Regelungstechnik 2

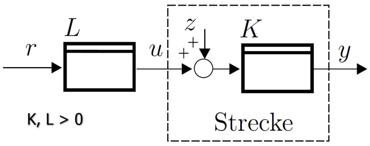
FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann
Autoren:
Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:
1.0.20240426
https://github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2

Inhaltsverzeichnis

1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

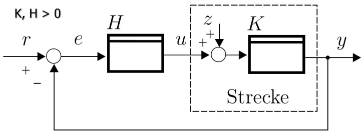
1.1 Steuerung



Eine Steuerung besitzt **keine Rückkopplung** und ist somit ein **offener Regelkreis**

$$y = \underbrace{KL \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{K \cdot z}_{\text{Störung}}$$

1.2 Regelung



Eine regelung besitzt eine **Gegenkopplung**

$$y = KH \cdot (r - y) + K \cdot z$$

$$y = \underbrace{\frac{KH}{1+KH}}_{\text{Sensitivität}} \cdot r + \underbrace{\frac{K}{1+KH}}_{\text{Störungsunterdrückung}} \cdot z$$

1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung der Störung z gilt:

$$\lim_{H\to\infty} \frac{K}{1+KH} \cdot z = 0$$

⇒ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so wird die Störung z unterdrückt
⇒ Bei einer Steuerung wird die Störung nicht unterdrückt

1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H\to\infty} \frac{KH}{1+KH} \cdot r = 1$$

⇒ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so ist $y \approx r$ (Ausgang ≈ Sollwert)
⇒ Bei einer Steuerung muss $H = \frac{1}{L}$ sein, damit $y \approx r$

1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

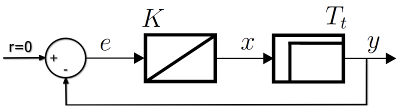
1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

(asymp.) stabil	Verstärkung $\lvert V\rvert < 1$	System schwingt nicht
grenzstabil	Verstärkung $V = -1$	System schwingt mit konstanter Ampl.
instabil	Verstärkung $\lvert V\rvert > 1$	System schwingt mit zunehmender Ampl.

1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten: $V = -1$

Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied



$K, T_t > 0$

Es muss gelten: $y(t) = -e(t)$ unter der Annahme, dass $e(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

$$x(t) = K \cdot \int_0^t e(\tau)\,d\tau + x_0 = K \cdot \int_0^t A \cdot \cos(\omega\tau)\,d\tau + x_0 = K\frac{A}{\omega}\sin(\omega\tau)\Big|_0^t + x_0$$

$$= \frac{KA}{\omega}\sin(\omega t) + \underbrace{x_0}_{0}$$

$$y(t) = x(t - T_t) = \frac{KA}{\omega}\sin(\omega(t-T_t)) = \frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega(t-T_t) - \frac{\pi}{2}\right)$$

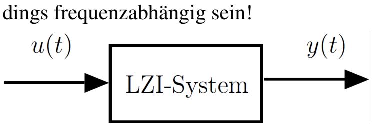
Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega t - \omega T_t - \frac{\pi}{2}\right)}_{y(t)} = -A\cos(\omega t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - \pi)}_{-e(t)}$$

⇒ Wenn der Regler die Verstärkung K hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz ω
⇒ Die Verstärkung K muss vermieden werden!

2 Frequenzgang (S. 114)

Wird ein Sinus-Signal $u(t)$ in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die **Amplitude** und die **Phase**. Die **Frequenz** hingegen bleibt **gleich**.
Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!



A	Amplitude Eingangssignal
B	Amplitude Ausgangssignal
$\frac{B}{A}$	Verstärkung
φ	Phasenverschiebung

$\boxed{u(t) = A \cdot \cos(\omega t) \qquad y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \text{Transiente}}$

Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (**steady state**) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig $t = 5\tau$ als Ende des Einschwingvorgangs
⇒ **Uns interessiert nur der der steady state!**

Darstellung des Frequenzgangs

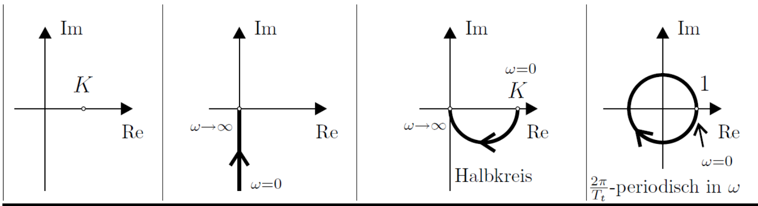
Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:
- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- Zeiger-Diagramm

2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl (S. 116)

$$\boxed{G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \frac{B}{A} \cdot e^{j\varphi}}$$

2.2 Frequenzgang der Grundglieder

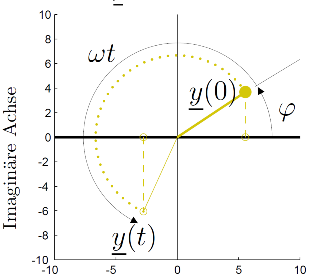
P-Glied	I-Glied	PT$_1$-Glied	T$_t$-Glied
K	K	$K \quad T$	T_t (≥0!)
$y(t) = Ku(t)$	$\dot{y}(t) = Ku(t)$	$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$	$y(t) = u(t - T_t)$
$G(j\omega) = K$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$	$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$
$\lvert G\rvert = K$	$\lvert G\rvert = \frac{K}{\omega}$	$\lvert G\rvert = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$	$\lvert G\rvert = 1$
$\angle G = 0$	$\angle G = -\frac{\pi}{2}$	$\angle G = -\arctan(\omega T)$	$\angle G = -\omega T_t$

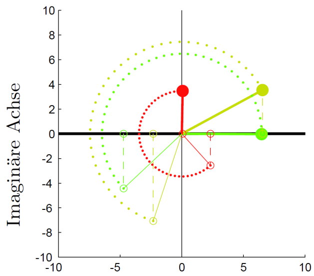


⇒ Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

2.3 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal **bei einer bestimmten Frequenz** als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal $\underline{y}(t)$ als Zeiger $\underline{Y}$ zur Zeit $t = 0$ dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz $\omega = 2\pi f$ rotiert. Das zeitliche Signal $y(t)$ entspricht dem **Realteil** von $\underline{y}(t)$





2.3.1 Komplexe Amplitude $\underline{Y}$

$$\begin{aligned}\underline{y}(t) &= B \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)] \\ &= B \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \\ &= \underline{Y} \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

$\lvert\underline{y}(t)\rvert = B$	Maximale Amplitude des Ausgangssignals
$\mathrm{Re}(\underline{y}(t)) = y(t)$	Ausgangssignal (zeitlich)
$\underline{y}(0) = \underline{Y}$	Anfangszeiger (komplexe Amplitude)

2.3.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\boxed{\dot{\underline{y}}(t) = \underline{Y} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}} \qquad \boxed{\int \underline{y}(t)\,dt = \frac{\underline{Y}}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}}$$

2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

1. DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
2. Geeignet umformen: $G(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{U}}$
3. Falls gewünscht: Amplitude $|G(j\omega)|$ und Phase φ bestimmen

Beispiel: PT$_1$ Glied

$$T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}} T \cdot j\omega \cdot \underline{Y} + \underline{Y} = [j\omega T + 1] \cdot \underline{Y} = K\underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{K}{j\omega T + 1} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1^2}} \qquad \varphi = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2} + \pi$$

2.4.1 Allgemeiner Fall

$$a_n y(t)^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

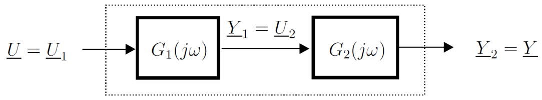
$$a_n(\mathrm{j}\omega)^n \cdot \underline{Y} + \dots + a_1 \mathrm{j}\omega \cdot \underline{Y} + a_0 \underline{Y} = b_m(\mathrm{j}\omega)^m \cdot \underline{U} + \dots + b_1 \mathrm{j}\omega \cdot \underline{U} + b_0 \underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m + \dots + b_1\mathrm{j}\omega + b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n + \dots + a_1\mathrm{j}\omega + a_0} = G(\mathrm{j}\omega)$$

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{|b_m(\mathrm{j}\omega)^m + \dots + b_1\mathrm{j}\omega + b_0|}{|a_n(\mathrm{j}\omega)^n + \dots + a_1\mathrm{j}\omega + a_0|}$$

$$\varphi = \angle G(\mathrm{j}\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{G(\mathrm{j}\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(\mathrm{j}\omega)\}}\right) (+\pi)$$

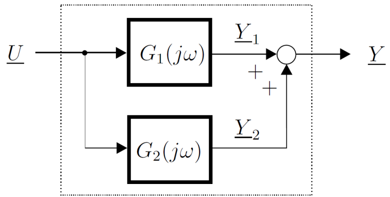
2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega)}_{G(\mathrm{j}\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 \dot{G}_2 = |G_1| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle G_1} \cdot |G_2| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle G_2} = |G_1||G_2| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\angle G_1 + \angle G_2)}$$

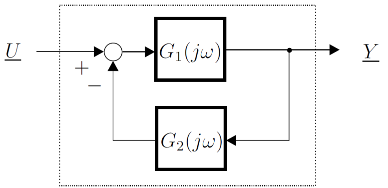
2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot \underline{U} + G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot \underline{U} = \underbrace{(G_1(\mathrm{j}\omega) + G_2(\mathrm{j}\omega))}_{G(\mathrm{j}\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 + G_2 = \operatorname{Re}\{G_1\} + \operatorname{Re}\{G_2\} + \mathrm{j}(\operatorname{Im}\{G_1\} + \operatorname{Im}\{G_2\})$$

2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{\frac{G_1(\mathrm{j}\omega)}{1 + G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega)}}_{G(\mathrm{j}\omega)} \cdot \underline{U}}$$

⇛ Anwendung von **Mason Regel** (SigSys)

2.7.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

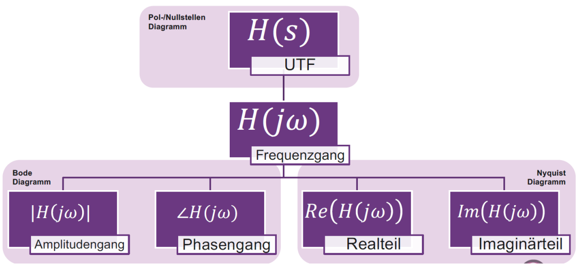
1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
2. Nach $\underline{Y}$ umformen

2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang $G(\mathrm{j}\omega)$ und du Übertragungsfunktion $G(s)$ mit $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ hängen folgendermassen zusammen:

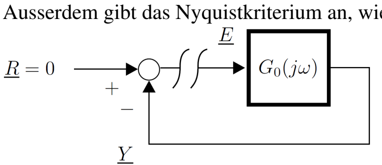
$$\boxed{G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}}$$

2.8.1 Übersicht Darstellungsformen



3 Stabilität – Nyquistkriterium (S. 126)

Die Stabilität eines Regelkreises kann mit dem Nyquistkriterium viel einfacher betrachtet werden. Dafür wird der **Frequenzgang $G_0(\mathrm{j}\omega)$ des offenen Regelkreises** betrachtet. Ausserdem gibt das Nyquistkriterium an, wie robust ein Regelkreis ist.



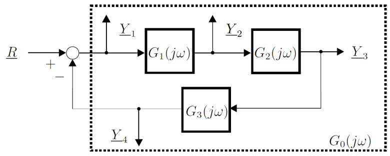
Frequenzgang des offenen Regelkreises

$$\boxed{G_0(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}}$$

Beispiel: Kreisschaltung mit mehreren Blöcken

Folgendes System besitzt ein Eingangssignal $\underline{R}$ und vier Ausgangssignale $\underline{Y}$
Es sollen der Frequenzgang des offenen Regelkreises $G_0(\mathrm{j}\omega)$, sowie ausgewählte UTFs des Systems beschrieben werden.

$$G_0(\mathrm{j}\omega) = G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot G_3(\mathrm{j}\omega)$$



$$\frac{\underline{Y}_1}{\underline{R}} = \frac{1}{1 + G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot G_3(\mathrm{j}\omega)}$$

$$\frac{\underline{Y}_3}{\underline{R}} = \frac{G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega)}{1 + G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot G_3(\mathrm{j}\omega)}$$

Hinweis: Die Stabilität des Systems ist **unabhängig von der Reihenfolge der Teilsysteme** $G_i(\mathrm{j}\omega)$, da die Stabilität durch den Nenner (bzw. die Polstellen) beschrieben wird.

3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Gedankenexperiment: Ein offener Regelkreis mit $G_0(\mathrm{j}\omega)$ (gemäss Abschnitt 3) um eine veränderbare Verstärkung K ergänzt.

3.1.1 Stabilität

Wähle $K = K_0$, sodass sich die Ortskurve immer innerhalb des Einheitskreises befindet.

- Befindet sich die Ortskurve eines Systems immer **innerhalb des Einheitskreises**, so ist der offene Regelkreis stabil.
  ⇛ Daraus folgt, dass auch der geschlossene Regelkreis stabil sein muss.
- Führungsübertragungsfunktion für $K \ll K_0$:
  $G_f(\mathrm{j}\omega) = \frac{K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)}{1 + K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)} \approx K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)$

3.1.2 Grenzstabilität

Wähle $K = K_{krit} > K_0$, sodass die Ortskurve den Punkt -1 schneidet.

- Ortskurve des offenen Regelkreises $G_0(\mathrm{j}\omega)$ verläuft **durch den Punkt -1**,
- Die Frequenz ω_π, für die $G_0(\mathrm{j}\omega_\pi) = -1 = \mathrm{e}^{-\pi}$ heisst **kritische Frequenz**. Mit dieser kritischen Frequenz schwingt das System.
- Die Führungsübertragungsfunktion $G_f(\mathrm{j}\omega) = \frac{K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)}{1 + K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)}$ wird bei der kritischen Frequenz zu $G_f(\mathrm{j}\omega_\pi) = \frac{-1}{1-1} = -\infty$ ⇛ Grenzstabilität

3.1.3 Instabilität

Wähle $K > K_{krit}$

- Ortskurve verläuft nicht mehr durch den Punkt -1
- Das System ist instabil

3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)

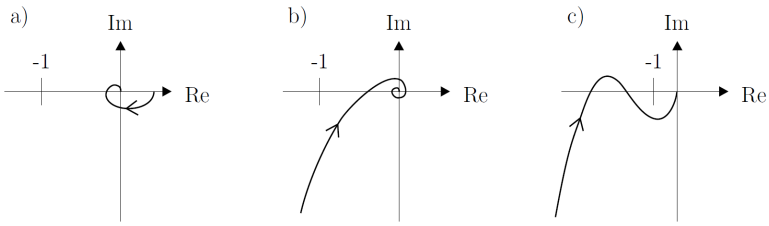
Idee: Informationen über den **offenen Regelkreis** verwenden, um die **Stabillität des geschlossenen Regelkreises** zu beurteilen

3.2.1 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- Gemäss Abschnitt 3 wird $G_0 = \prod_i G_i$ gebildet aus den seriegeschalteten Teilsystemen des offenen Regelkreises (⇛ Produkt aller G_i **im Feedback-Loop**)
- G_0 muss dabei einem **Prozess mit Ausgleich** **(stabilen Prozess)** entsprechen; zusätzlich **dürfen** noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein
  Mit Polen formuliert: Bei G_0 sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt -1 **links** der Nyquistkurve von G_0 liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ($\omega = 0 \dots \infty$) ⇛ 'links der Kurve': Man befindet sich **auf der Kurve** und 'schaut' nach links und muss den Punkt -1 'sehen'

Beispiel: Ortskurven stabiler Systeme (S. 128)

Achtung: Damit die Stabilität der gezeigten Systeme beurteilt werden kann, muss sichergestellt werden, dass auch die ersten beiden Punkte des vereinfachten Nyquistkriteriums eingehalten werden!

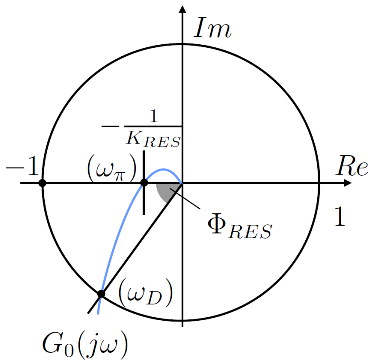


3.3 Stabilitätsreserven

Wir möchten nicht nur Stabilität, sondern auch eine gewisse Stabilitätsreserve, um z.B. auch bei einem ungenau modellierten Prozess oder einer sich ändernden Regelstrecke noch einen stabilen Regelkreis zu gewährleisten.

- **Auch ein stabiler Regelkreis kann sehr lange (ein)schwingen**
- Stabilität / Grenzstabilität / Instabilität sind definierte Bereiche
  – Es gibt nicht 'ein wenig stabil', 'ziemlich stabil', 'stabiler als...', 'instabiler als'
- Allenfalls: Ein Regelkreis ist stabiler als ein anderer. Gemeint ist:
  – Ein Regelkreis ist besser gedämpft / schneller (eingeschwungen)
  – Ein Regelkreis ist robust – er ist trotz gewissen Widerigkeiten im Regelkreis
  – **Ein Regelkreis bleibt stabil, auch wenn die Regelstrecke leicht ändert**

3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129)



$$\Phi_{RES} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Re}\{G_0(j\omega_D)\}}{\mathrm{Im}\{G_0(j\omega_D)\}}\right)$$

$$\frac{1}{K_{RES}} = |G_0(j\omega_\pi)|$$

Ein System ist **stabil**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\omega_\pi > \omega_D$
- $G_0(j\omega_D) = e^{-j\varphi}$ mit $0 < \varphi < \pi$
- $0 > G_0(j\omega_\pi) > -1$

- Durchtrittsfrequenz ω_D
  Frequenz, bei der die Kurve den Einheitskreis durchquert: $|G_0(j\omega_D)| = 1$
  $\Rightarrow$ Phasenreserve Φ_{RES}
- Phasenschnittfrequenz ω_π
  Frequenz, bei der die Kurve die reelle Achse durchquert: $\mathrm{Im}\{G_0(j\omega_\pi)\} = 0$
  $\Rightarrow$ Verstärkungsreserve K_{RES}

3.4.1 Verstärkungsreserve K_{RES}

Die Verstärkungsreserve K_{RES} liefert direkt den Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Verstärkung** liegt.
Der Abstand zur Ursprung bei der Phasenschnittfrequenz ω_π entspricht $\frac{1}{K_{RES}}$
$\Rightarrow$ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $K_{RES} \cdot G_0(j\omega)$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

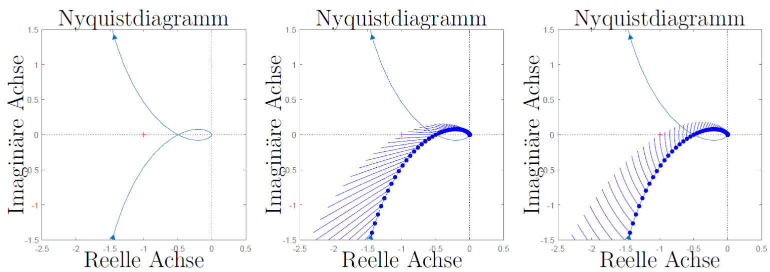
3.4.2 Phasenreserve Φ_{RES}

Die Phasenreserve Φ_{RES} liefert einen Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Totzeit** liegt.
$\Rightarrow$ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $G_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega T_t}$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

Der Zusammenhang zwischen Phasendrehung und Totzeit ist

$$T_t = \frac{\Phi_{RES}}{\omega_D} \quad \text{wobei } [\Phi_{RES}] = \mathrm{rad}$$

Beispiel: Einfluss von Stabilitätsreserven auf Nyquistdiagramm



Mitte: Verstärkungsreserve streckt Kurve vom Ursprung aus
Rechts: Phasenreserve dreht jeden Punkt der Kurve um verschiedene Winkel $\omega \cdot T_t$ um den Ursprung

3.4.3 Faustregeln für Reserven (S. 131)

Hinweis: Es besteht eine Kopplung zwischen den beiden Effekten!

- Phasenreserve von $\Phi_{RES} = 40° \ldots 70°$
- Verstärkungsreserve von $K_{RES} > 4\,(\approx 12\,\mathrm{dB})$

3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
s = tf('s');
G = 1 + 1/s;    % UTF des Systems
nyquist(G)
```

3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen

- Werte für $G(\omega = 0)$ und $G(\omega = \infty)$ berechnen
- Anzahl j im Zähler **plus** Anzahl j im Nenner entspricht Anzahl Quadranten, welche zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ durchlaufen werden
- Pollstellen: $|G(j\omega)| \downarrow$; $\angle G(j\omega) \downarrow \Rightarrow$ Bewegung im Uhrzeigersinn $\Rightarrow$ Bei den Nullstellen ist $\angle G(j\omega) = \pm 45°$
- Nullstellen: $|G(j\omega)| \uparrow$; $\angle G(j\omega) \uparrow$; $\Rightarrow$ Bewegung im Gegenuhrzeigersinn
- Frequenzen der Pol- bzw. Nullstellen berechnen

4 Dezibel dB

4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB (S. 133)

$$|K|_{\mathrm{dB}} = 20\,\mathrm{dB} \cdot \log_{10}|K| \quad \Leftrightarrow \quad |K| = 10^{\left(\frac{|K|_{\mathrm{dB}}}{20\,\mathrm{dB}}\right)}$$

Hinweis: Die Betragsstriche nur Notation! $|K|$ kann sehr wohl negativ sein!

4.1.1 Rechenregeln

- Multiplikation $\Rightarrow$ Addition
$$|K_1 \cdot K_2|_{\mathrm{dB}} = |K_1|_{\mathrm{dB}} + |K_2|_{\mathrm{dB}}$$
- Division $\Rightarrow$ Subtraktion
$$\left|\frac{K_1}{K_2}\right|_{\mathrm{dB}} = |K_1|_{\mathrm{dB}} - |K_2|_{\mathrm{dB}}$$
- Kehrwert $\Rightarrow$ Negatives Vorzeichen
$$\left|\frac{1}{K_1}\right|_{\mathrm{dB}} = |1|_{\mathrm{dB}} - |K_1|_{\mathrm{dB}} = -|K_1|_{\mathrm{dB}}$$

4.2 dB–Umrechnungstabelle (S. 133)

Faktor [1]	Dezibel dB
100	40
10	20
1	0
0.1	−20
0.01	−40

Faktor [1]	Dezibel dB
2	6
$\sqrt{2}$	3
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	−3
$\frac{1}{2}$	−6

5 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine weitere Variante, den Frequenzgang $G(j\omega)$ grafisch darzustellen. Die Darstellung beinhaltet zwei Graphen.

- Amplitudengang $|G(j\omega)|$ in Dezibel dB
- Phasengang $\angle G(j\omega)$ in Grad °
- Die Frequenzachse ist **logarithmisch** mit $\log_{10}(\omega)$
- **Ein Bodediagramm kann in ein Nyquistdiagramm umgezeichnet werden, aber nicht umgekehrt!**

5.0.1 Logarithmische Frequenzachse (S. 134)

- Serieschaltung von Systemen
$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$
  - Amplitudengang
$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$
$$|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = |G_1(j\omega)|_{\mathrm{dB}} + |G_2(j\omega)|_{\mathrm{dB}}$$
    $\Rightarrow$ Grafisch multiplizieren wäre schwierig, grafisch addieren geht gut
  - Phasengang
$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$
    $\Rightarrow$ Die Phase muss nicht logarithmisch sein, wir haben schon eine Addition

5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen

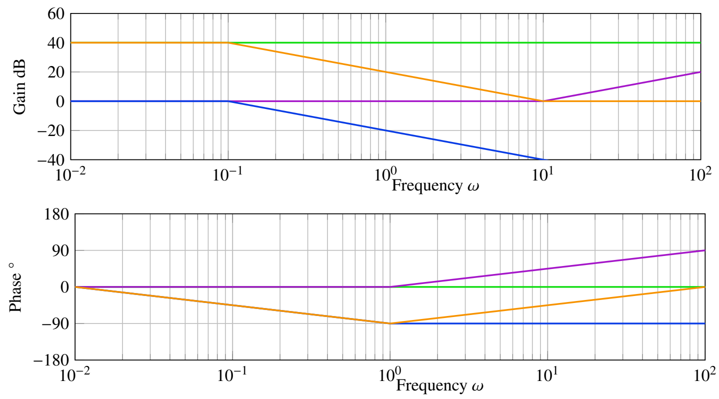
Das Diagramm wird approximativ mit **Geraden** gezeichnet!

- Frequenzgang in folgende Form bringen:
$$G(j\omega) = K_0 \cdot (j\omega)^\nu \cdot \frac{(1 + T_{n0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{n1} \cdot j\omega) \cdot \ldots}{(1 + T_{p0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{p1} \cdot j\omega) \cdot \ldots} \cdot e^{-j\omega T_t}$$
  - Für $\omega = 0$ sind alle $(1 + T \cdot j\omega) = 1 = 0\,\mathrm{dB}$
  - Für $\omega = \frac{1}{T}$ sind alle $(1 + T \cdot j\omega) = 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\,\mathrm{dB}\angle 45°$
- Frequenzen der Nullstellen berechnen: $\omega = \frac{1}{T_n}$
- Frequenzen der Polstellen berechnen: $\omega = \frac{1}{T_p}$
- Jede **Nullstelle** bewirkt
  - einen Knick um +20 dB / Dekade **nach oben** im Amplitudengang
  - einen Phasenhub von +90° über 2 Dekaden $\Rightarrow$ +45° beim Knick
- Jede **Polstelle** bewirkt
  - einen Knick um −20 dB / Dekade **nach unten** im Amplitudengang
  - einen Phasenverlust von −90° über 2 Dekaden $\Rightarrow$ −45° beim Knick
- Einzelne Faktoren einzeichnen $\Rightarrow$ Wenn Faktor quadriert ist, zwei mal einzeichnen!
- Grafische Addition der Faktoren für gesamten Frequenzgang

Beispiel: Bode-Diagramm zeichnen

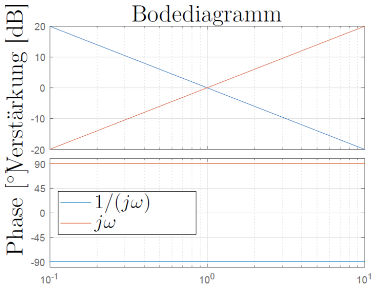
$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 0.1)} \xrightarrow{\text{Standardform}} G(j\omega) = 100 \cdot \frac{(1 + 0.1\,j\omega)}{(1 + 10\,j\omega)}$$

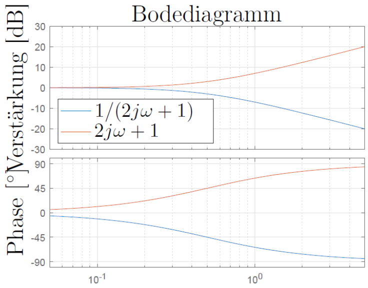
- $|K_0|_{\mathrm{dB}} = |100|_{\mathrm{dB}} = 40\,\mathrm{dB} \Rightarrow \angle G(100) = 0°$
- Nullstelle: $|1 + 0.1\,j\omega|_{\mathrm{dB}} \Rightarrow$ Knick bei $\omega = \frac{1}{0.1\,\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
- Polstelle: $|1 + 10\,j\omega|_{\mathrm{dB}} \Rightarrow$ Knick bei $\omega = \frac{1}{10\,\mathrm{s}} = 0.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$
- Endresultat: Grafische Addition der Teilresultate



5.1.1 Inverse Frequenzgänge (S. 137)

Um das Bodediagramm des inversen Frequenzgangs $\frac{1}{G(j\omega)}$ zu erhalten, muss bei Betrag **und** Phase das **Vorzeichen gedreht** werden.

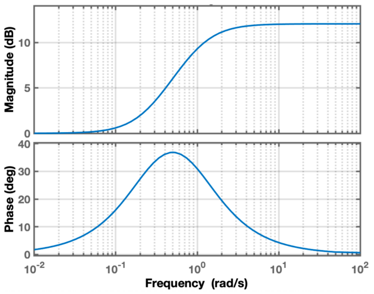


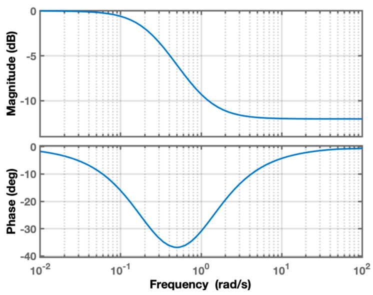


5.1.2 Lead-Lag-Glied

$$\boxed{\text{Lead-Lag-Glied:} \quad G(s) = K \cdot \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1}}$$

Lead-Glied ($T_1 > T_2$) | Lag-Glied ($T_2 > T_1$)





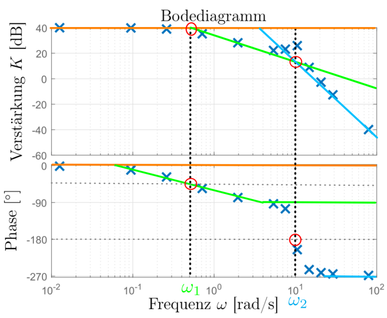
$$\boxed{\text{Maximale Phasenänderung bei:} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}}$$

⇒ Bei der Regler-Auslegung werden vor allem Lead-Glieder verwendet, um **Phase anheben** zu können

5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139)

Um aus einem gegebenen Bodediagramm die Übertragungsfuntion $G(j\omega)$ zu ermitteln, werden die Zeichenregeln aus Abschnitt 5.1 **rückwärts angewendet**. Dazu werden die Punkte einer gegebenen Messung mittels Geraden approximiert. Mittels dieser Approximationen können die einzelnen Komponenten (Faktoren) der gesuchten UTF ermittelt werden.

Beispiel: Übertragungsfuntion $G(s)$ aus Bodediagramm ermitteln



Aus den Steigungen der Geraden ist ersichtlich, dass folgende Komponenten in $G(s)$ enthalten sein müssen:
Verstärkung K, PT$_1$-Glied, PT$_2$-Glied

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{(sT_1+1)} \cdot \frac{1}{(T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1)}$$

Werte der Parameter aus Bodediagramm bestimmen:

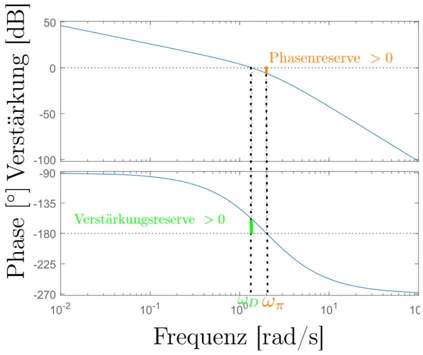
- $|K|_{dB} = 40 \Rightarrow K = 100$
- $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{0.5} = 2$
- $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{10} = 0.1$
- $\zeta = 0.1 \Rightarrow$ gegeben

5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140)

Analog zum Punkt -1 im Nyquistdiagramm kann die Stabilität auch im Bodediagramm beurteilt werden. Auch bei dieser Betrachtung sind die folgenden Frequenzen relevant.

- Durchtrittsfrequenz $\omega_D \Rightarrow$ Phasenreserve Φ_{RES}
  Frequenz, bei der die Verstärkung 1 ist: $|G_0(j\omega_D)| = 1\ (= 0\,\text{dB})$
- Phasenschnittfrequenz $\omega_\pi \Rightarrow$ Verstärkungsreserve K_{RES}
  Frequenz, bei der die Phase $-180\,°$ beträgt: $\angle G_0(j\omega_\pi) = -\pi\,\text{rad}\ (= -180\,°)$

5.3.1 Parameter K_{RES} und Φ_{RES} aus Bodediagramm lesen



- Durchtrittsfrequenz ω_D

$$K_{RES} = 0\,\text{dB} - K_{@180°}$$

- Phasenschnittfrequenz ω_π

$$\Phi_{RES} = \Phi_{@0\text{dB}} + 180\,°$$

Achtung: Das Vorzeichen von K_{RES} bzw. Φ_{RES} ist essentiell für die Stabilitäts-Beurteilung und darf auf keine Fall vernachlässigt werden!

5.3.2 Beurteilung der Stabilität des Systems

Wenn das System die **Anforderungen des Nyquist-Kriteriums erfüllt**, verhält sich die Stabilität des Systems folgendermassen:

- **Grenzstabilität**: Amplitudengang bei 0 dB **und** Phasengang bei $-180\,°$
- **Instabilität**: $K_{RES} < 0$ **und** $\Phi_{RES} < 0$ (ergibt sich automatisch, wenn einer der beiden Parameter < 0 ist)
- **Stabilität**: $K_{RES} > 0$ **und** $\Phi_{RES} > 0$
- **Stabilität**: $\omega_\pi > \omega_D$

5.4 Bodediagramme mit Matlab

```
s = tf('s');
G = 1 + 0.1 *s;        % UTF des Systems
bode(G)                % Bode-Plot des Systems
bodemag(G)             % Amplitudengang des Systems
```

5.5 Alternative Stabilitätskriterien – Vorzeichenregel (S. 142)

Die Stabilität kann alternativ 'direkt' au sden Parametern der **Differentialgleichung** (des Frequenzgangs) des **geschlossenen Regelkreises** bestimmt werden.
Aus der DGL der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot u^{(k)}(t)$$

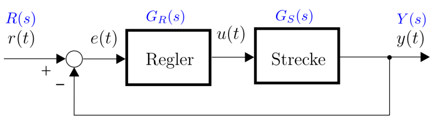
kann das **charakteristische Polynom** ermittelt werden. Daraus kann dann mittels folgender **Vorzeichenregel** eine Aussage über die Stabilität des **geschlossenen Regelkreises** gemacht werden.

> Eine **notwendige** Stabilitätsbedingung für das charakteristische Polynom
>
> $$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda_{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$
>
> besteht darin, das alle Koeffizienten existieren $a_0 \ldots a_n$ (also $\neq 0$ sind) **und dasselbe Vorzeichen** haben.
> Bei System erster und zweiter Ordnung ist die Vorzeichenregel auch **hinreichend** für die Stabilität.

Beispiel: Stabil, instabil oder 'keine Ahnung'

stabil	instabil	keine Ahnung
$\frac{1}{s^2+5s+7}$	$\frac{1}{s^2-7s+3}$	$\frac{1}{s^3+2s^2+s+4}$

Beispiel: Stabilität aus geschlossenem Regelkreises bestimmen



UTF geschlossener Regelkreis:

$$\boxed{T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}}$$

$G_R(s)$ und $G_S(s)$ seien gegeben als: $G_R(s) = K_R, \quad G_S(s) = \frac{K}{s(sT+1)} = \frac{K}{Ts^2+s}$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} = \frac{\frac{K_R \cdot K}{Ts^2+s}}{1 + \frac{K_R \cdot K}{Ts^2+s}} = \frac{K_R \cdot K}{Ts^2 + s + K_R \cdot K} \Rightarrow \text{stabil für } K_R, K, T > 0$$

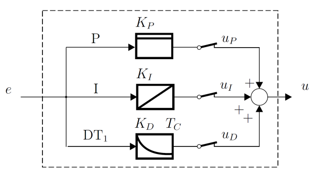
6 PID-Regler

- **P**: Proportional $K_P \cdot e(t)$
  - Gegenwart: Gewichtung des **aktuellen** Fehlers $e(t)$
    - Stellgrösse $u(t)$ ist abhängig vom aktuell vorhandenen Fehler
    - Wie gross Fehler in Vergangenheit war oder in welche Richtung er sich entwickelt, ist irrelevant
- **I**: Integral $K_I \int e(t)$
  - Vergangenheit: Gewichtung der **Summe vergangener** Fehler
    - Stellgrösse $u(t)$ ist abhängig davon, wie lange ein Fehler schon existiert
    - Wie gross der aktuelle Fehler ist und wie start er sich gerade ändert, ist irrelevant
- **D**: Differential $K_D \cdot \dot{e}(t)$
  - Zukunft, Trend: Gewichtung der **Änderung** des Fehlers
    - Stellgrösse ist abhängig davon, wie stark der Fehler gerade zu-/abnimmt
    - Wie gros der aktuelle Fehler ist und wie lange er schon existiert, ist irrelevant

6.1 Strukturen und Frequenzgänge von PID-Reglern

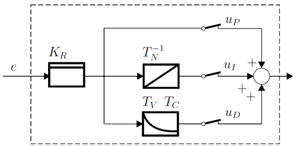
Alle drei Strukturen sind **äquivalent**. Es handelt sich nur um unterschiedliche Darstellungsformen.

6.1.1 Varirante 1: Parallelform



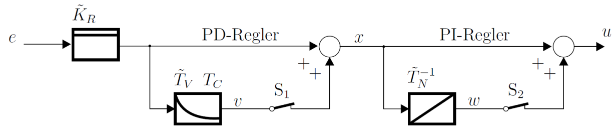
$$\boxed{G_{PID}(j\omega) = K_P + \frac{K_I}{j\omega} + K_D \frac{j\omega}{1 + j\omega T_C}}$$

6.1.2 Variante 2: Standardform (P-Anteil vorangestellt)



$$G_{PID}(j\omega) = K_R + \left(1 + \frac{1}{j\omega T_N} + \frac{j\omega T_V}{1 + j\omega T_C}\right)$$

6.1.3 Variante 3: Serielle (multiplikative) Form



$$G_{PID}(j\omega) = \tilde{K}_R \cdot \left(1 + \frac{1}{j\omega\tilde{T}_N}\right) \cdot \left(1 + \frac{j\omega\tilde{T}_V}{1 + j\omega T_C}\right)$$

6.1.4 Umrechnung Parameter Variante 1 – Variante 2

$K_R = K_P \quad T_N = \frac{K_P}{K_I} \quad T_V = \frac{K_D}{K_P} \quad K_I = \frac{K_R}{T_N} \quad K_D = K_R T_V$

6.1.5 Umrechnung Parameter Variante 2 – Variante 3

$K_R = \tilde{K}_R\left(1 + \frac{\tilde{T}_V}{\tilde{T}_N}\right) \quad T_N = \tilde{T}_N + \tilde{T}_V \quad T_V = \tilde{T}_V \frac{\tilde{T}_N - \tilde{T}_C}{\tilde{T}_N + \tilde{T}_V}$

6.2 Matlab / Simulink

Matlab

- Parallelform
  - `C = pid(Kp, Ki, Kd, Tf)`
  - $C = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1}$
- Standardform
  - `C = pidstd(Kp, Ti, Td, N)`
  - $C = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + \frac{T_d \cdot s}{\frac{T_d}{N} s + 1}\right)$
  - $T_f = \frac{T_d}{N}$

Simulink

- Parallelform
  - $P + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1 + N\frac{1}{s}}$
  - $D\frac{N}{1+N\frac{1}{s}} = \frac{D \cdot s}{\frac{1}{N}s + 1}$
  - $P = K_P, I = K_I, D = K_D, N = \frac{1}{T_C}$
- Standardform ('ideal')
  - $P \cdot \left(1 + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1+N\frac{1}{s}}\right)$
  - $D\frac{N}{1+N\frac{1}{s}} = \frac{D \cdot s}{\frac{1}{N}s + 1}$
  - $P = K_R, I = \frac{1}{T_N}, D = T_V, N = \frac{1}{T_C}$

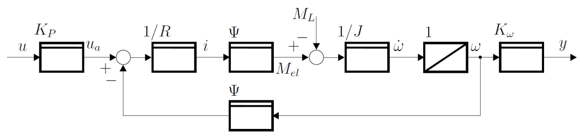
6.3 PID-Regler im Frequenzgang

- **P**: Proportional K_P
  - Frequenz**un**abhängige Gewichtung
  - Allpassverhalten (alle Frequenzen gleich verstärkt)
- **I**: Integral $K_I\frac{1}{j\omega}$
  - Gewichtet tiefe Frequenzen stärker als hohe Frequenzen
  - Reagiert auf 'langsame' Änderungen
  - Tiefpassverhalten; Phasenschiebung: −90° (im Uhrzeigersinn)
- **D**: Differential $K_D j\omega$
  - Gewichtet hohe Frequenzen stärker als tiefe Frequenzen
  - Reagiert auf 'schnelle' Änderungen
  - Hochpassverhalten; Phasenschiebung: +90° (gegen Uhrzeigersinn)

6.4 PID-Regler im Bodediagramm

Achtung: Gemäss den Frequenzgängen der verschiedenen Darstellungsformen aus Abschnitt 6.1 eines PID-Reglers darf im Bodediagramm **nur Variante 3 grafisch aus den Einzelteilen addiert** werden.

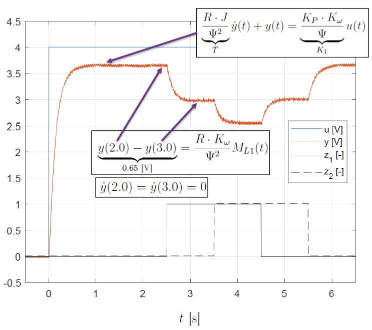
6.5 Fallstudie: Gleichstromantrieb – Modellierung (S. 53)



Der Gleichstromantrieb kann als PT_1-Glied mit zwei Eingängen $u(t)$ und $M_L(t)$ modelliert werden. $M_L(t)$ entspricht einer durch Wirbelströme erzeugte **Störung**.

$$\underbrace{\frac{R \cdot J}{\Psi^2}}_{T}\dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{\frac{K_P \cdot K_\omega}{\Psi}}_{K_1} u(t) - \underbrace{\frac{R \cdot K_\omega}{\Psi^2}}_{K_2} M_L(t)$$

6.5.1 Parameter-Identifikation



Aus der **Sprungantwort** können einige Parameter abgelesen werden. Einige weitere Parameter sind aus Datenblättern bekannt.

Parameter	Bemerkung	Wert	Einheit
T	gemäss Messung; Abb. 47	0.14	[s]
K_1	gemäss Messung; Abb. 47	0.91	[-]
R	statische Messung an der Ankerwicklung	1.9	[Ω]
J	via Masse & Geometrie	$2.5\ 10^{-4}$	[kgm²]
Ψ	$\Psi = \sqrt{\frac{R\cdot J}{T}}$; siehe (35)	$5.8\ 10^{-2}$	[Wb]
K_ω	fix gegeben (kalibrierter Sensor)	$2.4\ 10^{-2}$	[Vs]
K_P	$K_P = \frac{K_1}{K_\omega} \cdot \Psi$; siehe (35)	2.2	[-]

$M_{L1} = 4.8 \cdot 10^{-2}$ [Nm]

6.6 Gleichstromantrieb mit Steuerung (S. 148-149)

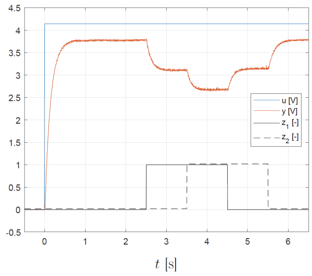
Die Grösse ω soll im **steady-state** gesteuert werden $\Rightarrow$ Ableitungen 0, keine Störungen
Zu steuern: $\omega = 25 \cdot 2\pi$, $K_\omega \cdot \omega = y = 3.77$ V $\Rightarrow$ Finde Wert der Eingangsgrösse $u(t)$

$$\text{Im steady-state: } \underbrace{\cancel{\frac{R \cdot J}{\Psi^2}}}_{T}\cancel{\dot{y}(t)} + y_{stat}(t) = \underbrace{\frac{K_P \cdot K_\omega}{\Psi}}_{K_1} u(t) - \underbrace{\cancel{\frac{R \cdot K_\omega}{\Psi^2}}}_{K_2}\cancel{M_L(t)}$$

$$y_{stat} = \frac{K_P \cdot K_\omega}{\Psi} u_{stat}(t) \qquad \underrightarrow{y_{stat} = K_\omega \cdot \omega} \qquad \omega_{stat} = \frac{K_p}{\Psi} u_{stat}$$

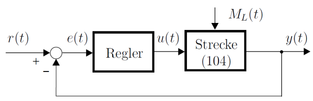
$$\Rightarrow u_{stat} = \frac{\Psi}{K_P}\omega_{stat} = \frac{\Psi}{K_P} 25 \cdot 2\pi = 4.14\,\text{V}$$

6.6.1 Probleme der Steuerung



- Endwert wird zwar erreicht, aber wenn K_P oder Ψ variieren wird dies nicht mehr der Fall sein
- Die Drehzahländerung ist 'langsam' (gemäss Zeitkonstante T). (Ein höheres u zu Beginn könnte T verkürzen)
- **Die Steuerung reagiert nicht auf die Störungen!**

6.7 Gleichstromantrieb mit P-Regler (S. 149-150)

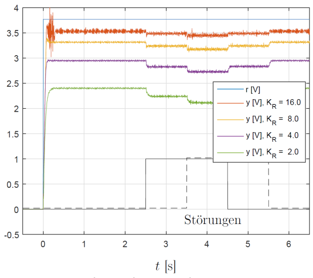


$$u(t) = K_R \cdot e(t) = K_R \cdot (r(t) - y(t))$$

$$\text{Geschlossener Regelkreis: } \underbrace{\frac{T}{1 + K_1 K_R}}_{T_f}\dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{\frac{K_1 K_R}{1 + K_1 K_R}}_{K_f} u(t) - \underbrace{\frac{K_2}{1 + K_1 K_R}}_{K_z} M_L(t)$$

Damit der Sollwert $r(t)$ erreicht wird (wenn keine Störung $M_L(t)$ vorhanden ist), muss $K_F = 1$ sein $\Rightarrow$ K_R muss sehr gross sein

6.7.1 Eigenschaften des P-Reglers



- Für $K_R \to \infty$ werden die Zeitkonstante T_f und der Einfluss der Störung $M_L(t)$ beliebig klein $\Rightarrow$ DGL konvergiert zu $y(t) = r(t)$
- Für kleine K_R wird Endwert nicht erreicht $\Rightarrow$ statischer Fehler
- Stellgrösse $u(t)$ sättigt aufgrund von physikalischen Gegebenheiten $\Rightarrow$ Prozess wird **nichtlinear** $\Rightarrow$ Überschwinger
- Messrauschen wird ebenfalls verstärkt (P-Regler verstärt **alle** Frequenzen)

$\Rightarrow$ **Es bleibt ein stationärer Fehler!** Dafür reagiert der P-Regler schnell.

6.8 Gleichstromantrieb mit I-Regler (S. 151-152)

I-Regler (K_R einstellbar)

$$u(t) = K_R \int_0^t \underbrace{r(\tau) - y(\tau)}_{e(\tau)}\, d\tau$$

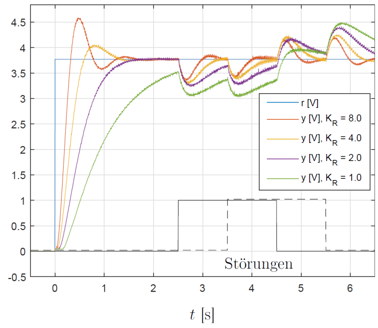
E-Motor (Strecke, PT_1-System)

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_1 \cdot u(t) - K_2 \cdot M_L(t)$$

$\Rightarrow$ $u(t)$ von I-Regler in Gleichung der Strecke einsetzen, ableiten, umsortieren

$$PT_2\text{-System: } \underbrace{\frac{T}{K_1 \cdot K_R}}_{T_f^2}\ddot{y}(t) + \underbrace{\frac{1}{K_1 \cdot K_R}}_{2\zeta_f T_f}\dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{1}_{K_f} r(t) - \frac{K_2}{K_1 \cdot K_R}\dot{M}_L(t)$$

- $T_F = \sqrt{\frac{T}{K_1 \cdot K_R}}$, $\zeta_f = \frac{1}{2\sqrt{T K_1 K_R}}$
- **Der Integrator sorgt dafür, dass im steady-state kein stationärer Fehler auftritt** ($e(t) = 0$)
- Für grosse K_R wird T_f klein, die Sprungantwort schneller (erwünscht)
- Für grosse K_R wird ζ_f klein, die Überhöhung grösser (unerwünscht)
- $\Rightarrow$ Kompromiss finden



6.9 Gleichstromantrieb mit PI-Regler (S. 152-154)

Vorteile von P-Regler und I-Regler sollen kombiniert werden:

- P-Regler für schnelle Reaktion
- I-Regler für statische Fehlerunterdrückung

PI-Regler (K_R und T_N einstellbar)

$$u(t) = \frac{1}{T_N} \cdot \Big(\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + e(t) \Big) K_R \cdot K_R$$

E-Motor (Strecke, PT_1-System)

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K_1 \cdot u(t) - K_2 \cdot M_L(t)$$

6.9.1 Pol-Nullstellenkürzung

6.10 Gleichstromantrieb mit PID-Regler (S. 155)

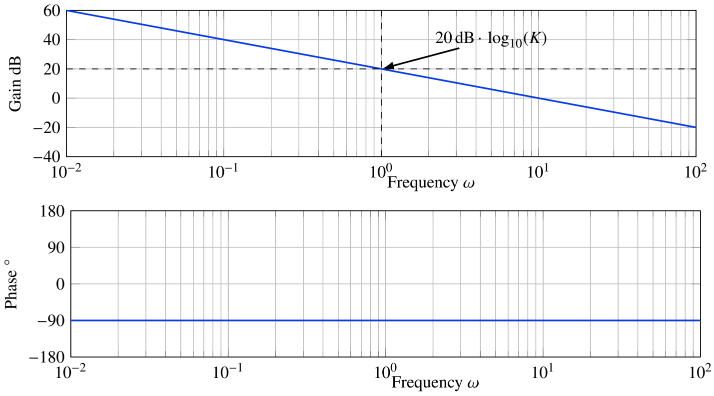
6.11 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PI-Regler (S. 157-159)

6.12 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PID-Regler (S. 160-162)

7 Anhang

7.1 Bodediagramm eines Integrators

Ein Integrator mit $G(s) = \frac{K}{s}$ hat seine Polstelle bei der Frequenz $\omega = 0$. Im Bodediagramm wird der Integrator so dargestellt, dass bei Frequenz $\omega = 1$ die Verstärkung $20\,\mathrm{dB} \cdot \log_{10}(K)$ erreicht ist.



7.2 Bodediagramm mit Nullstelle bei $\omega = 0$

Ein System mit $G(s) = K \cdot s$ wird im Bodediagramm so dargestellt, dass bei bei Frequenz $\omega = 0$ die Verstärkung $20\,\mathrm{dB} \cdot \log_{10}(K)$ erreicht ist. Im Gegensatz zu Abschnitt 7.1 beträgt die Steigung der Amplitude $+20\,\mathrm{dB/Dek}$ und die Phase ist konstant bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$