Regelungstechnik 2

FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann

Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240614

 $\underline{https:/\!/github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2}$



Inhaltsverzeichnis

1	Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)	2	7	Einstellen eines PID-Reglers	(
	1.1 Steuerung	2		7.1 Vorgehensweisen zum Einstellen eines Reglers	(
	1.2 Regelung	2		7.2 Pol-Nullstellenkürzung (S. 164)	(
	1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung	2		7.3 Empirische Einstellregeln	6
	• •			7.4 Regler-Einstellung durch Optimierung (S. 167)	7
2	Frequenzgang (S. 114)	2		W /E	,
	2.1 Frequenzgang G(j omega) als komplexe Zahl	2	8	Variationen / Erweiterungen zu PID-Reglern	,
	2.2 Frequenzgang der Grundglieder	2		8.1 Modifizierter PID-Regler in Parallelform (S. 171)	,
	2.3 Darstellung mit Zeigern	2		8.2 Glättung der Referenz (S. 171)	,
	2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL	2		8.3 Störgrössenaufschaltung (S. 174)	,
	2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen	3		8.4 Kaskadenregelung (S. 175)	,
	2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen	3		8.5 Übertragungsfunktionen Kaskadenregelung	
	2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen	3		8.6 Wind-Up (Integratoren) (S. 172)	,
	2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)	3	9	Fallstudie: Gleichstromantrieb	8
				9.1 Modellierung (S. 53)	8
3	Stabilität – Nyquistkriterium (S. 126)	3		9.2 Gleichstromantrieb mit Steuerung (S. 148-149)	8
	3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm	3		9.3 Gleichstromantrieb mit P-Regler (S. 149-150)	8
	3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)	3		9.4 Gleichstromantrieb mit I-Regler (S. 151-152)	8
	3.3 Stabilitätsreserven	3		9.5 Gleichstromantrieb mit PI-Regler (S. 152-154)	8
	3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129)	4		9.6 Gleichstromantrieb mit PID / PD-Regler (S. 155)	ç
	3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab	4		9.7 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PI-Regler (S. 157-159)	ç
	3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen	4		9.8 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PID-Regler (S. 160-162)	ç
4	Dezibel dB	4	10	Implementierung analoger Regler	Ģ
•	4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB	4		10.1 Struktur allgemeiner Frequenzgang eines Reglers	ç
	4.2 dB–Umrechnungstabelle	4		10.2 Grundschaltungen mit OpAmps	ç
	4.2 db Omeemangsmoene	7		10.3 Varianten analoger PID-Schaltungen	ç
5	Bode-Diagramm	4			
	5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen	4	11	I Implementierung digitaler Regler	1/
	5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139)	5		11.1 Aufbau digitaler Regelkreis (S. 183)	
	5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140)	5		11.2 Distriction and Deplete (C. 199)	1(
	5.4 Bodediagramme mit Matlab	5		11.3 Diskretisierung eines Reglers (S. 188)	1(
	5.5 Alternative Stabilitätskriterien – Vorzeichenregel (S. 142)	5		11.5 Code-Implementierung eines diskreten Reglers (S. 190)	1(
				11.5 Code-implementating enies diskreten regions (s. 190)	1(
6	PID-Regler	5	12	2 Anhang	10
	6.1 Strukturen und Frequenzgänge von PID-Reglern			12.1 Bodediagramm eines Integrators	10
	6.2 Matlab / Simulink			12.2 Bodediagramm eines Differenzierer	
	6.3 PID-Regler im Frequenzgang			12.3 z-Transformation	
	6.4 PID-Regler im Bodediagramm	6		12.4 Fourier- bzw. Laplace-Transformation	1

1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

1.1 Steuerung



Eine Steuerung besitzt keine Rückkopplung und ist somit ein offener Regelkreis

$$y = \underbrace{KL \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{K \cdot z}_{\text{Störung}}$$

1.2 Regelung

Eine Regelung besitzt eine Gegenkopplung



$$y = KH \cdot (r - y) + K \cdot z$$

$$y = \underbrace{\frac{KH}{1 + KH} \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{\frac{K}{1 + KH} \cdot z}_{\text{Störungsunterdrückung}}$$

1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung H der Störung z gilt:

$$\lim_{H \to \infty} \frac{K}{1 + KH} \cdot z = 0$$

- \Rightarrow Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so wird die Störung z unterdrückt
- → Bei einer Steuerung wird die Störung z nicht unterdrückt

1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H \to \infty} \frac{KH}{1 + KH} \cdot r = 1$$

- \Rightarrow Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so ist $y \approx r$ (Ausgang \approx Sollwert)
- \Rightarrow Bei einer Steuerung muss $H = \frac{1}{L}$ sein, damit $y \approx r$

1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

(asymp.) stabil Verstärkung |V| < 1 System schwingt nicht

Verstärkung V = -1 System schwingt mit konstanter Ampl. grenzstabil Verstärkung |V| > 1 System schwingt mit zunehmender Ampl. instabil

1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten: V = -1

Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied



Es muss gelten: y(t) = -e(t) unter der Annahme, dass $e(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

$$x(t) = K \cdot \int_{0}^{t} e(\tau) d\tau + x_{0} = K \cdot \int_{0}^{t} A \cdot \cos(\omega \tau) d\tau + x_{0} = K \frac{A}{\omega} \sin(\omega \tau) \Big|_{0}^{t} + x_{0}$$
$$= \frac{KA}{\omega} \sin(\omega t) + \underbrace{x_{0}}_{0}$$

$$y(t) = x(t - T_t) = \frac{KA}{\omega} \sin(\omega(t - T_t)) = \frac{KA}{\omega} \cos(\omega(t - T_t) - \frac{\pi}{2})$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega t - \omega T_t - \frac{\pi}{2}\right)}_{y(t)} = -A\cos(\omega t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - \pi)}_{-e(t)}$$

- → Wenn der Regler die Verstärkung K hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz ω
- → Die Verstärkung K muss vermieden werden!

2 Frequenzgang (s. 114)

Wird ein Sinus-Signal u(t) in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal y(t) wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die Amplitude und die Phase. Die Frequenz hingegen bleibt gleich.

Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!



- Amplitude Eingangssignal
- Amplitude Ausgangssignal
- Verstärkung
- Phasenverschiebung

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$
 $y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \text{Transiente}$

Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (steady state) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig $t = 5\tau$ als Ende des Einschwingvorgangs

→ Uns interessiert nur der der steady state!

Darstellung des Frequenzgangs

Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:

- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- · Zeiger-Diagramm

2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl (s. 116)

$$G(\mathrm{j}\omega) = \left|G(\mathrm{j}\omega)\right| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \angle G(\mathrm{j}\omega)} = \frac{B}{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

2.2 Frequenzgang der Grundglieder

P-Glied	I-Glied	PT ₁ -Glied	T_t -Glied
\longrightarrow^K	$ \stackrel{K}{\longrightarrow}$	$\longrightarrow^{K} T$	$T_t \ (\geq 0!)$
y(t) = Ku(t)	$\dot{y}(t) = Ku(t)$	$ T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$	$y(t) = u(t - T_t)$
$G(j\omega) = K$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$	$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$
$ G = K$ $\angle G = 0$	$ G = \frac{K}{\omega}$ $\angle G = -\frac{\pi}{2}$	$ G = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$ $\angle G = -\arctan(\omega T)$	$ G = 1$ $\angle G = -\omega T_t$
Im K Re	$\begin{array}{c} \text{Im} \\ \\ \omega \rightarrow \infty \\ \\ \omega = 0 \end{array}$ Re	$\begin{array}{c c} & \text{Im} & \\ & \omega = 0 \\ K & \\ K & \\ \text{Re} & \\ \text{Halbkreis} & \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{Im} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\$

→ Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

2.3 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal bei einer bestimmten Frequenz als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal y(t) als Zeiger Y zur Zeit t = 0 dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz $\omega = 2\pi f$ rotiert. Das zeitliche Signal y(t) entspricht dem Realteil von y(t)





2.3.1 Komplexe Amplitude *Y*

$$\underline{y}(t) = B \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]$$

$$= B \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= Y \cdot e^{j\omega t}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

|y(t)| = BMaximale Amplitude des Ausgangssignals

Re(y(t)) = y(t) Ausgangssignal (zeitlich)

 $y(0) = \underline{Y}$ Anfangszeiger (komplexe Amplitude)

2.3.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\underline{\dot{y}}(t) = \underline{Y} \cdot \mathbf{j}\omega \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega t}$$

$$\int y(t) dt = \frac{\underline{Y}}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}$$

2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

- 1. DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
- **2.** Geeignet umformen: $G(j\omega) = \frac{Y}{U}$
- **3.** Falls gewünscht: Amplitude $|\overline{G(j\omega)}|$ und Phase φ bestimmen

Beispiel: PT₁ Glied

$$T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}} T \cdot j\omega \cdot \underline{Y} + \underline{Y} = [j\omega T + 1] \cdot \underline{Y} = K\underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{K}{j\omega T + 1} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|U|} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1^2}} \qquad \varphi = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2} + \pi$$

2.4.1 Allgemeiner Fall

2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen



$$G_1 \cdot G_2 = |G_1| \cdot e^{j \angle G_1} \cdot |G_2| \cdot e^{j \angle G_2} = |G_1| |G_2| \cdot e^{j(\angle G_1 + \angle G_2)}$$

2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen



$$\underline{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1(j\omega) \cdot \underline{U} + G_2(j\omega) \cdot \underline{U}} = \underbrace{(G_1(j\omega) + G_2(j\omega))}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}$$

$$G_1 + G_2 = \text{Re}\{G_1\} + \text{Re}\{G_2\} + \text{j}(\text{Im}\{G_1\} + \text{Im}\{G_2\})$$

2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen



$$\underline{\underline{Y}} = \underbrace{\frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}}_{G(j\omega)} \cdot \underline{\underline{U}}$$

→ Anwendung von Mason Regel (SigSys)

2.7.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

- 1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
- 2. Nach Y umformen

2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang $G(j\omega)$ und die Übertragungsfunktion G(s) mit $s = \sigma + j\omega$ hängen folgendermassen zusammen:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

2.8.1 Übersicht Darstellungsformen



3 Stabilität – Nyquistkriterium (s. 126)

Die Stabilität eines Regelkreises kann mit dem Nyquistkriterium viel einfacher betrachtet werden. Dafür wird der Frequenzgang $G_0(\mathbf{j}\omega)$ des offenen Regelkreises betrachtet. Ausserdem gibt das Nyquistkriterium an, wie robust ein Regelkreis ist.



Frequenzgang des offenen Regelkreises

$$G_0(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}$$

Beispiel: Kreisschaltung mit mehreren Blöcken

Folgendes System besitzt ein Eingangssignal R und vier Ausgangssignale Y Es sollen der Frequenzgang des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$, sowie ausgewählte UTFs des Systems beschrieben werden.

$$G_0(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)$$



$$\frac{\underline{Y}_1}{\underline{R}} = \frac{1}{1 + G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot G_3(\mathrm{j}\omega)}$$

$$\frac{\underline{Y}_3}{\underline{R}} = \frac{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)}$$

Hinweis: Die Stabilität des Systems ist unabhängig von der Reihenfolge der Teilsysteme $G_i(j\omega)$, da die Stabilität durch den Nenner (bzw. die Polstellen) beschrieben wird.

3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Gedankenexperiment: Ein offener Regelkreis mit $G_0(j\omega)$ (gemäss Abschnitt 3) wird um eine veränderbare Verstärkung K ergänzt.

3.1.1 Stabilität

Wähle $K = K_0$, sodass sich die Ortskurve immer innerhalb des Einheitskreises befindet.

- Befindet sich die Ortskurve eines Systems immer innerhalb des Einheitskreises, so ist der offene Regelkreis stabil.
- → Daraus folgt, dass auch der geschlossene Regelkreis stabil sein muss.
- Führungsübertragungsfunktion für $K \ll K_0$:

$$G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)} \approx K \cdot G_0(j\omega)$$

3.1.2 Grenzstabilität

Wähle $K = K_{krit} > K_0$, sodass die Ortskurve den Punkt –1 schneidet.

- Ortskurve des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$ verläuft **durch den Punkt –1**,
- Die Frequenz ω_{π} , für die $G_0(j\omega_{\pi}) = -1 = e^{-\pi}$ heisst **kritische Frequenz**. Mit dieser kritischen Frequenz schwingt das System.
- kritischen Frequenz schwingt das System.

 Die Führungsübertragungsfunktion $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1+K \cdot G_0(j\omega)}$ wird bei der kritischen Frequenz zu $G_f(j\omega_\pi) = \frac{-1}{1-1} = -\infty \implies$ Grenzstabilität

3.1.3 Instabilität

Wähle $K > K_{krit}$

- Ortskurve verläuft nicht mehr durch den Punkt −1
- Das System ist instabil

3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)

Idee: Informationen über den offenen Regelkreis verwenden, um die Stabillität des geschlossenen Regelkreises zu beurteilen

3.2.1 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- Gemäss Abschnitt 3 wird $G_0 = \prod_i G_i$ gebildet aus den seriegeschalteten Teilsystemen des offenen Regelkreises (\Rightarrow Produkt aller G_i im Feedback-Loop)
- G₀ muss dabei einem **Prozess mit Ausgleich** (stabilen **Prozess**) entsprechen; zusätzlich dürfen noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein Mit Polen formuliert: Bei G_0 sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt -1 links der Nyquistkurve von G_0 liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ($\omega = 0...\infty$) \Rightarrow 'links der Kurve': Man befindet sich **auf der** Kurve und 'schaut' nach links und muss den Punkt -1 'sehen'

Beispiel: Ortskurven stabiler Systeme (S. 128)

Achtung: Damit die Stabilität der gezeigten Systeme beurteilt werden kann, muss sichergestellt werden, dass auch die ersten beiden Punkte des vereinfachten Nyquistkriteriums eingehalten werden!



3.3 Stabilitätsreserven

Wir möchten nicht nur Stabilität, sondern auch eine gewisse Stabilitätsreserve, um z.B. auch bei einem ungenau modellierten Prozess oder einer sich ändernden Regelstrecke noch einen stabilen Regelkreis zu gewährleisten.

- Auch ein stabiler Regelkreis kann sehr lange (ein)schwingen
- Stabilität / Grenzstabilität / Instabilität sind defnierte Bereiche
 - Es gibt nicht 'ein wenig stabil', 'ziemlich stabil', 'stabiler als...', 'instabiler als'
- Allenfalls: Ein Regelkreis ist stabiler als ein anderer. Gemeint ist:
 - Ein Regelkreis ist besser gedämpft / schneller (eingeschwungen)
 - Ein Regelkreis ist robust er ist trotz gewissen Widerigkeiten im Regelkreis
 - Ein Regelkreis bleibt stabil, auch wenn die Regelstrecke leicht ändert

3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (s. 129)



$$\Phi_{\text{RES}} = \arctan\left(\frac{\text{Re}\left\{G_0(j\omega_D)\right\}}{\text{Im}\left\{G_0(j\omega_D)\right\}}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{K_{\text{RES}}} = \left| G_0(j\omega_{\pi}) \right|}$$

Ein System ist stabil, wenn eine der folgen den Bedingungen erfüllt ist:

- $\omega_{\pi} > \omega_{D}$
- $G_0(j\omega_D) = e^{-j\varphi}$ mit $0 < \varphi < \pi$
- $0 > G_0(j\omega_{\pi}) > -1$
- Durchtrittsfrequenz ω_D

Frequenz, bei der die Kurve den Einheitskreis durchquert: $|G_0(i\omega_D)| = 1$

- \Rightarrow Phasenreserve Φ_{RES}
- Phasenschnittfrequenz ω_{π}

Frequenz, bei der die Kurve die reelle Achse durchquert: Im $\{G_0(j\omega_\pi)\}=0$

 \rightarrow Verstärkungsreserve K_{RES}

3.4.1 Verstärkungsreserve K_{RES}

Die Verstärkungsreserve K_{RES} liefert direkt den Toleranzwert für den Fall, dass die Modellunsicherheit des offenen Regelkreises bei der Verstärkung liegt.

Der Abstand zum Ursprung bei der Phasenschnittfrequenz ω_{π} entspricht $\frac{1}{K_{\text{RES}}}$

 \Rightarrow Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $K_{RES} \cdot G_0(j\omega)$ vorliegt, wird der Regelkreis grenzstabil!

3.4.2 Phasenreserve Φ_{RES}

Die Phasenreserve Φ_{RES} liefert einen Toleranzwert für den Fall, dass die

Modellunsicherheit des offenen Regelkreises bei der Totzeit liegt.

 \Rightarrow Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $G_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega T_t}$ vorliegt, wird der Regelkreis grenzstabil!

Der Zusammenhang zwischen Phasendrehung und Totzeit ist

$$T_t = \frac{\Phi_{\rm RES}}{\omega_D}$$
 wobei $[\Phi_{\rm RES}] = {\rm rad}$

Beispiel: Einfluss von Stabilitätsreserven auf Nyquistdiagramm



Mitte: Verstärkungsreserve streckt Kurve vom Ursprung aus

Rechts: Phasenreserve dreht jeden Punkt der Kurve um verschiedene Winkel $\omega \cdot T_t$ um den Ursprung

3.4.3 Faustregeln für Reserven (S. 131)

Hinweis: Es besteht eine Kopplung zwischen den beiden Effekten!

- Phasenreserve von $\Phi_{RES} = 40^{\circ} \dots 70^{\circ}$
- Verstärkungsreserve von $K_{RES} > 4 (\approx 12 \,\mathrm{dB})$

3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab



% UTF des Systems

3 nyquist(G)

3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen

- Werte für $G(\omega = 0)$ und $G(\omega = \infty)$ berechnen
- Anzahl j im Zähler plus Anzahl j im Nenner entspricht Anzahl Quadranten, welche zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ durchlaufen werden
- Pollstellen: $|G(j\omega)| \downarrow$; $\angle G(j\omega) \downarrow \Rightarrow$ Bewegung im Uhrzeigersinn \Rightarrow Bei den Nullstellen ist $\angle G(j\omega) = \pm 45^{\circ}$
- Nullstellen: $|G(\mathrm{j}\omega)|\uparrow$; $\angle G(\mathrm{j}\omega)\uparrow$; \Rightarrow Bewegung im Gegenuhrzeigersinn
- Frequenzen der Pol- bzw. Nullstellen berechnen

4 Dezibel dB

4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB (s. 133)

$$|K|_{\mathrm{dB}} = 20 \,\mathrm{dB} \cdot \log_{10} |K| \quad \Leftrightarrow \quad |K| = 10^{\left(\frac{|K|_{\mathrm{dB}}}{20 \,\mathrm{dB}}\right)}$$

Hinweis: Die Betragsstrichte nur Notation! |K| kann sehr wohl negativ sein!

4.1.1 Rechenregeln

• Multiplikation → Addition

$$|K_1 \cdot K_2|_{\mathrm{dB}} = |K_1|_{\mathrm{dB}} + |K_2|_{\mathrm{dB}}$$

• Division → Subtraktion

$$\left| \frac{K_1}{K_2} \right|_{\text{dB}} = |K_1|_{\text{dB}} - |K_2|_{\text{dB}}$$

Kehrwert → Negatives Vorzeichen

$$\left| \frac{1}{K_1} \right|_{dB} = |1|_{dB} - |K_1|_{dB} = -|K_1|_{dB}$$

4.2 dB-Umrechnungstabelle (S. 133)

Faktor [1]	Dezibel dB	Faktor [1]	Dezibel dE
100	40	2	6
10	20	$\sqrt{2}$	3
1	0	1	_3 _3
0.1	-20	$\sqrt{2}$	-5
0.01	-40	<u></u> <u>1</u>	-6

5 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine weitere Variante, den Frequenzgang $G(j\omega)$ grafisch darzustellen. Die Darstellung beinhaltet zwei Graphen.

- Phasengang $\angle G(j\omega)$ in Grad of
- Die Frequenzachse ist **logarithmisch** mit $\log_{10}(\omega)$
- Ein Bodediagramm kann in ein Nyquistdiagramm umgezeichnet werden, aber nicht umgekehrt!

5.0.1 Logarithmische Frequenzachse (S. 134)

• Serieschaltung von Systemen

$$G(\mathrm{j}\omega)=G_1(\mathrm{j}\omega)\cdot G_2(\mathrm{j}\omega)$$

Amplitudengang

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = |G_1(\mathrm{j}\omega)| \cdot |G_2(\mathrm{j}\omega)|$$

$$|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = |G_1(j\omega)|_{\mathrm{dB}} + |G_2(j\omega)|_{\mathrm{dB}}$$

- → Grafisch multiplizieren wäre schwierig, grafisch addieren geht gut
- Phasengang

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

→ Die Phase muss nicht logarithmisch sein, wir haben schon eine Addition

5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen

Das Diagramm wird approximativ mit Geraden gezeichnet!

• Frequenzgang in folgende Form bringen:

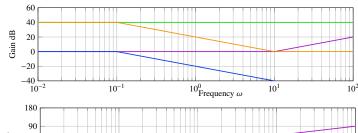
$$G(\mathrm{j}\omega) = K_0 \cdot (\mathrm{j}\omega)^{\nu} \cdot \frac{(1 + T_{n0} \cdot \mathrm{j}\omega) \cdot (1 + T_{n1} \cdot \mathrm{j}\omega) \cdot \dots}{(1 + T_{p0} \cdot \mathrm{j}\omega) \cdot (1 + T_{p1} \cdot \mathrm{j}\omega) \cdot \dots} \cdot e^{-\mathrm{j}\omega T_t}$$

- Für $\omega = 0$ sind alle $(1 + T \cdot j\omega) = 1 = 0$ dB
- Für $\omega = \frac{1}{T}$ sind alle $(1 + T \cdot j\omega) = 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 3 \text{ dB} \angle 45^{\circ}$
- Frequenzen der Nullstellen berechnen: $\omega = \frac{1}{T_n}$
- Frequenzen der Polstellen berechnen: $\omega = \frac{1}{T_p}$
- Jede Nullstelle bewirkt
 - einen Knick um +20 dB / Dekade nach oben im Amplitudengang
 - einen Phasenhub von +90° über 2 Dekaden ⇒ +45° beim Knick
- Jede Polstelle bewirkt
 - einen Knick um -20 dB / Dekade nach unten im Amplitudengang
 - einen Phasenverlust von −90° über 2 Dekaden ⇒ −45° beim Knick
- Einzelne Faktoren einzeichnen → Wenn Faktor quadriert ist, zwei mal einzeichnen!
- Grafische Addition der Faktoren für gesamten Frequenzgang

Beispiel: Bode-Diagramm zeichnen

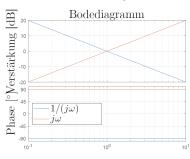
$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 0.1)} \quad \underline{\text{Standardform}} \quad G(j\omega) = 100 \cdot \frac{(1 + 0.1 \, j\omega)}{(1 + 10 \, j\omega)}$$

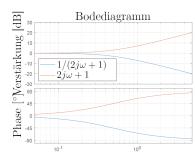
- $|K_0|_{\rm dB} = |100|_{\rm dB} = 40 \, {\rm dB} \Rightarrow \angle G(100) = 0^{\circ}$ Nullstelle: $|1 + 0.1 \, {\rm j} \omega|_{\rm dB} \Rightarrow {\rm Knick \ bei} \ \omega = \frac{1}{0.1 \, {\rm s}} = 10 \frac{{\rm rad}}{{\rm s}}$
- Polstelle: $|1 + 10 \text{ j}\omega|_{\text{dB}} \Rightarrow \text{Knick bei } \omega = \frac{1}{10 \text{ s}} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ Endresultat: Grafische Addition der Teilresultate



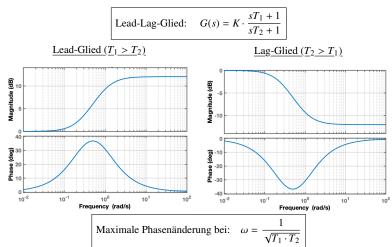
5.1.1 Inverse Frequenzgänge (S. 137)

Um das Bodediagramm des inversen Frequenzgangs $\frac{1}{G(i\omega)}$ zu erhalten, muss bei Betrag und Phase das Vorzeichen gedreht werden.





5.1.2 Lead-Lag-Glied

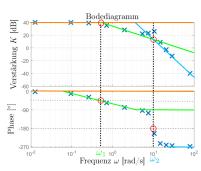


→ Bei der Regler-Auslegung werden vor allem Lead-Glieder verwendet, um Phase anheben zu können

5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139)

Um aus einem gegebenen Bodediagramm die Übertragungsfuntion $G(j\omega)$ zu ermitteln, werden die Zeichenregeln aus Abschnitt 5.1 rückwärts angewendet. Dazu werden die Punkte einer gegebenen Messung mittels Geraden approximiert. Mittels dieser Approximationen können die einzelen Komponenten (Faktoren) der gesuchten UTF ermittelt wer-

Beispiel: Ubertragungsfuntion G(s) aus Bodediagramm ermitteln



Aus den Steigungen der Geraden ist ersichtlich, dass folgende Komponenten in G(s) enthalten sein müssen:

Verstärkung K, PT₁-Glied, PT₂-Glied

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{(sT_1 + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1)}$$

Werte der Parameter aus Bodediagramm

- $|K|_{\text{dB}} = 40 \Rightarrow K = 100$ $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{0.5} = 2$ $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{10} = 0.1$ $\zeta = 0.1 \Rightarrow \text{gegeben}$

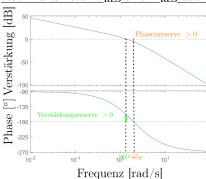
5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140)

Analog zum Punkt -1 im Nyquistdiagramm kann die Stabilität auch im Bodediagramm beurteilt werden. Auch bei dieser Betrachtung sind die folgenden Frequenzen relevant.

- Durchtrittsfrequenz $\omega_D \Rightarrow$ Phasenreserve Φ_{RES}
- Frequenz, bei der die Verstärkung 1 ist: $|G_0(j\omega_D)| = 1 (= 0 \text{ dB})$
- Phasenschnittfrequenz $\omega_{\pi} \Rightarrow \text{Verstärkungsreserve } \Phi_{\text{RES}}$

Frequenz, bei der die Phase -180° beträgt: $\angle G_0(j\omega_{\pi}) = -\pi \operatorname{rad} (= -180^{\circ})$

5.3.1 Parameter K_{RES} und Φ_{RES} aus Bodediagramm lesen



• Durchtrittsfrequenz ω_D

$$K_{\text{RES}} = 0 \, \text{dB} - K_{@180^{\circ}}$$

• Phasenschnittfrequenz ω_{π}

$$\Phi_{RES} = \Phi_{@0dB} + 180^{\circ}$$

Achtung: Das Vorzeichen von Φ_{RES} bzw. Φ_{RES} ist essentiell für die Stabilitäts-Beurteilung und darf auf keine Fall vernachlässigt werden!

5.3.2 Beurteilung der Stabilität des Systems

Wenn das System die Anforderungen des Nyquist-Kriteriums erfüllt, verhält sich die Stabilität des Systems folgendermassen:

- Grenzstabilität: Amplitudengang bei 0 dB und Phasengang bei -180°
- **Instabilität**: $K_{RES} < 0$ und $\Phi_{RES} < 0$ (ergibt sich automatisch, wenn einer der beiden Parameter < 0 ist)
- Stabilität: $K_{RES} > 0$ und $\Phi_{RES} > 0$
- Stabilität: $\omega_{\pi} > \omega_{D}$

5.4 Bodediagramme mit Matlab

s = tf('s'); $_{2}$ G = 1 + 0.1 *s; % UTF des Systems bode(G) % Bode-Plot des Systems % Amplitudengang des Systems 4 bodemag(G)

5.5 Alternative Stabilitätskriterien – Vorzeichenregel (s. 142)

Die Stabilität kann alternativ 'direkt' aus den Parametern der Differentialgleichung (des Frequenzgangs) des geschlossenen Regelkreises bestimmt werden.

Aus der DGL der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot u^{(k)}(t)$$

kann das charakteristische Polynom ermittelt werden. Daraus kann dann mittels folgender Vorzeichenregel eine Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises gemacht werden.

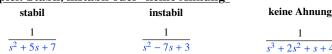
Eine notwendige Stabilitätsbedingung für das charakteristische Polynom

$$\begin{split} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{\text{Z\"{a}hler}}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \\ \frac{Y(j\omega)}{(j\omega)} &= \frac{\text{Z\"{a}hler}}{a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot (j\omega)^2 + a_1 \cdot (j\omega) + a_0} \end{split}$$

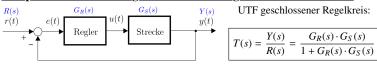
besteht darin, das alle Koeffizienten existieren $a_0 \dots a_n$ (also $\neq 0$ sind) **und dasselbe** Vorzeichen haben.

Bei System erster und zweiter Ordnung ist die Vorzeichenregel auch hinreichend für die Stabilität.

Beispiel: Stabil, instabil oder 'keine Ahnung'



Beispiel: Stabilität aus geschlossenem Regelkreises bestimmen



 $G_R(s)$ und $G_S(s)$ seien gegeben als: $G_R(s) = K_R$, $G_S(s) = \frac{K}{s(sT+1)} = \frac{K}{Ts^2+s}$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} = \frac{\frac{K_R \cdot K}{Ts^2 + s}}{1 + \frac{K_R \cdot K}{Ts^2 + s}} = \frac{K_R \cdot K}{Ts^2 + s + K_R \cdot K} \Rightarrow \text{ stabil für } K_R, K, T > 0$$

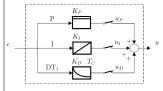
6 PID-Regler

- **P**: Proportional $K_P \cdot e(t)$
 - Gegenwart: Gewichtung des **aktuellen** Fehlers e(t)
 - * Stellgrösse u(t) ist abhängig vom aktuell vorhandenen Fehler
 - * Wie gross Fehler in Vergangenheit war oder in welche Richtung er sich entwickelt, ist irrelevant
- **I**: Integral $K_I \int e(t)$
 - Vergangenheit: Gewichtung der Summe vergangener Fehler
 - * Stellgrösse u(t) ist abhängig davon, wie lange ein Fehler schon existiert
 - * Wie gross der aktuelle Fehler ist und wie start er sich gerade ändert, ist irrelevant
- **D**: Differential $K_D \cdot \dot{e}(t)$
 - Zukunft, Trend: Gewichtung der Änderung des Fehlers
 - * Stellgrösse ist abhängig davon, wie stark der Fehler gerade zu-/abnimmt
 - * Wie gross der aktuelle Fehler ist und wie lange er schon existiert, ist irrelevant

6.1 Strukturen und Frequenzgänge von PID-Reglern

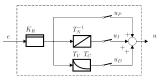
Alle drei Strukturen sind äquivalent. Es handelt sich nur um unterschiedliche Darstellungsformen.

6.1.1 Varirante 1: Parallelform



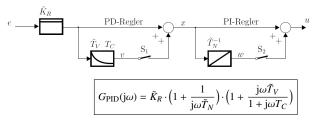
$$G_{\text{PID}}(j\omega) = K_P + \frac{K_I}{j\omega} + K_D \frac{j\omega}{1 + j\omega T_C}$$

6.1.2 Variante 2: Standardform (P-Anteil vorangestellt)



$$G_{\text{PID}}(j\omega) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{j\omega T_N} + \frac{j\omega T_V}{1 + j\omega T_C}\right)$$

6.1.3 Variante 3: Serielle (multiplikative) Form



6.1.4 Umrechnung Parameter Variante 1 – Variante 2

$$K_R = K_P$$
 $T_N = \frac{K_P}{K_I}$ $T_V = \frac{K_D}{K_P}$ $K_I = \frac{K_R}{T_N}$ $K_D = K_R T_V$

$$T_N = \frac{K_P}{K_I}$$

$$T_N = \frac{K_P}{K_I}$$

$$T_N = \frac{K_P}{K_I}$$
 $T_V = \frac{K_P}{K_I}$

$$T_V = \frac{\kappa_D}{K_P}$$

$$K_I = \frac{\kappa_R}{T_N} \qquad K_D = \frac{\kappa_R}{T_N}$$

6.1.5 Umrechnung Parameter Variante 2 – Variante 3

$$K_R = \tilde{K}_R \Big(1 + \frac{\bar{T}_V}{\bar{T}_N} \Big) \qquad T_N = \tilde{T}_N + \tilde{T}_V \qquad T_V = \tilde{T}_V \frac{\bar{T}_N - \bar{T}_C}{\bar{T}_N + \bar{T}_V}$$

6.2 Matlab / Simulink

Matlab

- Parallelform
- Parallelform

 C = pid(Kp, Ki, Kd, Tf)

 $C = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1}$ Standardform

 C = pidstd(Kp, Ti, Td, N)

 $C = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + \frac{T_d \cdot s}{\frac{T_d}{N} \cdot s + 1}\right)$
 - $-T_f = \frac{T_d}{N}$

Simulink

• Parallelform
$$-P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1+N \frac{1}{s}}$$

$$-D \frac{N}{1+N \frac{1}{s}} = \frac{D \cdot s}{\frac{1}{N} s + 1}$$

$$-P = K_P, I = K_I, D = K_D, N = \frac{1}{T_C}$$
• Standardform ('ideal')
$$-P \cdot \left(1 + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1+N \frac{1}{s}}\right)$$

$$-P \cdot \left(1 + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1+N}\right)$$
$$-D\frac{N}{1+N} = \frac{D \cdot s}{1+N}$$

$$-D\frac{N}{1+N\frac{1}{s}} = \frac{D \cdot s}{\frac{1}{N}s+1}$$

$$-P = K_R, I = \frac{1}{T_N}, D = T_V, N = \frac{1}{T_C}$$

6.3 PID-Regler im Frequenzgang

- P: Proportional KP
 - Frequenzunabhängige Gewichtung
 - Allpassverhalten (alle Frequenzen gleich verstärkt)
- I: Integral $K_I \frac{1}{j\omega}$ Gewichtet tiefe Frequenzen stärker als hohe Frequenzen
 - Reagiert auf 'langsame' Änderungen
 - Tiefpassverhalten; Phasenschiebung: −90° (im Uhrzeigersinn)
- **D**: Differential *K*_Diω
 - Gewichtet hohe Frequenzen stärker als tiefe Frequenzen
 - Reagiert auf 'schnelle' Änderungen
 - Hochpassverhalten; Phasenschiebung: +90° (gegen Uhrzeigersinn)

6.4 PID-Regler im Bodediagramm

Achtung: Gemäss den Frequenzgängen der verschiedenen Darstellungsformen aus Abschnitt 6.1 eines PID-Reglers darf im Bodediagramm nur Variante 3 grafisch aus den Einzelteilen addiert werden.

7 Einstellen eines PID-Reglers

7.1 Vorgehensweisen zum Einstellen eines Reglers



- - Sprungantworten und Frequenzantworten
- Empirische Einstellregeln
 - Ziegler/Nichols, Chien/Hrones/Reswick, ..
- Experimente an einem Modell der Strecke
 - Simulationen (viele!)
 - Sättigung, Rauschen, Unsicherheiten, ...
- Analytischer Entwuft mit einem Modell
 - Pol-/Nullstellenkürzung, ...

7.1.1 Reale Stecke vs. Modell

- Für einfache Strecken kann komplett auf Modell verzichtet werden
 - Zweipunkteregler, P-Regler für Wasserstand
 - Trial-and-Error
- Modelle bieten Vorteile
 - Strecke ist nicht zugänglich
 - * Prototyp; nur in kleinen Stückzahlen verfügbar; steht beim Kunden, ...
 - Tests dauern lange wegen grosser Zeitkonstante (⇒ langes Messen)
 - Strecke ist gefährlich (z.B. Atomreaktor)
 - Messungen sind schlecht reproduzierbar

7.1.2 Analytischer Entwuft vs. Experiment

- Analytischer Entwuft und Analyse mit LZI-Modell
 - Sprungantworten (Führungsverhalten, Störverhalten)
 - Ortskurven / Bode-Diagramme
 - Verstärkungs- und Phasenreserve
 - Einfluss von Rauschen
 - Simulation mit Nicht-LZI (nichtlinear, zeitvariant)
 - Test der Funktionsfähigkeit mit 'genauerem' Modell
 - Unterscheidung von Betriebsfällen (Umschaltvorgänge)
 - * Einschalten, Dauerbetrieb, Fehlerfälle
 - * Zustandsautomaten

• Analytische Modelle

Gütemasse

- Stabilitätsreserven

Sprungantworten

- Wiederholbarkeit gewährleistet

- Pol-Lagen (Zeitkonstanten)

- Frequenzgang (Nyquist, Bode)

- 7.1.3 Kriterien zur Beurteilung des Reglers Experimente
 - - Sprungantworten

leistet sein

- * Überhöhungen, Zeitkonstante
- Berechnen von Gütemassen

• Regler-Tuning mit Experimenten

fluss des Reglers sofort

* z.B. Vibrationen

wändig

zierbar

ben!

Man sieht, spürt und hört den Ein-

Messungen zur Beurteilung des

Reglers (Robustheit) sinnd oft auf-

Experimente können lange dauern

und sind oft auch schlecht reprodu-

Man kann sich keinen Fehler erlau-

* Sicherer Betrieb muss gewähr-

- - * z.B. Integration Fehlerquadrat $e(t)^2$ und Stellgrössen $u(t)^2$
- Geräusch-Entwicklung
- Vibrationen

7.2 Pol-Nullstellenkürzung (S. 164)

* Überhöhungen, Zeitkonstante

Hierbei handelt es sich um eine analytische Einstellmetode → LZI-Modell der Strecke muss vorliegen! Der Regler wird dann so entworfen, dass er die invertierte Stecke enthält.

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s} G_s^{-1}(s)$$

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_R}{s} G_s^{-1}$$

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_R}{s} G_s^{-1}(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_R}{s} \Rightarrow \text{Integrator}$$

$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K_R}} \frac{1}{s + 1} \Rightarrow \text{PT}_1\text{-System}$$

$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K_R}s + 1} \Rightarrow \text{PT}_1\text{-System}$$

Hinweis: Wähle als Reglerstruktur die Standardform (Variante 2) → siehe Abschnitt 6.1.2 Für die Übertragungsfunktionen gelten die folgenden Bezeichnungen:

 $G_R(s)$ UTF Regler $G_S(s)$ UTF Stecke $G_0(s)$ UTF offener Regelkreis

 $G_f(s)$ UTF geschlossener Regelkreis

7.2.1 Eigenschaften der Pol-Nullstellenkürzung

- Pol-Nullstellenkürzung darf nur in der linken komplexen Halbebene durchgeführt werden!
- · Das Konzept funktioniert nicht immer
 - Inverse $G_s^{-1}(s)$ kann sehr sensitiv auf Modellparameter sein
 - → braucht sehr genaues Modell
 - Instabile Stecken
 - Stecken mit Verzögerungen bzw. Totzeiten (→ Regler wird akausal)

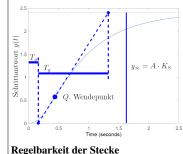
7.3 Empirische Einstellregeln

Idee: Anhand weniger Messungen versucht man, über die Stecke genug Informationen zu gewinnen, um einen Regler entwerfen zu können.

7.3.1 Einstellung via Schrittantwort (S. 164-166)

Idee: Eine Stecke wird mit einem Eingangssignal $u(t) = A \cdot \varepsilon(t)$ angeregt und ihre Schrittantwort y(t) wird gemessen. An diese gemessene Schrittantwort y(t) wird ein **PT**₁-System mit Totzeit 'gefittet'. Die daraus entstehenden Parameter werden für die Regler-Dimensionierung verwendet.

PT₁-System mit Totzeit
$$G_0(s) = \frac{K_s}{s \cdot T_g + 1} e^{-sT_u}$$



Vorgehen PT₁ fitten / Parameter bestimmen

- Tangente an Wendepunkt Q einzeichnen
- Parameter T_u , T_g und K_s gemäss Grafik be-
 - Ks: Verstärkung
- T_u: Verzugszeit
 T_g: Ausgleichszeit
- Konstanten für Tabellen bestimmen $\mu = \frac{T_g}{T_u}$ $q = \frac{T_g}{T_u \cdot K_s} = \mu \cdot \frac{1}{K_s}$

Gut regelbar heisst, die Zeitkonstante des geschlossenen Regelkreises ist kleiner als diejenige des offenen Regelkreises.

- Gut regelbar: $\mu < 3$
- Schlecht regelbar: $\mu > 10$

ACHTUNG: Struktur der Regler beachten! Die Tabelle liefert Parameter für Regler in 8.3 Störgrössenaufschaltung (s. 174) serieller Form (siehe Abschnitt 6.1.3)

$$G_{\text{PID}}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N} + s \cdot T_V\right) \qquad G_{\text{PI}}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N}\right) \qquad G_{\text{P}}(s) = K_R$$

$$G_{\text{PI}}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N}\right)$$

Regler	Methode	K_R	T_N	T_V
	ZN	$1.0 \cdot q$	_	_
P-Regler	CHR (20 %)	$0.7 \cdot q$	-	_
	CHR (0 %)	$0.3 \cdot q$	_	_
	ZN	$0.9 \cdot q$	$3.33 \cdot T_u$	_
PI-Regler	CHR (20 %)	$0.6 \cdot q$	$1.0 \cdot T_g$	_
	CHR (0 %)	$0.35 \cdot q$	$1.17 \cdot T_g$	_
	ZN	$1.2 \cdot q$	$2.0 \cdot T_u$	$0.5 \cdot T_u$
PID-Regler	CHR (20 %)	$0.95 \cdot q$	$1.36 \cdot T_g$	$0.47 \cdot T_u$
	CHR (0 %)	$0.6 \cdot q$	$1.0 \cdot T_g$	$0.5 \cdot T_u$

Hinweis: Die Prozentwerte bei CHR beschreiben den Sollwert für Überschwinger. Zu beachten ist, dass diese Werte durch die empirischen Einstellregeln nicht garantiert werden.

7.3.2 Einstellung via Stabilitätsgrenze (S. 166-167)

Idee: Eine stabile Stecke wird mit **P-Regler** betrieben. Die Verstärkung K_R des Reglers wird sukzessive erhöht, bis das System grenzstabil ist (endlos mit gleicher Amplitude schwingt).

Regler	K_R	T_N	T_V
P-Regler	$0.5 \cdot K_{\text{RES}}$	-	=
PI-Regler	$0.45 \cdot K_{\text{RES}}$	$0.85 \cdot T_{\pi}$	_
PID-Regler	$0.60 \cdot K_{RES}$	$0.50 \cdot T_{\pi}$	$0.125 \cdot T_{\pi}$

Parameter bestimmen

- Wenn System grenzstabil: Kritisches K_R bestimmen $-K_{krit} = K_{RES}$
- T_{π} Periodendauer der grenzstabilen Schwingung

ACHTUNG: Struktur der Regler beachten! Die Tabelle liefert Parameter für Regler in serieller Form (siehe Abschnitt 6.1.3)

7.4 Regler-Einstellung durch Optimierung (S. 167)

Im Folgenden ist das Vorgehen zur Regler-Einstellung durch Optimierung beschrieben.

- 1. Reglerstruktur wählen
 - \Rightarrow Regler hat Parameter k_1, \dots, k_n , welche optimiert werden sollen
- 2. Geschlossenen Regelkreis (inkl. Strecke) aufbauen (real oder Simulation)
- 3. Eingangssignale definieren (Führungsgrösse r(t), Störgrösse z(t)), für welche Regelkreis optimiert werden soll (z.B. Sprung, Rampe)
- **4.** Gütemass J definieren \Rightarrow repräsentative Zahl

Häufig wird
$$J(k_1, ..., k_n) = \int_0^{\hat{T}_{end}} (k_e \cdot e^2 + k_u \cdot u^2) dt$$
 gewählt

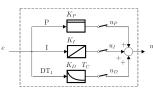
5. Für verschiedene Parametersätze k_1, \ldots, k_n Signale auf Regelkreis geben und Gütemass J berechnen und beurteilen \Rightarrow Parameter k_1, \dots, k_n sind **optimal**, wenn Gütemass J

Achtung: T_{end} sollte minestens so gross sein, dass der Regelkreis bei vernünftiger Reglereinstellung als eingeschwungen gilt (steady-state).

8 Variationen / Erweiterungen zu PID-Reglern

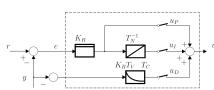
8.1 Modifizierter PID-Regler in Parallelform (S. 171)

Parallelform (normal)



Hinweis: P-Anteil darf auch nach vorne gezogen werden (wie rechts) ⇒ ändert Parameter von I- und DT₁-Gliedern

Modifizierte Form



Statt Fehler e wird Ausgang y auf DT₁-Glied geführt!

→ Ableitung des Ausgangs y statt Ableitung des Fehlers e

8.1.1 Eigenschaften / Auswirkungen der Modifikation

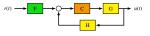
Parallelform (normal)

Modifizierte Form

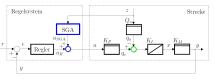
- Ändernde Referenz r(t) (z.B. Sprung)
 - DT₁-Glied reagiert sehr aggressiv, da e(t) gross
 - → 'Überforderung' des Stellglieds
- Ändernde Referenz r(t) (z.B. Sprung)
 - DT₁-Glied reagiert nicht so aggressiv, da y(t) 'träger' als e(t)→ Stellglied 'geschont'
- 'two degrees of freedom'
 - Reaktion auf Störung bzw. auf Änderung der Referenz separat

einstellbar **Achtung:** Der DT_1 -Anteil kann nicht einfach weggelassen werden!

8.2 Glättung der Referenz (S. 171)



Die Stellgrösse r(t) wird geglättet, um die Spitzenbelastung für das Stellglied zu mindern. Die wird erreicht, indem die Stellgrösse mittels (Filter F) gefiltert wird. → Stellglied wird nicht überstrapaziert.



Durch Messungen wird versucht, den Einfluss von Störungen z(t) auf die Strecke gleich im Vornherein mittels SGA zu kompensieren.

Am grünen Knoten gilt:

$$\dot{y} = K_M K_I [K_P u(t) - Q_a z(t)]$$

Die Störung soll mittels additiver Korrek**tur** des Reglerausgangs $u_R(t)$ erfolgen. Aus dem Blockschaltbild ersichtlich:

$$u(t) = u_R(t) + u_{\text{SGA}}(t)$$

 $u_{SGA}(t)$ soll den Einfluss von z(t) am blauen Knoten kompensieren.

Am blauen Knoten gilt:

$$\dot{y} = K_M K_I [K_P u_R(t) + \underbrace{K_P u_{SGA}(t) - Q_a z(t)}_{\text{soll sich auslöschen}}]$$

Wähle $u_{SGA}(t)$ so, dass die gewünschte Auslöschung stattfindet:

$$u_{\text{SGA}}(t) = \frac{Q_a}{K_P} z(t)$$

Somit wird die Störung kompensiert und es bleibt:

$$\dot{y} = K_M K_I K_P u_R(t)$$

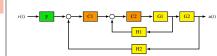
8.4 Kaskadenregelung (S. 175)

Regelstrecken 1. und 2. Ordnung (PT₁, PT₂, I, IT₁) können gut mit PID-Reglern gereglet werden. Bei Strecken höherer Ordnung liefert dieses Vorgehen keine genügenden Resultate mehr.

- Geschlossener Regelkreis ist zu lange oder zu wenig gedämpft
- Einstellregeln funktionieren gar nicht, weil die Regelstrecke im offenen Betrieb immer instabil ist

Konsequenz: Für Strecken höherer Ordnung braucht es auch einen Regler höherer Ordnung → Kaskadenregelung

8.5 Übertragungsfunktionen Kaskadenregelung



UTF innerer Regelkreis

$$G_{f1} = \frac{G_1 C_2}{1 + G_1 C_2}$$

UTF äusserer Regelkreis

Annahme - Ideale Sensoren: $H_1 = H_2 = 1$

$$G_{f2} = \frac{G_2 G_{f1} C_1}{1 + G_2 G_{f1} C_1} = \frac{G_2 G_1 C_2 C_1}{1 + G_1 C_2 + G_2 G_1 C_2 C_2}$$

Der innere Regelkreis ist deutlich schneller als der äussere Regelkreis!

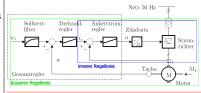
$$\begin{split} G_{f1} \approx K_1 \Rightarrow G_{f2} \approx \frac{G_2 K_1 C_1}{1 + G_2 K_1 C_1} &= \frac{G_3 C_1}{1 + G_3 C_1} \Rightarrow G_3 = G_2 K_1 \\ G_{f1} \approx 1 \Rightarrow G_{f2} \approx \frac{G_2 C_1}{1 + G_2 C_1} \end{split}$$

Interpretation: Der äussere Regelkreis sieht den inneren Regelkreis nur als Verstärkung K_1 . Wird $K_1 = 1$ gesetzt, so ist der innere Regelkreis aus sicht des äusseren Regelkreises gar nicht vorhanden.

8.5.1 Eigenschaften der Kaskadenregelung

- Der innere Regelkreis muss deutlich schneller sein, als der äussere Regelkreis
 - Innere Regelkreis erscheint somit für äusseren Regelkreis nur als eine Konstante
- Der innere Regelkreis wird zuerst ausgelegt
 - Dynamik der inneren Regelstrecke verbessern (schneller machen)
 - Allenfalls ist eine gute Störunterdrückung wichtig $(G_z(s) = \frac{Z(s)}{Y_{\text{sub}}(s)})$ optimieren)
- Beide Regelkreise können mit Einstellregeln eingestellt werden
 - Innerer Regelkreis: Äusseren Regelkreis als offen ('nicht da') betrachten
 - Äusserer Regelkreis: Innerer Regelkreis muss geschlossen sein (und funktionieren)
- Verfahren ist erweiterbar auf mehrstufige Kaskaden

Beispiel: Drehzahlregelung Elektromotor mit Kaskadenregelung



- Der innere Regelkreis regelt den Strom
- Regelgrösse $r_1(t)$: Strom
- Stellgrösse u₁(t): Spannung
- Der äussere Regler regelt die Drehzahl
- Regelgrösse r(t): Drehzahl
- Stellgrösse $u(t) = r_1(t)$: Strom

8.6 Wind-Up (Integratoren) (S. 172)

Das Wind-Up Problem tritt auf, die folgenden drei Voraussetungen erfüllt sind

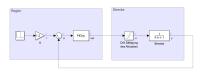
- Der Regler enthält einen I-Anteil
- Der Regelkreis enthält eine Limitierung bzw. Sättigung (Stellglied, Sensor, Physik)
- Das Reglersignal läuft in die Sättigung

Solange der Regelkreis in Sättigung ist

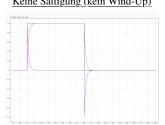
- Ausgang der Sättigung ist **konstant** (und somit auch der Fehler e(t))
- Regelkreis verhält sich, als ob der Regelkreis an der Stelle der Sättigung geöffnet wurde
- Intergrator im Regelkreis wird zum offenen Integrator und 'läuft davon', da ein konstanter Fehler e(t) ungebremst integriert wird \Rightarrow Wind-Up

Sobald der Wert der Stellgrösse r(t) ändert und der Fehler e(t) umgekehrtes Vorzeichen bekommt, muss erst einmal einige Zeit abintegriert werden, bis der Regler auf die Änderung der Stellgrösse reagiert. → siehe Beispiel

Beispiel: Wind-Up mit PI-Regler

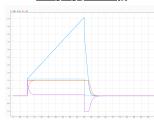


Keine Sättigung (kein Wind-Up)



- PI-Regler (so dimensioniert, dass G₀ nur noch I-Verhalten hat) \Rightarrow G_f hat PT₁-Verhalten
- Sättigungsblock: Sättigung bei ±1
- Stellgrösse r(t) = 1 (keine Sättigung)
- Stellgrösse r(t) = 1.2 (Sättigung)

Sättigung (Wind-Up)



8.6.1 Anti-Wind-Up-Ansätze

Hinweis: Die beschriebenen Methoden sind nicht mathematisch, sondern werden durch Simulationen / Ausprobieren umgesetzt.

- Wind-Up detektieren und Integrator nach Wind-Up auf sinnvollen Wert setzen
- Integrator begrenzen (z.B. auf 80 % der möglichen Stellgrösse) → nie 'vollgas'
- Bedingte Integration (Clamping): Integration stoppen (z.B. wenn Aktor am Limit ist)

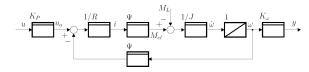


- Feedback-Mechanismus (Back-Calculation)
- → Muss richtig dimensioniert sein!
- \Rightarrow PI-Regler: Wähle $T_a \approx T_N$

Achtung: Es braucht immer ein Anti-Wind-Up, ansonsten läuft der Prozess schlecht oder geht sogar kaputt.

9 Fallstudie: Gleichstromantrieb

9.1 Modellierung (S. 53)



Der Gleichstromantrieb kann als PT_1 -Glied mit zwei Eingängen u(t) und $M_L(t)$ modelliert werden. $M_L(t)$ entspricht einer durch Wirbelströme erzeugte **Störung**.

$$\boxed{\underbrace{\frac{R \cdot J}{\Psi^2}}_{T} \dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{\frac{K_P \cdot K_{\omega}}{\Psi}}_{K_1} u(t) - \underbrace{\frac{R \cdot K_{\omega}}{\Psi^2}}_{K_2} M_L(t)}$$

9.1.1 Parameter-Identifikation



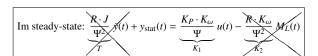
Aus der Sprungantwort können einige Parameter abgelesen werden. Einige weitere

Parameter sind aus Datenbiattern bekannt.				
Parameter	Bemerkung	Wert	Einheit	
T	gemäss Messung; Abb. 47	0.14	[s]	
K_1	gemäss Messung; Abb. 47	0.91	[-]	
R	statische Messung an der Ankerwicklung	1.9	[Ω]	
J	via Masse & Geometrie	$2.5 \ 10^{-4}$	$[\mathrm{kgm}^2]$	
Ψ	$Ψ = \sqrt{\frac{R \cdot J}{T}}$; siehe (35)	$5.8 \ 10^{-2}$	[Wb]	
K_{ω}	fix gegeben (kalibrierter Sensor)	$2.4 \ 10^{-2}$	[Vs]	
K_P	$K_P = \frac{K_1}{K} \cdot \Psi$; siehe (35)	2.2	[-]	

$$M_{I.1} = 4.8 \cdot 10^{-2} \, \text{FNm}$$

9.2 Gleichstromantrieb mit Steuerung (S. 148-149)

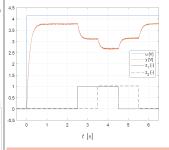
Die Grösse ω soll im **steady-state** gesteuert werden \Rightarrow Ableitungen 0, keine Störungen Zu steuern: $\omega = 25 \cdot 2\pi$, $K_{\omega} \cdot \omega = y = 3.77 \text{ V} \Rightarrow$ Finde Wert der Eingangsgrösse u(t)



$$y_{\text{stat}} = \frac{K_P \cdot K_{\omega}}{\Psi} u_{\text{stat}}(t) \qquad \underbrace{y_{\text{stat}} = K_{\omega} \cdot \omega}_{\text{stat}} \longrightarrow \omega_{\text{stat}} = \frac{K_P}{\Psi} u_{\text{stat}}$$

$$\Rightarrow u_{\text{stat}} = \frac{\Psi}{K_P} \omega_{\text{stat}} = \frac{\Psi}{K_P} 25 \cdot 2\pi = 4.14 \text{ V}$$

9.2.1 Probleme der Steuerung



- · Endwert wird zwar erreicht, aber wenn K_P oder Ψ variieren wird dies nicht mehr der Fall sein
- Die Drehzahländerung ist 'langsam' (gemäss Zeitkonstante T). (Ein höheres *u* zu Beginn könnte *T* verkürzen)
- Die Steuerung reagiert nicht auf die Störungen!

9.3 Gleichstromantrieb mit P-Regler (S. 149-150)

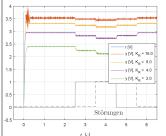


$$u(t) = K_R \cdot e(t) = K_R \cdot (r(t) - y(t))$$

Geschlossener Regelkreis:
$$\underbrace{\frac{T}{1+K_1K_R}}_{T_f}\dot{y}(t)+y(t)=\underbrace{\frac{K_1K_R}{1+K_1K_R}}_{K_f}u(t)-\underbrace{\frac{K_2}{1+K_1K_R}}_{K_z}M_L(t)$$

Damit der Sollwert r(t) erreicht wird (wenn keine Störung $M_L(t)$ vorhanden ist), muss $K_F = 1 \text{ sein} \Rightarrow K_R \text{ muss sehr gross sein}$

9.3.1 Eigenschaften des P-Reglers



- Für $K_R \to \infty$ werden die Zeitkonstante T_f und der Einfluss der Störung $M_L(t)$ beliebig klein \Rightarrow DGL konvergiert zu y(t) = r(t)
- Für kleine K_R wird Endwert nicht erreicht → statischer Fehler
- Stellgrösse u(t) sättigt aufgrund von physikalischen Gegebenheiten → Prozess wird nichtli**near** → Überschwinger
- Messrauschen wird ebenfalls verstärkt (P-Regler verstärt alle Frequenzen)
- → Es bleibt ein stationärer Fehler! Dafür reagiert der P-Regler schnell.

9.4 Gleichstromantrieb mit I-Regler (S. 151-152)

I-Regler (*K_R* einstellbar)

E-Motor (Strecke, PT₁-System)

$$u(t) = K_R \int_0^t \underbrace{r(\tau) - y(\tau)}_{e(\tau)} d\tau$$

 $T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_1 \cdot u(t) - K_2 \cdot M_L(t)$

 \Rightarrow u(t) von I-Regler in Gleichung der Strecke einsetzen, ableiten, umsortieren

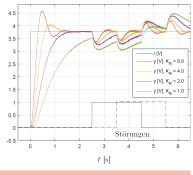
PT₂-System:
$$\underbrace{\frac{T}{K_1 \cdot K_R}}_{T_t^2} \ddot{y}(t) + \underbrace{\frac{1}{K_1 \cdot K_R}}_{2\zeta_f T_f} \dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{\frac{1}{K_f}}_{K_f} r(t) - \frac{K_2}{K_1 \cdot K_R} \dot{M}_L(t)$$

9.4.1 Eigenschaften des I-Reglers

•
$$T_F=\sqrt{\frac{T}{K_1\cdot K_R}}, \zeta_f=\frac{1}{2\sqrt{TK_1K_R}}$$

• Der Integrator sorgt dafür, dass im

- steady-state kein stationärer Fehler $\mathbf{auftritt}\ (e(t) = 0)$
- Für grosse K_R wird T_f klein, die Sprungantwort schneller (erwünscht)
- Für grosse K_R wird ζ_f klein, die Überhöhung grösser (unerwünscht)
- → Kompromiss finden



9.5 Gleichstromantrieb mit PI-Regler (S. 152-154)

Vorteile von P-Regler und I-Regler sollen kombiniert werden:

- P-Regler für schnelle Reaktion
- I-Regler für statische Fehlerunterdrückung \Rightarrow Parameter K_R und T_N einstellbar

PI-Regler:
$$u(t) = \frac{1}{T_N} \Big(\int_0^t e(\tau) d\tau + e(t) \Big) K_R \circ - \bullet U(s) = \frac{1}{T_N} \Big(\frac{1}{s} E(s) + E(s) \Big) K_R$$

E-Motor:
$$T\dot{y}(t) + y(t) = K_1 u(t) - K_2 M_L(t) \circ TsY(s) + Y(s) = K_1 U(s) - K_2 M_L(s)$$

UTF Regler:
$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R \left(\frac{1}{T_N} \frac{1}{s} + 1\right)$$
 UTF Strecke: $G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{T_S + 1}$ Der Parameter T_N des PI-Reglers wird so gewählt, dass der **offene Regelkreis** $G_0(s)$ einem **Integrator** entspricht! \Rightarrow **Pol-Nullstellenkürzung!**

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = K_R \frac{1 + T_N s}{T_N s} \cdot \frac{K_1}{T s + 1} \stackrel{T_N = T}{=} K_R \frac{K_1}{T_N s}$$

Für den **geschlossenen Regelkreis** ergibt sich somit ein PT₁-System mit Verstärkung 1 (\Rightarrow kein statischer Fehler im steady-state). Die Zeitkonstante T_{geschl} wird mit K_R des Reglers eingestellt.

$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\frac{K_R K_1}{T_N s}}{1 \frac{K_R K_1}{T_N s}} = \frac{K_R K_1}{T_N s + K_1 K_R} = \frac{1}{\frac{T_N}{K_R K_1} s + 1}$$

9.5.1 Pol-Nullstellenkürzung

Wird durchgeführt, um den **offenen Regelkreis** zu vereinfachen. Pole und Nullstellen der Strecke werden mit einer geeigneten Wahl der Parameter des Reglers kompensiert.

- → Idealfall: offener Regelkreis verhält sich wie ein Integrator.
- Betrachtung UTF des offenen Regelkreises
- Parameter des Reglers so wählen, dass man Polstelle mit einer Nullstelle kürzen kann
 Diejenige Polstelle, welche am frühesten 'zündet', ist bevorzugt zu kürzen!

9.5.2 Eigenschaften des PI-Reglers

- Zeitkonstante und Verstärkung unabhängig voneinander einstellbar
- Kein Überschwingen
- Konstante Störungen werde unterdrückt (kein steady-state Fehler)
- Grosse Verstärkung führt noch immer zu Sättigung
- Effekt des Rauschens eher harmlos, weil kleine Verstärkungen gewählt werden können
- $\Phi_{RES} = 90^{\circ} \text{ und } K_{RES} = \infty$



9.6 Gleichstromantrieb mit PID / PD-Regler (S. 155)

Der Regelkreis kann nicht weiter optimiert werden! Der offenere Regelkreis entspricht bereits einem **Integrator**, was der **Idealfall** ist.

Ein D-Anteil DT₁ wäre ungünstig, weil

- Verstärkung von hohen Frequenzen → Erhöhung des Rauschens
- Verbesserung der Phasenreserve → unnötig bei Φ_{RES} = 90°

Allenfalls sinnvoll wäre ein Tiefpassfilter für den P-Anteil (PT₁ statt P), um das Rauschen der Stellgrösse zu verkleinern → Reduktion der Phasenreserve!

9.7 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PI-Regler (S. 157-159)

Das bisherige Modell der Strecke soll um eine Totzeit T_t erweitert werden. Als Regler wird weiterhin ein PI-Regler eingesetzt. Die Ergebnisse werden dadurch massiv schlechter!

UTF Stecke mit Totzeit
$$G_S(s) = \frac{K_1}{s+1}e^{-sT_t}$$

UTF Regelkreis
$$G_0(s) = G_S(s) \cdot G_R(s) = \frac{K_1}{s+1} e^{-sT_t} \cdot K_R \frac{1+T_N s}{T_N s} \stackrel{T_N=T}{=} \frac{K_1 K_R}{sT} e^{-sT_t}$$

Die UTF des offenen Regelkreises $G_0(s)$ entspricht keinem Integrator mehr. Somit wird die UTF des geschossenen Regelkreises $G_f(s)$ keinem PT₁-System mehr entsprechen.

9.7.1 Effekte im Bode- und Nyquistdiagramm / Sprungantwort

- Amplitudengang unverändert, gleiche Durchtrittsfrequenz
- Phasengang wird schlechter (zusätzliche Phasenverzögerung), die -180° Phase wird bei tieferer Frequenz erreicht - die Verstärkungsreserve sinkt dadurch
- Die Phase bei der Durchtrittsfrequenz ist negativer, die Phasenreserve sinkt





9.8 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PID-Regler (S. 160-162)

Um die Totzeit T_t entgegnzuwirken, wird dem PI-Regler ein Lead-Glied (entspricht einem PD-Regler) in serie geschaltet \Rightarrow PID-Regler in multiplikativer Form (Abschnitt 6.1.3)

Dies hat folgende Effekte:

- Nyquistkurve wird bei der Durchtrittsfrequenz aktiv durch den Regler 'zurückgedreht' Effekt der Totzeit nicht für alle Frequenzen kompentireren, sondern in einem bestimmten Frequenzbereich
- Im Bodediagramm: Phase bei 0 dB
- \bullet Serieschaltung eines Lead-Glieds (PD-Regler) zum PI-Regler \Rightarrow PID-Regler
- → Lead-Glied siehe Abschnitt 5.1.2

9.8.1 Auswirkungen des Leas-Glieds / PD-Reglers

- Phase und Verstärkung werden angehoben
- Zeitkonstante wird kleiner (Regler wird schneller)





10 Implementierung analoger Regler

Voraussetung: Regler ist ausgelegt (Parameter und Struktur des Reglers bekannt)

10.1 Struktur allgemeiner Frequenzgang eines Reglers

Der Frequenzgang des Reglers $G_R(j\omega)$ mit $(m \le n)$ ist beschrieben durch

$$G_R(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b_n + b_{n-1}\frac{1}{j\omega} + \dots + b_0\frac{1}{(j\omega)^n}}{1 + a_{n-1}\frac{1}{i\omega} + \dots + a_0\frac{1}{(j\omega)^n}}$$



Ein jeder solcher Frequenzgang besteht nur aus **Integratoren**, **Summatoren und Verstärkungen**. Diese Grundglieder können mit OpAmp-Schaltungen realisiert werden.

10.2 Grundschaltungen mit OpAmps

Hinweis: Die folgenden Betrachtungen gelten für ideale OpAmps!

10.2.1 Summator



$$Y = -\frac{Z_0}{Z_1} \cdot U_1 - \frac{Z_0}{Z_2} \cdot U_2$$

→ Auf beliebig viele Eingaänge erweiterbar

10.2.2 Integrierer



$$Z_0 = \frac{1}{j\omega C} \text{ (Kondensator)} \qquad Z_1 = R$$

$$Y = -\frac{1}{j\omega RC} \cdot U \quad \Rightarrow Y = -\frac{1}{j\omega R_1 C} \cdot U_1 - \frac{1}{j\omega R_2 C} \cdot U_2$$

- Für einen oder mehrere Eingänge geeignet
- Braucht 'Reset'-Schaltung, um Kondensator zu entladen
- Anti-Wind-Up durch Sättigung der Speisespannung gegeben

10.2.3 P-Glied (passiv)



Verstärkung < 1 → passiver Spannungsteiler Verstärkung > 1 → OpAmp-Schaltung

- OpAmps sollten als Summierer oder Integratoren mit definierter Verstärkung aufgebaut werden
- Vor Eingänge des OpAmps passive Spannungsteiler setzen

10.3 Varianten analoger PID-Schaltungen

10.3.1 Variante 1 (gemischt)



- R₁ Proportional (P-Anteil)
- C_1 Ableitung (D-Anteil)
- R_3 Filterkonstante der Ableitung $\Rightarrow R_1$ und C_1 bilden DT_1 -Anteil
- C₂ Integral (I-Anteil)
- \Rightarrow Betrachtung als Summator mit Z_0 und Z_1 möglich

10.3.2 Variante 2 (Parallelform)



Der Frequenzgang $G(j\omega)$ des Reglers lautet

$$\frac{U_{\text{PID}}}{U_E} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{K_D} \cdot \left(1 + \frac{1}{j\omega \underbrace{C_I R_I}_{T_V}} + j\omega \underbrace{C_D R_D}_{T_V}\right)$$

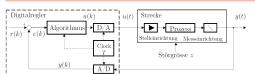
Durch Einbau eines Widerstands an der Stelle A wird der der PID-Regler zu einem PIDT₁-Regler.

11 Implementierung digitaler Regler

Heutzutags werden fast nur noch digitale Regler implementiert. Gründe hierfür sind:

- Verarbeitung digitaler Signale ist flexibel
- Speichung und Übertragung digitaler Signale ist einfach
- Komponenten (Rechner, Wandler) für ditigale Umsetzung werden immer günstiger

11.1 Aufbau digitaler Regelkreis (S. 183)



- · Strecke ändert nicht
- Regler arbeitet zeitdiskret

11.1.1 Signale im digitalen Regelkreis (S. 184)



- Sensorseitig wird periodisch die Regelgrösse abgetastet (zuvor TP-filtern)
 - TP: Analoges Tiefpassfilter ⇒ Anti-Aliasing
- Aktorseitig wird mit ZOH-Halteglied (Zero-Order-Hold) aus dem diskreten Signal u(k) eine kontinuierliche Funktion u(t) erzeugt

11.1.2 Quantisierung (S. 185)

Das Signal eines ditialen Reglers ist sowohl zeitdiskret als auch wertdiskret.

zeitkontinuierlich zeitdiskret

Abtastzeit T

- T zu gross gewählt
 - Schlechtes Führungsverhalten (Überschwingen)
- T zu klein gewählt
 - Möglicherweise numerische Probleme
 - Höhere Anforderungen an Sensor, Aktor, Wandler und Digitalrechner

Sättigung und Quantisierung

- Grobe Quantisierung
 - Nichtlineare Reglerung
- Feine Quantisierung
 - Keinen (negativen) Einfluss auf Regler

11.2 Entwurfsverfahren (s. 186)



Indirekter digitaler Reglerentwurf

- $G_S(j\omega) \Rightarrow$ 'links herum' $\Rightarrow G_{R,I}(z)$
- · Direkter digitaler Reglerentwurf
 - $G_S(j\omega) \Rightarrow$ 'rechts herum' $\Rightarrow G_{R,D}(z)$
 - 'Digitale Natur' des Reglers von Anfang an berücksichtigt

Hinweis: Normalerweise sind die resultierenden Regler nicht identisch: $G_{R,I}(z) \neq G_{R,D}(z)$

11.3 Diskretisierung eines Reglers (S. 188)

Ein kontinuierlicher Regler (hier I-Regler) weist folgendes Verhalten auf:

$$u(t) = K_R \cdot \int_0^t e(\tau) \, d\tau$$

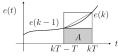
Der entsprechende zeitdiskrete Regler kann **nicht exakt** gebildet werden, da e(t) nur zu diskreten Zeitpunkten e(kT) bekannt ist. Geht man davon aus, dass e(t) nicht stakt än**dert** (\Rightarrow geeignete Wahl der Abtastzeit T), dann kann u(k) folgendermassen approximiert werden:

$$u(k) = K_R \cdot \int_0^{kT} e(\tau) d\tau = K_R \cdot \int_0^{kT-T} e(\tau) d\tau + K_R \cdot \int_{kT-T}^{kT} e(\tau) d\tau$$

$$\underbrace{u(k-1)}_{u(k-1)} \underbrace{kT-T}_{\approx A}$$

11.3.1 Approximationen der Fläche A

Die Fläche A kann auf mehrere Arten approximiert werden:



Rechteckregel vorwärts (Euler) $A = T \cdot e(k-1)$ Rechteckregel rückwärts

Trapezregel (Tustin)

Hinweis: Für die Diskretisierung von Reglern wird die Trapez-Approximation verwendet, da diese am genausten ist.

11.4 Vorgehen: Diskretisierung eines Reglers

- 1. Übertragungsfunktion des Reglers in j ω aufstellen: $G_R(j\omega) = ...$
- Wahl der Abtastzeit T_S und einer Diskretisierungsmethode - (typischerweise Tustin, weil am genausten)
- 3. Substitution aller j ω in der UTF durch Approximation in $z^{-1} \Rightarrow G_{R, \text{diskret}}(z) = ...$
 - Tustin: $j\omega = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
- 4. Umformen, damit Doppelbrüche verschwinden

- **5.** Ansatz: $G_{R, \text{diskret}}(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ sortieren nach U(z) und E(z)**6.** Differenzengleichung durch inverse Z-Transformation bestimmen

Beispiel: PI-Regler diskretisieren

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G_R(j\omega)$ eines **kontinuierlichen** Reglers. Daraus soll die zu implementierende Differenzengleichung ermittelt werden.

1.
$$G_R(j\omega) = K_R \cdot \frac{1 + T_N j\omega}{T_N j\omega} \implies 2$$

$$G_{R,\,\mathrm{diskret}}(z) \stackrel{3:}{=} K_R \cdot \frac{1 + T_N \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{T_N \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \stackrel{4:}{=} K_R \cdot \frac{T(1 + z^{-1}) + 2T_N(1 - z^{-1})}{2T_N(1 - z^{-1})} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

5.
$$U(z)(1-z^{-1}) = \frac{K_R}{2T_N} \cdot E(z) \left(T(1+z^{-1}) + 2T_N(1-z^{-1}) \right)$$

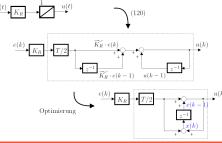
6.
$$u(k) - u(k-1) = \frac{K_R}{2T_N} \left[T \cdot e(k) + T \cdot e(k-1) + 2T_N \cdot e(k) - 2T_N \cdot e(k-1) \right]$$

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_R}{2T_N} \left[e(k) \cdot \left(T + 2T_N\right) + e(k-1) \cdot \left(T - 2T_N\right) \right]$$

11.5 Code-Implementierung eines diskreten Reglers (S. 190)



11.5.1 Optimierung des Speicherplatzes (S. 189)

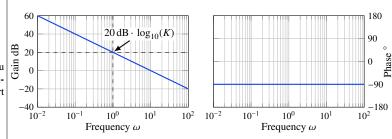


Durch geeignete Anpassung kann die Struktur des Reglers so optimiert werden, dass man sich nicht mehr die beiden Werte u(k-1) und e(k-1) 'merken' muss, sondern nur noch einen Wert x(k-1)

12 Anhang

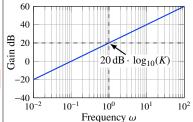
12.1 Bodediagramm eines Integrators

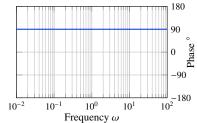
Ein Integrator mit $G(s) = \frac{K}{s}$ hat seine Polstelle bei der Frequenz $\omega = 0$. Im Bodediagramm wird der Integrator so dargestellt, dass bei Frequenz $\omega = 1$ die Verstärkung $20 \,\mathrm{dB} \cdot \log_{10}(K)$ erreicht ist. Die Steigung beträgt $-20 \,\mathrm{dB/Dek}$ und die Phase ist konstant



12.2 Bodediagramm eines Differenzierer

Ein Differenzierer mit $G(s) = K \cdot s$ hat eine Nullstelle bei der Frequenz $\omega = 0$. Im Bodediagramm wird der Differenzierer so dargestellt, dass bei Frequenz $\omega=1$ die Verstärkung $20\,\mathrm{dB}\cdot\log_{10}(K)$ erreicht ist. Die Steigung beträgt $20\,\mathrm{dB/Dek}$ und die Phase ist konstant bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$





12.3 z-Transformation

Die z-Transformation wird verwendet, um diskrete Signale in den Frequenzbereich zu transformieren.

Zeitbereich	Frequenzbereich
u(k)	U(z)
u(k - 1)	$z^{-1} \cdot U(z) = \frac{1}{z} \cdot U(z)$
u(k + 1)	$z \cdot U(z)$

12.3.1 Z-Transformation mit Matlab

```
s = tf('s');

2 G_R = K_R * (1 + s * T_N) / (s * T_N); % UTF Regler

3 sysd = c2d(G_R, T_S, 'tustin') % T_S: sampling time
```

12.4 Fourier- bzw. Laplace-Transformation

Die Fourier- und die Laplace-Transformation werden verwendet, um **kontinuierliche** Signale ein den Frequenzbereich zu transformieren.

Zeitbereich	Frequenzbereich (Fourier)	Frequenzbereich (Laplace)
u(t)	$U(j\omega)$	U(s)
$\int u(\tau) d\tau$	$\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\cdot U(\mathrm{j}\omega)$	$\frac{1}{s} \cdot U(s)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u(t)}$	$j\omega \cdot U(j\omega)$	$s \cdot U(s)$