Regelungstechnik 2

FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann

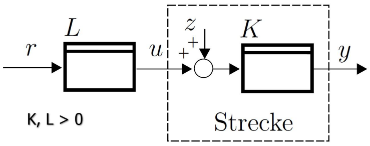
Autoren:
Authors

Version:
1.0.20240309
https://github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2

Inhaltsverzeichnis

1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

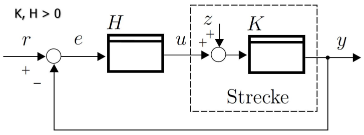
1.1 Steuerung



Eine Steuerung besitzt **keine Rückkopplung** und ist somit ein **offener Regelkreis**

$$y = \underbrace{KL \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{K \cdot z}_{\text{Störung}}$$

1.2 Regelung



Eine regelung besitzt eine **Gegenkopplung**

$$y = KH \cdot (r - y) + K \cdot z$$

$$y = \underbrace{\frac{KH}{1+KH}}_{\text{Sensitivität}} \cdot r + \underbrace{\frac{K}{1+KH}}_{\text{Störungsunterdrückung}} \cdot z$$

1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung der Störung z gilt:

$$\lim_{H\to\infty} \frac{K}{1+KH} \cdot z = 0$$

$\Rightarrow$ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so wird die Störung z unterdrückt
$\Rightarrow$ Bei einer Steuerung wird die Störung nicht unterdrückt

1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H\to\infty} \frac{KH}{1+KH} \cdot r = 1$$

$\Rightarrow$ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so ist $y \approx r$ (Ausgang $\approx$ Sollwert)
$\Rightarrow$ Bei einer Steuerung muss $H = \frac{1}{L}$ sein, damit $y \approx r$

1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

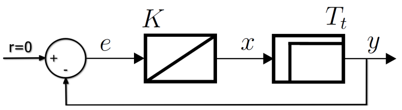
1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

(asymp.) stabil	Verstärkung $\lvert V\rvert < 1$	System schwingt nicht
grenzstabil	Verstärkung $V = -1$	System schwingt mit konstanter Ampl.
instabil	Verstärkung $\lvert V\rvert > 1$	System schwingt mit zunehmender Ampl.

1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten: $V = -1$

Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied



$K, T_t > 0$

Es muss gelten: $y(t) = -e(t)$ unter der Annahme, dass $e(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

$$x(t) = K \cdot \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + x_0 = K \cdot \int_0^t A \cdot \cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau + x_0 = K\frac{A}{\omega}\sin(\omega\tau)\Big|_0^t + x_0$$

$$= \frac{KA}{\omega}\sin(\omega t) + \underbrace{x_0}_{0}$$

$$y(t) = x(t - T_t) = \frac{KA}{\omega}\sin(\omega(t-T_t)) = \frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega(t-T_t) - \frac{\pi}{2}\right)$$

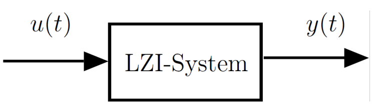
Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega}\cos\left(\omega t - \omega T_t - \frac{\pi}{2}\right)}_{y(t)} = -A\cos(\omega t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - \pi)}_{-e(t)}$$

$\Rightarrow$ Wenn der Regler die Verstärkung K hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz ω
$\Rightarrow$ Die Verstärkung K muss vermieden werden!

2 Frequenzgang (S. 114)

Wird ein Sinus-Signal $u(t)$ in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal $y(t)$ wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die **Amplitude** und die **Phase**. Die **Frequenz** hingegen bleibt **gleich**.
Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!



A	Amplitude Eingangssignal
B	Amplitude Ausgangssignal
$\frac{B}{A}$	Verstärkung
φ	Phasenverschiebung

$u(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ $\qquad$ $y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ + Transiente

2.0.1 Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (**steady state**) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig $t = 5\tau$ als Ende des Einschwingvorgangs
$\Rightarrow$ **Uns interessiert nur der der steady state!**

2.0.2 Darstellung des Frequenzgangs

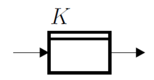
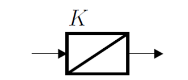
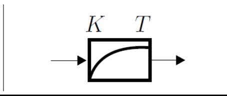
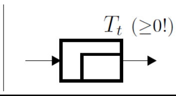
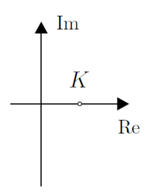
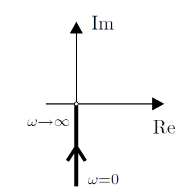
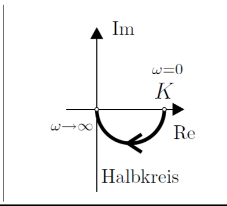
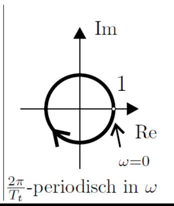
Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:

- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- Zeiger-Diagramm

2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl (S. 116)

$$\boxed{G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \frac{B}{A} \cdot e^{j\varphi}}$$

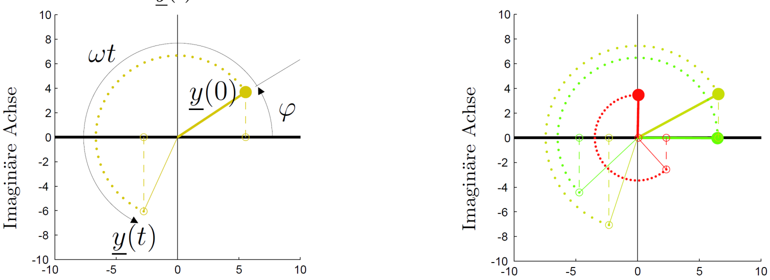
2.2 Frequenzgang der Grundglieder

P-Glied	I-Glied	PT$_1$-Glied	T$_t$-Glied
 K	 K	 K T	 T_t (≥0!)
$y(t) = Ku(t)$	$\dot{y}(t) = Ku(t)$	$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$	$y(t) = u(t - T_t)$
$G(j\omega) = K$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$	$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$
$\lvert G\rvert = K$ $\angle G = 0$	$\lvert G\rvert = \frac{K}{\omega}$ $\angle G = -\frac{\pi}{2}$	$\lvert G\rvert = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ $\angle G = -\arctan(\omega T)$	$\lvert G\rvert = 1$ $\angle G = -\omega T_t$
			

$\Rightarrow$ Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

2.3 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal **bei einer bestimmten Frequenz** als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal $\underline{y}(t)$ als Zeiger $\underline{Y}$ zur Zeit $t = 0$ dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz $\omega = 2\pi f$ rotiert. Das zeitliche Signal $y(t)$ entspricht dem **Realteil** von $\underline{y}(t)$



2.3.1 Komplexe Amplitude $\underline{Y}$

$$\underline{y}(t) = B \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]$$
$$= B \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$
$$= \underline{Y} \cdot e^{j\omega t}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

$\lvert\underline{y}(t)\rvert = B$	Maximale Amplitude des Ausgangssignals
$\mathrm{Re}(\underline{y}(t)) = y(t)$	Ausgangssignal (zeitlich)
$\underline{y}(0) = \underline{Y}$	Anfangszeiger (komplexe Amplitude)

2.3.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\boxed{\dot{\underline{y}}(t) = \underline{Y} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}} \qquad \boxed{\int \underline{y}(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\underline{Y}}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}}$$

2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

1. DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
2. Geeignet umformen: $G(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{U}}$
3. Falls gewünscht: Amplitude $|G(j\omega)|$ und Phase φ bestimmen

Beispiel: PT$_1$ Glied

$$T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}} T \cdot j\omega \cdot \underline{Y} + \underline{Y} = [j\omega T + 1] \cdot \underline{Y} = K\underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{K}{j\omega T + 1} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1^2}} \qquad \varphi = \frac{K}{1+(\omega T)^2} - j\frac{K\omega T}{1+(\omega T)^2} + \pi$$

2.4.1 Allgemeiner Fall

$$a_n y(t)^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

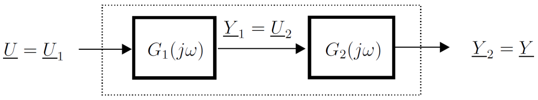
$$a_n (j\omega)^n \cdot \underline{Y} + \dots + a_1 j\omega \cdot \underline{Y} + a_0 \underline{Y} = b_m (j\omega)^m \cdot \underline{U} + \dots + b_1 j\omega \cdot \underline{U} + b_0 \underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{|b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0|}{|a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0|}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}\right)(+\pi)$$

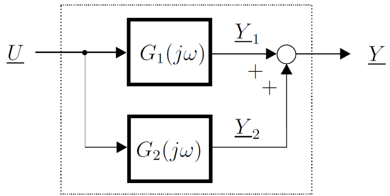
2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 \dot{G}_2 = |G_1| \cdot e^{j\angle G_1} \cdot |G_2| \cdot e^{j\angle G_2} = |G_1||G_2| \cdot e^{j(\angle G_1 + \angle G_2)}$$

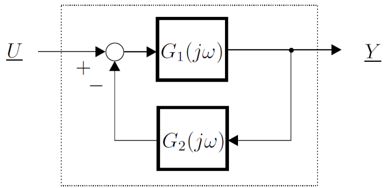
2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1(j\omega) \cdot \underline{U} + G_2(j\omega) \cdot \underline{U} = \underbrace{(G_1(j\omega) + G_2(j\omega))}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

$$G_1 + G_2 = \mathrm{Re}\{G_1\} + \mathrm{Re}\{G_2\} + j(\mathrm{Im}\{G_1\} + \mathrm{Im}\{G_2\})$$

2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen



$$\boxed{\underline{Y} = \underbrace{\frac{G_1(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}}_{G(j\omega)} \cdot \underline{U}}$$

➔Anwendung von **Mason Regel** (SigSys)

2.7.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

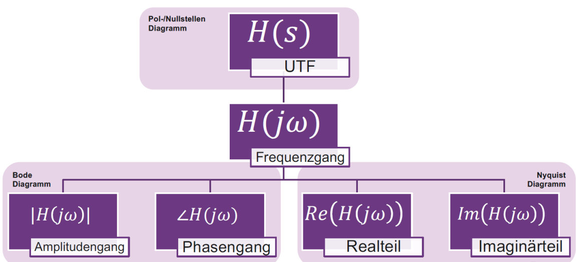
1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
2. Nach $\underline{Y}$ umformen

2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang $G(j\omega)$ und du Übertragungsfunktion $G(s)$ mit $s = \sigma + j\omega$ hängen folgendermassen zusammen:

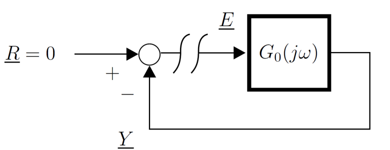
$$\boxed{G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}}$$

2.8.1 Übersicht Darstellungsformen



3 Stabilität - Nyquistkriterium (S. 126)

Die Stabilität eines Regelkreises kann mit dem Nyquistkriterium viel einfacher betrachtet werden. Dafür wird der **Frequenzgang $G_0(j\omega)$ des offenen Regelkreises** betrachtet. Ausserdem gibt das Nyquistkriterium an, wie robust ein Regelkreis ist.



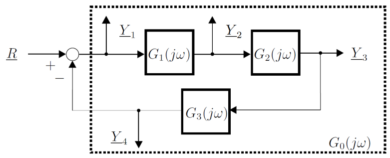
Frequenzgang des offenen Regelkreises

$$\boxed{G_0(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}}}$$

Beispiel: Kreisschaltung mit mehreren Blöcken

Folgendes System besitzt ein Eingangssignal $\underline{R}$ und vier Ausgangssignale $\underline{Y}$
Es sollen der Frequenzgang des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$, sowie ausgewählte UTFs des Systems beschrieben werden.

$$G_0(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)$$



$$\frac{\underline{Y}_1}{\underline{R}} = \frac{1}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)}$$

$$\frac{\underline{Y}_3}{\underline{R}} = \frac{G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega)}$$

3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Gedankenexperiment: Ein offener Regelkreis mit $G_0(j\omega)$ (gemäss Abschnitt 3) um eine veränderbare Verstärkung K ergänzt.

3.1.1 Stabilität

Wähle $K = K_0$, sodass sich die Ortskurve immer innerhalb des Einheitskreises befindet.

- Befindet sich die Ortskurve eines Systems immer **innerhalb des Einheitskreises**, so ist der offene Regelkreis stabil.
  ➔Daraus folgt, dass auch der geschlossene Regelkreis stabil sein muss.
- Führungsübertragungsfunktion für $K \ll K_0$:
  $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)} \approx K \cdot G_0(j\omega)$

3.1.2 Grenzstabilität

Wähle $K = K_{krit} > K_0$, sodass die Ortskurve den Punkt -1 schneidet.

- Ortskurve des offenen Regelkreises $G_0(j\omega)$ verläuft **durch den Punkt -1**,
- Die Frequenz ω_π, für die $G_0(j\omega_\pi) = -1 = e^{-\pi}$ heisst **kritische Frequenz**. Mit dieser kritischen Frequenz schwingt das System.
- Die Führungsübertragungsfunktion $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)}$ wird bei der kritischen Frequenz zu $G_f(j\omega_\pi) = \frac{-1}{1-1} = -\infty$ ➔Grenzstabilität

3.1.3 Instabilität

Wähle $K > K_{krit}$

- Ortskurve verläuft nicht mehr durch den Punkt -1
- Das System ist instabil

3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)

Idee: Informationen über den **offenen Regelkreis** verwenden, um die **Stabillität des geschlossenen Regelkreises** zu beurteilen

3.2.1 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- Gemäss Abschnitt 3 wird $G_0 = \prod_i G_i$ gebildet aus den seriegeschalteten Teilsystemen des offenen Regelkreises
- G_0 muss dabei einem **Prozess mit Ausgleich** entsprechen; zusätzlich **dürfen** noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein
  Mit Polen formuliert: Bei G_0 sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt -1 **links** der Nyquistkurve von G_0 liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ($\omega = 0 \dots \infty$)

Beispiel: Ortskurven stabiler Systeme (S. 128)