Regelungstechnik 2

FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann

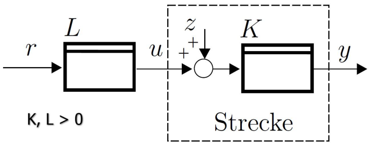
Autoren:
Authors

Version:
1.0.20240301
https://github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2

Inhaltsverzeichnis

1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

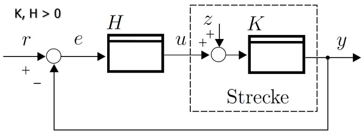
1.1 Steuerung



Eine Steuerung besitzt **keine Rückkopplung** und ist somit ein **offener Regelkreis**

$$y=\underbrace{KL\cdot r}_{\text{Sensitivität}}+\underbrace{K\cdot z}_{\text{Störung}}$$

1.2 Regelung



Eine regelung besitzt eine **Gegenkopplung**

$$y=KH\cdot(r-y)+K\cdot z$$

$$y=\underbrace{\frac{KH}{1+KH}}_{\text{Sensitivität}}\cdot r+\underbrace{\frac{K}{1+KH}}_{\text{Störungsunterdrückung}}\cdot z$$

1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung der Störung z gilt:

$$\lim_{H\to\infty}\frac{K}{1+KH}\cdot z=0$$

⇒Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so wird die Störung z unterdrückt
⇒Bei einer Steuerung wird die Störung nicht unterdrückt

1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H\to\infty}\frac{KH}{1+KH}\cdot r=1$$

⇒Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so ist $y\approx r$ (Ausgang ≈ Sollwert)
⇒Bei einer Steuerung muss $H=\frac{1}{L}$ sein, damit $y\approx r$

1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

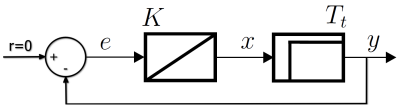
1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

(asymp.) stabil	Verstärkung $\lvert V\rvert<1$	System schwingt nicht
grenzstabil	Verstärkung $V=-1$	System schwingt mit konstanter Ampl.
instabil	Verstärkung $\lvert V\rvert>1$	System schwingt mit zunehmender Ampl.

1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten: $V=-1$

Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied



$K, T_t>0$

Es muss gelten: $y(t)=-e(t)$ unter der Annahme, dass $e(t)=A\cdot\cos(\omega t)$

$$x(t)=K\cdot\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau+x_0=K\cdot\int_0^t A\cdot\cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau+x_0=K\frac{A}{\omega}\sin(\omega\tau)\Big|_0^t+x_0$$

$$=\frac{KA}{\omega}\sin(\omega t)+\underbrace{x_0}_{0}$$

$$y(t)=x(t-T_t)=\frac{KA}{\omega}\sin(\omega(t-T_t))=\frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega(t-T_t)-\frac{\pi}{2}\right)$$

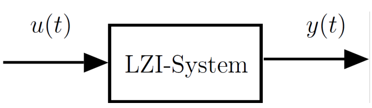
Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega t-\omega T_t-\frac{\pi}{2}\right)}_{y(t)}=-A\cos(\omega t)=\underbrace{A\cdot\cos(\omega t-\pi)}_{-e(t)}$$

⇒Wenn der Regler die Verstärkung K hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz ω
⇒Die Verstärkung K muss vermieden werden!

1.4 Frequenzgang (S. 114)

Wird ein Sinus-Signal $u(t)$ in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die **Amplitude** und die **Phase**. Die **Frequenz** hingegen bleibt **gleich**.
Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!



A	Amplitude Eingangssignal
B	Amplitude Ausgangssignal
$\frac{B}{A}$	Verstärkung
φ	Phasenverschiebung

$u(t)=A\cdot\cos(\omega t)$ $\quad$ $y(t)=B\cdot\cos(\omega t+\varphi)$ + Transiente

1.4.1 Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (**steady state**) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig $t=5\tau$ als Ende des Einschwingvorgangs
⇒**Uns interessiert nur der der steady state!**

1.4.2 Darstellung des Frequenzgangs

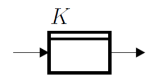
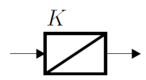
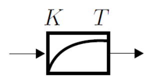
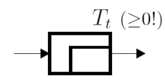
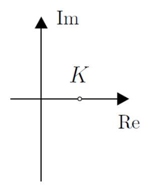
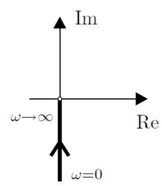
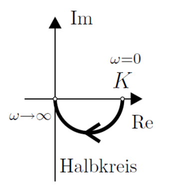
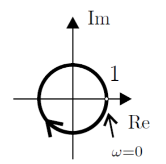
Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:

- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- Zeiger-Diagramm

1.5 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl (S. 116)

$$\boxed{G(j\omega)=|G(j\omega)|\cdot e^{j\angle G(j\omega)}=\frac{B}{A}\cdot e^{j\varphi}}$$

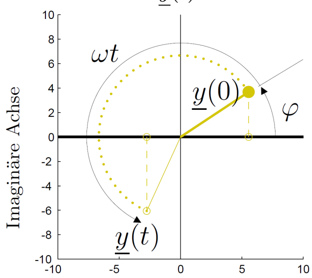
1.6 Frequenzgang der Grundglieder

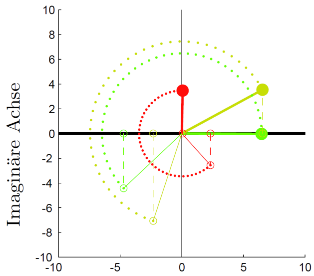
P-Glied	I-Glied	PT$_1$-Glied	T$_t$-Glied
			
$y(t)=Ku(t)$	$\dot{y}(t)=Ku(t)$	$T\dot{y}(t)+y(t)=Ku(t)$	$y(t)=u(t-T_t)$
$G(j\omega)=K$	$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega}$	$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T}$	$G(j\omega)=e^{-j\omega T_t}$
$\lvert G\rvert=K$ $\angle G=0$	$\lvert G\rvert=\frac{K}{\omega}$ $\angle G=-\frac{\pi}{2}$	$\lvert G\rvert=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ $\angle G=-\arctan(\omega T)$	$\lvert G\rvert=1$ $\angle G=-\omega T_t$
			 $\frac{2\pi}{T_t}$-periodisch in ω

⇒Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

1.7 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal **bei einer bestimmten Frequenz** als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal $\underline{y}(t)$ als Zeiger $\underline{Y}$ zur Zeit $t=0$ dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz $\omega=2\pi f$ rotiert. Das zeitliche Signal $y(t)$ entspricht dem **Realteil** von $\underline{y}(t)$





1.7.1 Komplexe Amplitude $\underline{Y}$

$$\underline{y}(t)=B\cdot[\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)]$$
$$=B\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}=B\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}$$
$$=\underline{Y}\cdot e^{j\omega t}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

$\lvert\underline{y}(t)\rvert=B$	Maximale Amplitude des Ausgangssignals
$\mathrm{Re}(\underline{y}(t))=y(t)$	Ausgangssignal (zeitlich)
$\underline{y}(0)=\underline{Y}$	Anfangszeiger (komplexe Amplitude)

1.7.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\boxed{\dot{\underline{y}}(t)=\underline{Y}\cdot j\omega\cdot e^{j\omega t}}\qquad\boxed{\int\underline{y}(t)\ \mathrm{d}t=\frac{\underline{Y}}{j\omega}\cdot e^{j\omega t}}$$

1.8 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

1. DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
2. Geeignet umformen: $G(j\omega)=\frac{\underline{Y}}{\underline{U}}$
3. Falls gewünscht: Amplitude $|G(j\omega)|$ und Phase φ bestimmen

Beispiel: PT$_1$ Glied

$$T\dot{y}+y(t)=Ku(t)\ \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}}\ T\cdot j\omega\cdot\underline{Y}+\underline{Y}=[j\omega T+1]\cdot\underline{Y}=K\underline{U}$$

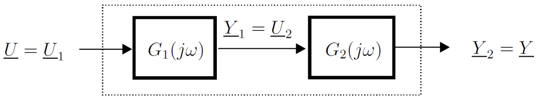
$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}}=\frac{K}{j\omega T+1}=G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)|=\frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|}=\frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2+1^2}}\qquad\varphi=\frac{K}{1+(\omega T)^2}-j\frac{K\omega T}{1+(\omega T)^2}+\pi$$

1.8.1 Allgemeiner Fall

$$a_n y(t)^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$
$$a_n (j\omega)^n \cdot \underline{Y} + \cdots + a_1 j\omega \cdot \underline{Y} + a_0 \underline{Y} = b_m (j\omega)^m \cdot \underline{U} + \cdots + b_1 j\omega \cdot \underline{U} + b_0 \underline{U}$$
$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{b_m (j\omega)^m + \cdots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \cdots + a_1 j\omega + a_0} = G(j\omega)$$
$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{|b_m (j\omega)^m + \cdots + b_1 j\omega + b_0|}{|a_n (j\omega)^n + \cdots + a_1 j\omega + a_0|}$$
$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\right)(+\pi)$$

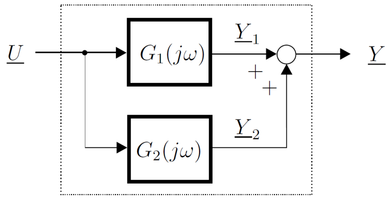
1.9 Serieschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 \dot{G}_2 = |G_1| \cdot e^{j\angle G_1} \cdot |G_2| \cdot e^{j\angle G_2} = |G_1||G_2| \cdot e^{j(\angle G_1 + \angle G_2)}$$

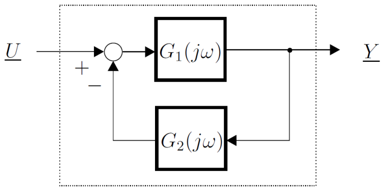
1.10 Parallelschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1(j\omega) \cdot \underline{U} + G_2(j\omega) \cdot \underline{U} = \underbrace{(G_1(j\omega) + G_2(j\omega))}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 + G_2 = \mathrm{Re}\{G_1\} + \mathrm{Re}\{G_2\} + j(\mathrm{Im}\{G_1\} + \mathrm{Im}\{G_2\})$$

1.11 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{\frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

⇒ Anwendung von **Mason Regel** (SigSys)

1.11.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
2. Nach $\underline{Y}$ umformen

1.12 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang $G(j\omega)$ und du Übertragungsfunktion $G(s)$ mit $s = \sigma + j\omega$ hängen folgendermassen zusammen:

$$\boxed{G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}}$$