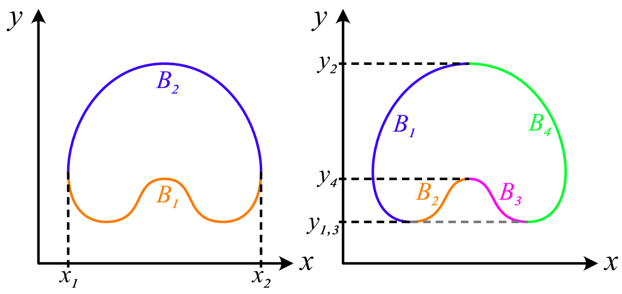
Unter bi- oder multivariater Integration versteht man Integrale, welche sich über zwei oder mehr unabhängige Variablen erstrecken. Sie haben die Form:

$$\int_{\Omega} f(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \iint \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \quad \mid \Omega \in \mathbb{R}^n$$

6.2 Normalbereiche

Unter einem Normalbereich versteht man einen Bereich, welcher in allen Dimensionen so begrenzt ist, dass eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für jeden Eingangsvektor jeweils nur einen Funktionswert zurückgibt.

Beispiel: Normalbereich in 2D



6.3 Satz von Fubini (Satz von Tonelli)

Der Satz von Fubini besagt, dass die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden kann, sofern die Funktion integrierbar ist.

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

6.4 Jacobi Matrix und Determinante

Die Jacobi-Matrix besteht aus den partiellen Ableitungen eines Vektorfelds nach den Parametern.

$$\mathbf{J}_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m \end{pmatrix}$$

Anhand der Jacobi-Matrix kann die Längen- und Flächenänderung bei einer Transformation berechnet werden.

6.4.1 Transformation

Koordinatensysteme können mit der Jacobi-Matrix allgemein in andere Systeme transformiert werden.
$T : (u, v) \xrightarrow{\mathrm{T}} (x(u, v), y(u, v))$
Eine Transformation könnte dann beispielsweise wie folgt aussehen:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \det(\mathbf{J}_T(u, v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

dabei ist $\det(\mathbf{J}_T(u, v))$ der Skalierungsfaktor.

6.4.2 Längenverzerrung

Die Längenverzerrung in eine Richtung x_k ist definiert als: $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}\right| = |\text{k. Spalte von } \mathbf{J}|$

6.4.3 Elementverzerrung (Flächen- / Volumenverzerrung)

Die Elementverzerrung ist definiert als: $\mathrm{d}V' = |\det \mathbf{J}| \cdot \mathrm{d}V$

6.4.4 Längenelement

Ein Längenelement lässt sich ebenfalls aus der Jacobi Matrix berechnen:

$$\mathrm{d}\vec{x}^2 = \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = (\mathrm{d}\vec{u})^{\mathrm{tr}} \cdot (\mathbf{J}^{\mathrm{tr}} \cdot \mathbf{J}) \cdot (\mathrm{d}\vec{u})$$

6.5 Erster Metrischer Tensor

Der 1. metrische Tensor (oder auch **erste Fundamentalmatrix**, **erste Fundamentalform**, **metrische Grundform**) beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Kurve oder Fläche im Parameterraum zum Raum, in dem sie sich befindet (z.B. 2D-Fläche im 3D-Raum). Er besteht aus den Skalarprodukten der partiellen Ableitungsvektoren nach den Parametern.

$$\boxed{g_{ij} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_i} \bullet \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_j} = \mathbf{J}^{\mathrm{tr}} \cdot \mathbf{J}}$$

Folglich ergibt sich die Matrix: $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

Die Einträge dieser Matrix werden benötigt, um Längen- oder Flächen(elemente) zu berechnen. Anhand der Einträge kann auch ausgesagt werden, ob eine Längen, Flächen und/oder Winkelerhaltung vorliegt:

<u>Längenerhaltung</u>	<u>Flächenerhaltung</u>	<u>Winkelerhaltung</u>
$g_{ij} = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\det(g_{ij}) = 1$	Diagnonale 1. Fundamentalform: $(g_{11} = g_{22}) \wedge (g_{12} = g_{21} = 0)$

Beispiel: Längenberechnung

Gegeben: Flächenkurve als $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

Totales Differential bilden: $\mathrm{d}s^2 = \dot{\vec{x}} = \vec{x}_u \cdot \dot{u} + \vec{x}_v \cdot \dot{v}$

Für Längenelement Pythagoras anwenden: $(\dot{\vec{x}})^2 = g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2$

Das einzelne Längenelement ist somit: $\mathrm{d}s = \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g_{22}\,\mathrm{d}v^2}$

$\mathrm{d}s$ integrieren, für Gesamtlänge: $s = \int_a^b \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}\,\mathrm{d}t$

Beispiel: Flächenberechnung

Es sei eine parametrisierte Fläche als Funktion $\vec{S}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ gegeben. Das Flächenelement lässt sich aus einem Parallelogramm der beiden partiellen Ableitungsvektoren bilden, was dem Betrag des Kreuzproduktes bzw. der Determinante entspricht:

$$\mathrm{d}S = \sqrt{|\det |g_{ij}||}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|\frac{\partial \vec{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Daraus ergibt sich die Fläche über das Doppelintegral:

$$S = \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

6.6 Längenintegrale

6.6.1 Längenelemente

$$\mathrm{d}s^2 = \underbrace{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2}_{\text{Sphärisch}}$$

6.6.2 Kurvenintegrale 1. Art: Länge einer Funktion

Die Bestimmung der Länge einer Kurve kann in folgende Schritte unterteilt werden:

1. **<u>Funktion in die Parameterdarstellung überführen (sofern nicht gegeben):</u>**
   Dafür wird einer der Parameter (z.B. x oder θ) $= t$ gesetzt und die anderen Parameter ebenfalls als Funktion von t ausgedrückt.
2. **<u>Integral aufstellen:</u>**
   Das Integral in der Form $\iiint \mathrm{d}s$ wird mit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$ erweitert.
3. **<u>Das Integral lösen</u>**

Beispiel: Längenintegral in kartesischen Koordinaten

Es soll die Länge der Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ auf dem Interval $[t_1, t_2]$ bestimmt werden. Dazu werden die oben genannten Schritte abgearbeitet:

1. **Funktion in die Parameterdarstellung überführen**
   Hier nicht nötig.
2. **Integral aufstellen**
   $\iiint \mathrm{d}s = \iiint \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$
3. Integral lösen
   $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ und $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ausrechnen, einsetzen, integrieren.

6.6.3 Kurvenintegral 2. Art

Beim Kurvenintegral 2. Art wird nicht die tatsächliche Länge einer Funktion, sondern die Länge deren Projektion auf eine Achse bestimmt. Dazu wird stat über alle Koordinatenrichtungen nur über eine der Koordinaten integriert.
Es folgen einige Paare von Kurvenintegralen 2. Art entlang einer Kontur K für Funktionen in expliziter Form und in Parameterdarstellung.

<u>2D, Projektion auf x:</u>

$$\int_K f(x)dx = \int_{t_0}^{T} \vec{f}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$$

<u>3D, Projektion auf x:</u>

$$\int_K f(x,y)dx = \int_{t_0}^{T} \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) \cdot dt$$

6.7 (Ober-)Flächenintegrale

6.7.1 Flächenelemente

Das Bestimmen der Flächenelemente ist in drei Dimensionen nicht wie bei den Längen- und Volumenelementen pauschal möglich. Dies, da jeweils nur über zwei der drei Koordinaten integriert werden muss. Ein einfaches Verfahren für das Berechnen von Flächeninhalten schafft jedoch abhilfe.

6.7.2 Flächeninhalt einer Oberfläche

Für das Berechnen der Oberflächen von Funktionen des Typs $f(a,b)$ in 3D kann die Formel

$$S = \int_B \int_A \sqrt{(f_a)^2 + (f_b)^2 + 1}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$$

verwendet werden. Dabei repräsentieren a und b die beiden Koordinatenrichtungen, in denen sich die Fläche erstreckt. f_a und f_b sind die partiellen Ableitungen der Funktion $f(a,b)$ nach a bzw. b.

Beispiele zur Veranschaulichung:
Es soll die Oberfläche der Funktion $f(x,y)$ im Bereich $x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2]$ bestimmt werden. Das entsprechende integral lautet:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

6.7.3 Allgemeine Wendelfläche

Die allgemeine Wendelfläche rotiert und verschiebt eine parametrisierte 3D Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tr im Raum.
Parametrisierung bei vertikaler Rotationsachse und vertikaler Verschiebungsrichtung (z-Achse):

$$\vec{S}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ z(t) + c \cdot \varphi \end{pmatrix} \quad (t_1 \leq t \leq t_2, \wedge \varphi \in \mathbb{R}\,, c \equiv const.)$$

Bei $c = 1$ $\twoheadrightarrow$ Voller Meter bei einer Kurve

6.8 Volumenintegrale

6.8.1 Volumenelemente

$$\mathrm{d}V = \underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\text{Kartesisch}} = \underbrace{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}_{\text{Zylindrisch}} = \underbrace{r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}_{\text{Sphärisch}}$$

6.9 Anwendungsformeln 2D (Doppelintegrale)

Allgemein	**Kartesische Koordinaten**	**Polarkoordinaten**
Flächeninhalt einer ebenen Figur F		
$A = \iint_F \mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Oberfläche einer Ebene in drei Dimensionen		
$S = \iint_A \frac{1}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}A$	$= \int_X \int_Y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R \sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Volumen eines Zylinders		
$V = \iint_A z\,\mathrm{d}A$	$= \int_X \int_Y z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R zr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf die x-Achse		
$I_x = \iint_F y^2\,\mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y (y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R (r^2 \sin^2\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Trägheitsmoment einer ebenen Figur F, bezogen auf den Pol $(0,0)$		
$I_x = \iint_F r^2\,\mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R (r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Masse einer ebenen Figur F mit Dichtefunktion ϱ		
$m = \iint_F \varrho\,\mathrm{d}F$	$= \int_X \int_Y \varrho(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$	$= \int_\Phi \int_R \varrho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$
Koordinaten des Schwerpunkts S einer homogenen, ebenen Figur F		
$x_S = \frac{\iint_F x\,\mathrm{d}F}{A}$ $y_S = \frac{\iint_F y\,\mathrm{d}F}{A}$	$= \frac{\int_X \int_Y x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int_X \int_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$ $= \frac{\int_X \int_Y y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{\int_X \int_Y \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$	$= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\int_\Phi \int_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$ $= \frac{\int_\Phi \int_R r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}{\int_\Phi \int_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi}$

Hinweis: Damit die Flächenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziebar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

6.10 Anwendungsformeln 3D (Dreifachintegrale)

Allgemein	**Kartesische Koordinaten**	**Zylinderkoordinaten**	**Kugelkoordinaten**
Oberfläche eines Körpers K (Senkrecht zu $\hat{a}_r$)			
$S = \iint_K \mathrm{d}S$	*Siehe metrischer Tensor*	$= \iint r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$	$= \iint r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$
Volumen eines Körpers K			
$V = \iiint_K \mathrm{d}V$	$= \iiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Trägheitsmoment eines Körpers K, bezogen auf die Z-Achse			
$I_z = \iiint_K r^2\,\mathrm{d}V$	$= \iiint (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint (r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint (r^2 \sin^2\theta) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Masse eines Körpers K mit der Dichtefunktion ϱ			
$M = \iiint_K \varrho\,\mathrm{d}V$	$= \iiint \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$= \iiint \varrho(r,\varphi,z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$	$= \iiint \varrho(r,\theta,\phi) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$
Koordinaten des Schwerpunktes S eines homogenen Körpers K			
$x_S = \frac{\iiint_K x\,\mathrm{d}V}{V}$ $y_S = \frac{\iiint_K y\,\mathrm{d}V}{V}$ $z_S = \frac{\iiint_K z\,\mathrm{d}V}{V}$	$= \frac{\iiint (x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$	$= \frac{\iiint (r\cos\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{V}$ $= \frac{\iiint (z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{V}$	$= \frac{\iiint (r\sin\theta\cos\phi) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$ $= \frac{\iiint (r\sin\theta\sin\phi) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$ $= \frac{\iiint (r\cos\theta) r^2 sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r}{V}$

Hinweis: Damit die Volumenelemente leichter erkennbar und die Formeln entsprechend besser nachvollziebar sind, wurden sie teilweise nicht vollständig vereinfacht.

7 Vektoranalysis

7.1 Vektorfelder

Das Vektorfeld

$$\vec{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

weist jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zu. Die Notation eines Vektorfelds ist gleich deren eines Vektors, wobei Vektorfelder üblicherweise gross geschrieben werden. Weiter kann auch $\vec{V}(\vec{x})$ geschrieben werden, wobei $\vec{x}$ der Stützvektor eines beliebigen Punktes ist.

7.2 Gradient

Wir erinnern uns an den Nabla- oder Del-Operator aus Kapitel 2.2 als Spaltenvektor der verschiedenen Raumableitungen:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T$$

Der Gradient eines Potentialfelds $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet sich als

$$\nabla \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T \cdot \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}^T = \vec{F}(\vec{x})$$

und resultiert in einem Vektorfeld.

- Wird als Potential das elektrische Potential verwendet, entspricht $\vec{F}$ dem (negativen, skalierten) elektrischen Feld.
- Wird als Potential eine Höhe verwendet, entspricht $\vec{F}$ der negativen Hangabtriebskraft.
- Der Gradient kann als mehrdimensionale Ableitung verstanden werden.
- Der Gradient steht senkrecht auf allen Kontouren unz zeigt in Richtung hoher wert.
- Die Multiplikation $\nabla \cdot \phi$ wird normalerweise als $\nabla\phi$ abgekürzt.
- Zudem kann der Gradient auch als grad ϕ geschrieben werden.

7.2.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\boxed{\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Zylindrisch:

$$\boxed{\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

Sphärisch:

$$\boxed{\text{grad } V = \nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \end{pmatrix}}$$

7.3 Vektorgradient

Die Definition des Gradienten eines Vektorfeldes $\vec{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lautet

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}} = \vec{a} \bullet \text{grad } \vec{V},$$

wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor und $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{a}}$ die Richtungsableitung von $\vec{V}$ nach $\vec{a}$ ist. Daraus kann man schliessen, dass der Vektorgradient als

$$\text{grad } \vec{V} = \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \quad \left(= \nabla^T \bullet \vec{V}\right)$$

berechnet werden kann.

- $\nabla\vec{V}$ entspricht der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$. Mit dieser kann die Hesse-Matrix einer skalaren Funktion F (siehe Kap. 3) bestimmt werden:

$$\mathbf{H}(F) = \mathbf{J}^T(\nabla F) = (\text{grad grad } F)^T$$

- Der Vektorgradient wird als $\nabla\vec{V}$ geschrieben, da die Notation $\nabla^T \bullet \vec{V}$, die den tatsächlichen Rechenweg beschreibt, etwas umständlich ist.
- Die Notation $\nabla \bullet \vec{V}$ ist nicht nur falsch, sondern zudem bereits durch die Divergenz besetzt.

7.4 Divergenz (Volumenableitung)

Die Divergenz oder Volumenableitung eines Vektorfelds

$$\begin{aligned}\nabla \bullet \vec{V}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix}^T \bullet \begin{pmatrix}v_1(\vec{x}) & v_2(\vec{x}) & \dots & v_n(\vec{x})\end{pmatrix}^T \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x})\end{aligned}$$

ist ein Skalarfeld, das beschreibt, wie stark das Vektorfeld an einem gegebenen Punkt "nach aussen gerichtet" ist.

- Wird als Vektorfeld die Fliessgeschwindigkeit einer Flüssigkeit eingesetzt, so entspricht die Divergenz dem Fluss aus einem Punkt heraus.
  - An Punkten mit positiver Divergenz fliesst Flüssigkeit hinaus (Quelle)
  - An Punkten mit negativer Divergenz fliesst Flüssigkeit hinein (Senke)
- Wird das E-Feld eingesetzt, so entspricht die Divergenz der Ladungsdichte.
  - Pos. Ladungsdichte entspricht pos. Divergenz, bewirkt eine Quelle im E-Feld.
  - Neg. Ladungsdichte entspricht neg. Divergenz, bewirkt eine Senke im E-Feld.
- Das Skalarprodukt sollte zwingend $\nabla \bullet \vec{V}$ ausgeschreiben werden, da sonst Verwechslungsgefahr mit dem Vektorgradienten besteht.
- Die Notation $\text{div}\,\vec{V}$ ist ebenfalls gebräuchlich.

Eine alternative und gut visualisierbare Definition der Divergenz, ist in zwei dimensionen

$$\text{div}\,\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \lim_{A\to 0} \frac{\oint_{C=\partial A} \vec{V} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}s}{A},$$

wobei A eine Fläche mit den Normalen $\hat{n}$ und C dessen Kontur darstellt.
Verallgemeinert für die Anwendung in mehr als 2 Dimensionen lautet die Definition

$$\nabla \bullet \vec{V} = \text{div}\,\vec{V} = \lim_{\Omega\to 0} \frac{\oint_{C=\partial\Omega} \vec{V} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}s}{\Omega},$$

wobei Ω ein Bereich im Raum $\mathbb{R}^n$ und C dessen Kontur in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.

7.4.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\boxed{\text{div}\,\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

Zylindrisch:

$$\boxed{\text{div}\,\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

Sphärisch:

$$\boxed{\text{div}\,\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta \cdot V_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}}$$

7.5 Laplace Operator Δ

Der Laplaceoperator ist nichts anderes als die Divergenz des Gradienten eines Skalarfelds und vergleichbar mit der zweiten Ableitung. Folglich gilt

$$\Delta V(x_1 \dots x_n) = \nabla \bullet (\nabla V(x_1 \dots x_n)) = \nabla^2 V(x_1 \dots x_n) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2},$$

wobei das Resultat ein Skalarfeld ist.

7.5.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\boxed{\Delta V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Zylindrisch:

$$\boxed{\Delta V(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

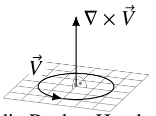
Sphärisch:

$$\boxed{\Delta V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}}$$

7.6 Rotation eines Vektorfelds (rot, curl)

Die Rotation eines Vektorfelds, auch Curl genannt, beschreibt, wie stark ein Vektorfeld um einen gegebenen Punkt "rotiert" und wird als

$$\text{rot}\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}V_x \\ V_y \\ V_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$



berechnet. Der resultierende Vektor ist dabei die Rotationsachse, wobei die Rechte-Hand-Regel gilt.
Wie bei der Divergenz kann auch hier zur Hilfe der Verständlichkeit ein Limitsatz als Definition beigezogen werden. So sei

$$\nabla \times \vec{V} = \text{rot}\,\vec{V} = \hat{n} \lim_{S\to 0} \frac{\oint_{C=\partial S} \vec{V} \bullet \mathrm{d}\vec{l}}{S},$$

wobei S ein planare Testfläche mit normale $\hat{n}$ und C dessen Kontur ist.
Der Curl ist grundsätzlich nur in drei Raumdimensionen definiert. Wenn die Rotation eines auf der Ebene $z = 0$ definierten Vektorfelds berechnet werden soll, kann die obige Formel mit $V_z = 0$ angepasst werden:

$$\text{rot}\,\vec{V}(x,y) = \nabla \times \vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}V_x \\ V_y \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$

- Mit dem Curl-Operator kann z.B. elegant beschrieben werden, dass Wirbel im E-Feld auf zeitliche Änderungen im magnetischen Feld zurückzuführen sind:
  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

7.6.1 Verschiedene Koordinatensysteme

Kartesisch:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix}\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix} \quad \text{(Determinante!)}}$$

Zylindrisch:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r \cdot V_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\phi}\right)\end{pmatrix}}$$

Sphärisch:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(V_\phi \cdot \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r \cdot V_\phi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r \cdot V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\end{pmatrix}}$$

7.7 Rechenregeln mit ∇

Für das dalegen der Rechenregeln werden die folgenden Platzhalter verwendet:

A, B: Skalarfelder ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
$\vec{A}, \vec{B}$: Vektorfelder ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)
F: Skalare Funktion ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
c: Konstante

Gradienten:

$$\begin{aligned}\text{grad}(A+B) &= \text{grad}(A) + \text{grad}(B) &\leftrightarrow&\quad \nabla(A+B) = \nabla A + \nabla B \\ \text{grad}(A \cdot B) &= A\,\text{grad}(B) + B\,\text{grad}(A) &\leftrightarrow&\quad \nabla(A \cdot B) = A \cdot \nabla B + B \cdot \nabla A \\ \text{grad}(c \cdot A) &= c\,\text{grad}(A) &\leftrightarrow&\quad \nabla(c \cdot A) = c \cdot \nabla A \\ \text{grad}(F(A)) &= F'(A) \cdot \text{grad}\,A &\leftrightarrow&\quad \nabla F(A) = F'(A) \cdot \nabla A\end{aligned}$$

Divergenzen:

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{A}+\vec{B}) &= \text{div}(\vec{A}) + \text{div}(\vec{B}) &\leftrightarrow&\quad \nabla \bullet (\vec{A}+\vec{B}) = (\nabla \bullet \vec{A}) + (\nabla \bullet \vec{B}) \\ \text{div}(A \cdot \vec{B}) &= A\,\text{div}(\vec{B}) + \vec{B}\,\text{grad}(A) &\leftrightarrow&\quad \nabla \bullet (A \cdot \vec{B}) = A \cdot (\nabla \bullet \vec{B}) + \vec{B} \bullet \nabla A \\ \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \bullet \text{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \bullet \text{rot}(\vec{B}) &\leftrightarrow&\quad \nabla \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \bullet (\nabla \times \vec{B}) \\ \text{div}(c \cdot \vec{A}) &= c\,\text{div}(\vec{A}) &\leftrightarrow&\quad \nabla \bullet (c \cdot \vec{A}) = c \cdot (\nabla \bullet \vec{A})\end{aligned}$$

Curl:

$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{A}+\vec{B}) &= \text{rot}(\vec{A}) + \text{rot}(\vec{B}) &\leftrightarrow&\quad \nabla \times (\vec{A}+\vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \times \vec{B}) \\ \text{rot}(A \cdot \vec{B}) &= A\,\text{rot}(\vec{B}) + (\text{grad}(A) \times \vec{B}) &\leftrightarrow&\quad \nabla \times (A \cdot \vec{B}) = A \cdot (\nabla \times \vec{B}) + (\nabla A \times \vec{B}) \\ \text{rot}(c\vec{A}) &= c\,\text{rot}(\vec{A}) &\leftrightarrow&\quad \nabla \times (c\vec{A}) = c \cdot (\nabla \times \vec{A})\end{aligned}$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \bullet \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \bullet \nabla)\vec{B} + \vec{A}\,\text{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\text{div}\,\vec{A}$$

$$\searrow$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \bullet \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \bullet \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \bullet \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \bullet \vec{A})$$

Laplaceoperator:

$$\begin{aligned}\text{div grad}\,A &= \Delta A &\leftrightarrow&\quad \nabla \bullet (\nabla A) = \Delta A \\ \text{rot}(\Delta\vec{A}) &= \Delta\,\text{rot}\,\vec{A} &\leftrightarrow&\quad \nabla \times (\Delta\vec{A}) = \Delta(\nabla \times \vec{A})\end{aligned}$$

Kombinationen:

$$\begin{aligned}\text{div rot}\,\vec{A} &= 0 &\leftrightarrow&\quad \nabla \bullet (\nabla \times \vec{A}) = 0 \\ \text{div grad}\,A &= \Delta A &\leftrightarrow&\quad \nabla \bullet \nabla A = \Delta A \\ \text{rot grad}\,\vec{A} &= \vec{0} &\leftrightarrow&\quad \nabla \times (\nabla A) = \vec{0} \\ \text{rot rot}\,\vec{A} &= \text{grad div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} &\leftrightarrow&\quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \bullet \vec{A}) - \Delta\vec{A}\end{aligned}$$

8 Anwendungen

8.1 Integralsatz von Gauss

Der Integralsatz von Gauss

$$\boxed{\oint_{S=\partial V} \vec{A} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \int_V \nabla \bullet \vec{A}\, \mathrm{d}V}$$

beschreibt, dass die aufintegrierte Divergenz in einem Körper gleich dem Fluss durch die Kontur dieses Körpers sein muss. Die Normale $\hat{n}$ steht dabei senkrecht auf dem Oberflächenelement $\mathrm{d}S$ und zeigt nach aussen.

8.1.1 Green'sches Integraltheorem

Das Green'sche Integraltheorem (auch Satz von Green)

$$\boxed{\oint_{C=\partial S} \vec{A} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}l = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}$$

ist der zweidimensionale Spezialfall des Integralsatzes von Gauss. Auch hier zeigt die normale $\hat{n}$ nach aussen.

Green'sche Indentität Nr. 1 Wird $\vec{A} = U_1 \nabla U_2$ eingesetzt, so resultiert aufgrund der Produktregel

$$\oint_{S=\partial V} (U_1 \nabla U_2) \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \int_V (U_1 \nabla U_2 + \nabla U_1 \bullet \nabla U_2)\, \mathrm{d}V.$$

Green'sche Indentität Nr. 2 Wird $\vec{A} = U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1$ eingesetzt, so resultiert

$$\oint_{S=\partial V} (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \int_V (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1)\, \mathrm{d}V.$$

Mit $U_1 = 1$ resultiert die etwas handlichere Indentität

$$\oint_{S=\partial V} (\nabla U_2) \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \int_V (\nabla U_2)\, \mathrm{d}V.$$

8.2 Integralsatz von Stokes

Der Integralsatz von Stokes

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot} \vec{A} \bullet \hat{n}\, \mathrm{d}S = \oint_{C=\partial S} \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{r}}$$

sagt aus, dass durch das Integrieren eines Vektorfelds $\vec{A}$ entlang der Kontur C einer Fläche S auf die mittleren Verwirbelungen im Innern der Fläche geschlossen werden kann.
Die Normale $\hat{n}$ und die Integrationsrichtung $\vec{r}$ müssen dabei die Rechte-Hand-Regel erfüllen.

8.3 Poisson-Gleichung (Laplace-Gleichung)

Die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta\phi(\vec{r}) = f(\vec{r})} \quad \text{oder} \quad \boxed{\nabla^2\phi(\vec{r}) = f(\vec{r})}$$

findet in der Physik oft Anwendung. ϕ beschreibt dabei ein skalares Potentialfeld, f wird Quellenfunktion genannt und $\vec{r}$ ist ein beliebiger Stützvektor.

8.3.1 Laplace-Gleichung

Die Laplace-Gleichung

$$\boxed{\Delta\phi = f = 0}$$

ist der Spezialfall der Poisson-Gleichung, bei dem keine Quellenfunktion f besteht.

8.4 Prinzip von d'Alambert

Das Prinzip von d'Alembert ist ein Vorgehen zum Lösen von Wellengleichungen. Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

mit den Initialbedingungen

$$u(0,z) = f(z) \quad \text{bzw.} \quad u(0,z) = f(z) \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(0,z) = g(z)$$

wird gelöst durch

$$u(t,z) = \frac{1}{2}(f(z+ct)+f(z-ct)) \quad \text{bzw.} \quad u(t,z) = \frac{1}{2}(f(z+ct)+f(z-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{z-ct}^{z+ct} g(s)ds.$$

8.5 Maxwell-Gleichungen

8.5.1 Gausssches Gesetz

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

8.5.2 Gausssches Gesetz des Magnetismus

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

8.5.3 Induktionsgesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

8.5.4 Durchflutungsgesetz

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Zusammengesetzt aus dem **Ampèreschem Gesetz** $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ und Maxwells Erweiterung, der Verschiebungsstromdichte $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

9 Anhang

9.1 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot(α)	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

9.1.1 Komplexe Darstellung

$$\sin(x) = \frac{e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}} \qquad \cos(x) = \frac{e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x}}{2}$$

9.1.2 Beziehungen zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$

9.1.3 Additionstheoreme

$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$
$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$

9.1.4 Produkte

$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

9.1.5 Summen und Differenzen

$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}$

9.1.6 Winkelvielfache und Halbwinkel

$\sin(2a) = 2\sin(a) \cdot \cos(a)$
$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$
$\sin(4a) = 8\cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4\cos(a) \cdot \sin(a)$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$
$\cos(4a) = 8\cos^4(a) - 8\cos^2(a) + 1$
$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))} \qquad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))}$

9.1.7 Potenzen

$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$
$\sin^3(a) = \frac{1}{4}(3\sin(a) - \sin(3a))$
$\sin^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$
$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$
$\cos^3(a) = \frac{1}{4}(\cos(3a) + 3\cos(a))$
$\cos^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) + 4\cos(2a) + 3)$

9.2 Ableitungsregeln

Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

9.3 Ableitungen

Funktion $f(x)$	**Ableitung $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$**
1	0
0	0
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Funktion $f(x)$	**Ableitung $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$**
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$