

# Regelungstechnik 2

FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann

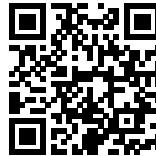
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240614

<https://github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2>



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)</b>	<b>2</b>	<b>7 Einstellen eines PID-Reglers</b>	<b>6</b>
1.1 Steuerung . . . . .	2	7.1 Vorgehensweisen zum Einstellen eines Reglers . . . . .	6
1.2 Regelung . . . . .	2	7.2 Pol-Nullstellenkürzung (S. 164) . . . . .	6
1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung . . . . .	2	7.3 Empirische Einstellregeln . . . . .	6
<b>2 Frequenzgang (S. 114)</b>	<b>2</b>	7.4 Regler-Einstellung durch Optimierung (S. 167) . . . . .	7
2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl . . . . .	2	<b>8 Variationen / Erweiterungen zu PID-Reglern</b>	<b>7</b>
2.2 Frequenzgang der Grundglieder . . . . .	2	8.1 Modifizierter PID-Regler in Parallelform (S. 171) . . . . .	7
2.3 Darstellung mit Zeigern . . . . .	2	8.2 Glättung der Referenz (S. 171) . . . . .	7
2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL . . . . .	2	8.3 Störgrössenaufschaltung (S. 174) . . . . .	7
2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen . . . . .	3	8.4 Kaskadenregelung (S. 175) . . . . .	7
2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen . . . . .	3	8.5 Übertragungsfunktionen Kaskadenregelung . . . . .	7
2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen . . . . .	3	8.6 Wind-Up (Integratoren) (S. 172) . . . . .	7
2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF) . . . . .	3	<b>9 Fallstudie: Gleichstromantrieb</b>	<b>8</b>
<b>3 Stabilität – Nyquistkriterium (S. 126)</b>	<b>3</b>	9.1 Modellierung (S. 53) . . . . .	8
3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm . . . . .	3	9.2 Gleichstromantrieb mit Steuerung (S. 148-149) . . . . .	8
3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128) . . . . .	3	9.3 Gleichstromantrieb mit P-Regler (S. 149-150) . . . . .	8
3.3 Stabilitätsreserven . . . . .	3	9.4 Gleichstromantrieb mit I-Regler (S. 151-152) . . . . .	8
3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129) . . . . .	4	9.5 Gleichstromantrieb mit PI-Regler (S. 152-154) . . . . .	8
3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab . . . . .	4	9.6 Gleichstromantrieb mit PID / PD-Regler (S. 155) . . . . .	9
3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen . . . . .	4	9.7 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PI-Regler (S. 157-159) . . . . .	9
<b>4 Dezibel dB</b>	<b>4</b>	9.8 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PID-Regler (S. 160-162) . . . . .	9
4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB . . . . .	4	<b>10 Implementierung analoger Regler</b>	<b>9</b>
4.2 dB–Umrechnungstabelle . . . . .	4	10.1 Struktur allgemeiner Frequenzgang eines Reglers . . . . .	9
<b>5 Bode-Diagramm</b>	<b>4</b>	10.2 Grundsaltungen mit OpAmps . . . . .	9
5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen . . . . .	4	10.3 Varianten analoger PID-Schaltungen . . . . .	9
5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139) . . . . .	5	<b>11 Implementierung digitaler Regler</b>	<b>9</b>
5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140) . . . . .	5	11.1 Aufbau digitaler Regelkreis (S. 183) . . . . .	10
5.4 Bodediagramme mit Matlab . . . . .	5	11.2 Entwurfsverfahren (S. 186) . . . . .	10
5.5 Alternative Stabilitätskriterien – Vorzeichenregel (S. 142) . . . . .	5	11.3 Diskretisierung eines Reglers (S. 188) . . . . .	10
<b>6 PID-Regler</b>	<b>5</b>	11.4 Vorgehen: Diskretisierung eines Reglers . . . . .	10
6.1 Strukturen und Frequenzgänge von PID-Reglern . . . . .	5	11.5 Code-Implementierung eines diskreten Reglers (S. 190) . . . . .	10
6.2 Matlab / Simulink . . . . .	6	<b>12 Anhang</b>	<b>10</b>
6.3 PID-Regler im Frequenzgang . . . . .	6	12.1 Bodediagramm eines Integrators . . . . .	10
6.4 PID-Regler im Bodediagramm . . . . .	6	12.2 Bodediagramm eines Differenzierers . . . . .	10
		12.3 z-Transformation . . . . .	11
		12.4 Fourier- bzw. Laplace-Transformation . . . . .	11

# 1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

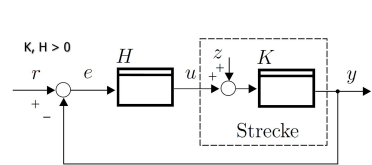
## 1.1 Steuerung



Eine Steuerung besitzt **keine Rückkopplung** und ist somit ein **offener Regelkreis**

$$y = \underbrace{KL \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{K \cdot z}_{\text{Störung}}$$

## 1.2 Regelung



Eine Regelung besitzt eine **Gegenkopplung**

$$y = KH \cdot (r - y) + K \cdot z$$

$$y = \underbrace{\frac{KH}{1+KH} \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{\frac{K}{1+KH} \cdot z}_{\text{Störungsunterdrückung}}$$

### 1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung  $H$  der Störung  $z$  gilt:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{K}{1+KH} \cdot z = 0$$

⇒ Hat der Regler eine grosse Verstärkung  $H$ , so wird die Störung  $z$  unterdrückt

⇒ Bei einer Steuerung wird die Störung  $z$  nicht unterdrückt

### 1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{KH}{1+KH} \cdot r = 1$$

⇒ Hat der Regler eine grosse Verstärkung  $H$ , so ist  $y \approx r$  (Ausgang ≈ Sollwert)

⇒ Bei einer Steuerung muss  $H = \frac{1}{L}$  sein, damit  $y \approx r$

### 1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

## 1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

(asympt.) stabil Verstärkung  $|V| < 1$  System schwingt nicht  
 grenzstabil Verstärkung  $V = -1$  System schwingt mit konstanter Ampl.  
 instabil Verstärkung  $|V| > 1$  System schwingt mit zunehmender Ampl.

### 1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten:  $V = -1$

### Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied



Es muss gelten:  $y(t) = -e(t)$  unter der Annahme, dass  $e(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

$$x(t) = K \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + x_0 = K \cdot \int_0^t A \cdot \cos(\omega \tau) d\tau + x_0 = K \frac{A}{\omega} \sin(\omega \tau) \Big|_0^t + x_0$$

$$= \frac{KA}{\omega} \sin(\omega t) + \underbrace{x_0}_0$$

$$y(t) = x(t - T_t) = \frac{KA}{\omega} \sin(\omega(t - T_t)) = \frac{KA}{\omega} \cos(\omega(t - T_t) - \frac{\pi}{2})$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega} \cos(\omega t - \omega T_t - \frac{\pi}{2})}_{y(t)} = -A \cos(\omega t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - \pi)}_{-e(t)}$$

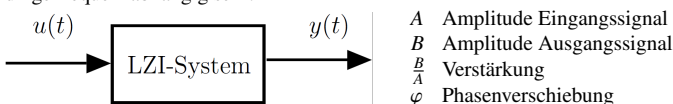
⇒ Wenn der Regler die Verstärkung  $K$  hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz  $\omega$

⇒ Die Verstärkung  $K$  muss vermieden werden!

## 2 Frequenzgang (S. 114)

Wird ein Sinus-Signal  $u(t)$  in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal  $y(t)$  wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die **Amplitude** und die **Phase**. Die **Frequenz** hingegen bleibt **gleich**.

Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!



$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t) \quad y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \text{Transiente}$$

## Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (**steady state**) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig  $t = 5\tau$  als Ende des Einschwingvorgangs  
 ⇒ **Uns interessiert nur der der steady state!**

## Darstellung des Frequenzgangs

Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:

- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- Zeiger-Diagramm

## 2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl (S. 116)

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \frac{B}{A} \cdot e^{j\varphi}$$

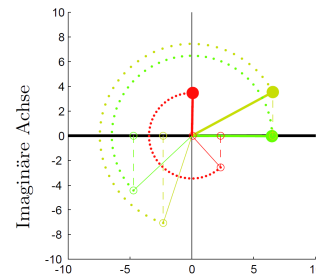
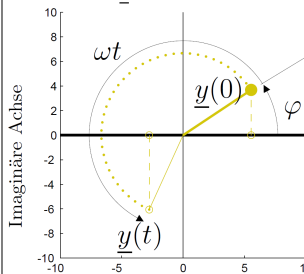
## 2.2 Frequenzgang der Grundglieder

P-Glied	I-Glied	PT <sub>1</sub> -Glied	T <sub>t</sub> -Glied
$y(t) = Ku(t)$	$\dot{y}(t) = Ku(t)$	$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$	$y(t) = u(t - T_t)$
$G(j\omega) = K$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$	$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$
$ G  = K$ $\angle G = 0$	$ G  = \frac{K}{\omega}$ $\angle G = -\frac{\pi}{2}$	$ G  = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ $\angle G = -\arctan(\omega T)$	$ G  = 1$ $\angle G = -\omega T_t$

⇒ Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

## 2.3 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal **bei einer bestimmten Frequenz** als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal  $y(t)$  als Zeiger  $\underline{Y}$  zur Zeit  $t = 0$  dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz  $\omega = 2\pi f$  rotiert. Das zeitliche Signal  $y(t)$  entspricht dem **Realteil** von  $\underline{y}(t)$



### 2.3.1 Komplexe Amplitude $\underline{Y}$

$$\underline{y}(t) = B \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$= B \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \underline{Y} \cdot e^{j\omega t}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

$|\underline{y}(t)| = B$  Maximale Amplitude des Ausgangssignals

$\text{Re}(\underline{y}(t)) = y(t)$  Ausgangssignal (zeitlich)

$\underline{y}(0) = \underline{Y}$  Anfangszeiger (komplexe Amplitude)

### 2.3.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\underline{\dot{y}}(t) = \underline{Y} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

$$\int y(t) dt = \frac{Y}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}$$

## 2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

- DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
- Geeignet umformen:  $G(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{U}}$
- Falls gewünscht: Amplitude  $|G(j\omega)|$  und Phase  $\varphi$  bestimmen

### Beispiel: PT<sub>1</sub> Glied

$$T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \quad \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}} \quad T \cdot j\omega \cdot \underline{Y} + \underline{Y} = [j\omega T + 1] \cdot \underline{Y} = K\underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{K}{j\omega T + 1} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \quad \varphi = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2} + \pi$$

## 2.4.1 Allgemeiner Fall

$$a_n y(t)^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

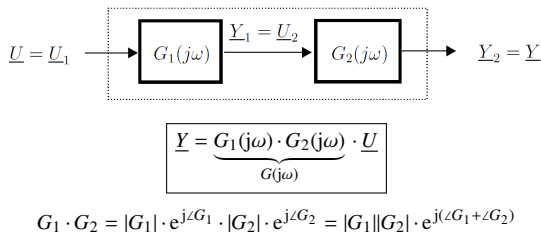
$$a_n(j\omega)^n \cdot \underline{Y} + \dots + a_1 j\omega \cdot \underline{Y} + a_0 \underline{Y} = b_m(j\omega)^m \cdot \underline{U} + \dots + b_1 j\omega \cdot \underline{U} + b_0 \underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{|b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0|}{|a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0|}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan \left( \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}} \right) (+\pi)$$

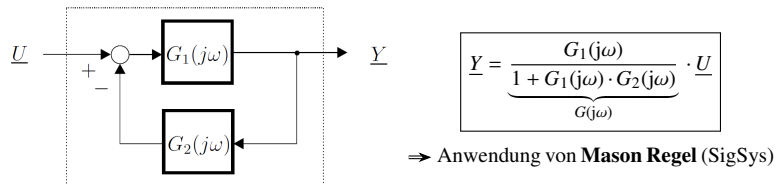
## 2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen



## 2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen



## 2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen



### 2.7.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
2. Nach  $\underline{Y}$  umformen

## 2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang  $G(j\omega)$  und die Übertragungsfunktion  $G(s)$  mit  $s = \sigma + j\omega$  hängen folgendermassen zusammen:

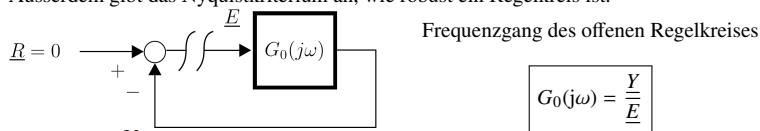
$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

### 2.8.1 Übersicht Darstellungsformen



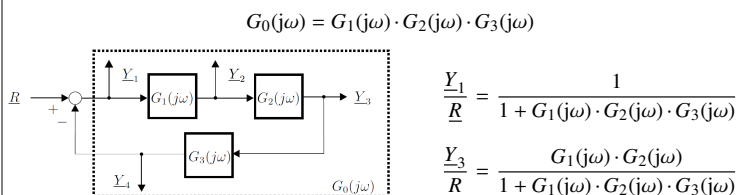
## 3 Stabilität – Nyquistkriterium (S. 126)

Die Stabilität eines Regelkreises kann mit dem Nyquistkriterium viel einfacher betrachtet werden. Dafür wird der **Frequenzgang  $G_0(j\omega)$  des offenen Regelkreises** betrachtet. Ausserdem gibt das Nyquistkriterium an, wie robust ein Regelkreis ist.



## Beispiel: Kreisschaltung mit mehreren Blöcken

Folgendes System besitzt ein Eingangssignal  $R$  und vier Ausgangssignale  $\underline{Y}$ . Es sollen der Frequenzgang des offenen Regelkreises  $G_0(j\omega)$ , sowie ausgewählte UTFs des Systems beschrieben werden.



**Hinweis:** Die Stabilität des Systems ist **unabhängig von der Reihenfolge der Teilsysteme**  $G_i(j\omega)$ , da die Stabilität durch den Nenner (bzw. die Polstellen) beschrieben wird.

### 3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Gedankenexperiment: Ein offener Regelkreis mit  $G_0(j\omega)$  (gemäss Abschnitt 3) wird um eine veränderbare Verstärkung  $K$  ergänzt.

#### 3.1.1 Stabilität

Wähle  $K = K_0$ , sodass sich die Ortskurve immer innerhalb des Einheitskreises befindet.

- Befindet sich die Ortskurve eines Systems immer **innerhalb des Einheitskreises**, so ist der offene Regelkreis stabil.  
⇒ Daraus folgt, dass auch der geschlossene Regelkreis stabil sein muss.
- Führungsübertragungsfunktion für  $K \ll K_0$ :  
 $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)} \approx K \cdot G_0(j\omega)$

#### 3.1.2 Grenzstabilität

Wähle  $K = K_{\text{krit}} > K_0$ , sodass die Ortskurve den Punkt  $-1$  schneidet.

- Ortskurve des offenen Regelkreises  $G_0(j\omega)$  verläuft **durch den Punkt  $-1$** ,
- Die Frequenz  $\omega_\pi$ , für die  $G_0(j\omega_\pi) = -1 = e^{-\pi}$  heisst **kritische Frequenz**. Mit dieser kritischen Frequenz schwingt das System.
- Die Führungsübertragungsfunktion  $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)}$  wird bei der kritischen Frequenz zu  $G_f(j\omega_\pi) = \frac{-1}{1-1} = -\infty \Rightarrow$  Grenzstabilität

#### 3.1.3 Instabilität

Wähle  $K > K_{\text{krit}}$

- Ortskurve verläuft nicht mehr durch den Punkt  $-1$
- Das System ist instabil

### 3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)

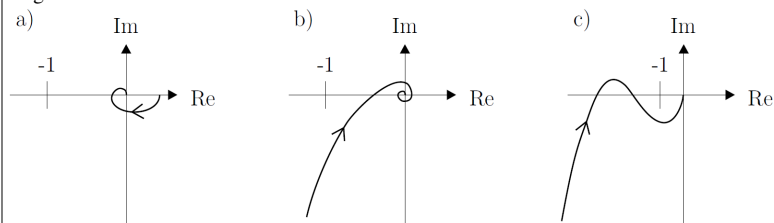
Idee: Informationen über den **offenen Regelkreis** verwenden, um die **Stabilität des geschlossenen Regelkreises** zu beurteilen

#### 3.2.1 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- Gemäss Abschnitt 3 wird  $G_0 = \prod_i G_i$  gebildet aus den seriegeschalteten Teilsystemen des offenen Regelkreises (⇒ **Produkt aller  $G_i$  im Feedback-Loop**)
- $G_0$  muss dabei einem **Prozess mit Ausgleich (stabilen Prozess)** entsprechen; zusätzlich **dürfen** noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein  
Mit Polen formuliert: Bei  $G_0$  sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt  $-1$  **links** der Nyquistkurve von  $G_0$  liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ( $\omega = 0 \dots \infty$ ) ⇒ **'links der Kurve': Man befindet sich auf der Kurve und 'schaut' nach links und muss den Punkt  $-1$  'sehen'**

### Beispiel: Ortskurven stabiler Systeme (S. 128)

**Achtung:** Damit die Stabilität der gezeigten Systeme beurteilt werden kann, muss sichergestellt werden, dass auch die ersten beiden Punkte des vereinfachten Nyquistkriteriums eingehalten werden!



### 3.3 Stabilitätsreserven

Wir möchten nicht nur Stabilität, sondern auch eine gewisse Stabilitätsreserve, um z.B. auch bei einem ungenau modellierten Prozess oder einer sich ändernden Regelstrecke noch einen stabilen Regelkreis zu gewährleisten.

- **Auch ein stabiler Regelkreis kann sehr lange (ein)schwingen**
- Stabilität / Grenzstabilität / Instabilität sind definierte Bereiche
  - Es gibt nicht 'ein wenig stabil', 'ziemlich stabil', 'stabiler als...', 'instabiler als'
- Allenfalls: Ein Regelkreis ist stabiler als ein anderer. Gemeint ist:
  - Ein Regelkreis ist besser gedämpft / schneller (eingeschwungen)
  - Ein Regelkreis ist robust – er ist trotz gewissen Widerigkeiten im Regelkreis
  - **Ein Regelkreis bleibt stabil, auch wenn die Regelstrecke leicht ändert**

### 3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129)



#### 3.4.1 Verstärkungsreserve $K_{RES}$

Die Verstärkungsreserve  $K_{RES}$  liefert direkt den Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Verstärkung** liegt. Der Abstand zur Ursprung bei der Phasenschnittfrequenz  $\omega_\pi$  entspricht  $\frac{1}{K_{RES}}$   
⇒ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang  $G_0(j\omega)$  tatsächlich  $K_{RES} \cdot G_0(j\omega)$  vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

#### 3.4.2 Phasenreserve $\Phi_{RES}$

Die Phasenreserve  $\Phi_{RES}$  liefert einen Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Totzeit** liegt.  
⇒ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang  $G_0(j\omega)$  tatsächlich  $G_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega T_t}$  vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

Der Zusammenhang zwischen Phasendrehung und Totzeit ist

$$T_t = \frac{\Phi_{RES}}{\omega_D} \quad \text{wobei } [\Phi_{RES}] = \text{rad}$$

#### Beispiel: Einfluss von Stabilitätsreserven auf Nyquistdiagramm



#### 3.4.3 Faustregeln für Reserven (S. 131)

**Hinweis:** Es besteht eine Kopplung zwischen den beiden Effekten!

- Phasenreserve von  $\Phi_{RES} = 40^\circ \dots 70^\circ$
- Verstärkungsreserve von  $K_{RES} > 4$  ( $\approx 12$  dB)

### 3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems
3 nyquist(G)
```

### 3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen

- Werte für  $G(\omega = 0)$  und  $G(\omega = \infty)$  berechnen
- Anzahl  $j$  im Zähler **plus** Anzahl  $j$  im Nenner entspricht Anzahl Quadranten, welche zwischen  $\omega = 0$  und  $\omega = \infty$  durchlaufen werden
- Polstellen:  $|G(j\omega)| \downarrow$ ;  $\angle G(j\omega) \downarrow$  ⇒ Bewegung im Uhrzeigersinn ⇒ Bei den Nullstellen ist  $\angle G(j\omega) = \pm 45^\circ$
- Nullstellen:  $|G(j\omega)| \uparrow$ ;  $\angle G(j\omega) \uparrow$ ; ⇒ Bewegung im Gegenuhrzeigersinn
- Frequenzen der Pol- bzw. Nullstellen berechnen

### 4 Dezibel dB

#### 4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB (S. 133)

$$|K|_{dB} = 20 \text{ dB} \cdot \log_{10} |K| \Leftrightarrow |K| = 10^{\left(\frac{|K|_{dB}}{20}\right)}$$

**Hinweis:** Die Betragsstriche nur Notation!  $|K|$  kann sehr wohl negativ sein!

#### 4.1.1 Rechenregeln

- Multiplikation ⇒ Addition  
 $|K_1 \cdot K_2|_{dB} = |K_1|_{dB} + |K_2|_{dB}$
- Division ⇒ Subtraktion  
 $\left|\frac{K_1}{K_2}\right|_{dB} = |K_1|_{dB} - |K_2|_{dB}$
- Kehrwert ⇒ Negatives Vorzeichen  
 $\left|\frac{1}{K_1}\right|_{dB} = |1|_{dB} - |K_1|_{dB} = -|K_1|_{dB}$

### 4.2 dB–Umrechnungstabelle (S. 133)

Faktor [1]	Dezibel dB	Faktor [1]	Dezibel dB
100	40	2	6
10	20	$\sqrt{2}$	3
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-3
0.1	-20	$\frac{1}{2}$	-6
0.01	-40		

### 5 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine weitere Variante, den Frequenzgang  $G(j\omega)$  grafisch darzustellen. Die Darstellung beinhaltet zwei Graphen.

- Amplitudengang  $|G(j\omega)|$  in Dezibel dB
- Phasengang  $\angle G(j\omega)$  in Grad °
- Die Frequenzachse ist **logarithmisch** mit  $\log_{10}(\omega)$
- Ein Bodediagramm kann in ein Nyquistdiagramm umgezeichnet werden, aber nicht umgekehrt!

#### 5.0.1 Logarithmische Frequenzachse (S. 134)

- Serieschaltung von Systemen

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

- Amplitudengang

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + |G_2(j\omega)|_{dB}$$

⇒ Grafisch multiplizieren wäre schwierig, grafisch addieren geht gut

- Phasengang

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

⇒ Die Phase muss nicht logarithmisch sein, wir haben schon eine Addition

#### 5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen

Das Diagramm wird approximativ mit **Geraden** gezeichnet!

- Frequenzgang in folgende Form bringen:

$$G(j\omega) = K_0 \cdot (j\omega)^v \cdot \frac{(1 + T_{n0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{n1} \cdot j\omega) \cdot \dots}{(1 + T_{p0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{p1} \cdot j\omega) \cdot \dots} \cdot e^{-j\omega T_t}$$

- Für  $\omega = 0$  sind alle  $(1 + T \cdot j\omega) = 1 = 0$  dB
- Für  $\omega = \frac{1}{T}$  sind alle  $(1 + T \cdot j\omega) = 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 3 \text{ dB} / 45^\circ$
- Frequenzen der Nullstellen berechnen:  $\omega = \frac{1}{T_n}$
- Frequenzen der Polstellen berechnen:  $\omega = \frac{1}{T_p}$
- Jede **Nullstelle** bewirkt
  - einen Knick um  $+20$  dB / Dekade **nach oben** im Amplitudengang
  - einen Phasenhub von  $+90^\circ$  über 2 Dekaden ⇒  $+45^\circ$  beim Knick
- Jede **Polstelle** bewirkt
  - einen Knick um  $-20$  dB / Dekade **nach unten** im Amplitudengang
  - einen Phasenverlust von  $-90^\circ$  über 2 Dekaden ⇒  $-45^\circ$  beim Knick
- Einzelne Faktoren einzeichnen ⇒ Wenn Faktor quadriert ist, zwei mal einzeichnen!
- Grafische Addition der Faktoren für gesamten Frequenzgang

#### Beispiel: Bode-Diagramm zeichnen

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 0.1)} \xrightarrow{\text{Standardform}} G(j\omega) = 100 \cdot \frac{(1 + 0.1j\omega)}{(1 + 10j\omega)}$$

- $|K_0|_{dB} = |100|_{dB} = 40 \text{ dB} \Rightarrow \angle G(100) = 0^\circ$
- Nullstelle:  $|1 + 0.1j\omega|_{dB} \Rightarrow$  Knick bei  $\omega = \frac{1}{0.1s} = 10 \frac{\text{rad}}{s}$
- Polstelle:  $|1 + 10j\omega|_{dB} \Rightarrow$  Knick bei  $\omega = \frac{1}{10s} = 0.1 \frac{\text{rad}}{s}$
- Ergebnis:** Grafische Addition der Teilergebnisse





### 5.1.1 Inverse Frequenzgänge (S. 137)

Um das Bodediagramm des inversen Frequenzgangs  $\frac{1}{G(j\omega)}$  zu erhalten, muss bei Betrag und Phase das **Vorzeichen gedreht** werden.

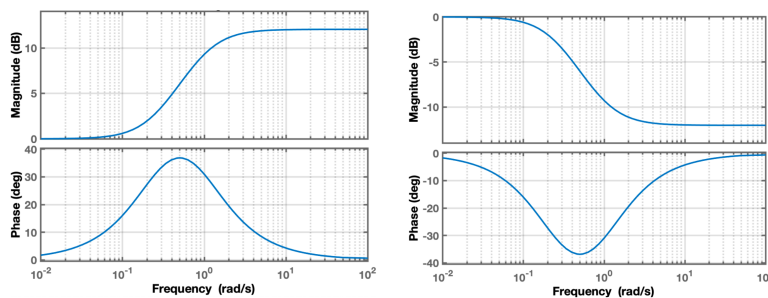


### 5.1.2 Lead-Lag-Glied

$$\text{Lead-Lag-Glied: } G(s) = K \cdot \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1}$$

Lead-Glied ( $T_1 > T_2$ )

Lag-Glied ( $T_2 > T_1$ )



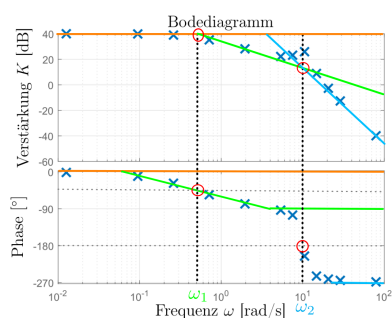
$$\text{Maximale Phasenänderung bei: } \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}$$

⇒ Bei der Regler-Auslegung werden vor allem Lead-Glieder verwendet, um **Phase anheben** zu können

### 5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139)

Um aus einem gegebenen Bodediagramm die Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  zu ermitteln, werden die Zeichenregeln aus Abschnitt 5.1 **rückwärts angewendet**. Dazu werden die Punkte einer gegebenen Messung mittels Geraden approximiert. Mittels dieser Approximationen können die einzelnen Komponenten (Faktoren) der gesuchten UTF ermittelt werden.

#### Beispiel: Übertragungsfunktion $G(s)$ aus Bodediagramm ermitteln



Aus den Steigungen der Geraden ist ersichtlich, dass folgende Komponenten in  $G(s)$  enthalten sein müssen:

Verstärkung  $K$ ,  $PT_1$ -Glied,  $PT_2$ -Glied

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{(sT_1 + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1)}$$

Werte der Parameter aus Bodediagramm bestimmen:

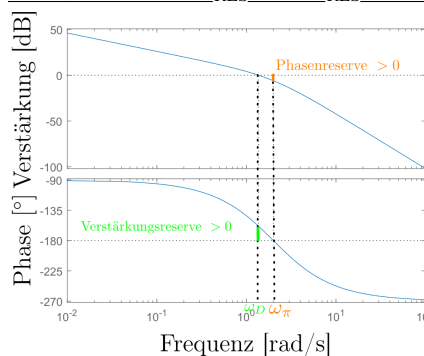
- $|K|_{dB} = 40 \Rightarrow K = 100$
- $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{0.5} = 2$
- $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{10} = 0.1$
- $\zeta = 0.1 \Rightarrow$  gegeben

### 5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140)

Analog zum Punkt -1 im Nyquistdiagramm kann die Stabilität auch im Bodediagramm beurteilt werden. Auch bei dieser Betrachtung sind die folgenden Frequenzen relevant.

- Durchtrittsfrequenz  $\omega_D \Rightarrow$  Phasenreserve  $\Phi_{RES}$   
Frequenz, bei der die Verstärkung 1 ist:  $|G_0(j\omega_D)| = 1$  ( $= 0$  dB)
- Phasenschnittfrequenz  $\omega_\pi \Rightarrow$  Verstärkungsreserve  $\Phi_{RES}$   
Frequenz, bei der die Phase  $-180^\circ$  beträgt:  $\angle G_0(j\omega_\pi) = -\pi$  rad ( $= -180^\circ$ )

#### 5.3.1 Parameter $K_{RES}$ und $\Phi_{RES}$ aus Bodediagramm lesen



- Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$

$$K_{RES} = 0 \text{ dB} - K_{@180^\circ}$$

- Phasenschnittfrequenz  $\omega_\pi$

$$\Phi_{RES} = \Phi_{@0dB} + 180^\circ$$

**Achtung:** Das Vorzeichen von  $\Phi_{RES}$  bzw.  $\Phi_{RES}$  ist essentiell für die Stabilitäts-Beurteilung und darf auf keine Fall vernachlässigt werden!

### 5.3.2 Beurteilung der Stabilität des Systems

Wenn das System die **Anforderungen des Nyquist-Kriteriums erfüllt**, verhält sich die Stabilität des Systems folgendermassen:

- Grenzstabilität:** Amplitudengang bei 0 dB und Phasengang bei  $-180^\circ$
- Instabilität:**  $K_{RES} < 0$  und  $\Phi_{RES} < 0$  (ergibt sich automatisch, wenn einer der beiden Parameter  $< 0$  ist)
- Stabilität:**  $K_{RES} > 0$  und  $\Phi_{RES} > 0$
- Stabilität:**  $\omega_\pi > \omega_D$

### 5.4 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');  
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems  
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems  
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```

### 5.5 Alternative Stabilitätskriterien – Vorzeichenregel (S. 142)

Die Stabilität kann alternativ 'direkt' aus den Parametern der **Differentialgleichung** (des Frequenzgangs) des **geschlossenen Regelkreises** bestimmt werden.

Aus der DGL der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot u^{(k)}(t)$$

kann das **charakteristische Polynom** ermittelt werden. Daraus kann dann mittels folgender **Vorzeichenregel** eine Aussage über die Stabilität des **geschlossenen Regelkreises** gemacht werden.

Eine **notwendige** Stabilitätsbedingung für das **charakteristische Polynom**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Zähler}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$
$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\text{Zähler}}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}$$

besteht darin, dass alle Koeffizienten existieren  $a_0 \dots a_n$  (also  $\neq 0$  sind) und **dasselbe Vorzeichen** haben.

Bei System erster und zweiter Ordnung ist die Vorzeichenregel auch **hinreichend** für die Stabilität.

#### Beispiel: Stabil, instabil oder 'keine Ahnung'

stabil

$$\frac{1}{s^2 + 5s + 7}$$

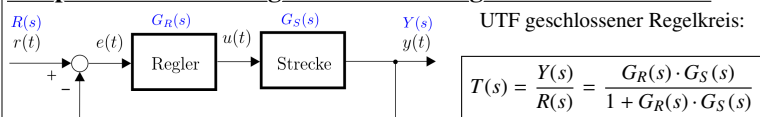
instabil

$$\frac{1}{s^2 - 7s + 3}$$

keine Ahnung

$$\frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 4}$$

#### Beispiel: Stabilität aus geschlossenem Regelkreises bestimmen



$G_R(s)$  und  $G_S(s)$  seien gegeben als:  $G_R(s) = K_R$ ,  $G_S(s) = \frac{K}{s(sT+1)} = \frac{K}{T s^2 + s}$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} = \frac{\frac{K_R \cdot K}{T s^2 + s}}{1 + \frac{K_R \cdot K}{T s^2 + s}} = \frac{K_R \cdot K}{T s^2 + s + K_R \cdot K} \Rightarrow \text{stabil für } K_R, K, T > 0$$

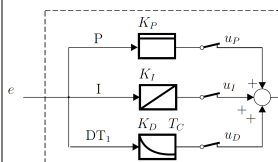
### 6 PID-Regler

- P:** Proportional  $K_P \cdot e(t)$ 
  - Gegenwart: Gewichtung des **aktuellen** Fehlers  $e(t)$ 
    - Stellgrösse  $u(t)$  ist abhängig vom aktuell vorhandenen Fehler
    - Wie gross Fehler in Vergangenheit war oder in welche Richtung er sich entwickelt, ist irrelevant
- I:** Integral  $K_I \int e(t)$ 
  - Vergangenheit: Gewichtung der **Summe vergangener** Fehler
    - Stellgrösse  $u(t)$  ist abhängig davon, wie lange ein Fehler schon existiert
    - Wie gross der aktuelle Fehler ist und wie stark er sich gerade ändert, ist irrelevant
- D:** Differential  $K_D \cdot \dot{e}(t)$ 
  - Zukunft, Trend: Gewichtung der **Änderung** des Fehlers
    - Stellgrösse ist abhängig davon, wie stark der Fehler gerade zu-/abnimmt
    - Wie gross der aktuelle Fehler ist und wie lange er schon existiert, ist irrelevant

#### 6.1 Strukturen und Frequenzgänge von PID-Reglern

Alle drei Strukturen sind **äquivalent**. Es handelt sich nur um unterschiedliche Darstellungsformen.

##### 6.1.1 Variante 1: Parallelform



$$G_{PID}(j\omega) = K_P + \frac{K_I}{j\omega} + K_D \frac{j\omega}{1 + j\omega T_C}$$



**ACHTUNG: Struktur der Regler beachten!** Die Tabelle liefert Parameter für Regler in **serieller Form** (siehe Abschnitt 6.1.3)

$$G_{PID}(s) = K_R \cdot \left( 1 + \frac{1}{s \cdot T_N} + s \cdot T_V \right)$$

$$G_{PI}(s) = K_R \cdot \left( 1 + \frac{1}{s \cdot T_N} \right)$$

$$G_P(s) = K_R$$

Regler	Methode	$K_R$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	ZN	$1.0 \cdot q$	–	–
	CHR (20 %)	$0.7 \cdot q$	–	–
	CHR (0 %)	$0.3 \cdot q$	–	–
PI-Regler	ZN	$0.9 \cdot q$	$3.33 \cdot T_u$	–
	CHR (20 %)	$0.6 \cdot q$	$1.0 \cdot T_g$	–
	CHR (0 %)	$0.35 \cdot q$	$1.17 \cdot T_g$	–
PID-Regler	ZN	$1.2 \cdot q$	$2.0 \cdot T_u$	$0.5 \cdot T_u$
	CHR (20 %)	$0.6 \cdot q$	$1.0 \cdot T_g$	$0.47 \cdot T_u$
	CHR (0 %)	$0.35 \cdot q$	$1.17 \cdot T_g$	$0.5 \cdot T_u$

**Hinweis:** Die Prozentwerte bei CHR beschreiben den Sollwert für Überschwinger. Zu beachten ist, dass diese Werte durch die empirischen Einstellregeln nicht garantiert werden.

7.3.2 Einstellung via Stabilitätsgrenze (s. 166-167)

**Idee:** Eine stabile Strecke wird mit **P-Regler** betrieben. Die Verstärkung  $K_R$  des Reglers wird sukzessive erhöht, bis das System **grenzstabil ist** (endlos mit gleicher Amplitude schwingt).

Regler	$K_R$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$0.5 \cdot K_{RES}$	–	–
PI-Regler	$0.45 \cdot K_{RES}$	$0.85 \cdot T_\pi$	–
PID-Regler	$0.60 \cdot K_{RES}$	$0.50 \cdot T_\pi$	$0.125 \cdot T_\pi$

Parameter bestimmen

- Wenn System grenzstabil: Kritisches  $K_R$  bestimmen
  - $K_{krit} = K_{RES}$
- $T_\pi$  Periodendauer der grenzstabilen Schwingung

**ACHTUNG: Struktur der Regler beachten!** Die Tabelle liefert Parameter für Regler in **serieller Form** (siehe Abschnitt 6.1.3)

7.4 Regler-Einstellung durch Optimierung (s. 167)

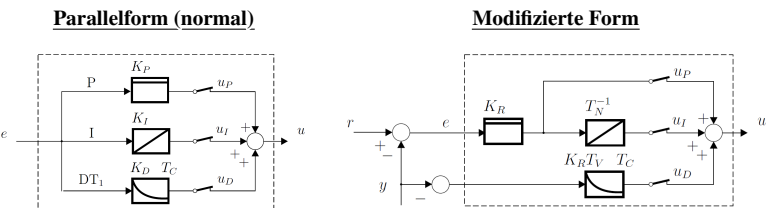
Im Folgenden ist das Vorgehen zur Regler-Einstellung durch Optimierung beschrieben.

1. Reglerstruktur wählen  
 ⇒ Regler hat Parameter  $k_1, \dots, k_n$ , welche optimiert werden sollen
2. **Geschlossenen** Regelkreis (inkl. Strecke) aufbauen (real oder **Simulation**)
3. Eingangssignale definieren (Führungsgrösse  $r(t)$ , Störgrösse  $z(t)$ ), für welche Regelkreis optimiert werden soll (z.B. Sprung, Rampe)
4. Gütemass  $J$  definieren ⇒ repräsentative Zahl  
 Häufig wird  $J(k_1, \dots, k_n) = \int_0^{T_{end}} (k_e \cdot e^2 + k_u \cdot u^2) dt$  gewählt
5. Für verschiedene Parametersätze  $k_1, \dots, k_n$  Signale auf Regelkreis geben und Gütemass  $J$  berechnen und beurteilen ⇒ Parameter  $k_1, \dots, k_n$  sind **optimal**, wenn Gütemass  $J$  **minimal** ist

**Achtung:**  $T_{end}$  sollte mindestens so gross sein, dass der Regelkreis bei vernünftiger Reglereinstellung als eingeschwungen gilt (steady-state).

8 Variationen / Erweiterungen zu PID-Reglern

8.1 Modifizierter PID-Regler in Parallelform (s. 171)



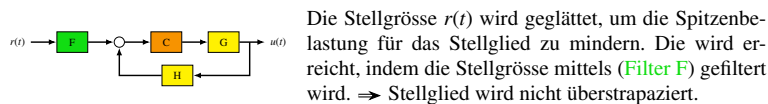
**Hinweis:**  $P$ -Anteil darf auch nach vorne gezogen werden (wie links) ⇒ ändert Parameter von  $I$ - und  $DT_1$ -Gliedern

Statt Fehler  $e$  wird Ausgang  $y$  auf  $DT_1$ -Glied geführt!  
 ⇒ Ableitung des Ausgangs  $y$  statt Ableitung des Fehlers  $e$

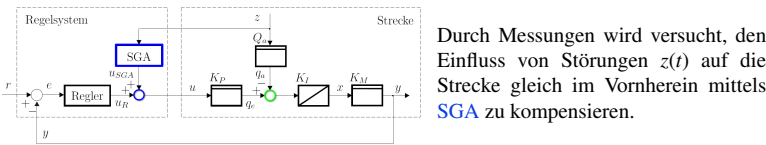
8.1.1 Eigenschaften / Auswirkungen der Modifikation

- | Parallelform (normal)   | Modifizierte Form   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ändernde Referenz <math>r(t)</math> (z.B. Sprung)               <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>DT_1</math>-Glied reagiert sehr aggressiv, da <math>e(t)</math> gross</li> <li>⇒ 'Überforderung' des Stellglieds</li> </ul> </li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ändernde Referenz <math>r(t)</math> (z.B. Sprung)               <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>DT_1</math>-Glied reagiert nicht so aggressiv, da <math>y(t)</math> 'träger' als <math>e(t)</math></li> <li>⇒ Stellglied 'geschont'</li> </ul> </li> <li>• 'two degrees of freedom'               <ul style="list-style-type: none"> <li>– Reaktion auf Störung bzw. auf Änderung der Referenz separat einstellbar</li> </ul> </li> </ul> |
- Achtung:** Der  $DT_1$ -Anteil kann nicht einfach weggelassen werden!

8.2 Glättung der Referenz (s. 171)



8.3 Störgrössenaufschaltung (s. 174)



Am **grünen Knoten** gilt:

$$\dot{y} = K_M K_I [K_P u(t) - Q_a z(t)]$$

Die Störung soll mittels **additiver Korrektur** des Reglerausgangs  $u_R(t)$  erfolgen. Aus dem Blockschaltbild ersichtlich:

$$u(t) = u_R(t) + u_{SGA}(t)$$

$u_{SGA}(t)$  soll den Einfluss von  $z(t)$  am **blauen Knoten** kompensieren.

Am **blauen Knoten** gilt:

$$\dot{y} = K_M K_I [K_P u_R(t) + \underbrace{K_P u_{SGA}(t) - Q_a z(t)}_{\text{soll sich auslöschen}}$$

Wähle  $u_{SGA}(t)$  so, dass die gewünschte Auslöschung stattfindet:

$$u_{SGA}(t) = \frac{Q_a}{K_P} z(t)$$

Somit wird die Störung kompensiert und es bleibt:

$$\dot{y} = K_M K_I K_P u_R(t)$$

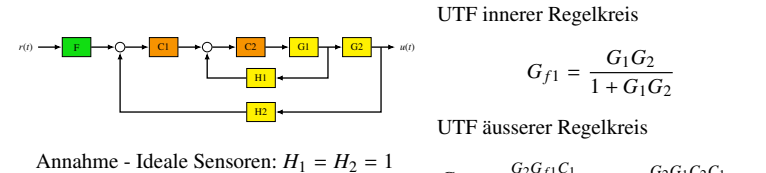
8.4 Kaskadenregelung (s. 175)

Regelstrecken 1. und 2. Ordnung ( $PT_1$ ,  $PT_2$ ,  $I$ ,  $IT_1$ ) können gut mit PID-Reglern geregelt werden. Bei Strecken höherer Ordnung liefert dieses Vorgehen keine genügenden Resultate mehr.

- Geschlossener Regelkreis ist zu langen oder zu wenig gedämpft
- Einstellregeln funktionieren gar nicht, weil die Regelstrecke im offenen Betrieb immer instabil ist

**Konsequenz:** Für Strecken höherer Ordnung bräucht es auch einen Regler höherer Ordnung ⇒ Kaskadenregelung

8.5 Übertragungsfunktionen Kaskadenregelung



Der innere Regelkreis ist deutlich schneller als der äussere Regelkreis!

$$G_{f1} \approx K_1 \Rightarrow G_{f2} \approx \frac{G_2 K_1 C_1}{1 + G_2 K_1 C_1} = \frac{G_3 C_1}{1 + G_3 C_1} \Rightarrow G_3 = G_2 K_1$$

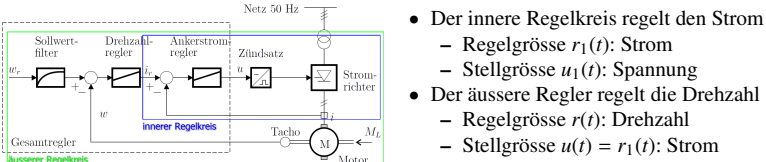
$$G_{f1} \approx 1 \Rightarrow G_{f2} \approx \frac{G_2 C_1}{1 + G_2 C_1}$$

**Interpretation:** Der äussere Regelkreis sieht den inneren Regelkreis nur als Verstärkung  $K_1$ . Wird  $K_1 = 1$  gesetzt, so ist der innere Regelkreis aus sicht des äusseren Regelkreises gar nicht vorhanden.

8.5.1 Eigenschaften der Kaskadenregelung

- Der innere Regelkreis muss **deutlich schneller** sein, als der äussere Regelkreis
  - Innere Regelkreis erscheint somit für äusseren Regelkreis nur als eine **Konstante**
- Der innere Regelkreis wird **zuerst** ausgelegt
  - Dynamik der inneren Regelstrecke verbessern (schneller machen)
  - Allenfalls ist eine gute Störunterdrückung wichtig ( $G_z(s) = \frac{Z(s)}{Y_{sub}(s)}$  optimieren)
- Beide Regelkreise können mit **Einstellregeln** eingestellt werden
  - Innerer Regelkreis: Äusseren Regelkreis als offen ('nicht da') betrachten
  - Äusserer Regelkreis: Innerer Regelkreis muss geschlossen sein (und funktionieren)
- Verfahren ist erweiterbar auf mehrstufige Kaskaden

Beispiel: Drehzahlregelung Elektromotor mit Kaskadenregelung



8.6 Wind-Up (Integratoren) (s. 172)

Das Wind-Up Problem tritt auf, die folgenden drei Voraussetzungen erfüllt sind

- Der Regler enthält einen **I-Anteil**
- Der Regelkreis enthält eine Limitierung bzw. **Sättigung** (Stellglied, Sensor, Physik)
- Das **Reglersignal** läuft in die **Sättigung**

Solange der Regelkreis in Sättigung ist

- Ausgang der Sättigung ist **konstant** (und somit auch der Fehler  $e(t)$ )
- Regelkreis verhält sich, als ob der Regelkreis an der Stelle der Sättigung geöffnet wurde
- Integrator im Regelkreis wird zum offenen Integrator und **'läuft davon'**, da ein konstanter Fehler  $e(t)$  unbremst integriert wird ⇒ Wind-Up

Sobald der Wert der Stellgrösse  $r(t)$  ändert und der Fehler  $e(t)$  umgekehrtes Vorzeichen bekommt, muss erst einmal einige Zeit abintegriert werden, bis der Regler auf die Änderung der Stellgrösse reagiert. ⇒ siehe Beispiel



## Beispiel: Wind-Up mit PI-Regler

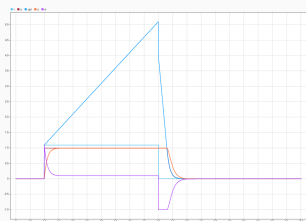


- PI-Regler (so dimensioniert, dass  $G_0$  nur noch I-Verhalten hat)  
 $\Rightarrow G_f$  hat  $PT_1$ -Verhalten
- Sättigungsblock: Sättigung bei  $\pm 1$
- Stellgrösse  $r(t) = 1$  (keine Sättigung)
- Stellgrösse  $r(t) = 1.2$  (Sättigung)

### Keine Sättigung (kein Wind-Up)



### Sättigung (Wind-Up)



## 8.6.1 Anti-Wind-Up-Ansätze

**Hinweis:** Die beschriebenen Methoden sind nicht mathematisch, sondern werden durch Simulationen / Ausprobieren umgesetzt.

- Wind-Up detektieren und Integrator nach Wind-Up auf **sinnvollen Wert** setzen
- Integrator begrenzen (z.B. auf 80 % der möglichen Stellgrösse)  $\Rightarrow$  nie 'vollgas'
- Bedingte Integration (Clamping): Integration stoppen (z.B. wenn Aktor am Limit ist)



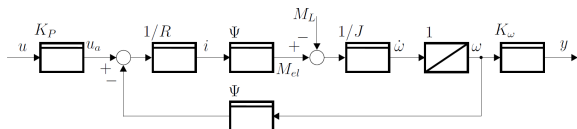
- Feedback-Mechanismus (Back-Calculation)

$\Rightarrow$  Muss richtig dimensioniert sein!  
 $\Rightarrow$  PI-Regler: Wähle  $T_a \approx T_N$

**Achtung:** Es braucht immer ein Anti-Wind-Up, ansonsten läuft der Prozess schlecht oder geht sogar kaputt.

## 9 Fallstudie: Gleichstromantrieb

### 9.1 Modellierung (S. 53)



Der Gleichstromantrieb kann als  $PT_1$ -Glieder mit zwei Eingängen  $u(t)$  und  $M_L(t)$  modelliert werden.  $M_L(t)$  entspricht einer durch Wirbelströme erzeugte **Störung**.

$$\frac{R \cdot J}{\Psi^2} \dot{y}(t) + y(t) = \frac{K_P \cdot K_\omega}{K_1} u(t) - \frac{R \cdot K_\omega}{\Psi^2} M_L(t)$$

#### 9.1.1 Parameter-Identifikation



Aus der Sprungantwort können einige Parameter abgelesen werden. Einige weitere Parameter sind aus Datenblättern bekannt.

Parameter	Bemerkung	Wert	Einheit
$T$	gemäss Messung; Abb. 47	0.14	[s]
$K_1$	gemäss Messung; Abb. 47	0.91	[-]
$R$	statische Messung an der Ankerwicklung	1.9	[Ω]
$J$	via Masse & Geometrie	$2.5 \cdot 10^{-4}$	[kgm <sup>2</sup> ]
$\Psi$	$\Psi = \sqrt{\frac{B_z^2}{2}}$ ; siehe (35)	$5.8 \cdot 10^{-2}$	[Wb]
$K_\omega$	fix gegeben (kalibrierter Sensor)	$2.4 \cdot 10^{-2}$	[Vs]
$K_P$	$K_P = \frac{R}{\Psi^2} \cdot \Psi$ ; siehe (35)	2.2	[-]

$$M_{L1} = 4.8 \cdot 10^{-2} \text{ [Nm]}$$

### 9.2 Gleichstromantrieb mit Steuerung (S. 148-149)

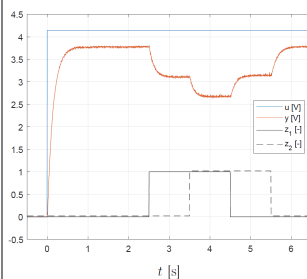
Die Grösse  $\omega$  soll im **steady-state** gesteuert werden  $\Rightarrow$  Ableitungen 0, keine Störungen  
 Zu steuern:  $\omega = 25 \cdot 2\pi$ ,  $K_\omega \cdot \omega = y = 3.77 \text{ V} \Rightarrow$  Finde Wert der Eingangsgrösse  $u(t)$

$$\text{Im steady-state: } \frac{R \cdot J}{\Psi^2} \dot{y}(t) + y_{\text{stat}}(t) = \frac{K_P \cdot K_\omega}{K_1} u(t) - \frac{R \cdot K_\omega}{\Psi^2} M_L(t)$$

$$y_{\text{stat}} = \frac{K_P \cdot K_\omega}{\Psi} u_{\text{stat}}(t) \quad y_{\text{stat}} = K_\omega \cdot \omega \quad \omega_{\text{stat}} = \frac{K_P}{\Psi} u_{\text{stat}}$$

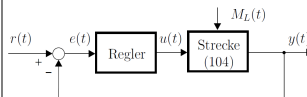
$$\Rightarrow u_{\text{stat}} = \frac{\Psi}{K_P} \omega_{\text{stat}} = \frac{\Psi}{K_P} 25 \cdot 2\pi = 4.14 \text{ V}$$

### 9.2.1 Probleme der Steuerung



- Endwert wird zwar erreicht, aber wenn  $K_P$  oder  $\Psi$  variieren wird dies nicht mehr der Fall sein
- Die Drehzahländerung ist 'langsam' (gemäss Zeitkonstante  $T$ ). (Ein höheres  $u$  zu Beginn könnte  $T$  verkürzen)
- Die Steuerung reagiert nicht auf die Störungen!

### 9.3 Gleichstromantrieb mit P-Regler (S. 149-150)

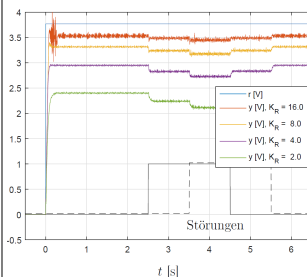


$$u(t) = K_R \cdot e(t) = K_R \cdot (r(t) - y(t))$$

$$\text{Geschlossener Regelkreis: } \frac{T}{1 + K_1 K_R} \dot{y}(t) + y(t) = \frac{K_1 K_R}{1 + K_1 K_R} u(t) - \frac{K_2}{1 + K_1 K_R} M_L(t)$$

Damit der Sollwert  $r(t)$  erreicht wird (wenn keine Störung  $M_L(t)$  vorhanden ist), muss  $K_F = 1$  sein  $\Rightarrow K_R$  muss sehr gross sein

#### 9.3.1 Eigenschaften des P-Reglers



- Für  $K_R \rightarrow \infty$  werden die Zeitkonstante  $T_f$  und der Einfluss der Störung  $M_L(t)$  beliebig klein  
 $\Rightarrow$  DGL konvergiert zu  $y(t) = r(t)$
- Für kleine  $K_R$  wird Endwert nicht erreicht  
 $\Rightarrow$  statischer Fehler
- Stellgrösse  $u(t)$  sättigt aufgrund von physikalischen Gegebenheiten  $\Rightarrow$  Prozess wird **nichtlinear**  $\Rightarrow$  Überschwinger
- Messrauschen wird ebenfalls verstärkt (P-Regler verstärkt **alle** Frequenzen)

$\Rightarrow$  Es bleibt ein stationärer Fehler! Dafür reagiert der P-Regler schnell.

### 9.4 Gleichstromantrieb mit I-Regler (S. 151-152)

I-Regler ( $K_R$  einstellbar)

E-Motor (Strecke,  $PT_1$ -System)

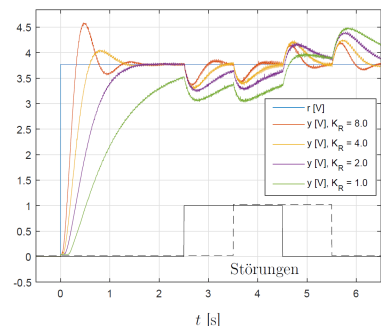
$$u(t) = K_R \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

$\Rightarrow u(t)$  von I-Regler in Gleichung der Strecke einsetzen, ableiten, umsortieren

$$\text{PT}_2\text{-System: } \frac{T}{K_1 \cdot K_R} \ddot{y}(t) + \frac{1}{K_1 \cdot K_R} \dot{y}(t) + y(t) = \frac{1}{K_f} r(t) - \frac{K_2}{K_1 \cdot K_R} M_L(t)$$

#### 9.4.1 Eigenschaften des I-Reglers

- $T_F = \sqrt{\frac{T}{K_1 \cdot K_R}} \cdot \zeta_f = \frac{1}{2\sqrt{T K_1 K_R}}$
- Der Integrator sorgt dafür, dass im **steady-state** kein stationärer Fehler auftritt ( $e(t) = 0$ )
- Für grosse  $K_R$  wird  $T_f$  klein, die Sprungantwort schneller (erwünscht)
- Für grosse  $K_R$  wird  $\zeta_f$  klein, die Überhöhung grösser (unerwünscht)
- $\Rightarrow$  Kompromiss finden



### 9.5 Gleichstromantrieb mit PI-Regler (S. 152-154)

Vorteile von P-Regler und I-Regler sollen kombiniert werden:

- P-Regler für schnelle Reaktion
- I-Regler für statische Fehlerunterdrückung  $\Rightarrow$  Parameter  $K_R$  und  $T_N$  einstellbar

$$\text{PI-Regler: } u(t) = \frac{1}{T_N} \left( \int_0^t e(\tau) d\tau + e(t) \right) K_R \quad \bullet \quad U(s) = \frac{1}{T_N} \left( \frac{1}{s} E(s) + E(s) \right) K_R$$

$$\text{E-Motor: } T \dot{y}(t) + y(t) = K_1 u(t) - K_2 M_L(t) \quad \bullet \quad T s Y(s) + Y(s) = K_1 U(s) - \frac{K_2}{s} M_L(s)$$

UTF Regler:  $G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R \left( \frac{1}{T_N s} + 1 \right)$  UTF Strecke:  $G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{T s + 1}$   
 Der Parameter  $T_N$  des PI-Reglers wird so gewählt, dass der **offene Regelkreis**  $G_0(s)$  einem **Integrator** entspricht!  $\Rightarrow$  **Pol-Nullstellenkürzung!**

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = K_R \cdot \frac{1 + T_N s}{T_N s} \cdot \frac{K_1}{T s + 1} \stackrel{T_N=T}{=} K_R \frac{K_1}{T_N s}$$



Für den **geschlossenen Regelkreis** ergibt sich somit ein  $PT_1$ -System mit Verstärkung 1 ( $\Rightarrow$  kein statischer Fehler im steady-state). Die Zeitkonstante  $T_{geschl}$  wird mit  $K_R$  des Reglers eingestellt.

$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\frac{K_R K_1}{T_N s}}{1 + \frac{K_R K_1}{T_N s}} = \frac{K_R K_1}{T_N s + K_1 K_R} = \frac{1}{\frac{T_N}{K_R K_1} s + 1}$$

### 9.5.1 Pol-Nullstellenkürzung

Wird durchgeführt, um den **offenen Regelkreis** zu vereinfachen. Pole und Nullstellen der Strecke werden mit einer geeigneten Wahl der Parameter des Reglers kompensiert.  
 $\Rightarrow$  **Idealfall: offener Regelkreis verhält sich wie ein Integrator.**

- Betrachtung UTF des offenen Regelkreises
- Parameter des Reglers so wählen, dass man Polstelle mit einer Nullstelle kürzen kann  $\Rightarrow$  Diejenige Polstelle, welche am frühesten 'zündet', ist bevorzugt zu kürzen!

### 9.5.2 Eigenschaften des PI-Reglers

- Zeitkonstante und Verstärkung unabhängig voneinander einstellbar
- Kein Überspringen
- Konstante Störungen werde unterdrückt (kein steady-state Fehler)**
- Grosse Verstärkung führt noch immer zu Sättigung
- Effekt des Rauschens eher harmlos, weil kleine Verstärkungen gewählt werden können
- $\Phi_{RES} = 90^\circ$  und  $K_{RES} = \infty$



### 9.6 Gleichstromantrieb mit PID / PD-Regler (s. 155)

**Der Regelkreis kann nicht weiter optimiert werden!** Der offenere Regelkreis entspricht bereits einem **Integrator**, was der **Idealfall** ist.  
 Ein D-Anteil  $DT_1$  wäre ungünstig, weil

- Verstärkung von hohen Frequenzen  $\Rightarrow$  Erhöhung des Rauschens
- Verbesserung der Phasenreserve  $\Rightarrow$  unnötig bei  $\Phi_{RES} = 90^\circ$

Allenfalls sinnvoll wäre ein Tiefpassfilter für den P-Anteil ( $PT_1$  statt P), um das Rauschen der Stellgrösse zu verkleinern  $\Rightarrow$  Reduktion der Phasenreserve!

### 9.7 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PI-Regler (s. 157-159)

Das bisherige Modell der Strecke soll um eine Totzeit  $T_t$  erweitert werden. Als Regler wird weiterhin ein PI-Regler eingesetzt. Die Ergebnisse werden dadurch massiv schlechter!

UTF Steckte mit Totzeit  $G_S(s) = \frac{K_1}{s+1} e^{-sT_t}$

UTF Regelkreis  $G_0(s) = G_S(s) \cdot G_R(s) = \frac{K_1}{s+1} e^{-sT_t} \cdot K_R \frac{1+T_N s}{T_N s} \stackrel{T_N=T}{=} \frac{K_1 K_R}{sT} e^{-sT_t}$

Die UTF des offenen Regelkreises  $G_0(s)$  entspricht keinem Integrator mehr. Somit wird die UTF des geschossenen Regelkreises  $G_f(s)$  keinem  $PT_1$ -System mehr entsprechen.

#### 9.7.1 Effekte im Bode- und Nyquistdiagramm / Sprungantwort

- Amplitudengang unverändert, gleiche Durchtrittsfrequenz
- Phasengang wird schlechter (zusätzliche Phasenverzögerung), die  $-180^\circ$  Phase wird bei tieferer Frequenz erreicht - die Verstärkungsreserve sinkt dadurch
- Die Phase bei der Durchtrittsfrequenz ist negativer, die Phasenreserve sinkt



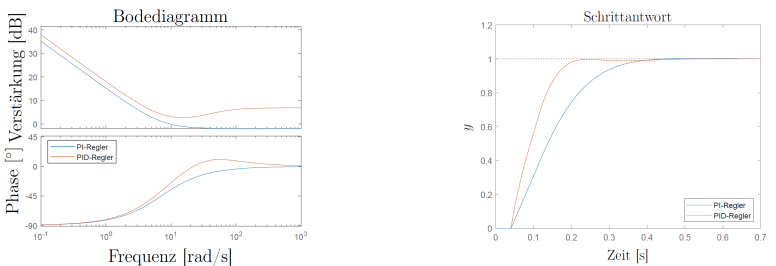
### 9.8 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PID-Regler (s. 160-162)

Um die Totzeit  $T_t$  entgegnzuwirken, wird dem PI-Regler ein Lead-Glied (entspricht einem PD-Regler) in serie geschaltet  $\Rightarrow$  PID-Regler in multiplikativer Form (Abschnitt 6.1.3)

- Dies hat folgende Effekte:
- Nyquistkurve wird bei der Durchtrittsfrequenz aktiv durch den Regler 'zurückgedreht'
    - Effekt der Totzeit nicht für alle Frequenzen kompensieren, sondern in einem bestimmten Frequenzbereich
    - Im Bodediagramm: Phase bei 0 dB
  - Serieschaltung eines Lead-Glieds (PD-Regler) zum PI-Regler  $\Rightarrow$  PID-Regler  $\Rightarrow$  Lead-Glied siehe Abschnitt 5.1.2

#### 9.8.1 Auswirkungen des Leas-Glieds / PD-Reglers

- Phase und Verstärkung werden angehoben
- Zeitkonstante wird kleiner (Regler wird schneller)



## 10 Implementierung analoger Regler

**Voraussetzung:** Regler ist ausgelegt (Parameter und Struktur des Reglers bekannt)

### 10.1 Struktur allgemeiner Frequenzgang eines Reglers

Der Frequenzgang des Reglers  $G_R(j\omega)$  mit  $(m \leq n)$  ist beschrieben durch

$$G_R(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_0}{(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_0} = \frac{b_n + b_{n-1} \frac{1}{j\omega} + \dots + b_0 \frac{1}{(j\omega)^n}}{1 + a_{n-1} \frac{1}{j\omega} + \dots + a_0 \frac{1}{(j\omega)^n}}$$

Ein jeder solcher Frequenzgang besteht nur aus **Integratoren, Summatoren und Verstärkungen**. Diese Grundglieder können mit OpAmp-Schaltungen realisiert werden.

### 10.2 Grundsaltungen mit OpAmps

**Hinweis:** Die folgenden Betrachtungen gelten für **ideale OpAmps!**

#### 10.2.1 Summator

$$Y = -\frac{Z_0}{Z_1} \cdot U_1 - \frac{Z_0}{Z_2} \cdot U_2$$

$\Rightarrow$  Auf beliebig viele Eingänge erweiterbar

#### 10.2.2 Integrierer

$$Z_0 = \frac{1}{j\omega C} \text{ (Kondensator)} \quad Z_1 = R$$

$$Y = -\frac{1}{j\omega RC} \cdot U \Rightarrow Y = -\frac{1}{j\omega R_1 C} \cdot U_1 - \frac{1}{j\omega R_2 C} \cdot U_2$$

- Für einen oder mehrere Eingänge geeignet
- Braucht 'Reset'-Schaltung, um Kondensator zu entladen
- Anti-Wind-Up** durch Sättigung der Speisespannung **gegeben**

#### 10.2.3 P-Glied (passiv)

Verstärkung  $< 1 \Rightarrow$  passiver Spannungsteiler  
 Verstärkung  $> 1 \Rightarrow$  OpAmp-Schaltung

- OpAmps sollten als Summierer oder Integratoren mit definierter Verstärkung aufgebaut werden
- Vor Eingänge des OpAmps passive Spannungsteiler setzen

## 10.3 Varianten analoger PID-Schaltungen

### 10.3.1 Variante 1 (gemischt)

$R_1$  Proportional (P-Anteil)  
 $C_1$  Ableitung (D-Anteil)  
 $R_3$  Filterkonstante der Ableitung  $\Rightarrow R_1$  und  $C_1$  bilden  $DT_1$ -Anteil  
 $C_2$  Integral (I-Anteil)

$\Rightarrow$  Betrachtung als Summator mit  $Z_0$  und  $Z_1$  möglich

### 10.3.2 Variante 2 (Parallellform)

Der Frequenzgang  $G(j\omega)$  des Reglers lautet

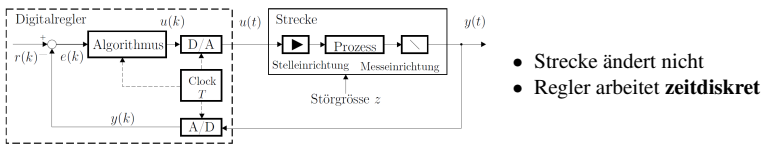
$$\frac{U_{PID}}{U_E} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{K_R} \cdot \left( 1 + \underbrace{\frac{1}{j\omega C_1 R_1}}_{T_N} + j\omega \underbrace{C_2 R_2}_{T_V} \right)$$

Durch Einbau eines Widerstands an der Stelle **A** wird der der PID-Regler zu einem  $PIDT_1$ -Regler.

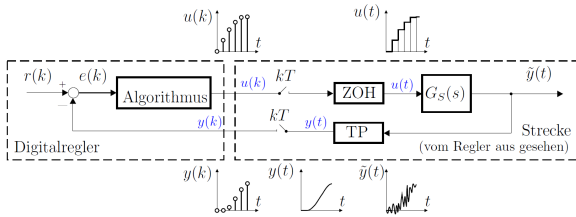
## 11 Implementierung digitaler Regler

- Heutzutags werden fast nur noch digitale Regler implementiert. Gründe hierfür sind:
- Verarbeitung digitaler Signale ist flexibel
  - Speicherung und Übertragung digitaler Signale ist einfach
  - Komponenten (Rechner, Wandler) für ditigale Umsetzung werden immer günstiger

## 11.1 Aufbau digitaler Regelkreis (s. 183)



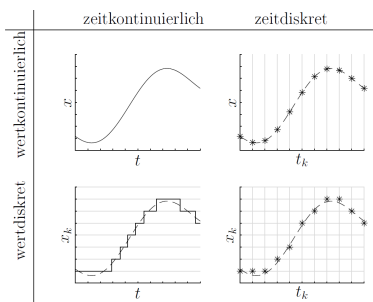
### 11.1.1 Signale im digitalen Regelkreis (s. 184)



- Sensorseitig wird periodisch die Regelgrösse abgetastet (zuvor TP-filtern)
  - TP: Analoges Tiefpassfilter  $\Rightarrow$  Anti-Aliasing
- Aktorseitig wird mit ZOH-Halteglied (Zero-Order-Hold) aus dem diskreten Signal  $u(k)$  eine kontinuierliche Funktion  $u(t)$  erzeugt

### 11.1.2 Quantisierung (s. 185)

Das Signal eines digitalen Reglers ist sowohl **zeitdiskret** als auch **wertdiskret**.



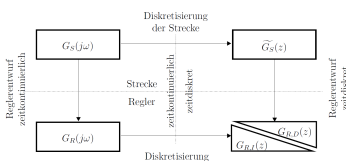
#### Abtastzeit $T$

- $T$  zu gross gewählt
  - Schlechtes Führungsverhalten (Überschwingen)
- $T$  zu klein gewählt
  - Möglicherweise numerische Probleme
  - Höhere Anforderungen an Sensor, Aktor, Wandler und Digitalrechner

#### Sättigung und Quantisierung

- Grobe Quantisierung
  - Nichtlineare Regelung
- Feine Quantisierung
  - Keinen (negativen) Einfluss auf Regler

## 11.2 Entwurfsverfahren (s. 186)



- **Indirekter digitaler Reglerentwurf**
  - $G_S(j\omega) \Rightarrow$  'links herum'  $\Rightarrow G_{R,I}(z)$
- **Direkter digitaler Reglerentwurf**
  - $G_S(j\omega) \Rightarrow$  'rechts herum'  $\Rightarrow G_{R,D}(z)$
  - 'Digitale Natur' des Reglers von Anfang an berücksichtigt

**Hinweis:** Normalerweise sind die resultierenden Regler nicht identisch:  $G_{R,I}(z) \neq G_{R,D}(z)$

### 11.3 Diskretisierung eines Reglers (s. 188)

Ein kontinuierlicher Regler (hier I-Regler) weist folgendes Verhalten auf:

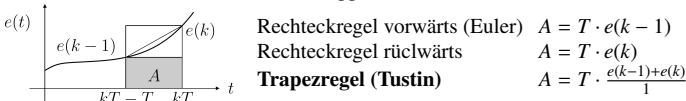
$$u(t) = K_R \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Der entsprechende zeitdiskrete Regler kann **nicht exakt** gebildet werden, da  $e(t)$  nur zu diskreten Zeitpunkten  $e(kT)$  bekannt ist. Geht man davon aus, dass  $e(t)$  **nicht stakt ändert** ( $\Rightarrow$  geeignete Wahl der Abtastzeit  $T$ ), dann kann  $u(k)$  folgendermassen approximiert werden:

$$u(k) = K_R \cdot \int_0^{kT} e(\tau) d\tau = K_R \cdot \underbrace{\int_0^{kT-T} e(\tau) d\tau}_{u(k-1)} + K_R \cdot \underbrace{\int_{kT-T}^{kT} e(\tau) d\tau}_{\approx A}$$

### 11.3.1 Approximationen der Fläche $A$

Die Fläche  $A$  kann auf mehrere Arten approximiert werden:



**Hinweis:** Für die Diskretisierung von Reglern wird die **Trapez-Approximation** verwendet, da diese am genauesten ist.

### 11.4 Vorgehen: Diskretisierung eines Reglers

1. Übertragungsfunktion des Reglers in  $j\omega$  aufstellen:  $G_R(j\omega) = \dots$
2. Wahl der Abtastzeit  $T_S$  und einer Diskretisierungsmethode
  - (typischerweise Tustin, weil am genauesten)
3. Substitution aller  $j\omega$  in der UTF durch Approximation in  $z^{-1} \Rightarrow G_{R,diskret}(z) = \dots$ 
  - Tustin:  $j\omega = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
4. Umformen, damit Doppelbrüche verschwinden

5. Ansatz:  $G_{R,diskret}(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$  sortieren nach  $U(z)$  und  $E(z)$

6. Differenzengleichung durch inverse Z-Transformation bestimmen

### Beispiel: PI-Regler diskretisieren

Gegeben sei die Übertragungsfunktion  $G_R(j\omega)$  eines **kontinuierlichen** Reglers. Daraus soll die zu implementierende **Differenzengleichung** ermittelt werden.

$$1. \quad G_R(j\omega) = K_R \cdot \frac{1 + T_N j\omega}{T_N j\omega} \Rightarrow 2.$$

$$G_{R,diskret}(z) \stackrel{3.}{=} K_R \cdot \frac{1 + T_N \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{T_N \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \stackrel{4.}{=} K_R \cdot \frac{T(1+z^{-1}) + 2T_N(1-z^{-1})}{2T_N(1-z^{-1})} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$5. \quad U(z)(1-z^{-1}) = \frac{K_R}{2T_N} \cdot E(z)(T(1+z^{-1}) + 2T_N(1-z^{-1}))$$

$$6. \quad u(k) - u(k-1) = \frac{K_R}{2T_N} [T \cdot e(k) + T \cdot e(k-1) + 2T_N \cdot e(k) - 2T_N \cdot e(k-1)]$$

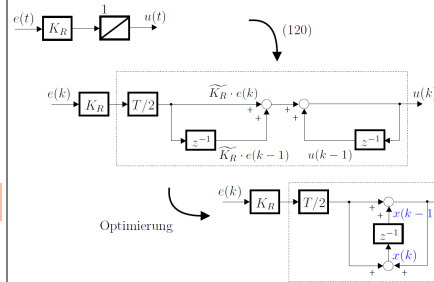
$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_R}{2T_N} [e(k) \cdot (T + 2T_N) + e(k-1) \cdot (T - 2T_N)]$$

## 11.5 Code-Implementierung eines diskreten Reglers (s. 190)

```

1 Function init()
2     e_km1 = 0    % e(k-1) initialisieren
3     u_km1 = 0    % u(k-1) initialisieren
4
5 Function u_k = loop(e_k)
6     u_k = u_km1 + K_R / (2 * T_N) * (e_k * (T + 2 * T_N))
7         + e_km1 * (T - 2 * T_N)
8     u_km1 = u_k
9     e_km1 = e_k
    
```

### 11.5.1 Optimierung des Speicherplatzes (s. 189)

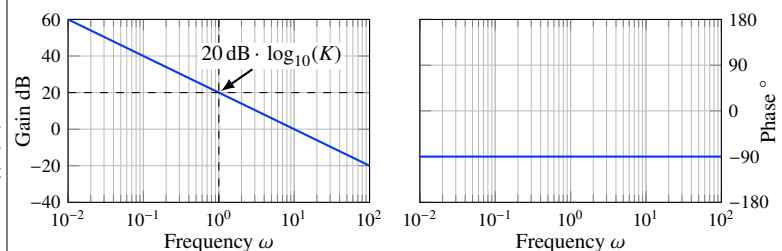


Durch geeignete Anpassung kann die Struktur des Reglers so optimiert werden, dass man sich nicht mehr die beiden Werte  $u(k-1)$  und  $e(k-1)$  'merken' muss, sondern nur noch einen Wert  $x(k-1)$

## 12 Anhang

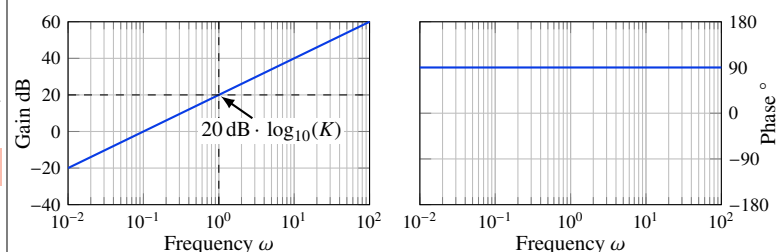
### 12.1 Bodediagramm eines Integrators

Ein Integrator mit  $G(s) = \frac{K}{s}$  hat seine Polstelle bei der Frequenz  $\omega = 0$ . Im Bodediagramm wird der Integrator so dargestellt, dass bei Frequenz  $\omega = 1$  die Verstärkung  $20 \text{ dB} \cdot \log_{10}(K)$  erreicht ist. Die Steigung beträgt  $-20 \text{ dB/Dek}$  und die Phase ist konstant bei  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$



### 12.2 Bodediagramm eines Differenzierers

Ein Differenzierer mit  $G(s) = K \cdot s$  hat eine Nullstelle bei der Frequenz  $\omega = 0$ . Im Bodediagramm wird der Differenzierer so dargestellt, dass bei Frequenz  $\omega = 1$  die Verstärkung  $20 \text{ dB} \cdot \log_{10}(K)$  erreicht ist. Die Steigung beträgt  $20 \text{ dB/Dek}$  und die Phase ist konstant bei  $\varphi = \frac{\pi}{2}$



12.3 z-Transformation

Die z-Transformation wird verwendet, um **diskrete** Signale in den Frequenzbereich zu transformieren.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$u(k)$	$U(z)$
$u(k - 1)$	$z^{-1} \cdot U(z) = \frac{1}{z} \cdot U(z)$
$u(k + 1)$	$z \cdot U(z)$

12.3.1 Z-Transformation mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G_R = K_R * (1 + s * T_N) / (s * T_N); % UTF Regler
3 sysd = c2d(G_R, T_S, 'tustin') % T_S: sampling time
```

12.4 Fourier- bzw. Laplace-Transformation

Die Fourier- und die Laplace-Transformation werden verwendet, um **kontinuierliche** Signale in den Frequenzbereich zu transformieren.

Zeitbereich	Frequenzbereich (Fourier)	Frequenzbereich (Laplace)
$u(t)$	$U(j\omega)$	$U(s)$
$\int u(\tau) \, d\tau$	$\frac{1}{j\omega} \cdot U(j\omega)$	$\frac{1}{s} \cdot U(s)$
$\frac{d}{dt}u(t)$	$j\omega \cdot U(j\omega)$	$s \cdot U(s)$