# Regelungstechnik 2

FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann

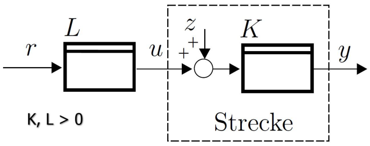
Autoren:
Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:
1.0.20240614
https://github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

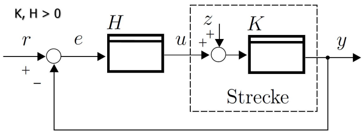
## 1.1 Steuerung




Eine Steuerung besitzt **keine Rückkopplung** und ist somit ein **offener Regelkreis**

$$y = \underbrace{KL \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{K \cdot z}_{\text{Störung}}$$

## 1.2 Regelung




Eine Regelung besitzt eine **Gegenkopplung**

$$y = KH \cdot (r - y) + K \cdot z$$

$$y = \underbrace{\frac{KH}{1 + KH}}_{\text{Sensitivität}} \cdot r + \underbrace{\frac{K}{1 + KH}}_{\text{Störungsunterdrückung}} \cdot z$$

### 1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung $H$ der Störung $z$ gilt:

$$\lim_{H \to \infty} \frac{K}{1 + KH} \cdot z = 0$$

⇝ Hat der Regler eine grosse Verstärkung $H$, so wird die Störung $z$ unterdrückt
⇝ Bei einer Steuerung wird die Störung $z$ nicht unterdrückt

### 1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H \to \infty} \frac{KH}{1 + KH} \cdot r = 1$$

⇝ Hat der Regler eine grosse Verstärkung $H$, so ist $y \approx r$ (Ausgang ≈ Sollwert)
⇝ Bei einer Steuerung muss $H = \frac{1}{L}$ sein, damit $y \approx r$

### 1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

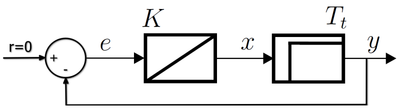
## 1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

| | | |
|---|---|---|
| (asymp.) stabil | Verstärkung $\lvert V \rvert < 1$ | System schwingt nicht |
| grenzstabil | Verstärkung $V = -1$ | System schwingt mit konstanter Ampl. |
| instabil | Verstärkung $\lvert V \rvert > 1$ | System schwingt mit zunehmender Ampl. |

### 1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten: $V = -1$

### Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied




$$K, T_t > 0$$

Es muss gelten: $y(t) = -e(t)$ unter der Annahme, dass $e(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

$$x(t) = K \cdot \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + x_0 = K \cdot \int_0^t A \cdot \cos(\omega \tau)\,\mathrm{d}\tau + x_0 = K \frac{A}{\omega} \sin(\omega \tau)\Big|_0^t + x_0$$

$$= \frac{KA}{\omega} \sin(\omega t) + \underbrace{x_0}_{0}$$

$$y(t) = x(t - T_t) = \frac{KA}{\omega} \sin(\omega (t - T_t)) = \frac{KA}{\omega} \cos\left(\omega (t - T_t) - \frac{\pi}{2}\right)$$

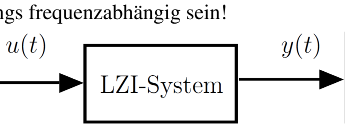
Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega} \cos\left(\omega t - \omega T_t - \frac{\pi}{2}\right)}_{y(t)} = -A \cos(\omega t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - \pi)}_{-e(t)}$$

⇝ Wenn der Regler die Verstärkung $K$ hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz $\omega$
⇝ Die Verstärkung $K$ muss vermieden werden!

# 2 Frequenzgang (S. 114)

Wird ein Sinus-Signal $u(t)$ in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die **Amplitude** und die **Phase**. Die **Frequenz** hingegen bleibt **gleich**.
Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!




| | |
|---|---|
| $A$ | Amplitude Eingangssignal |
| $B$ | Amplitude Ausgangssignal |
| $\frac{B}{A}$ | Verstärkung |
| $\varphi$ | Phasenverschiebung |

$u(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ $\quad$ $y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ + Transiente

### Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (**steady state**) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig $t = 5\tau$ als Ende des Einschwingvorgangs
⇝ **Uns interessiert nur der der steady state!**

### Darstellung des Frequenzgangs

Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:

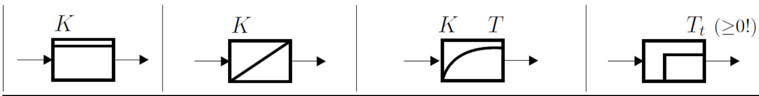
- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- Zeiger-Diagramm

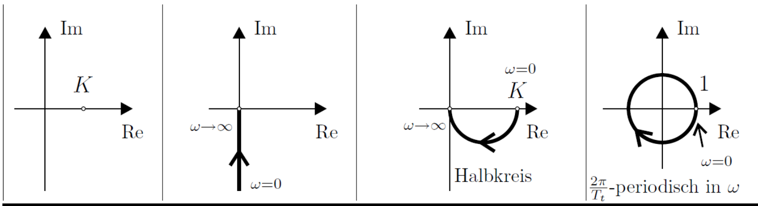
## 2.1 Frequenzgang $G(\mathrm{j}\omega)$ als komplexe Zahl (S. 116)

$$\boxed{G(\mathrm{j}\omega) = \lvert G(\mathrm{j}\omega) \rvert \cdot e^{\mathrm{j}\angle G(\mathrm{j}\omega)} = \frac{B}{A} \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}}$$

## 2.2 Frequenzgang der Grundglieder

| P-Glied | I-Glied | $PT_1$-Glied | $T_t$-Glied |
|---|---|---|---|
| $K$ | $K$ | $K \quad T$ | $T_t$ ($\geq 0!$) |
| $y(t) = Ku(t)$ | $\dot{y}(t) = Ku(t)$ | $T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$ | $y(t) = u(t - T_t)$ |
| $G(j\omega) = K$ | $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$ | $G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$ | $G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$ |
| $\lvert G \rvert = K$ | $\lvert G \rvert = \frac{K}{\omega}$ | $\lvert G \rvert = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$ | $\lvert G \rvert = 1$ |
| $\angle G = 0$ | $\angle G = -\frac{\pi}{2}$ | $\angle G = -\arctan(\omega T)$ | $\angle G = -\omega T_t$ |

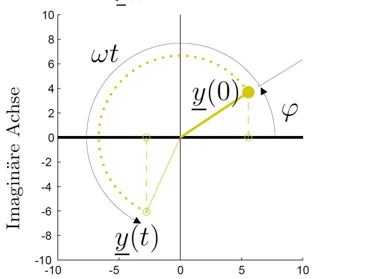


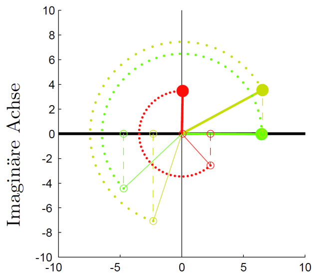



⇝ Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

## 2.3 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal **bei einer bestimmten Frequenz** als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal $\underline{y}(t)$ als Zeiger $\underline{Y}$ zur Zeit $t = 0$ dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz $\omega = 2\pi f$ rotiert. Das zeitliche Signal $y(t)$ entspricht dem **Realteil** von $\underline{y}(t)$




### 2.3.1 Komplexe Amplitude $Y$

$$\underline{y}(t) = B \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{j} \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$= B \cdot e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{\mathrm{j}\varphi} \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$= \underline{Y} \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

| | |
|---|---|
| $\lvert \underline{y}(t) \rvert = B$ | Maximale Amplitude des Ausgangssignals |
| $\mathrm{Re}(\underline{y}(t)) = y(t)$ | Ausgangssignal (zeitlich) |
| $\underline{y}(0) = \underline{Y}$ | Anfangszeiger (komplexe Amplitude) |

### 2.3.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\boxed{\dot{\underline{y}}(t) = \underline{Y} \cdot \mathrm{j}\omega \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}} \qquad \boxed{\int \underline{y}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\underline{Y}}{\mathrm{j}\omega} \cdot e^{\mathrm{j}\omega t}}$$

## 2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

1. DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
2. Geeignet umformen: $G(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{U}}$
3. Falls gewünscht: Amplitude $\lvert G(\mathrm{j}\omega) \rvert$ und Phase $\varphi$ bestimmen

### Beispiel: $PT_1$ Glied

$$T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}} T \cdot \mathrm{j}\omega \cdot \underline{Y} + \underline{Y} = [\mathrm{j}\omega T + 1] \cdot \underline{Y} = K\underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{K}{\mathrm{j}\omega T + 1} = G(\mathrm{j}\omega)$$

$$\lvert G(\mathrm{j}\omega) \rvert = \frac{\lvert \underline{Y} \rvert}{\lvert \underline{U} \rvert} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1^2}} \qquad \varphi = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - \mathrm{j}\frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2} + \pi$$

### 2.4.1 Allgemeiner Fall

$$a_n y(t)^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

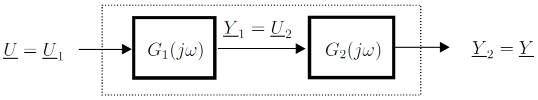
$$a_n(\mathrm{j}\omega)^n \cdot \underline{Y} + \dots + a_1 \mathrm{j}\omega \cdot \underline{Y} + a_0 \underline{Y} = b_m(\mathrm{j}\omega)^m \cdot \underline{U} + \dots + b_1 \mathrm{j}\omega \cdot \underline{U} + b_0 \underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m + \dots + b_1 \mathrm{j}\omega + b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n + \dots + a_1 \mathrm{j}\omega + a_0} = G(\mathrm{j}\omega)$$

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{|b_m(\mathrm{j}\omega)^m + \dots + b_1 \mathrm{j}\omega + b_0|}{|a_n(\mathrm{j}\omega)^n + \dots + a_1 \mathrm{j}\omega + a_0|}$$

$$\varphi = \angle G(\mathrm{j}\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(\mathrm{j}\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(\mathrm{j}\omega)\}}\right) (+\pi)$$

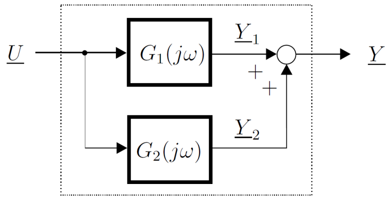
## 2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen




$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega)}_{G(\mathrm{j}\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 \cdot G_2 = |G_1| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle G_1} \cdot |G_2| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle G_2} = |G_1||G_2| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\angle G_1 + \angle G_2)}$$

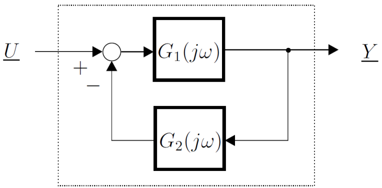
## 2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen




$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot \underline{U} + G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot \underline{U} = \underbrace{(G_1(\mathrm{j}\omega) + G_2(\mathrm{j}\omega))}_{G(\mathrm{j}\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 + G_2 = \mathrm{Re}\{G_1\} + \mathrm{Re}\{G_2\} + \mathrm{j}(\mathrm{Im}\{G_1\} + \mathrm{Im}\{G_2\})$$

## 2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen




$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{\frac{G_1(\mathrm{j}\omega)}{1 + G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega)}}_{G(\mathrm{j}\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$\Rightarrow$ Anwendung von **Mason Regel** (SigSys)

### 2.7.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

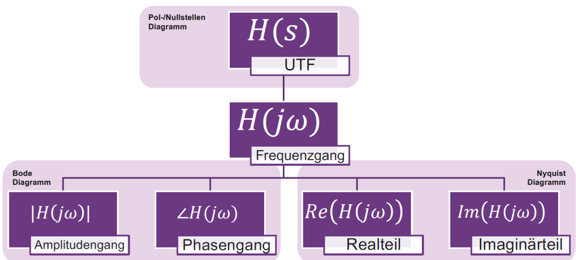
1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
2. Nach $\underline{Y}$ umformen

## 2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang $G(\mathrm{j}\omega)$ und die Übertragungsfunktion $G(s)$ mit $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ hängen folgendermassen zusammen:

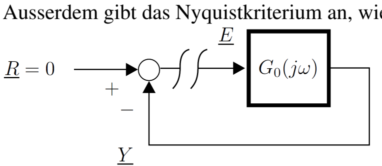
$$\boxed{G(\mathrm{j}\omega) = G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}}$$

### 2.8.1 Übersicht Darstellungsformen




# 3 Stabilität – Nyquistkriterium (S. 126)

Die Stabilität eines Regelkreises kann mit dem Nyquistkriterium viel einfacher betrachtet werden. Dafür wird der **Frequenzgang $G_0(\mathrm{j}\omega)$ des offenen Regelkreises** betrachtet. Ausserdem gibt das Nyquistkriterium an, wie robust ein Regelkreis ist.



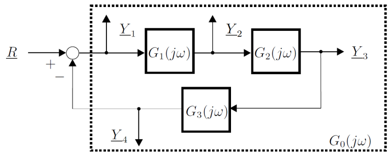

Frequenzgang des offenen Regelkreises

$$\boxed{G_0(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}}$$

### Beispiel: Kreisschaltung mit mehreren Blöcken

Folgendes System besitzt ein Eingangssignal $\underline{R}$ und vier Ausgangssignale $\underline{Y}$
Es sollen der Frequenzgang des offenen Regelkreises $G_0(\mathrm{j}\omega)$, sowie ausgewählte UTFs des Systems beschrieben werden.

$$G_0(\mathrm{j}\omega) = G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot G_3(\mathrm{j}\omega)$$




$$\frac{\underline{Y}_1}{\underline{R}} = \frac{1}{1 + G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot G_3(\mathrm{j}\omega)}$$

$$\frac{\underline{Y}_3}{\underline{R}} = \frac{G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega)}{1 + G_1(\mathrm{j}\omega) \cdot G_2(\mathrm{j}\omega) \cdot G_3(\mathrm{j}\omega)}$$

**Hinweis:** Die Stabilität des Systems ist **unabhängig von der Reihenfolge der Teilsysteme** $G_i(\mathrm{j}\omega)$, da die Stabilität durch den Nenner (bzw. die Polstellen) beschrieben wird.

## 3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Gedankenexperiment: Ein offener Regelkreis mit $G_0(\mathrm{j}\omega)$ (gemäss Abschnitt 3) wird um eine veränderbare Verstärkung $K$ ergänzt.

### 3.1.1 Stabilität

Wähle $K = K_0$, sodass sich die Ortskurve immer innerhalb des Einheitskreises befindet.

- Befindet sich die Ortskurve eines Systems immer **innerhalb des Einheitskreises**, so ist der offene Regelkreis stabil.
  $\Rightarrow$ Daraus folgt, dass auch der geschlossene Regelkreis stabil sein muss.
- Führungsübertragungsfunktion für $K \ll K_0$:
  $G_f(\mathrm{j}\omega) = \frac{K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)}{1 + K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)} \approx K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)$

### 3.1.2 Grenzstabilität

Wähle $K = K_{\text{krit}} > K_0$, sodass die Ortskurve den Punkt $-1$ schneidet.

- Ortskurve des offenen Regelkreises $G_0(\mathrm{j}\omega)$ verläuft **durch den Punkt −1**,
- Die Frequenz $\omega_\pi$, für die $G_0(\mathrm{j}\omega_\pi) = -1 = \mathrm{e}^{-\pi}$ heisst **kritische Frequenz**. Mit dieser kritischen Frequenz schwingt das System.
- Die Führungsübertragungsfunktion $G_f(\mathrm{j}\omega) = \frac{K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)}{1 + K \cdot G_0(\mathrm{j}\omega)}$ wird bei der kritischen Frequenz zu $G_f(\mathrm{j}\omega_\pi) = \frac{-1}{1-1} = -\infty \Rightarrow$ Grenzstabilität

### 3.1.3 Instabilität

Wähle $K > K_{\text{krit}}$

- Ortskurve verläuft nicht mehr durch den Punkt $-1$
- Das System ist instabil

## 3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)

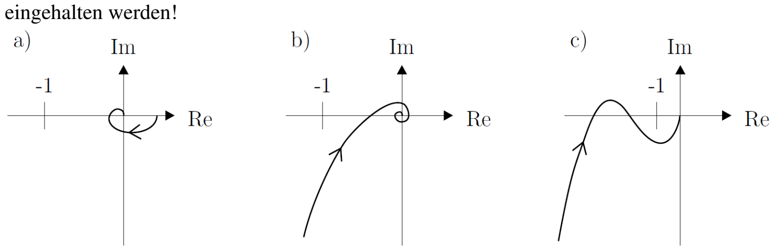
Idee: Informationen über den **offenen Regelkreis** verwenden, um die **Stabillität des geschlossenen Regelkreises** zu beurteilen

### 3.2.1 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- Gemäss Abschnitt 3 wird $G_0 = \prod_i G_i$ gebildet aus den seriegeschalteten Teilsystemen des offenen Regelkreises ($\Rightarrow$ Produkt aller $G_i$ **im Feedback-Loop**)
- $G_0$ muss dabei einem **Prozess mit Ausgleich (stabilen Prozess)** entsprechen; zusätzlich **dürfen** noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein
  Mit Polen formuliert: Bei $G_0$ sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt $-1$ **links** der Nyquistkurve von $G_0$ liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ($\omega = 0 \ldots \infty$) $\Rightarrow$ 'links der Kurve': Man befindet sich **auf der Kurve** und 'schaut' nach links und muss den Punkt $-1$ 'sehen'

### Beispiel: Ortskurven stabiler Systeme (S. 128)

**Achtung:** Damit die Stabilität der gezeigten Systeme beurteilt werden kann, muss sichergestellt werden, dass auch die ersten beiden Punkte des vereinfachten Nyquistkriteriums eingehalten werden!

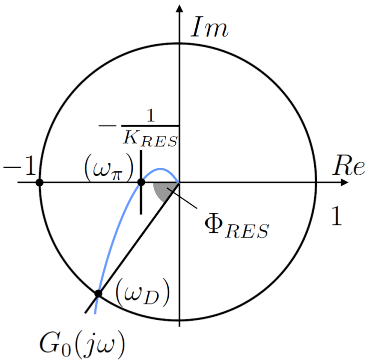



## 3.3 Stabilitätsreserven

Wir möchten nicht nur Stabilität, sondern auch eine gewisse Stabilitätsreserve, um z.B. auch bei einem ungenau modellierten Prozess oder einer sich ändernden Regelstrecke noch einen stabilen Regelkreis zu gewährleisten.

- **Auch ein stabiler Regelkreis kann sehr lange (ein)schwingen**
- Stabilität / Grenzstabilität / Instabilität sind defnierte Bereiche
  - Es gibt nicht 'ein wenig stabil', 'ziemlich stabil', 'stabiler als...', 'instabiler als'
- Allenfalls: Ein Regelkreis ist stabiler als ein anderer. Gemeint ist:
  - Ein Regelkreis ist besser gedämpft / schneller (eingeschwungen)
  - Ein Regelkreis ist robust – er ist trotz gewissen Widerigkeiten im Regelkreis
  - **Ein Regelkreis bleibt stabil, auch wenn die Regelstrecke leicht ändert**

## 3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129)




$$\boxed{\Phi_{\text{RES}} = \arctan\left(\frac{\text{Re}\{G_0(j\omega_D)\}}{\text{Im}\{G_0(j\omega_D)\}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{1}{K_{\text{RES}}} = |G_0(j\omega_\pi)|}$$

Ein System ist **stabil**, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\omega_\pi > \omega_D$
- $G_0(j\omega_D) = e^{-j\varphi}$ mit $0 < \varphi < \pi$
- $0 > G_0(j\omega_\pi) > -1$

- Durchtrittsfrequenz $\omega_D$
  Frequenz, bei der die Kurve den Einheitskreis durchquert: $|G_0(j\omega_D)| = 1$
  $\Rightarrow$ Phasenreserve $\Phi_{\text{RES}}$
- Phasenschnittfrequenz $\omega_\pi$
  Frequenz, bei der die Kurve die reelle Achse durchquert: $\text{Im}\{G_0(j\omega_\pi)\} = 0$
  $\Rightarrow$ Verstärkungsreserve $K_{\text{RES}}$

### 3.4.1 Verstärkungsreserve $K_{\text{RES}}$

Die Verstärkungsreserve $K_{\text{RES}}$ liefert direkt den Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Verstärkung** liegt.
Der Abstand zum Ursprung bei der Phasenschnittfrequenz $\omega_\pi$ entspricht $\frac{1}{K_{\text{RES}}}$
$\Rightarrow$ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $K_{\text{RES}} \cdot G_0(j\omega)$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

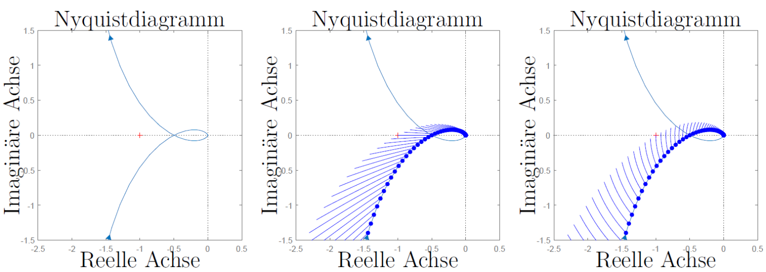
### 3.4.2 Phasenreserve $\Phi_{\text{RES}}$

Die Phasenreserve $\Phi_{\text{RES}}$ liefert einen Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Totzeit** liegt.
$\Rightarrow$ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang $G_0(j\omega)$ tatsächlich $G_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega T_t}$ vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

Der Zusammenhang zwischen Phasendrehung und Totzeit ist

$$\boxed{T_t = \frac{\Phi_{\text{RES}}}{\omega_D} \qquad \text{wobei } [\Phi_{\text{RES}}] = \text{rad}}$$

### Beispiel: Einfluss von Stabilitätsreserven auf Nyquistdiagramm




Mitte: Verstärkungsreserve streckt Kurve vom Ursprung aus
Rechts: Phasenreserve dreht jeden Punkt der Kurve um verschiedene Winkel $\omega \cdot T_t$ um den Ursprung

### 3.4.3 Faustregeln für Reserven (S. 131)

**Hinweis:** Es besteht eine Kopplung zwischen den beiden Effekten!

- Phasenreserve von $\Phi_{\text{RES}} = 40° \ldots 70°$
- Verstärkungsreserve von $K_{\text{RES}} > 4\,(\approx 12\,\text{dB})$

## 3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
s = tf('s');
G = 1 + 1/s;    % UTF des Systems
nyquist(G)
```

## 3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen

- Werte für $G(\omega = 0)$ und $G(\omega = \infty)$ berechnen
- Anzahl j im Zähler **plus** Anzahl j im Nenner entspricht Anzahl Quadranten, welche zwischen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ durchlaufen werden
- Pollstellen: $|G(j\omega)| \downarrow$ ; $\angle G(j\omega) \downarrow \Rightarrow$ Bewegung im Uhrzeigersinn $\Rightarrow$ Bei den Nullstellen ist $\angle G(j\omega) = \pm 45°$
- Nullstellen: $|G(j\omega)| \uparrow$ ; $\angle G(j\omega) \uparrow$ ; $\Rightarrow$ Bewegung im Gegenuhrzeigersinn
- Frequenzen der Pol- bzw. Nullstellen berechnen

# 4 Dezibel dB

## 4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB (S. 133)

$$\boxed{|K|_{\text{dB}} = 20\,\text{dB} \cdot \log_{10}|K| \quad \Leftrightarrow \quad |K| = 10^{\left(\frac{|K|_{\text{dB}}}{20\,\text{dB}}\right)}}$$

**Hinweis:** Die Betragsstriche nur Notation! $|K|$ kann sehr wohl negativ sein!

### 4.1.1 Rechenregeln

- Multiplikation $\Rightarrow$ Addition
$$|K_1 \cdot K_2|_{\text{dB}} = |K_1|_{\text{dB}} + |K_2|_{\text{dB}}$$
- Division $\Rightarrow$ Subtraktion
$$\left|\frac{K_1}{K_2}\right|_{\text{dB}} = |K_1|_{\text{dB}} - |K_2|_{\text{dB}}$$
- Kehrwert $\Rightarrow$ Negatives Vorzeichen
$$\left|\frac{1}{K_1}\right|_{\text{dB}} = |1|_{\text{dB}} - |K_1|_{\text{dB}} = -|K_1|_{\text{dB}}$$

## 4.2 dB–Umrechnungstabelle (S. 133)

| Faktor [1] | Dezibel dB |
|---|---|
| 100 | 40 |
| 10 | 20 |
| 1 | 0 |
| 0.1 | −20 |
| 0.01 | −40 |

| Faktor [1] | Dezibel dB |
|---|---|
| 2 | 6 |
| $\sqrt{2}$ | 3 |
| $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | −3 |
| $\frac{1}{2}$ | −6 |

# 5 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine weitere Variante, den Frequenzgang $G(j\omega)$ grafisch darzustellen. Die Darstellung beinhaltet zwei Graphen.

- Amplitudengang $|G(j\omega)|$ in Dezibel dB
- Phasengang $\angle G(j\omega)$ in Grad °
- Die Frequenzachse ist **logarithmisch** mit $\log_{10}(\omega)$
- **Ein Bodediagramm kann in ein Nyquistdiagramm umgezeichnet werden, aber nicht umgekehrt!**

### 5.0.1 Logarithmische Frequenzachse (S. 134)

- Serieschaltung von Systemen
$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$
  - Amplitudengang
$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$
$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = |G_1(j\omega)|_{\text{dB}} + |G_2(j\omega)|_{\text{dB}}$$
    $\Rightarrow$ Grafisch multiplizieren wäre schwierig, grafisch addieren geht gut
  - Phasengang
$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$
    $\Rightarrow$ Die Phase muss nicht logarithmisch sein, wir haben schon eine Addition

## 5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen

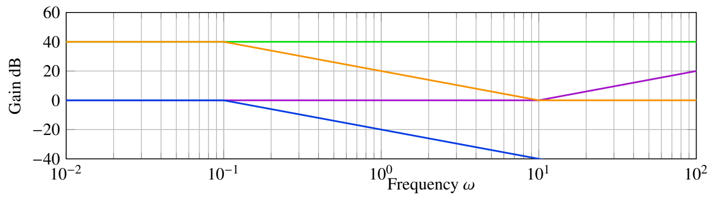
Das Diagramm wird approximativ mit **Geraden** gezeichnet!

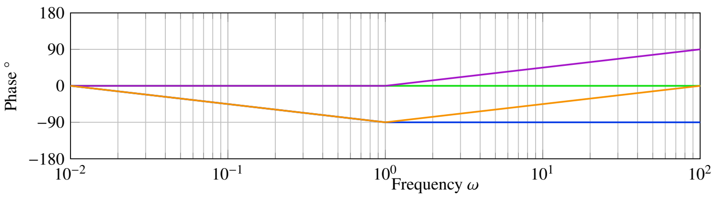
- Frequenzgang in folgende Form bringen:
$$G(j\omega) = K_0 \cdot (j\omega)^\nu \cdot \frac{(1 + T_{n0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{n1} \cdot j\omega) \cdot \ldots}{(1 + T_{p0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{p1} \cdot j\omega) \cdot \ldots} \cdot e^{-j\omega T_t}$$
  - Für $\omega = 0$ sind alle $(1 + T \cdot j\omega) = 1 = 0\,\text{dB}$
  - Für $\omega = \frac{1}{T}$ sind alle $(1 + T \cdot j\omega) = 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\,\text{dB}\angle 45°$
- Frequenzen der Nullstellen berechnen: $\omega = \frac{1}{T_n}$
- Frequenzen der Polstellen berechnen: $\omega = \frac{1}{T_p}$
- Jede **Nullstelle** bewirkt
  - einen Knick um +20 dB / Dekade **nach oben** im Amplitudengang
  - einen Phasenhub von +90° über 2 Dekaden $\Rightarrow$ +45° beim Knick
- Jede **Polstelle** bewirkt
  - einen Knick um −20 dB / Dekade **nach unten** im Amplitudengang
  - einen Phasenverlust von −90° über 2 Dekaden $\Rightarrow$ −45° beim Knick
- Einzelne Faktoren einzeichnen $\Rightarrow$ Wenn Faktor quadriert ist, zwei mal einzeichnen!
- Grafische Addition der Faktoren für gesamten Frequenzgang

### Beispiel: Bode-Diagramm zeichnen

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 0.1)} \xrightarrow{\text{Standardform}} G(j\omega) = 100 \cdot \frac{(1 + 0.1\,j\omega)}{(1 + 10\,j\omega)}$$

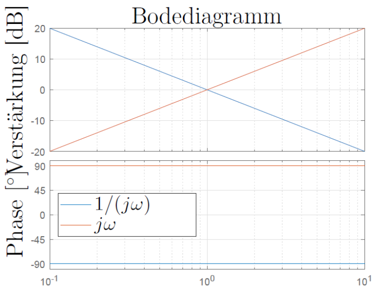
- $|K_0|_{\text{dB}} = |100|_{\text{dB}} = 40\,\text{dB} \Rightarrow \angle G(100) = 0°$
- Nullstelle: $|1 + 0.1\,j\omega|_{\text{dB}} \Rightarrow$ Knick bei $\omega = \frac{1}{0.1\,\text{s}} = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- Polstelle: $|1 + 10\,j\omega|_{\text{dB}} \Rightarrow$ Knick bei $\omega = \frac{1}{10\,\text{s}} = 0.1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- Endresultat: Grafische Addition der Teilresultate

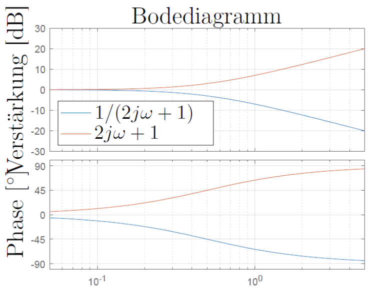


## 5.1.1 Inverse Frequenzgänge (S. 137)

Um das Bodediagramm des inversen Frequenzgangs $\frac{1}{G(j\omega)}$ zu erhalten, muss bei Betrag **und** Phase das **Vorzeichen gedreht** werden.

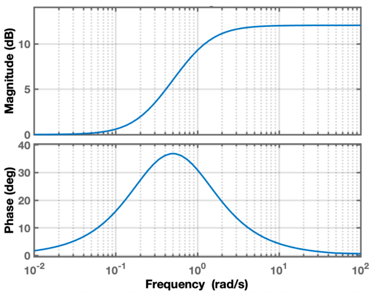


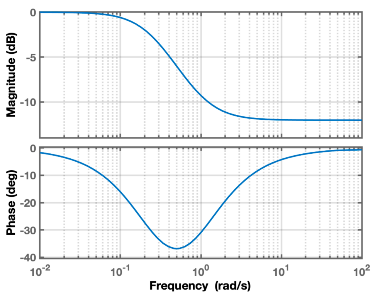

## 5.1.2 Lead-Lag-Glied

$$\boxed{\text{Lead-Lag-Glied:} \quad G(s) = K \cdot \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1}}$$

Lead-Glied ($T_1 > T_2$)




Lag-Glied ($T_2 > T_1$)



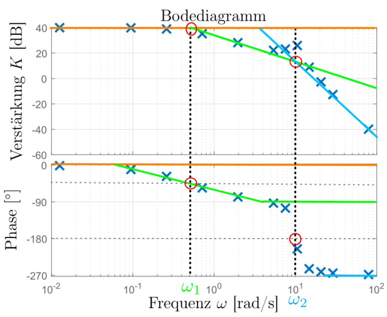

$$\boxed{\text{Maximale Phasenänderung bei:} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}}$$

$\Rightarrow$ Bei der Regler-Auslegung werden vor allem Lead-Glieder verwendet, um **Phase anheben** zu können

## 5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139)

Um aus einem gegebenen Bodediagramm die Übertragungsfuntion $G(j\omega)$ zu ermitteln, werden die Zeichenregeln aus Abschnitt 5.1 **rückwärts angewendet**. Dazu werden die Punkte einer gegebenen Messung mittels Geraden approximiert. Mittels dieser Approximationen können die einzelnen Komponenten (Faktoren) der gesuchten UTF ermittelt werden.

### Beispiel: Übertragungsfuntion $G(s)$ aus Bodediagramm ermitteln




Aus den Steigungen der Geraden ist ersichtlich, dass folgende Komponenten in $G(s)$ enthalten sein müssen:
Verstärkung $K$, PT$_1$-Glied, PT$_2$-Glied

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{(sT_1 + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1)}$$

Werte der Parameter aus Bodediagramm bestimmen:

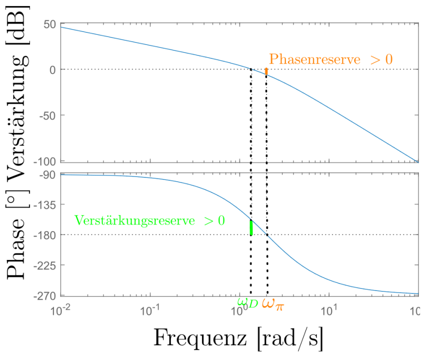
- $|K|_{dB} = 40 \Rightarrow K = 100$
- $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{0.5} = 2$
- $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{10} = 0.1$
- $\zeta = 0.1 \Rightarrow$ gegeben

## 5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140)

Analog zum Punkt $-1$ im Nyquistdiagramm kann die Stabilität auch im Bodediagramm beurteilt werden. Auch bei dieser Betrachtung sind die folgenden Frequenzen relevant.

- Durchtrittsfrequenz $\omega_D \Rightarrow$ Phasenreserve $\Phi_{\text{RES}}$
  Frequenz, bei der die Verstärkung 1 ist: $|G_0(j\omega_D)| = 1$ ($= 0\,\text{dB}$)
- Phasenschnittfrequenz $\omega_\pi \Rightarrow$ Verstärkungsreserve $\Phi_{\text{RES}}$
  Frequenz, bei der die Phase $-180°$ beträgt: $\angle G_0(j\omega_\pi) = -\pi\,\text{rad}$ ($= -180°$)

### 5.3.1 Parameter $K_{\text{RES}}$ und $\Phi_{\text{RES}}$ aus Bodediagramm lesen




- Durchtrittsfrequenz $\omega_D$

$$K_{\text{RES}} = 0\,\text{dB} - K_{@180°}$$

- Phasenschnittfrequenz $\omega_\pi$

$$\Phi_{\text{RES}} = \Phi_{@0\text{dB}} + 180°$$

**Achtung:** Das Vorzeichen von $\Phi_{\text{RES}}$ bzw. $\Phi_{\text{RES}}$ ist essentiell für die Stabilitäts-Beurteilung und darf auf keine Fall vernachlässigt werden!

### 5.3.2 Beurteilung der Stabilität des Systems

Wenn das System die **Anforderungen des Nyquist-Kriteriums erfüllt**, verhält sich die Stabilität des Systems folgendermassen:

- **Grenzstabilität**: Amplitudengang bei 0 dB **und** Phasengang bei $-180°$
- **Instabilität**: $K_{\text{RES}} < 0$ **und** $\Phi_{\text{RES}} < 0$ (ergibt sich automatisch, wenn einer der beiden Parameter $< 0$ ist)
- **Stabilität**: $K_{\text{RES}} > 0$ **und** $\Phi_{\text{RES}} > 0$
- **Stabilität**: $\omega_\pi > \omega_D$

## 5.4 Bodediagramme mit Matlab

```
s = tf('s');
G = 1 + 0.1 *s;      % UTF des Systems
bode(G)              % Bode-Plot des Systems
bodemag(G)           % Amplitudengang des Systems
```

## 5.5 Alternative Stabilitätskriterien – Vorzeichenregel (S. 142)

Die Stabilität kann alternativ 'direkt' aus den Parametern der **Differentialgleichung** (des Frequenzgangs) des **geschlossenen Regelkreises** bestimmt werden.
Aus der DGL der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot u^{(k)}(t)$$

kann das **charakteristische Polynom** ermittelt werden. Daraus kann dann mittels folgender **Vorzeichenregel** eine Aussage über die Stabilität des **geschlossenen Regelkreises** gemacht werden.

Eine **notwendige** Stabilitätsbedingung für das charakteristische Polynom

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{Zähler}}{a_n s^n + a_{n-1} s_{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

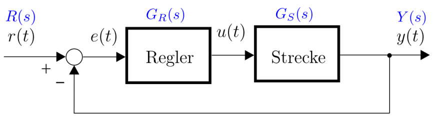
$$\frac{Y(j\omega)}{(j\omega)} = \frac{\text{Zähler}}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)_{n-1} + \ldots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}$$

besteht darin, das alle Koeffizienten existieren $a_0 \ldots a_n$ (also $\neq 0$ sind) **und dasselbe Vorzeichen** haben.
Bei System erster und zweiter Ordnung ist die Vorzeichenregel auch **hinreichend** für die Stabilität.

### Beispiel: Stabil, instabil oder 'keine Ahnung'

| stabil | instabil | keine Ahnung |
|---|---|---|
| $\frac{1}{s^2 + 5s + 7}$ | $\frac{1}{s^2 - 7s + 3}$ | $\frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 4}$ |

### Beispiel: Stabilität aus geschlossenem Regelkreises bestimmen




UTF geschlossener Regelkreis:

$$\boxed{T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}}$$

$G_R(s)$ und $G_S(s)$ seien gegeben als: $G_R(s) = K_R$, $\quad G_S(s) = \frac{K}{s(sT+1)} = \frac{K}{Ts^2+s}$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} = \frac{\frac{K_R \cdot K}{Ts^2+s}}{1 + \frac{K_R \cdot K}{Ts^2+s}} = \frac{K_R \cdot K}{Ts^2 + s + K_R \cdot K} \Rightarrow \text{stabil für } K_R, K, T > 0$$

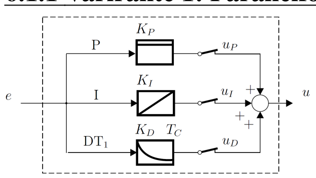
# 6 PID-Regler

- **P**: Proportional $K_P \cdot e(t)$
  - Gegenwart: Gewichtung des **aktuellen** Fehlers $e(t)$
    - Stellgrösse $u(t)$ ist abhängig vom aktuell vorhandenen Fehler
    - Wie gross Fehler in Vergangenheit war oder in welche Richtung er sich entwickelt, ist irrelevant
- **I**: Integral $K_I \int e(t)$
  - Vergangenheit: Gewichtung der **Summe vergangener** Fehler
    - Stellgrösse $u(t)$ ist abhängig davon, wie lange ein Fehler schon existiert
    - Wie gross der aktuelle Fehler ist und wie start er sich gerade ändert, ist irrelevant
- **D**: Differential $K_D \cdot \dot{e}(t)$
  - Zukunft, Trend: Gewichtung der **Änderung** des Fehlers
    - Stellgrösse ist abhängig davon, wie stark der Fehler gerade zu-/abnimmt
    - Wie gross der aktuelle Fehler ist und wie lange er schon existiert, ist irrelevant

## 6.1 Strukturen und Frequenzgänge von PID-Reglern

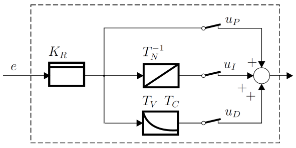
Alle drei Strukturen sind **äquivalent**. Es handelt sich nur um unterschiedliche Darstellungsformen.

### 6.1.1 Varirante 1: Parallelform



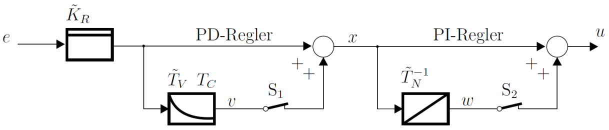

$$\boxed{G_{\text{PID}}(j\omega) = K_P + \frac{K_I}{j\omega} + K_D \frac{j\omega}{1 + j\omega T_C}}$$

## 6.1.2 Variante 2: Standardform (P-Anteil vorangestellt)




$$G_{\text{PID}}(\mathrm{j}\omega) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega T_N} + \frac{\mathrm{j}\omega T_V}{1 + \mathrm{j}\omega T_C}\right)$$

## 6.1.3 Variante 3: Serielle (multiplikative) Form




$$G_{\text{PID}}(\mathrm{j}\omega) = \tilde{K}_R \cdot \left(1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega \tilde{T}_N}\right) \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{j}\omega \tilde{T}_V}{1 + \mathrm{j}\omega T_C}\right)$$

## 6.1.4 Umrechnung Parameter Variante 1 – Variante 2

$K_R = K_P \quad T_N = \frac{K_P}{K_I} \quad T_V = \frac{K_D}{K_P} \quad K_I = \frac{K_R}{T_N} \quad K_D = K_R T_V$

## 6.1.5 Umrechnung Parameter Variante 2 – Variante 3

$K_R = \tilde{K}_R\left(1 + \frac{\tilde{T}_V}{\tilde{T}_N}\right) \quad T_N = \tilde{T}_N + \tilde{T}_V \quad T_V = \tilde{T}_V \frac{\tilde{T}_N - \tilde{T}_C}{\tilde{T}_N + \tilde{T}_V}$

## 6.2 Matlab / Simulink

### Matlab

- Parallelform
  - `C = pid(Kp, Ki, Kd, Tf)`
  - $C = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d \cdot s}{T_f \cdot s + 1}$
- Standardform
  - `C = pidstd(Kp, Ti, Td, N)`
  - $C = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + \frac{T_d \cdot s}{\frac{T_d}{N} s + 1}\right)$
  - $T_f = \frac{T_d}{N}$

### Simulink

- Parallelform
  - $P + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1 + N\frac{1}{s}}$
  - $D\frac{N}{1+N\frac{1}{s}} = \frac{D \cdot s}{\frac{1}{N}s + 1}$
  - $P = K_P, I = K_I, D = K_D, N = \frac{1}{T_C}$
- Standardform ('ideal')
  - $P \cdot \left(1 + I\frac{1}{s} + D\frac{N}{1 + N\frac{1}{s}}\right)$
  - $D\frac{N}{1+N\frac{1}{s}} = \frac{D \cdot s}{\frac{1}{N}s + 1}$
  - $P = K_R, I = \frac{1}{T_N}, D = T_V, N = \frac{1}{T_C}$

## 6.3 PID-Regler im Frequenzgang

- **P**: Proportional $K_P$
  - Frequenz**un**abhängige Gewichtung
  - Allpassverhalten (alle Frequenzen gleich verstärkt)
- **I**: Integral $K_I \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$
  - Gewichtet tiefe Frequenzen stärker als hohe Frequenzen
  - Reagiert auf 'langsame' Änderungen
  - Tiefpassverhalten; Phasenschiebung: $-90°$ (im Uhrzeigersinn)
- **D**: Differential $K_D \mathrm{j}\omega$
  - Gewichtet hohe Frequenzen stärker als tiefe Frequenzen
  - Reagiert auf 'schnelle' Änderungen
  - Hochpassverhalten; Phasenschiebung: $+90°$ (gegen Uhrzeigersinn)

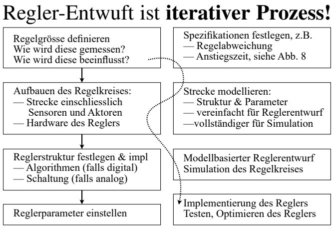
## 6.4 PID-Regler im Bodediagramm

**Achtung:** Gemäss den Frequenzgängen der verschiedenen Darstellungsformen aus Abschnitt 6.1 eines PID-Reglers darf im Bodediagramm **nur Variante 3 grafisch aus den Einzelteilen addiert** werden.

# 7 Einstellen eines PID-Reglers

## 7.1 Vorgehensweisen zum Einstellen eines Reglers

Regler-Entwuft ist **iterativer Prozess!**




- Experimente an realen Stecken
  - Sprungantworten und Frequenzantworten
- Empirische Einstellregeln
  - Ziegler/Nichols, Chien/Hrones/Reswick, ...
- Experimente an einem Modell der Strecke
  - Simulationen (viele!)
  - Sättigung, Rauschen, Unsicherheiten, ...
- Analytischer Entwuft mit einem Modell
  - Pol-/Nullstellenkürzung, ...

### 7.1.1 Reale Stecke vs. Modell

- Für einfache Strecken kann komplett auf Modell verzichtet werden
  - Zweipunkteregler, P-Regler für Wasserstand
  - Trial-and-Error
- Modelle bieten Vorteile
  - Strecke ist nicht zugänglich
    - ∗ Prototyp; nur in kleinen Stückzahlen verfügbar; steht beim Kunden, ...
  - Tests dauern lange wegen grosser Zeitkonstante (⇛ langes Messen)
  - Strecke ist gefährlich (z.B. Atomreaktor)
  - Messungen sind schlecht reproduzierbar

### 7.1.2 Analytischer Entwuft vs. Experiment

- Analytischer Entwuft und Analyse mit LZI-Modell
  - Sprungantworten (Führungsverhalten, Störverhalten)
  - Ortskurven / Bode-Diagramme
  - Verstärkungs- und Phasenreserve
  - Einfluss von Rauschen
- Simulation mit Nicht-LZI (nichtlinear, zeitvariant)
  - Test der Funktionsfähigkeit mit 'genauerem' Modell
  - Unterscheidung von Betriebsfällen (Umschaltvorgänge)
    - ∗ Einschalten, Dauerbetrieb, Fehlerfälle
    - ∗ Zustandsautomaten
  - Wiederholbarkeit gewährleistet
- Regler-Tuning mit Experimenten
  - Man sieht, spürt und hört den Einfluss des Reglers sofort
    - ∗ z.B. Vibrationen
  - Messungen zur Beurteilung des Reglers (Robustheit) sinnd oft aufwändig
  - Experimente können lange dauern und sind oft auch schlecht reproduzierbar
  - Man kann sich keinen Fehler erlauben!
    - ∗ Sicherer Betrieb muss gewährleistet sein

### 7.1.3 Kriterien zur Beurteilung des Reglers

- Analytische Modelle
  - Pol-Lagen (Zeitkonstanten)
  - Frequenzgang (Nyquist, Bode)
  - Stabilitätsreserven
  - Sprungantworten
    - ∗ Überhöhungen, Zeitkonstante
  - Gütemasse
- Experimente
  - Sprungantworten
    - ∗ Überhöhungen, Zeitkonstante
  - Berechnen von Gütemassen
    - ∗ z.B. Integration Fehlerquadrat $e(t)^2$ und Stellgrössen $u(t)^2$
  - Geräusch-Entwicklung
  - Vibrationen

## 7.2 Pol-Nullstellenkürzung (S. 164)

Hierbei handelt es sich um eine **analytische** Einstellmetode ⇛ LZI-Modell der Strecke muss vorliegen! Der Regler wird dann so entworfen, dass er die **invertierte Stecke** enthält.

$$G_R(s) = \frac{K_R}{s} G_s^{-1}(s)$$

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_R}{s} G_s^{-1}(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_R}{s} \Rightarrow \text{Integrator}$$

$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K_R}s + 1} \Rightarrow \text{PT}_1\text{-System}$$

**Hinweis:** Wähle als Reglerstruktur die Standardform (Variante 2) ⇛ siehe Abschnitt 6.1.2
Für die Übertragungsfunktionen gelten die folgenden Bezeichnungen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $G_R(s)$ | UTF Regler | $G_0(s)$ | UTF offener Regelkreis |
| $G_S(s)$ | UTF Stecke | $G_f(s)$ | UTF geschlossener Regelkreis |

### 7.2.1 Eigenschaften der Pol-Nullstellenkürzung

- **Pol-Nullstellenkürzung darf nur in der linken komplexen Halbebene durchgeführt werden!**
- Das Konzept funktioniert nicht immer
  - Inverse $G_s^{-1}(s)$ kann sehr sensitiv auf Modellparameter sein ⇛ braucht sehr genaues Modell
  - Instabile Stecken
  - Stecken mit Verzögerungen bzw. Totzeiten (⇛ Regler wird akausal)

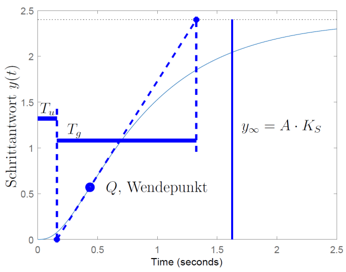
## 7.3 Empirische Einstellregeln

**Idee:** Anhand weniger Messungen versucht man, über die Stecke genug Informationen zu gewinnen, um einen Regler entwerfen zu können.

### 7.3.1 Einstellung via Schrittantwort (S. 164-166)

**Idee:** Eine Stecke wird mit einem Eingangssignal $u(t) = A \cdot \varepsilon(t)$ angeregt und ihre Schrittantwort $y(t)$ wird gemessen. An diese gemessene Schrittantwort $y(t)$ wird ein **PT$_1$-System mit Totzeit** 'gefittet'. Die daraus entstehenden Parameter werden für die Regler-Dimensionierung verwendet.

$$\text{PT}_1\text{-System mit Totzeit} \quad G_0(s) = \frac{K_s}{s \cdot T_g + 1} e^{-sT_u}$$




**Vorgehen PT$_1$ fitten / Parameter bestimmen**

- Tangente an Wendepunkt $Q$ einzeichnen
- Parameter $T_u$, $T_g$ und $K_s$ gemäss Grafik bestimmen
  - $K_s$: Verstärkung
  - $T_u$: Verzugszeit
  - $T_g$: Ausgleichszeit
- Konstanten für Tabellen bestimmen
  - $\mu = \frac{T_g}{T_u}$
  - $q = \frac{T_g}{T_u \cdot K_s} = \mu \cdot \frac{1}{K_s}$

**Regelbarkeit der Stecke**

Gut regelbar heisst, die Zeitkonstante des geschlossenen Regelkreises ist kleiner als diejenige des offenen Regelkreises.

- Gut regelbar: $\mu < 3$
- Schlecht regelbar: $\mu > 10$

**ACHTUNG: Struktur der Regler beachten!** Die Tabelle liefert Parameter für Regler in **serieller Form** (siehe Abschnitt 6.1.3)

$$\boxed{G_{\text{PID}}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N} + s \cdot T_V\right)} \quad \boxed{G_{\text{PI}}(s) = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s \cdot T_N}\right)} \quad \boxed{G_{\text{P}}(s) = K_R}$$

| Regler | Methode | $K_R$ | $T_N$ | $T_V$ |
|---|---|---|---|---|
| P-Regler | ZN | $1.0 \cdot q$ | – | – |
| | CHR (20 %) | $0.7 \cdot q$ | – | – |
| | CHR (0 %) | $0.3 \cdot q$ | – | – |
| PI-Regler | ZN | $0.9 \cdot q$ | $3.33 \cdot T_u$ | – |
| | CHR (20 %) | $0.6 \cdot q$ | $1.0 \cdot T_g$ | – |
| | CHR (0 %) | $0.35 \cdot q$ | $1.17 \cdot T_g$ | – |
| PID-Regler | ZN | $1.2 \cdot q$ | $2.0 \cdot T_u$ | $0.5 \cdot T_u$ |
| | CHR (20 %) | $0.95 \cdot q$ | $1.36 \cdot T_g$ | $0.47 \cdot T_u$ |
| | CHR (0 %) | $0.6 \cdot q$ | $1.0 \cdot T_g$ | $0.5 \cdot T_u$ |

**Hinweis:** Die Prozentwerte bei CHR beschreiben den Sollwert für Überschwinger. Zu beachten ist, dass diese Werte durch die empirischen Einstellregeln nicht garantiert werden.

### 7.3.2 Einstellung via Stabilitätsgrenze (S. 166-167)

**Idee:** Eine stabile Stecke wird mit **P-Regler** betrieben. Die Verstärkung $K_R$ des Reglers wird sukzessive erhöht, bis das System **grenzstabil ist** (endlos mit gleicher Amplitude schwingt).

| Regler | $K_R$ | $T_N$ | $T_V$ |
|---|---|---|---|
| P-Regler | $0.5 \cdot K_{\text{RES}}$ | – | – |
| PI-Regler | $0.45 \cdot K_{\text{RES}}$ | $0.85 \cdot T_\pi$ | – |
| PID-Regler | $0.60 \cdot K_{\text{RES}}$ | $0.50 \cdot T_\pi$ | $0.125 \cdot T_\pi$ |

**Parameter bestimmen**

- Wenn System grenzstabil: Kritisches $K_R$ bestimmen
  - $K_{\text{krit}} = K_{\text{RES}}$
- $T_\pi$ Periodendauer der grenzstabilen Schwingung

**ACHTUNG: Struktur der Regler beachten!** Die Tabelle liefert Parameter für Regler in **serieller Form** (siehe Abschnitt 6.1.3)

## 7.4 Regler-Einstellung durch Optimierung (S. 167)

Im Folgenden ist das Vorgehen zur Regler-Einstellung durch Optimierung beschrieben.

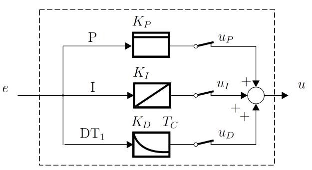
1. Reglerstruktur wählen
   $\Rightarrow$ Regler hat Parameter $k_1, \ldots, k_n$, welche optimiert werden sollen
2. **Geschlossenen** Regelkreis (inkl. Strecke) aufbauen (real oder **Simulation**)
3. Eingangssignale definieren (Führungsgrösse $r(t)$, Störgrösse $z(t)$), für welche Regelkreis optimiert werden soll (z.B. Sprung, Rampe)
4. Gütemass $J$ definieren $\Rightarrow$ repräsentative Zahl
   Häufig wird $J(k_1, \ldots, k_n) = \int_0^{T_{\text{end}}} (k_e \cdot e^2 + k_u \cdot u^2)\,\mathrm{d}t$ gewählt
5. Für verschiedene Parametersätze $k_1, \ldots, k_n$ Signale auf Regelkreis geben und Gütemass $J$ berechnen und beurteilen $\Rightarrow$ Parameter $k_1, \ldots, k_n$ sind **optimal**, wenn Gütemass $J$ **minimal** ist

**Achtung:** $T_{\text{end}}$ sollte minestens so gross sein, dass der Regelkreis bei vernünftiger Reglereinstellung als eingeschwungen gilt (steady-state).

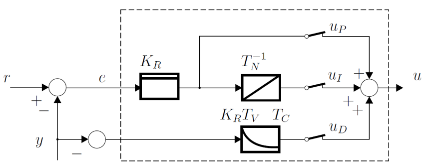
# 8 Variationen / Erweiterungen zu PID-Reglern

## 8.1 Modifizierter PID-Regler in Parallelform (S. 171)

**Parallelform (normal)**




**Modifizierte Form**




**Hinweis:** $P$-Anteil darf auch nach vorne gezogen werden (wie rechts) $\Rightarrow$ ändert Parameter von $I$- und $\text{DT}_1$-Gliedern

Statt Fehler $e$ wird Ausgang $y$ auf $\text{DT}_1$-Glied geführt!
$\Rightarrow$ Ableitung des Ausgangs $y$ statt Ableitung des Fehlers $e$

### 8.1.1 Eigenschaften / Auswirkungen der Modifikation

**Parallelform (normal)**

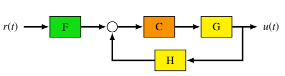
- Ändernde Referenz $r(t)$ (z.B. Sprung)
  - $\text{DT}_1$-Glied reagiert sehr aggressiv, da $e(t)$ gross
    $\Rightarrow$ 'Überforderung' des Stellglieds

**Modifizierte Form**

- Ändernde Referenz $r(t)$ (z.B. Sprung)
  - $\text{DT}_1$-Glied reagiert nicht so aggressiv, da $y(t)$ 'träger' als $e(t)$
    $\Rightarrow$ Stellglied 'geschont'
- 'two degrees of freedom'
  - Reaktion auf Störung bzw. auf Änderung der Referenz separat einstellbar

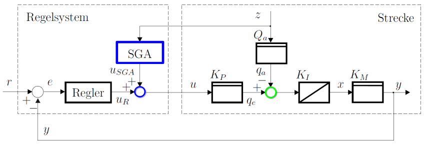
**Achtung:** Der $\text{DT}_1$-Anteil kann nicht einfach weggelassen werden!

## 8.2 Glättung der Referenz (S. 171)




Die Stellgrösse $r(t)$ wird geglättet, um die Spitzenbelastung für das Stellglied zu mindern. Die wird erreicht, indem die Stellgrösse mittels (Filter F) gefiltert wird. $\Rightarrow$ Stellglied wird nicht überstrapaziert.

## 8.3 Störgrössenaufschaltung (S. 174)




Durch Messungen wird versucht, den Einfluss von Störungen $z(t)$ auf die Strecke gleich im Vornherein mittels SGA zu kompensieren.

Am grünen Knoten gilt:

$$\dot{y} = K_M K_I [K_P u(t) - Q_a z(t)]$$

Die Störung soll mittels **additiver Korrektur** des Reglerausgangs $u_R(t)$ erfolgen.
Aus dem Blockschaltbild ersichtlich:

$$u(t) = u_R(t) + u_{\text{SGA}}(t)$$

$u_{\text{SGA}}(t)$ soll den Einfluss von $z(t)$ am blauen Knoten kompensieren.

Am blauen Knoten gilt:

$$\dot{y} = K_M K_I [K_P u_R(t) + \underbrace{K_p u_{\text{SGA}}(t) - Q_a z(t)}_{\text{soll sich auslöschen}}]$$

Wähle $u_{\text{SGA}}(t)$ so, dass die gewünschte Auslöschung stattfindet:

$$u_{\text{SGA}}(t) = \frac{Q_a}{K_P} z(t)$$

Somit wird die Störung kompensiert und es bleibt:

$$\dot{y} = K_M K_I K_P u_R(t)$$

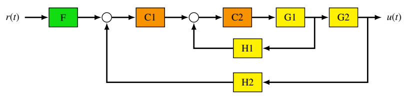
## 8.4 Kaskadenregelung (S. 175)

Regelstrecken 1. und 2. Ordnung ($\text{PT}_1$, $\text{PT}_2$, $I$, $\text{IT}_1$) können gut mit PID-Reglern geregelt werden. Bei Strecken höherer Ordnung liefert dieses Vorgehen keine genügenden Resultate mehr.

- Geschlossener Regelkreis ist zu langen oder zu wenig gedämpft
- Einstellregeln funktionieren gar nicht, weil die Regelstrecke im offenen Betrieb immer instabil ist

**Konsequenz:** Für Strecken höherer Ordnung braucht es auch einen Regler höherer Ordnung $\Rightarrow$ Kaskadenregelung

## 8.5 Übertragungsfunktionen Kaskadenregelung




Annahme - Ideale Sensoren: $H_1 = H_2 = 1$

UTF innerer Regelkreis

$$G_{f1} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2}$$

UTF äusserer Regelkreis

$$G_{f2} = \frac{G_2 G_{f1} C_1}{1 + G_2 G_{f1} C_1} = \frac{G_2 G_1 C_2 C_1}{1 + G_1 C_2 + G_2 G_1 C_2 C_2}$$

**Der innere Regelkreis ist deutlich schneller als der äussere Regelkreis!**

$$G_{f1} \approx K_1 \Rightarrow G_{f2} \approx \frac{G_2 K_1 C_1}{1 + G_2 K_1 C_1} = \frac{G_3 C_1}{1 + G_3 C_1} \Rightarrow G_3 = G_2 K_1$$

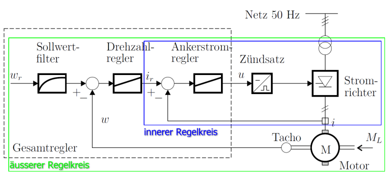
$$G_{f1} \approx 1 \Rightarrow G_{f2} \approx \frac{G_2 C_1}{1 + G_2 C_1}$$

**Interpretation:** Der äussere Regelkreis sieht den inneren Regelkreis nur als Verstärkung $K_1$. Wird $K_1 = 1$ gesetzt, so ist der innere Regelkreis aus sicht des äusseren Regelkreises gar nicht vorhanden.

### 8.5.1 Eigenschaften der Kaskadenregelung

- Der innere Regelkreis muss **deutlich schneller** sein, als der äussere Regelkreis
  - Innere Regelkreis erscheint somit für äusseren Regelkreis nur als eine **Konstante**
- Der innere Regelkreis wird **zuerst** ausgelegt
  - Dynamik der inneren Regelstrecke verbessern (schneller machen)
  - Allenfalls ist eine gute Störunterdrückung wichtig ($G_z(s) = \frac{Z(s)}{Y_{\text{sub}}(s)}$ optimieren)
- Beide Regelkreise können mit **Einstellregeln** eingestellt werden
  - Innerer Regelkreis: Äusseren Regelkreis als offen ('nicht da') betrachten
  - Äusserer Regelkreis: Innerer Regelkreis muss geschlossen sein (und funktionieren)
- Verfahren ist erweiterbar auf mehrstufige Kaskaden

### Beispiel: Drehzahlregelung Elektromotor mit Kaskadenregelung




- Der innere Regelkreis regelt den Strom
  - Regelgrösse $r_1(t)$: Strom
  - Stellgrösse $u_1(t)$: Spannung
- Der äussere Regler regelt die Drehzahl
  - Regelgrösse $r(t)$: Drehzahl
  - Stellgrösse $u(t) = r_1(t)$: Strom

## 8.6 Wind-Up (Integratoren) (S. 172)

Das Wind-Up Problem tritt auf, die folgenden drei Voraussetungen erfüllt sind

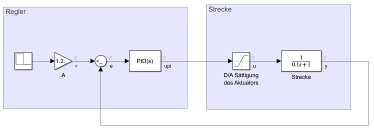
- Der Regler enthält einen **I-Anteil**
- Der Regelkreis enthält eine Limitierung bzw. **Sättigung** (Stellglied, Sensor, Physik)
- Das **Reglersignal** läuft in die **Sättigung**

Solange der Regelkreis in Sättigung ist

- Ausgang der Sättigung ist **konstant** (und somit auch der Fehler $e(t)$)
- Regelkreis verhält sich, als ob der Regelkreis an der Stelle der Sättigung geöffnet wurde
- Intergrator im Regelkreis wird zum offenen Integrator und **'läuft davon'**, da ein konstanter Fehler $e(t)$ ungebremst integriert wird $\Rightarrow$ Wind-Up

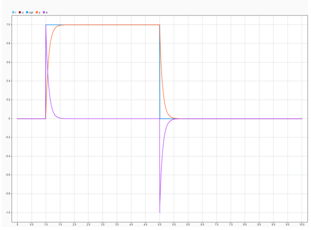
Sobald der Wert der Stellgrösse $r(t)$ ändert und der Fehler $e(t)$ umgekehrtes Vorzeichen bekommt, muss erst einmal einige Zeit abintegriert werden, bis der Regler auf die Änderung der Stellgrösse reagiert. $\Rightarrow$ siehe Beispiel

## Beispiel: Wind-Up mit PI-Regler

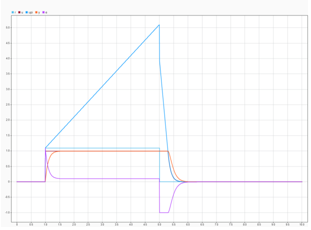



- PI-Regler (so dimensioniert, dass $G_0$ nur noch I-Verhalten hat) $\Rightarrow G_f$ hat PT$_1$-Verhalten
- Sättigungsblock: Sättigung bei $\pm 1$
- Stellgrösse $r(t) = 1$ (keine Sättigung)
- Stellgrösse $r(t) = 1.2$ (Sättigung)

Keine Sättigung (kein Wind-Up)



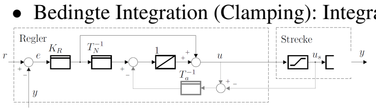
Sättigung (Wind-Up)



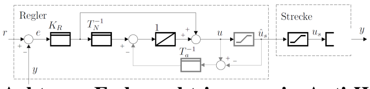
## 8.6.1 Anti-Wind-Up-Ansätze

**Hinweis:** Die beschriebenen Methoden sind nicht mathematisch, sondern werden durch Simulationen / Ausprobieren umgesetzt.

- Wind-Up detektieren und Integrator nach Wind-Up auf **sinnvollen Wert** setzen
- Integrator begrenzen (z.B. auf 80 % der möglichen Stellgrösse) $\Rightarrow$ nie 'vollgas'
- Bedingte Integration (Clamping): Integration stoppen (z.B. wenn Aktor am Limit ist)




- Feedback-Mechanismus (**Back-Calculation**)

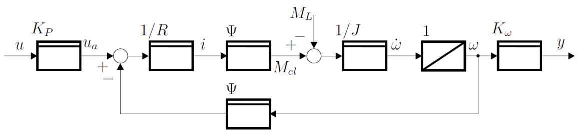



$\Rightarrow$ Muss richtig dimensioniert sein!
$\Rightarrow$ PI-Regler: Wähle $T_a \approx T_N$

**Achtung: Es braucht immer ein Anti-Wind-Up**, ansonsten läuft der Prozess schlecht oder geht sogar kaputt.

# 9 Fallstudie: Gleichstromantrieb

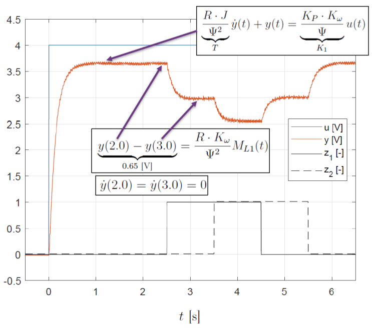
## 9.1 Modellierung (S. 53)




Der Gleichstromantrieb kann als PT$_1$-Glied mit zwei Eingängen $u(t)$ und $M_L(t)$ modelliert werden. $M_L(t)$ entspricht einer durch Wirbelströme erzeugte **Störung**.

$$\boxed{\underbrace{\frac{R\cdot J}{\Psi^2}}_{T}\dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{\frac{K_P\cdot K_\omega}{\Psi}}_{K_1}u(t) - \underbrace{\frac{R\cdot K_\omega}{\Psi^2}}_{K_2}M_L(t)}$$

### 9.1.1 Parameter-Identifikation




Aus der **Sprungantwort** können einige Parameter abgelesen werden. Einige weitere Parameter sind aus Datenblättern bekannt.

| Parameter | Bemerkung | Wert | Einheit |
|---|---|---|---|
| $T$ | gemäss Messung; Abb. 47 | 0.14 | [s] |
| $K_1$ | gemäss Messung; Abb. 47 | 0.91 | [-] |
| $R$ | statische Messung an der Ankerwicklung | 1.9 | [Ω] |
| $J$ | via Masse & Geometrie | $2.5\ 10^{-4}$ | [kgm$^2$] |
| $\Psi$ | $\Psi = \sqrt{\frac{R\cdot J}{T}}$; siehe (35) | $5.8\ 10^{-2}$ | [Wb] |
| $K_\omega$ | fix gegeben (kalibrierter Sensor) | $2.4\ 10^{-2}$ | [Vs] |
| $K_P$ | $K_P = \frac{K_1}{K_\omega}\cdot\Psi$; siehe (35) | 2.2 | [-] |

$M_{L1} = 4.8\cdot 10^{-2}$ [Nm]

## 9.2 Gleichstromantrieb mit Steuerung (S. 148-149)

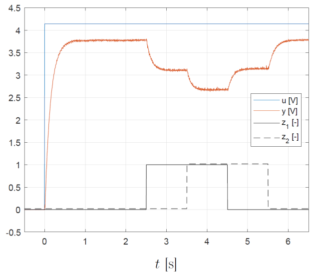
Die Grösse $\omega$ soll im **steady-state** gesteuert werden $\Rightarrow$ Ableitungen 0, keine Störungen
Zu steuern: $\omega = 25\cdot 2\pi$, $K_\omega\cdot\omega = y = 3.77$ V $\Rightarrow$ Finde Wert der Eingangsgrösse $u(t)$

$$\boxed{\text{Im steady-state: } \cancel{\underbrace{\frac{R\cdot J}{\Psi^2}}_{T}\dot{y}(t)} + y_{\text{stat}}(t) = \underbrace{\frac{K_P\cdot K_\omega}{\Psi}}_{K_1}u(t) - \cancel{\underbrace{\frac{R\cdot K_\omega}{\Psi^2}}_{K_2}M_L(t)}}$$

$$y_{\text{stat}} = \frac{K_P\cdot K_\omega}{\Psi}u_{\text{stat}}(t) \qquad \underrightarrow{y_{\text{stat}} = K_\omega\cdot\omega} \qquad \omega_{\text{stat}} = \frac{K_p}{\Psi}u_{\text{stat}}$$

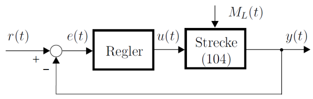
$$\Rightarrow u_{\text{stat}} = \frac{\Psi}{K_P}\omega_{\text{stat}} = \frac{\Psi}{K_P}25\cdot 2\pi = 4.14\text{ V}$$

### 9.2.1 Probleme der Steuerung




- Endwert wird zwar erreicht, aber wenn $K_P$ oder $\Psi$ variieren wird dies nicht mehr der Fall sein
- Die Drehzahländerung ist 'langsam' (gemäss Zeitkonstante $T$). (Ein höheres $u$ zu Beginn könnte $T$ verkürzen)
- **Die Steuerung reagiert nicht auf die Störungen!**

## 9.3 Gleichstromantrieb mit P-Regler (S. 149-150)

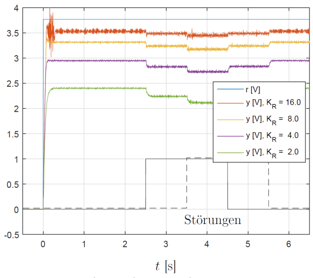



$$u(t) = K_R\cdot e(t) = K_R\cdot(r(t) - y(t))$$

$$\boxed{\text{Geschlossener Regelkreis: } \underbrace{\frac{T}{1+K_1K_R}}_{T_f}\dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{\frac{K_1K_R}{1+K_1K_R}}_{K_f}u(t) - \underbrace{\frac{K_2}{1+K_1K_R}}_{K_z}M_L(t)}$$

Damit der Sollwert $r(t)$ erreicht wird (wenn keine Störung $M_L(t)$ vorhanden ist), muss $K_F = 1$ sein $\Rightarrow K_R$ muss sehr gross sein

### 9.3.1 Eigenschaften des P-Reglers




- Für $K_R \to \infty$ werden die Zeitkonstante $T_f$ und der Einfluss der Störung $M_L(t)$ beliebig klein $\Rightarrow$ DGL konvergiert zu $y(t) = r(t)$
- Für kleine $K_R$ wird Endwert nicht erreicht $\Rightarrow$ statischer Fehler
- Stellgrösse $u(t)$ sättigt aufgrund von physikalischen Gegebenheiten $\Rightarrow$ Prozess wird **nichtlinear** $\Rightarrow$ Überschwinger
- Messrauschen wird ebenfalls verstärkt (P-Regler verstärt **alle** Frequenzen)

$\Rightarrow$ **Es bleibt ein stationärer Fehler!** Dafür reagiert der P-Regler schnell.

## 9.4 Gleichstromantrieb mit I-Regler (S. 151-152)

I-Regler ($K_R$ einstellbar)

$$u(t) = K_R\int_0^t \underbrace{r(\tau) - y(\tau)}_{e(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

E-Motor (Strecke, PT$_1$-System)

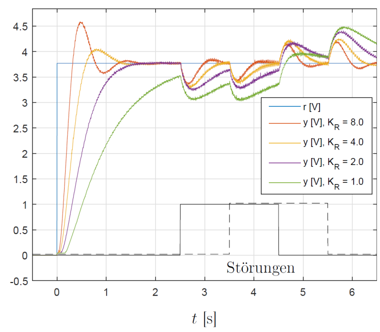
$$T\cdot\dot{y}(t) + y(t) = K_1\cdot u(t) - K_2\cdot M_L(t)$$

$\Rightarrow u(t)$ von I-Regler in Gleichung der Strecke einsetzen, ableiten, umsortieren

$$\boxed{\text{PT}_2\text{-System: } \underbrace{\frac{T}{K_1\cdot K_R}}_{T_f^2}\ddot{y}(t) + \underbrace{\frac{1}{K_1\cdot K_R}}_{2\zeta_f T_f}\dot{y}(t) + y(t) = \underbrace{1}_{K_f}r(t) - \frac{K_2}{K_1\cdot K_R}\dot{M}_L(t)}$$

### 9.4.1 Eigenschaften des I-Reglers

- $T_F = \sqrt{\frac{T}{K_1\cdot K_R}}$, $\zeta_f = \frac{1}{2\sqrt{TK_1K_R}}$
- **Der Integrator sorgt dafür, dass im steady-state kein stationärer Fehler auftritt** ($e(t) = 0$)
- Für grosse $K_R$ wird $T_f$ klein, die Sprungantwort schneller (erwünscht)
- Für grosse $K_R$ wird $\zeta_f$ klein, die Überhöhung grösser (unerwünscht)
- $\Rightarrow$ Kompromiss finden




## 9.5 Gleichstromantrieb mit PI-Regler (S. 152-154)

Vorteile von P-Regler und I-Regler sollen kombiniert werden:

- P-Regler für schnelle Reaktion
- I-Regler für statische Fehlerunterdrückung $\Rightarrow$ Parameter $K_R$ und $T_N$ einstellbar

$$\text{PI-Regler:}\quad u(t) = \frac{1}{T_N}\left(\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + e(t)\right)K_R \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; U(s) = \frac{1}{T_N}\left(\frac{1}{s}E(s) + E(s)\right)K_R$$

$$\text{E-Motor:}\quad T\dot{y}(t) + y(t) = K_1u(t) - K_2M_L(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; TsY(s) + Y(s) = K_1U(s) - \cancel{K_2M_L(s)}$$

UTF Regler: $G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R\left(\frac{1}{T_N}\frac{1}{s} + 1\right)$ UTF Strecke: $G_S(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{Ts+1}$

Der Parameter $T_N$ des PI-Reglers wird so gewählt, dass der **offene Regelkreis** $G_0(s)$ einem **Integrator** entspricht! $\Rightarrow$ **Pol-Nullstellenkürzung!**

$$G_0(s) = G_R(s)\cdot G_S(s) = K_R\frac{1+T_Ns}{T_Ns}\cdot\frac{K_1}{Ts+1} \overset{T_N=T}{=} K_R\frac{K_1}{T_Ns}$$

Für den **geschlossenen Regelkreis** ergibt sich somit ein $PT_1$-System mit Verstärkung 1 ($\Rightarrow$ kein statischer Fehler im steady-state). Die Zeitkonstante $T_{geschl}$ wird mit $K_R$ des Reglers eingestellt.

$$G_f(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{\frac{K_R K_1}{T_N s}}{1\,\frac{K_R K_1}{T_N s}} = \frac{K_R K_1}{T_N s + K_1 K_R} = \frac{1}{\frac{T_N}{K_R K_1}s+1}$$

## 9.5.1 Pol-Nullstellenkürzung

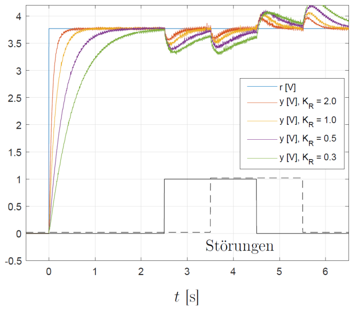
Wird durchgeführt, um den **offenen Regelkreis** zu vereinfachen. Pole und Nullstellen der Strecke werden mit einer geeigneten Wahl der Parameter des Reglers kompensiert.

$\Rightarrow$ **Idealfall: offener Regelkreis verhält sich wie ein Integrator.**

- Betrachtung UTF des offenen Regelkreises
- Parameter des Reglers so wählen, dass man Polstelle mit einer Nullstelle kürzen kann
  $\Rightarrow$ Diejenige Polstelle, welche am frühesten 'zündet', ist bevorzugt zu kürzen!

## 9.5.2 Eigenschaften des PI-Reglers

- Zeitkonstante und Verstärkung unabhängig voneinander einstellbar
- Kein Überschwingen
- **Konstante Störungen werde unterdrückt (kein steady-state Fehler)**
- Grosse Verstärkung führt noch immer zu Sättigung
- Effekt des Rauschens eher harmlos, weil kleine Verstärkungen gewählt werden können
- $\Phi_{RES} = 90°$ und $K_{RES} = \infty$




## 9.6 Gleichstromantrieb mit PID / PD-Regler (S. 155)

**Der Regelkreis kann nicht weiter optimiert werden!** Der offenere Regelkreis entspricht bereits einem **Integrator**, was der **Idealfall** ist.

Ein D-Anteil $DT_1$ wäre ungünstig, weil

- Verstärkung von hohen Frequenzen $\Rightarrow$ Erhöhung des Rauschens
- Verbesserung der Phasenreserve $\Rightarrow$ unnötig bei $\Phi_{RES} = 90°$

Allenfalls sinnvoll wäre ein Tiefpassfilter für den P-Anteil ($PT_1$ statt P), um das Rauschen der Stellgrösse zu verkleinern $\Rightarrow$ Reduktion der Phasenreserve!

## 9.7 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PI-Regler (S. 157-159)

Das bisherige Modell der Strecke soll um eine Totzeit $T_t$ erweitert werden. Als Regler wird weiterhin ein PI-Regler eingesetzt. Die Ergebnisse werden dadurch massiv schlechter!

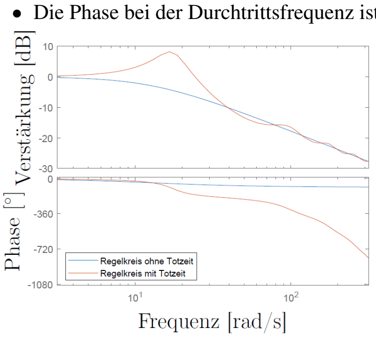
$$\text{UTF Stecke mit Totzeit} \quad G_S(s) = \frac{K_1}{s+1}e^{-sT_t}$$

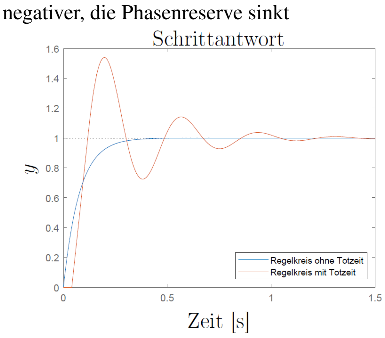
$$\text{UTF Regelkreis} \quad G_0(s) = G_S(s)\cdot G_R(s) = \frac{K_1}{s+1}e^{-sT_t}\cdot K_R\frac{1+T_N s}{T_N s} \overset{T_N=T}{=} \frac{K_1 K_R}{sT}e^{-sT_t}$$

Die UTF des offenen Regelkreises $G_0(s)$ entspricht keinem Integrator mehr. Somit wird die UTF des geschossenen Regelkreises $G_f(s)$ keinem $PT_1$-System mehr entsprechen.

### 9.7.1 Effekte im Bode- und Nyquistdiagramm / Sprungantwort

- Amplitudengang unverändert, gleiche Durchtrittsfrequenz
- Phasengang wird schlechter (zusätzliche Phasenverzögerung), die $-180°$ Phase wird bei tieferer Frequenz erreicht - die Verstärkungsreserve sinkt dadurch
- Die Phase bei der Durchtrittsfrequenz ist negativer, die Phasenreserve sinkt




## 9.8 Gleichstromantrieb mit Totzeit mit PID-Regler (S. 160-162)

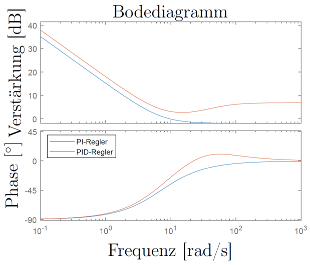
Um die Totzeit $T_t$ entgegnzuwirken, wird dem PI-Regler ein Lead-Glied (entspricht einem PD-Regler) in serie geschaltet $\Rightarrow$ PID-Regler in multiplikativer Form (Abschnitt 6.1.3)

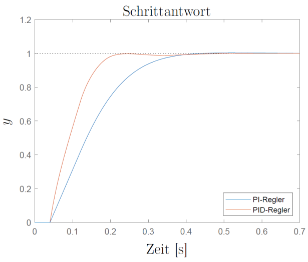
Dies hat folgende Effekte:

- Nyquistkurve wird bei der Durchtrittsfrequenz aktiv durch den Regler 'zurückgedreht'
  - Effekt der Totzeit nicht für alle Frequenzen kompentieren, sondern in einem bestimmten Frequenzbereich
  - Im Bodediagramm: Phase bei 0 dB
- Serieschaltung eines Lead-Glieds (PD-Regler) zum PI-Regler $\Rightarrow$ PID-Regler
  $\Rightarrow$ Lead-Glied siehe Abschnitt 5.1.2

### 9.8.1 Auswirkungen des Leas-Glieds / PD-Reglers

- Phase und Verstärkung werden angehoben
- Zeitkonstante wird kleiner (Regler wird schneller)



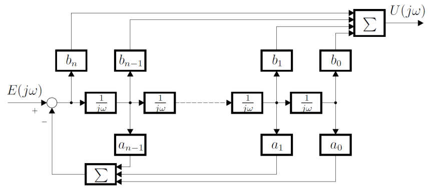

# 10 Implementierung analoger Regler

**Voraussetung:** Regler ist ausgelegt (Parameter und Struktur des Reglers bekannt)

## 10.1 Struktur allgemeiner Frequenzgang eines Reglers

Der Frequenzgang des Reglers $G_R(j\omega)$ mit ($m \leq n$) ist beschrieben durch

$$G_R(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_0} = \frac{b_n + b_{n-1}\frac{1}{j\omega}+\ldots+b_0\frac{1}{(j\omega)^n}}{1+a_{n-1}\frac{1}{j\omega}+\ldots+a_0\frac{1}{(j\omega)^n}}$$

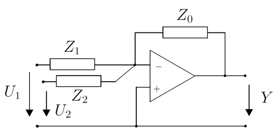



Ein jeder solcher Frequenzgang besteht nur aus **Integratoren, Summatoren und Verstärkungen**. Diese Grundglieder können mit OpAmp-Schaltungen realisiert werden.

## 10.2 Grundschaltungen mit OpAmps

**Hinweis:** Die folgenden Betrachtungen gelten für **ideale OpAmps**!

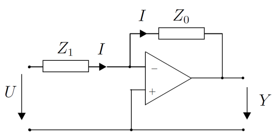
### 10.2.1 Summator




$$Y = -\frac{Z_0}{Z_1}\cdot U_1 - \frac{Z_0}{Z_2}\cdot U_2$$

$\Rightarrow$ Auf beliebig viele Eingaänge erweiterbar

### 10.2.2 Integrierer

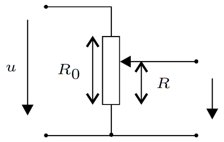



$$Z_0 = \frac{1}{j\omega C}\ \text{(Kondensator)} \qquad Z_1 = R$$

$$Y = -\frac{1}{j\omega RC}\cdot U \qquad \Rightarrow Y = -\frac{1}{j\omega R_1 C}\cdot U_1 - \frac{1}{j\omega R_2 C}\cdot U_2$$

- Für einen oder mehrere Eingänge geeignet
- Braucht 'Reset'-Schaltung, um Kondensator zu entladen
- **Anti-Wind-Up** durch Sättigung der Speisespannung **gegeben**

### 10.2.3 P-Glied (passiv)

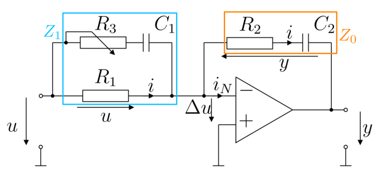



Verstärkung $< 1$ $\Rightarrow$ passiver Spannungsteiler
Verstärkung $> 1$ $\Rightarrow$ OpAmp-Schaltung

- OpAmps sollten als Summierer oder Integratoren mit definierter Verstärkung aufgebaut werden
- Vor Eingänge des OpAmps passive Spannungsteiler setzen

## 10.3 Varianten analoger PID-Schaltungen

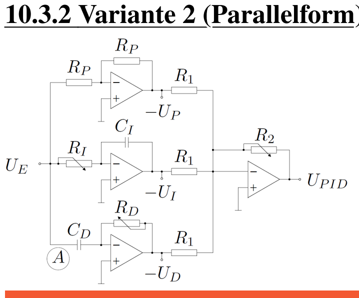
### 10.3.1 Variante 1 (gemischt)




$R_1$ Proportional (P-Anteil)
$C_1$ Ableitung (D-Anteil)
$R_3$ Filterkonstante der Ableitung
$\Rightarrow R_1$ und $C_1$ bilden $DT_1$-Anteil
$C_2$ Integral (I-Anteil)

$\Rightarrow$ Betrachtung als Summator mit $Z_0$ und $Z_1$ möglich

### 10.3.2 Variante 2 (Parallelform)




Der Frequenzgang $G(j\omega)$ des Reglers lautet

$$\frac{U_{PID}}{U_E} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{K_R}\cdot\left(1+\frac{1}{j\omega\,\underbrace{C_I R_I}_{T_N}}+j\omega\,\underbrace{C_D R_D}_{T_V}\right)$$

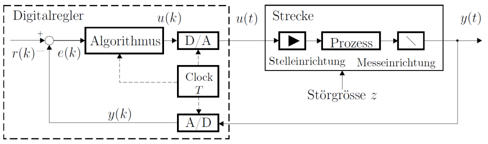
Durch Einbau eines Widerstands an der Stelle **A** wird der der PID-Regler zu einem $PIDT_1$-Regler.

# 11 Implementierung digitaler Regler

Heutzutags werden fast nur noch digitale Regler implementiert. Gründe hierfür sind:

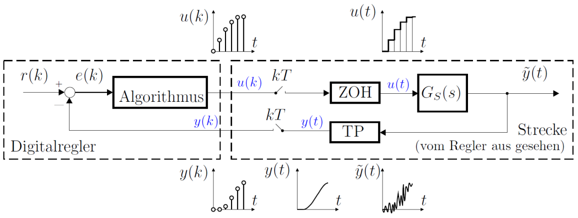
- Verarbeitung digitaler Signale ist flexibel
- Speichung und Übertragung digitaler Signale ist einfach
- Komponenten (Rechner, Wandler) für ditigale Umsetzung werden immer günstiger

## 11.1 Aufbau digitaler Regelkreis (S. 183)




- Strecke ändert nicht
- Regler arbeitet **zeitdiskret**

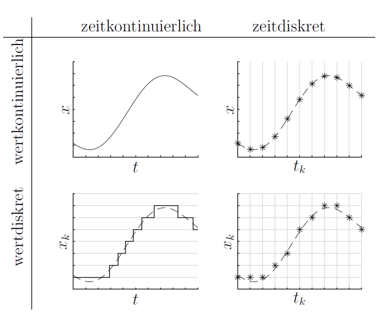
### 11.1.1 Signale im digitalen Regelkreis (S. 184)




- Sensorseitig wird periodisch die Regelgrösse abgetastet (zuvor TP-filtern)
  - **TP:** Analoges Tiefpassfilter ⇒ Anti-Aliasing
- Aktorseitig wird mit **ZOH**-Halteglied (Zero-Order-Hold) aus dem diskreten Signal $u(k)$ eine kontinuierliche Funktion $u(t)$ erzeugt

### 11.1.2 Quantisierung (S. 185)

Das Signal eines ditialen Reglers ist sowohl **zeitdiskret** als auch **wertdiskret**.



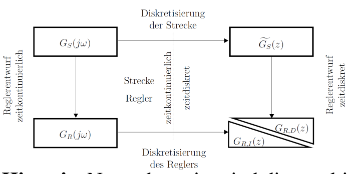

**Abtastzeit $T$**

- $T$ zu gross gewählt
  - Schlechtes Führungsverhalten (Überschwingen)
- $T$ zu klein gewählt
  - Möglicherweise numerische Probleme
  - Höhere Anforderungen an Sensor, Aktor, Wandler und Digitalrechner

**Sättigung und Quantisierung**

- Grobe Quantisierung
  - Nichtlineare Reglerung
- Feine Quantisierung
  - Keinen (negativen) Einfluss auf Regler

## 11.2 Entwurfsverfahren (S. 186)




- **Indirekter digitaler Reglerentwurf**
  - $G_S(j\omega)$ ⇒ 'links herum' ⇒ $G_{R,I}(z)$
- Direkter digitaler Reglerentwurf
  - $G_S(j\omega)$ ⇒ 'rechts herum' ⇒ $G_{R,D}(z)$
  - 'Digitale Natur' des Reglers von Anfang an berücksichtigt

**Hinweis:** Normalerweise sind die resultierenden Regler nicht identisch: $G_{R,I}(z) \neq G_{R,D}(z)$

## 11.3 Diskretisierung eines Reglers (S. 188)

Ein kontinuierlicher Regler (hier I-Regler) weist folgendes Verhalten auf:

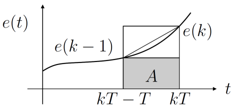
$$u(t) = K_R \cdot \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Der entsprechende zeitdiskrete Regler kann **nicht exakt** gebildet werden, da $e(t)$ nur zu diskreten Zeitpunkten $e(kT)$ bekannt ist. Geht man davon aus, dass $e(t)$ **nicht stakt ändert** (⇒ geeignete Wahl der Abtastzeit $T$), dann kann $u(k)$ folgendermassen approximiert werden:

$$u(k) = K_R \cdot \int_0^{kT} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \underbrace{K_R \cdot \int_0^{kT-T} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{u(k-1)} + \underbrace{K_R \cdot \int_{kT-T}^{kT} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\approx A}$$

### 11.3.1 Approximationen der Fläche $A$

Die Fläche $A$ kann auf mehrere Arten approximiert werden:




| | |
|---|---|
| Rechteckregel vorwärts (Euler) | $A = T \cdot e(k-1)$ |
| Rechteckregel rückwärts | $A = T \cdot e(k)$ |
| **Trapezregel (Tustin)** | $A = T \cdot \frac{e(k-1)+e(k)}{1}$ |

**Hinweis:** Für die Diskretisierung von Reglern wird die **Trapez-Approximation** verwendet, da diese am genausten ist.

## 11.4 Vorgehen: Diskretisierung eines Reglers

1. Übertragungsfunktion des Reglers in $j\omega$ aufstellen: $G_R(j\omega) = \ldots$
2. Wahl der Abtastzeit $T_S$ und einer Diskretisierungsmethode
   – (typischerweise Tustin, weil am genausten)
3. Substitution aller $j\omega$ in der UTF durch Approximation in $z^{-1}$ ⇒ $G_{R,\text{diskret}}(z) = \ldots$
   – Tustin: $j\omega = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
4. Umformen, damit Doppelbrüche verschwinden
5. Ansatz: $G_{R,\text{diskret}}(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ sortieren nach $U(z)$ und $E(z)$
6. Differenzengleichung durch inverse Z-Transformation bestimmen

**Beispiel: PI-Regler diskretisieren**

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G_R(j\omega)$ eines **kontinuierlichen** Reglers. Daraus soll die zu implementierende **Differenzengleichung** ermittelt werden.

$$1. \quad G_R(j\omega) = K_R \cdot \frac{1 + T_N j\omega}{T_N j\omega} \quad \Rightarrow 2.$$

$$G_{R,\text{diskret}}(z) \stackrel{3.}{=} K_R \cdot \frac{1 + T_N \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{T_N \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \stackrel{4.}{=} K_R \cdot \frac{T(1+z^{-1}) + 2T_N(1-z^{-1})}{2T_N(1-z^{-1})} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$5. \quad U(z)(1-z^{-1}) = \frac{K_R}{2T_N} \cdot E(z)\Big(T(1+z^{-1}) + 2T_N(1-z^{-1})\Big)$$

$$6. \quad u(k) - u(k-1) = \frac{K_R}{2T_N}\Big[T \cdot e(k) + T \cdot e(k-1) + 2T_N \cdot e(k) - 2T_N \cdot e(k-1)\Big]$$

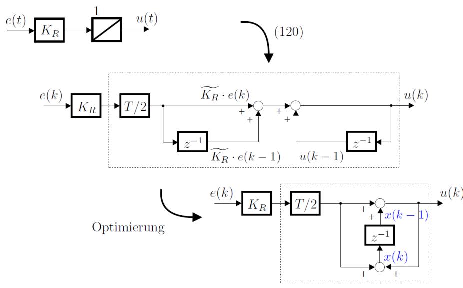
$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_R}{2T_N}\Big[e(k) \cdot (T + 2T_N) + e(k-1) \cdot (T - 2T_N)\Big]$$

## 11.5 Code-Implementierung eines diskreten Reglers (S. 190)

```
Function init()
    e_km1 = 0   % e(k-1) initialisieren
    u_km1 = 0   % u(k-1) initialisieren

Function u_k = loop(e_k)
    u_k = u_km1 + K_R / (2* T_N) ( (e_k * (T + 2*T_N))
                 + e_km1 * (T - 2*T_N) )
    u_km1 = u_k
    e_km1 = e_k
```

### 11.5.1 Optimierung des Speicherplatzes (S. 189)

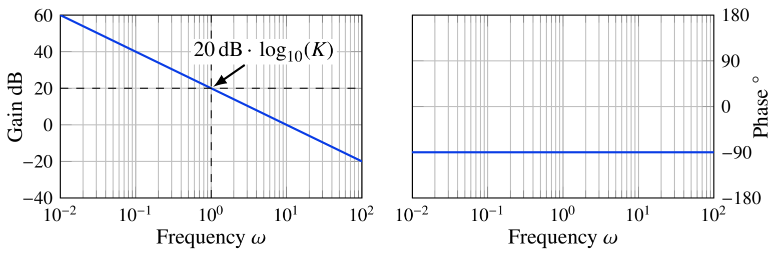



Durch geeignete Anpassung kann die Struktur des Reglers so optimiert werden, dass man sich nicht mehr die beiden Werte $u(k-1)$ und $e(k-1)$ 'merken' muss, sondern nur noch einen Wert $x(k-1)$

# 12 Anhang

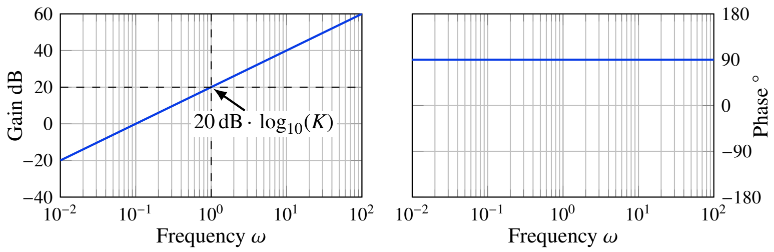
## 12.1 Bodediagramm eines Integrators

Ein Integrator mit $G(s) = \frac{K}{s}$ hat seine Polstelle bei der Frequenz $\omega = 0$. Im Bodediagramm wird der Integrator so dargestellt, dass bei Frequenz $\omega = 1$ die Verstärkung $20\,\text{dB} \cdot \log_{10}(K)$ erreicht ist. Die Steigung beträgt $-20\,\text{dB/Dek}$ und die Phase ist konstant bei $\varphi = -\frac{\pi}{2}$




## 12.2 Bodediagramm eines Differenzierer

Ein Differenzierer mit $G(s) = K \cdot s$ hat eine Nullstelle bei der Frequenz $\omega = 0$. Im Bodediagramm wird der Differenzierer so dargestellt, dass bei Frequenz $\omega = 1$ die Verstärkung $20\,\text{dB} \cdot \log_{10}(K)$ erreicht ist. Die Steigung beträgt $20\,\text{dB/Dek}$ und die Phase ist konstant bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$



## 12.3 z-Transformation

Die z-Transformation wird verwendet, um **diskrete** Signale in den Frequenzbereich zu transformieren.

| Zeitbereich | Frequenzbereich |
|---|---|
| $u(k)$ | $U(z)$ |
| $u(k-1)$ | $z^{-1} \cdot U(z) = \frac{1}{z} \cdot U(z)$ |
| $u(k+1)$ | $z \cdot U(z)$ |

### 12.3.1 Z-Transformation mit Matlab

```
s = tf('s');
G_R = K_R * (1 + s * T_N) / (s * T_N);  % UTF Regler
sysd = c2d(G_R, T_S, 'tustin')          % T_S: sampling time
```

## 12.4 Fourier- bzw. Laplace-Transformation

Die Fourier- und die Laplace-Transformation werden verwendet, um **kontinuierliche** Signale ein den Frequenzbereich zu transformieren.

| Zeitbereich | Frequenzbereich (Fourier) | Frequenzbereich (Laplace) |
|---|---|---|
| $u(t)$ | $U(\mathrm{j}\omega)$ | $U(s)$ |
| $\int u(\tau)\ \mathrm{d}\tau$ | $\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \cdot U(\mathrm{j}\omega)$ | $\frac{1}{s} \cdot U(s)$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u(t)}$ | $\mathrm{j}\omega \cdot U(\mathrm{j}\omega)$ | $s \cdot U(s)$ |