Regelungstechnik 2

FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann

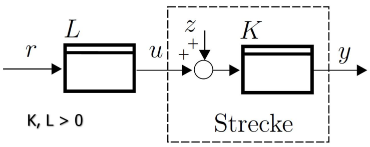
Autoren:
Authors

Version:
1.0.20240318
https://github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2

Inhaltsverzeichnis

1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

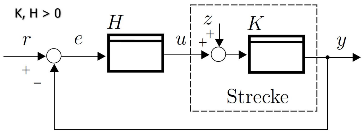
1.1 Steuerung



Eine Steuerung besitzt **keine Rückkopplung** und ist somit ein **offener Regelkreis**

$$y = \underbrace{KL \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{K \cdot z}_{\text{Störung}}$$

1.2 Regelung



Eine regelung besitzt eine **Gegenkopplung**

$$y = KH \cdot (r - y) + K \cdot z$$

$$y = \underbrace{\frac{KH}{1+KH}}_{\text{Sensitivität}} \cdot r + \underbrace{\frac{K}{1+KH}}_{\text{Störungsunterdrückung}} \cdot z$$

1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung der Störung z gilt:

$$\lim_{H\to\infty} \frac{K}{1+KH} \cdot z = 0$$

⇛ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so wird die Störung z unterdrückt
⇛ Bei einer Steuerung wird die Störung nicht unterdrückt

1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H\to\infty} \frac{KH}{1+KH} \cdot r = 1$$

⇛ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so ist $y \approx r$ (Ausgang ≈ Sollwert)
⇛ Bei einer Steuerung muss $H = \frac{1}{L}$ sein, damit $y \approx r$

1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

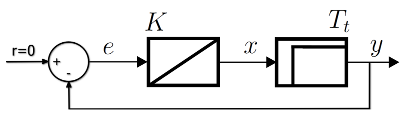
1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

(asymp.) stabil	Verstärkung $\lvert V\rvert < 1$	System schwingt nicht
grenzstabil	Verstärkung $V = -1$	System schwingt mit konstanter Ampl.
instabil	Verstärkung $\lvert V\rvert > 1$	System schwingt mit zunehmender Ampl.

1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten: $V = -1$

Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied



$K, T_t > 0$

Es muss gelten: $y(t) = -e(t)$ unter der Annahme, dass $e(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

$$x(t) = K \cdot \int_0^t e(\tau)\,d\tau + x_0 = K \cdot \int_0^t A \cdot \cos(\omega\tau)\,d\tau + x_0 = K\frac{A}{\omega}\sin(\omega\tau)\Big|_0^t + x_0$$

$$= \frac{KA}{\omega}\sin(\omega t) + \underbrace{x_0}_{0}$$

$$y(t) = x(t - T_t) = \frac{KA}{\omega}\sin(\omega(t - T_t)) = \frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega(t-T_t) - \frac{\pi}{2}\right)$$

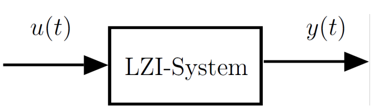
Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega t - \omega T_t - \frac{\pi}{2}\right)}_{y(t)} = -A\cos(\omega t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - \pi)}_{-e(t)}$$

⇛ Wenn der Regler die Verstärkung K hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz ω
⇛ Die Verstärkung K muss vermieden werden!

2 Frequenzgang (S. 114)

Wird ein Sinus-Signal $u(t)$ in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die **Amplitude** und die **Phase**. Die **Frequenz** hingegen bleibt **gleich**.
Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!



A	Amplitude Eingangssignal
B	Amplitude Ausgangssignal
$\frac{B}{A}$	Verstärkung
φ	Phasenverschiebung

$u(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ $\quad$ $y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ + Transiente

2.0.1 Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (**steady state**) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig $t = 5\tau$ als Ende des Einschwingvorgangs
⇛ **Uns interessiert nur der der steady state!**

2.0.2 Darstellung des Frequenzgangs

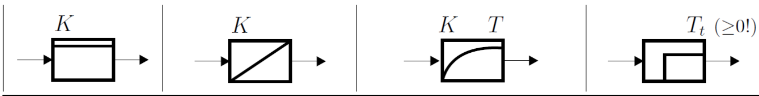
Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:

- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- Zeiger-Diagramm

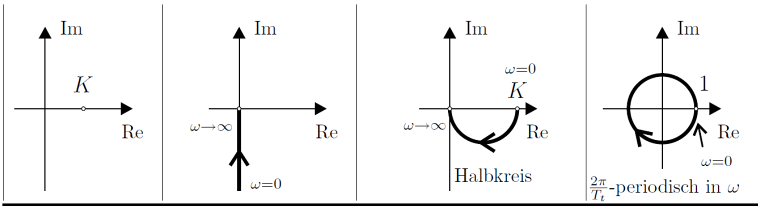
2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl (S. 116)

$$\boxed{G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \frac{B}{A} \cdot e^{j\varphi}}$$

2.2 Frequenzgang der Grundglieder



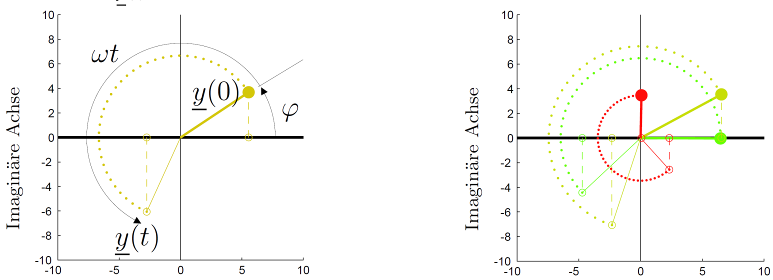
P-Glied	I-Glied	PT$_1$-Glied	T$_t$-Glied
$y(t) = Ku(t)$	$\dot{y}(t) = Ku(t)$	$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$	$y(t) = u(t - T_t)$
$G(j\omega) = K$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$	$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$
$\lvert G\rvert = K$	$\lvert G\rvert = \frac{K}{\omega}$	$\lvert G\rvert = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$	$\lvert G\rvert = 1$
$\angle G = 0$	$\angle G = -\frac{\pi}{2}$	$\angle G = -\arctan(\omega T)$	$\angle G = -\omega T_t$



⇛ Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

2.3 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal **bei einer bestimmten Frequenz** als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal $\underline{y}(t)$ als Zeiger $\underline{Y}$ zur Zeit $t = 0$ dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz $\omega = 2\pi f$ rotiert. Das zeitliche Signal $y(t)$ entspricht dem **Realteil** von $\underline{y}(t)$



2.3.1 Komplexe Amplitude $\underline{Y}$

$$\underline{y}(t) = B \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]$$
$$= B \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$
$$= \underline{Y} \cdot e^{j\omega t}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

$\lvert\underline{y}(t)\rvert = B$	Maximale Amplitude des Ausgangssignals
$\mathrm{Re}(\underline{y}(t)) = y(t)$	Ausgangssignal (zeitlich)
$\underline{y}(0) = \underline{Y}$	Anfangszeiger (komplexe Amplitude)

2.3.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\boxed{\dot{\underline{y}}(t) = \underline{Y} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}} \qquad \boxed{\int \underline{y}(t)\,dt = \frac{\underline{Y}}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}}$$

2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

1. DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
2. Geeignet umformen: $G(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{U}}$
3. Falls gewünscht: Amplitude $|G(j\omega)|$ und Phase φ bestimmen

Beispiel: PT$_1$ Glied

$$T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \quad \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}} \quad T \cdot j\omega \cdot \underline{Y} + \underline{Y} = [j\omega T + 1] \cdot \underline{Y} = K\underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{K}{j\omega T + 1} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1^2}} \qquad \varphi = \frac{K}{1+(\omega T)^2} - j\frac{K\omega T}{1+(\omega T)^2} + \pi$$

2.4.1 Allgemeiner Fall

$$a_n y(t)^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

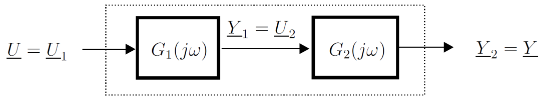
$$a_n (j\omega)^n \cdot \underline{Y} + \dots + a_1 j\omega \cdot \underline{Y} + a_0 \underline{Y} = b_m (j\omega)^m \cdot \underline{U} + \dots + b_1 j\omega \cdot \underline{U} + b_0 \underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{|b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0|}{|a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0|}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\right)(+\pi)$$

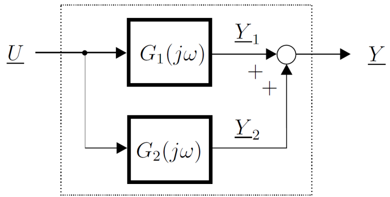
2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 \dot{G}_2 = |G_1| \cdot e^{j\angle G_1} \cdot |G_2| \cdot e^{j\angle G_2} = |G_1||G_2| \cdot e^{j(\angle G_1 + \angle G_2)}$$

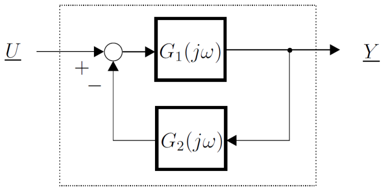
2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1(j\omega) \cdot \underline{U} + G_2(j\omega) \cdot \underline{U} = \underbrace{(G_1(j\omega) + G_2(j\omega))}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 + G_2 = \mathrm{Re}\{G_1\} + \mathrm{Re}\{G_2\} + j(\mathrm{Im}\{G_1\} + \mathrm{Im}\{G_2\})$$

2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{\frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

➔ Anwendung von **Mason Regel** (SigSys)

2.7.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

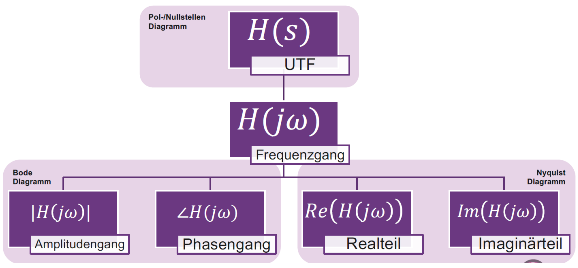
1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
2. Nach $\underline{Y}$ umformen

2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang $G(j\omega)$ und du Übertragungsfunktion $G(s)$ mit $s = \sigma + j\omega$ hängen folgendermassen zusammen:

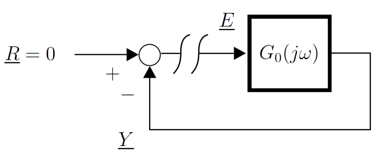
$$\boxed{G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}}$$

2.8.1 Übersicht Darstellungsformen



3 Stabilität - Nyquistkriterium (S. 126)

Die Stabilität eines Regelkreises kann mit dem Nyquistkriterium viel einfacher betrachtet werden. Dafür wird der **Frequenzgang $G_0(j\omega)$ des offenen Regelkreises** betrachtet. Ausserdem gibt das Nyquistkriterium an, wie robust ein Regelkreis ist.



Frequenzgang des offenen Regelkreises

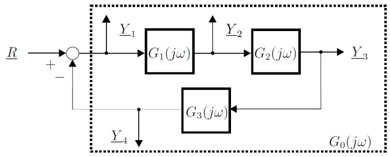
$$\boxed{G_0(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}}$$

Beispiel: Kreisschaltung mit mehreren Blöcken

Folgendes System besitzt ein Eingangssignal $\underline{R}$ und vier Ausgangssignale $\underline{Y}$

Es sollen der Frequenzgang des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$, sowie ausgewählte UTFs des Systems beschrieben werden.

$$G_0(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)$$



$$\frac{\underline{Y}_1}{\underline{R}} = \frac{1}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)}$$

$$\frac{\underline{Y}_3}{\underline{R}} = \frac{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)}$$

Hinweis: Die Stabilität des Systems ist **unabhängig von der Reihenfolge der Teilsysteme** $G_i(j\omega)$, da die Stabilität durch den Nenner (bzw. die Polstellen) beschrieben wird.

3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Gedankenexperiment: Ein offener Regelkreis mit $G_0(j\omega)$ (gemäss Abschnitt 3) um eine veränderbare Verstärkung K ergänzt.

3.1.1 Stabilität

Wähle $K = K_0$, sodass sich die Ortskurve immer innerhalb des Einheitskreises befindet.

- Befindet sich die Ortskurve eines Systems immer **innerhalb des Einheitskreises**, so ist der offene Regelkreis stabil.
  ➔
  Daraus folgt, dass auch der geschlossene Regelkreis stabil sein muss.
- Führungsübertragungsfunktion für $K \ll K_0$:
  $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)} \approx K \cdot G_0(j\omega)$

3.1.2 Grenzstabilität

Wähle $K = K_{krit} > K_0$, sodass die Ortskurve den Punkt -1 schneidet.

- Ortskurve des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$ verläuft **durch den Punkt -1**,
- Die Frequenz ω_π, für die $G_0(j\omega_\pi) = -1 = e^{-\pi}$ heisst **kritische Frequenz**. Mit dieser kritischen Frequenz schwingt das System.
- Die Führungsübertragungsfunktion $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)}$ wird bei der kritischen Frequenz zu $G_f(j\omega_\pi) = \frac{-1}{1-1} = -\infty$ ➔ Grenzstabilität

3.1.3 Instabilität

Wähle $K > K_{krit}$

- Ortskurve verläuft nicht mehr durch den Punkt -1
- Das System ist instabil

3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)

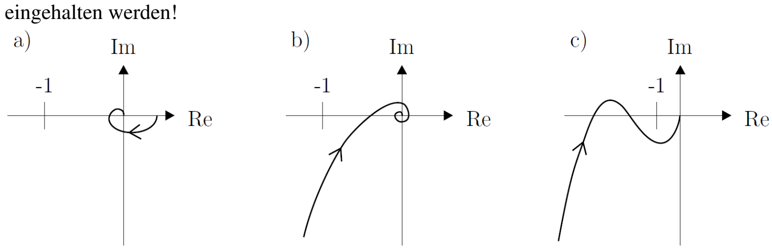
Idee: Informationen über den **offenen Regelkreis** verwenden, um die **Stabillität des geschlossenen Regelkreises** zu beurteilen

3.2.1 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- Gemäss Abschnitt 3 wird $G_0 = \prod_i G_i$ gebildet aus den seriegeschalteten Teilsystemen des offenen Regelkreises (➔ Produkt aller G_i **im Feedback-Loop**)
- G_0 muss dabei einem **Prozess mit Ausgleich (stabilen Prozess)** entsprechen; zusätzlich **dürfen** noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein
  Mit Polen formuliert: Bei G_0 sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt -1 **links** der Nyquistkurve von G_0 liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ($\omega = 0 \dots \infty$) ➔ 'links der Kurve': Man befindet sich **auf der Kurve** und 'schaut' nach links und muss den Punkt -1 'sehen'

Beispiel: Ortskurven stabiler Systeme (S. 128)

Achtung: Damit die Stabilität der gezeigten Systeme beurteilt werden kann, muss sichergestellt werden, dass auch die ersten beiden Punkte des vereinfachten Nyquistkriteriums eingehalten werden!

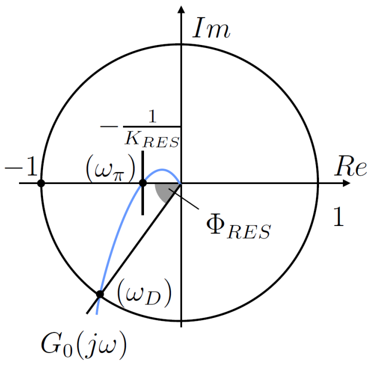


3.3 Stabilitätsreserven

Wir möchten nicht nur Stabilität, sondern auch eine gewisse Stabilitätsreserve, um z.B. auch bei einem ungenau modellierten Prozess oder einer sich ändernden Regelstrecke noch einen stabilen Regelkreis zu gewährleisten.

- **Auch ein stabiler Regelkreis kann sehr lange (ein)schwingen**
- Stabilität / Grenzstabilität / Instabilität sind defnierte Bereiche
  - Es gibt nicht 'ein wenig stabil', 'ziemlich stabil', 'stabiler als...', 'instabiler als'
- Allenfalls: Ein Regelkreis ist stabiler als ein anderer. Gemeint ist:
  - Ein Regelkreis ist besser gedämpft / schneller (eingeschwungen)
  - Ein Regelkreis ist robust – er ist trotz gewissen Widerigkeiten im Regelkreis
  - **Ein Regelkreis bleibt stabil, auch wenn die Regelstrecke leicht ändert**

3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129)



$$\boxed{\Phi_{RES} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Re}\left\{G_0(j\omega_D)\right\}}{\mathrm{Im}\left\{G_0(j\omega_D)\right\}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{1}{K_{RES}} = \left|G_0(j\omega_\pi)\right|}$$

Ein System ist **stabil**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\omega_\pi > \omega_D$
- $G_0(j\omega_D) = e^{-j\varphi}$ mit $0 < \varphi < \pi$
- $0 > G_0(j\omega_\pi) > -1$

- Durchtrittsfrequenz ω_D
  Frequenz, bei der die Kurve den Einheitskreis durchquert: $|G_0(j\omega_D) = 1|$
  $\Rightarrow$ Phasenreserve Φ_{RES}
- Phasenschnittfrequenz ω_π
  Frequenz, bei der die Kurve die reelle Achse durchquert: $\mathrm{Im}\left\{G_0(j\omega_\pi)\right\} = 0$
  $\Rightarrow$ Verstärkungsreserve K_{RES}

3.4.1 Verstärkungsreserve K_{RES}

Die Verstärkungsreserve K_{RES} liefert direkt den Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Verstärkung** liegt.
Der Abstand zur Ursprung bei der Phasenschnittfrequenz ω_π entspricht $\frac{1}{K_{RES}}$
$\Rightarrow$ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $K_{RES} \cdot G_0(j\omega)$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

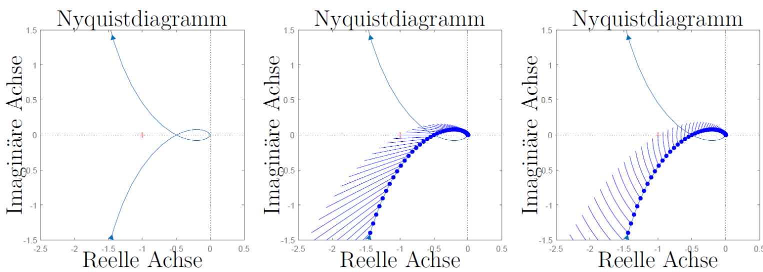
3.4.2 Phasenreserve Φ_{RES}

Die Phasenreserve Φ_{RES} liefert einen Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Totzeit** liegt.
$\Rightarrow$ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $G_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega T_t}$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

Der Zusammenhang zwischen Phasendrehung und Totzeit ist

$$\boxed{T_t = \frac{\Phi_{RES}}{\omega_D} \qquad \text{wobei } [\Phi_{RES}] = \text{rad}}$$

Beispiel: Einfluss von Stabilitätsreserven auf Nyquistdiagramm



Mitte:	Verstärkungsreserve streckt Kurve vom Ursprung aus
Rechts:	Phasenreserve dreht jeden Punkt der Kurve um verschiedene Winkel $\omega \cdot T_t$ um den Ursprung

3.4.3 Faustregeln für Reserven (S. 131)

Hinweis: Es besteht eine Kopplung zwischen den beiden Effekten!
- Phasenreserve von $\Phi_{RES} = 40° \ldots 70°$
- Verstärkungsreserve von $K_{RES} > 4\,(\approx 12\,\mathrm{dB})$

3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
s = tf('s');
G = 1 + 1/s;     % UTF des Systems
nyquist(G)
```