

# Regelungstechnik 2

FS 24 Prof. Dr. Lukas Ortmann

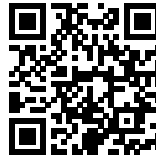
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20240331

<https://github.com/P4ntomime/regelungstechnik-2>



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)</b>	<b>2</b>		
1.1 Steuerung	2	3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)	3
1.2 Regelung	2	3.3 Stabilitätsreserven	3
1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung	2	3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129)	4
		3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab	4
		3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen	4
<b>2 Frequenzgang (S. 114)</b>	<b>2</b>	<b>4 Dezibel dB</b>	<b>4</b>
2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl	2	4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB	4
2.2 Frequenzgang der Grundglieder	2	4.2 dB–Umrechnungstabelle	4
2.3 Darstellung mit Zeigern	2	<b>5 Bode-Diagramm</b>	<b>4</b>
2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL	2	5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen	4
2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen	3	5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139)	5
2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen	3	5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140)	5
2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen	3	<b>6 Anhang</b>	<b>5</b>
2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)	3	6.1 Bodediagramm eines Integrators	5
<b>3 Stabilität – Nyquistkriterium (S. 126)</b>	<b>3</b>	6.2 Bodediagramm mit Nullstelle bei $\omega = 0$	5
3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm	3		

# 1 Regelkreise aus LTI-Systemen (S. 105)

## 1.1 Steuerung



Eine Steuerung besitzt **keine Rückkopplung** und ist somit ein **offener Regelkreis**

$$y = \underbrace{KL \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{K \cdot z}_{\text{Störung}}$$

## 1.2 Regelung



Eine Regelung besitzt eine **Gegenkopplung**

$$y = KH \cdot (r - y) + K \cdot z$$
$$y = \underbrace{\frac{KH}{1+KH} \cdot r}_{\text{Sensitivität}} + \underbrace{\frac{K}{1+KH} \cdot z}_{\text{Störungsunterdrückung}}$$

### 1.2.1 Störungsunterdrückung (S. 106)

Ein Regler ist vorteilhaft, um Störungen zu unterdrücken, denn für die Verstärkung der Störung z gilt:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{K}{1+KH} \cdot z = 0$$

⇒ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so wird die Störung z unterdrückt

⇒ Bei einer Steuerung wird die Störung nicht unterdrückt

### 1.2.2 Sensitivität (Empfindlichkeit) (S. 106)

Für die Sensitivität eines Reglers gilt:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{KH}{1+KH} \cdot r = 1$$

⇒ Hat der Regler eine grosse Verstärkung H, so ist  $y \approx r$  (Ausgang ≈ Sollwert)

⇒ Bei einer Steuerung muss  $H = \frac{1}{L}$  sein, damit  $y \approx r$

### 1.2.3 Stabilitätsproblem (S. 109-110)

Sobald ein offener Regelkreis (Steuerung) geschlossen wird, muss darauf geachtet werden, dass das System stabil ist.

## 1.3 Stabilität eines Systems mit Rückkopplung

(asympt.) stabil	Verstärkung $ V  < 1$	System schwingt nicht
grenzstabil	Verstärkung $V = -1$	System schwingt mit konstanter Ampl.
instabil	Verstärkung $ V  > 1$	System schwingt mit zunehmender Ampl.

### 1.3.1 Berechnung Grenzstabilität (S. 111)

Für Grenzstabilität muss für die Verstärkung des Systems gelten:  $V = -1$

#### Beispiel: Grenzstabilität System aus I-Glied und Totzeitglied



Es muss gelten:  $y(t) = -e(t)$  unter der Annahme, dass  $e(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

$$x(t) = K \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + x_0 = K \cdot \int_0^t A \cdot \cos(\omega \tau) d\tau + x_0 = K \frac{A}{\omega} \sin(\omega \tau) \Big|_0^t + x_0$$
$$= \frac{KA}{\omega} \sin(\omega t) + \underbrace{x_0}_0$$

$$y(t) = x(t - T_t) = \frac{KA}{\omega} \sin(\omega(t - T_t)) = \frac{KA}{\omega} \cos(\omega(t - T_t) - \frac{\pi}{2})$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{\frac{KA}{\omega} \cos(\omega t - \omega T_t - \frac{\pi}{2})}_{y(t)} = -A \cos(\omega t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - \pi)}_{-e(t)}$$

⇒ Wenn der Regler die Verstärkung K hat ist das System grenzstabil und das System schwingt für alle Zeit mit der Frequenz  $\omega$

⇒ Die Verstärkung K muss vermieden werden!

## 2 Frequenzgang (S. 114)

Wird ein Sinus-Signal  $u(t)$  in ein LZI-System gegeben, so ist das Ausgangssignal  $y(t)$  wieder sinusförmig. Dabei ändern sich meist die **Amplitude** und die **Phase**. Die **Frequenz** hingegen bleibt **gleich**.

Die Amplitude und die Frequenz des Ausgangssignals (bzw. deren Änderung) kann allerdings frequenzabhängig sein!



$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t) \quad y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \text{Transiente}$$

## Transiente

Die Transiente beschreibt den Vorgang, bis der eingeschwungene Zustand (**steady state**) erreicht ist. In der Praxis betrachtet man häufig  $t = 5\tau$  als Ende des Einschwingvorgangs  
⇒ **Uns interessiert nur der der steady state!**

## Darstellung des Frequenzgangs

Der Frequenzgang kann mittels folgenden Diagrammen dargestellt werden:

- Nyquist-Plot (Ortskurve)
- Bode-Plot
- Zeiger-Diagramm

### 2.1 Frequenzgang $G(j\omega)$ als komplexe Zahl (S. 116)

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = \frac{B}{A} \cdot e^{j\varphi}$$

### 2.2 Frequenzgang der Grundglieder

P-Glied	I-Glied	PT <sub>1</sub> -Glied	T <sub>t</sub> -Glied
$y(t) = Ku(t)$	$\dot{y}(t) = Ku(t)$	$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$	$y(t) = u(t - T_t)$
$G(j\omega) = K$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$	$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$
$ G  = K$ $\angle G = 0$	$ G  = \frac{K}{\omega}$ $\angle G = -\frac{\pi}{2}$	$ G  = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ $\angle G = -\arctan(\omega T)$	$ G  = 1$ $\angle G = -\omega T_t$

⇒ Zusammengesetzte Grundglieder: siehe Skript S. 204-208

### 2.3 Darstellung mit Zeigern

Im Frequenzbereich kann ein Signal **bei einer bestimmten Frequenz** als Zeigerdiagramm dargestellt werden. Dabei wird das Signal  $y(t)$  als Zeiger  $\underline{Y}$  zur Zeit  $t = 0$  dargestellt, welcher anschliessend mit Frequenz  $\omega = 2\pi f$  rotiert. Das zeitliche Signal  $y(t)$  entspricht dem **Realteil** von  $\underline{y}(t)$



### 2.3.1 Komplexe Amplitude $\underline{Y}$

$$\underline{y}(t) = B \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$$
$$= B \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = B \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$
$$= \underline{Y} \cdot e^{j\omega t}$$

Die in der Gleichung vorkommenden Grössen sind definiert als

$|\underline{y}(t)| = B$  Maximale Amplitude des Ausgangssignals

$\text{Re}(\underline{y}(t)) = y(t)$  Ausgangssignal (zeitlich)

$\underline{y}(0) = \underline{Y}$  Anfangszeiger (komplexe Amplitude)

### 2.3.2 Ableitung / Integral im Frequenzbereich

$$\underline{\dot{y}}(t) = \underline{Y} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

$$\int y(t) dt = \frac{Y}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}$$

### 2.4 Bestimmung des Frequenzgangs aus DGL

- DGL des Systems in Frequenzbereich transformieren
- Geeignet umformen:  $G(j\omega) = \frac{Y}{U}$
- Falls gewünscht: Amplitude  $|G(j\omega)|$  und Phase  $\varphi$  bestimmen

#### Beispiel: PT<sub>1</sub> Glied

$$T\dot{y} + y(t) = Ku(t) \quad \xrightarrow{\text{Frequenzbereich}} \quad T \cdot j\omega \cdot \underline{Y} + \underline{Y} = [j\omega T + 1] \cdot \underline{Y} = K \underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{K}{j\omega T + 1} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{K}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \quad \varphi = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{K\omega T}{1 + (\omega T)^2} + \pi$$

## 2.4.1 Allgemeiner Fall

$$a_n y(t)^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u(t)^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

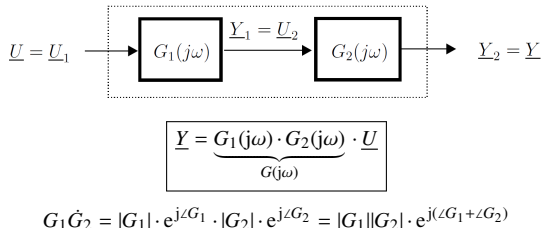
$$a_n(j\omega)^n \cdot \underline{Y} + \dots + a_1 j\omega \cdot \underline{Y} + a_0 \underline{Y} = b_m(j\omega)^m \cdot \underline{U} + \dots + b_1 j\omega \cdot \underline{U} + b_0 \underline{U}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{U}} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0} = G(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\underline{Y}|}{|\underline{U}|} = \frac{|b_m(j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0|}{|a_n(j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0|}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctan \left( \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}} \right) (+\pi)$$

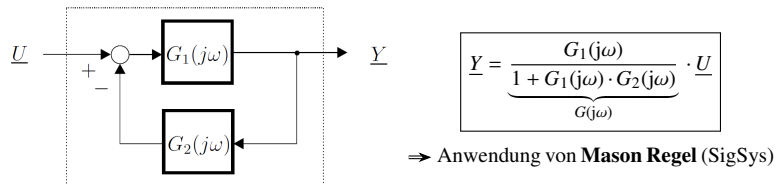
## 2.5 Serieschaltung von LZI-Systemen



## 2.6 Parallelschaltung von LZI-Systemen



## 2.7 Kreisschaltung (Gegenkopplung) von LZI-Systemen



### 2.7.1 Vorgehen Frequenzgang ermitteln

1. Gleichung zum Blockdiagramm aufstellen
2. Nach  $\underline{Y}$  umformen

## 2.8 Frequenzgang – Übertragungsfunktion (UTF)

Der Frequenzgang  $G(j\omega)$  und die Übertragungsfunktion  $G(s)$  mit  $s = \sigma + j\omega$  hängen folgendermassen zusammen:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

### 2.8.1 Übersicht Darstellungsformen



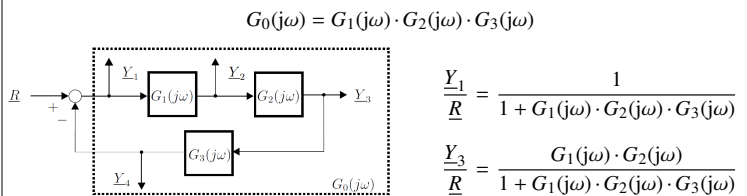
## 3 Stabilität – Nyquistkriterium (S. 126)

Die Stabilität eines Regelkreises kann mit dem Nyquistkriterium viel einfacher betrachtet werden. Dafür wird der **Frequenzgang  $G_0(j\omega)$  des offenen Regelkreises** betrachtet. Ausserdem gibt das Nyquistkriterium an, wie robust ein Regelkreis ist.



## Beispiel: Kreisschaltung mit mehreren Blöcken

Folgendes System besitzt ein Eingangssignal  $R$  und vier Ausgangssignale  $\underline{Y}$ . Es sollen der Frequenzgang des offenen Regelkreises  $G_0(j\omega)$ , sowie ausgewählte UTFs des Systems beschrieben werden.



**Hinweis:** Die Stabilität des Systems ist **unabhängig von der Reihenfolge der Teilsysteme**  $G_i(j\omega)$ , da die Stabilität durch den Nenner (bzw. die Polstellen) beschrieben wird.

### 3.1 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Gedankenexperiment: Ein offener Regelkreis mit  $G_0(j\omega)$  (gemäss Abschnitt 3) um eine veränderbare Verstärkung  $K$  ergänzt.

#### 3.1.1 Stabilität

Wähle  $K = K_0$ , sodass sich die Ortskurve immer innerhalb des Einheitskreises befindet.

- Befindet sich die Ortskurve eines Systems immer **innerhalb des Einheitskreises**, so ist der offene Regelkreis stabil.  
⇒ Daraus folgt, dass auch der geschlossene Regelkreis stabil sein muss.
- Führungsübertragungsfunktion für  $K \ll K_0$ :  
 $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)} \approx K \cdot G_0(j\omega)$

#### 3.1.2 Grenzstabilität

Wähle  $K = K_{krit} > K_0$ , sodass die Ortskurve den Punkt  $-1$  schneidet.

- Ortskurve des offenen Regelkreises  $G_0(j\omega)$  verläuft **durch den Punkt  $-1$** ,
- Die Frequenz  $\omega_\pi$ , für die  $G_0(j\omega_\pi) = -1 = e^{-\pi}$  heisst **kritische Frequenz**. Mit dieser kritischen Frequenz schwingt das System.
- Die Führungsübertragungsfunktion  $G_f(j\omega) = \frac{K \cdot G_0(j\omega)}{1 + K \cdot G_0(j\omega)}$  wird bei der kritischen Frequenz zu  $G_f(j\omega_\pi) = \frac{-1}{1-1} = -\infty \Rightarrow$  Grenzstabilität

#### 3.1.3 Instabilität

Wähle  $K > K_{krit}$

- Ortskurve verläuft nicht mehr durch den Punkt  $-1$
- Das System ist instabil

### 3.2 Vereinfachtes Nyquistkriterium (S. 127-128)

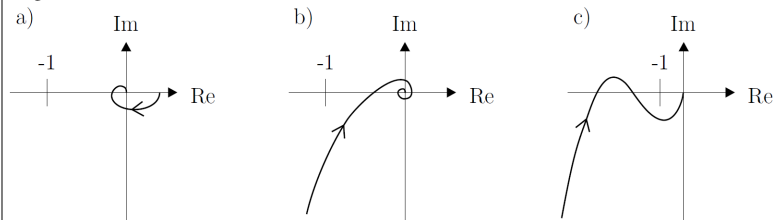
Idee: Informationen über den **offenen Regelkreis** verwenden, um die **Stabilität des geschlossenen Regelkreises** zu beurteilen

#### 3.2.1 Vereinfachtes Nyquistkriterium

- Gemäss Abschnitt 3 wird  $G_0 = \prod_i G_i$  gebildet aus den seriegeschalteten Teilsystemen des offenen Regelkreises (⇒ **Produkt aller  $G_i$  im Feedback-Loop**)
- $G_0$  muss dabei einem **Prozess mit Ausgleich (stabilen Prozess)** entsprechen; zusätzlich **dürfen** noch einer oder zwei Integratoren seriegeschaltet sein  
Mit Polen formuliert: Bei  $G_0$  sind maximal zwei Pole bei Null erlaubt; alle weiteren Pole müssen in der linken Halbebene liegen
- Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss der kritische Punkt  $-1$  **links** der Nyquistkurve von  $G_0$  liegen, wenn diese in Richtung zunehmender Frequenz durchlaufen wird ( $\omega = 0 \dots \infty$ ) ⇒ **'links der Kurve': Man befindet sich auf der Kurve und 'schaut' nach links und muss den Punkt  $-1$  'sehen'**

### Beispiel: Ortskurven stabiler Systeme (S. 128)

**Achtung:** Damit die Stabilität der gezeigten Systeme beurteilt werden kann, muss sichergestellt werden, dass auch die ersten beiden Punkte des vereinfachten Nyquistkriteriums eingehalten werden!

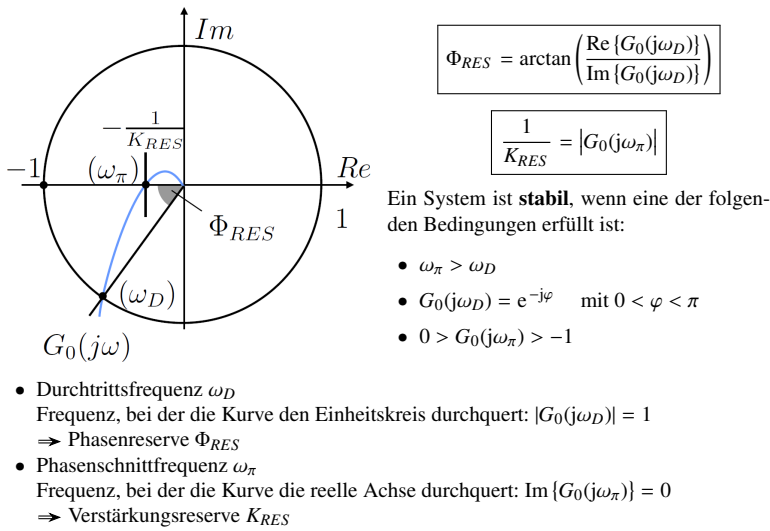


### 3.3 Stabilitätsreserven

Wir möchten nicht nur Stabilität, sondern auch eine gewisse Stabilitätsreserve, um z.B. auch bei einem ungenau modellierten Prozess oder einer sich ändernden Regelstrecke noch einen stabilen Regelkreis zu gewährleisten.

- **Auch ein stabiler Regelkreis kann sehr lange (ein)schwingen**
- Stabilität / Grenzstabilität / Instabilität sind definierte Bereiche
  - Es gibt nicht 'ein wenig stabil', 'ziemlich stabil', 'stabiler als...', 'instabiler als'
- Allenfalls: Ein Regelkreis ist stabiler als ein anderer. Gemeint ist:
  - Ein Regelkreis ist besser gedämpft / schneller (eingeschwungen)
  - Ein Regelkreis ist robust – er ist trotz gewissen Widerigkeiten im Regelkreis
  - **Ein Regelkreis bleibt stabil, auch wenn die Regelstrecke leicht ändert**

### 3.4 Stabilitätsreserven im Nyquistdiagramm (S. 129)



#### 3.4.1 Verstärkungsreserve $K_{RES}$

Die Verstärkungsreserve  $K_{RES}$  liefert direkt den Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Verstärkung** liegt. Der Abstand zur Ursprung bei der Phasenschnittfrequenz  $\omega_\pi$  entspricht  $\frac{1}{K_{RES}}$   
⇒ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang  $G_0(j\omega)$  tatsächlich  $K_{RES} \cdot G_0(j\omega)$  vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

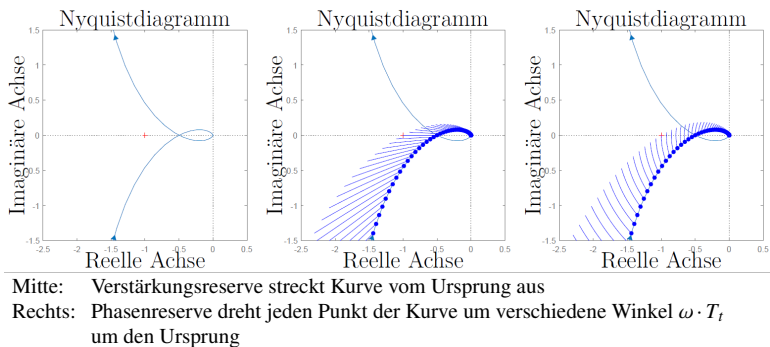
#### 3.4.2 Phasenreserve $\Phi_{RES}$

Die Phasenreserve  $\Phi_{RES}$  liefert einen Toleranzwert für den Fall, dass die **Modellunsicherheit** des offenen Regelkreises bei der **Totzeit** liegt.  
⇒ Wenn anstatt dem Nominalfrequenzgang  $G_0(j\omega)$  tatsächlich  $G_0(j\omega) \cdot e^{-j\omega T_t}$  vorliegt, wird der Regelkreis **grenzstabil**!

Der Zusammenhang zwischen Phasendrehung und Totzeit ist

$$T_t = \frac{\Phi_{RES}}{\omega_D} \quad \text{wobei } [\Phi_{RES}] = \text{rad}$$

#### Beispiel: Einfluss von Stabilitätsreserven auf Nyquistdiagramm



#### 3.4.3 Faustregeln für Reserven (S. 131)

**Hinweis:** Es besteht eine Kopplung zwischen den beiden Effekten!

- Phasenreserve von  $\Phi_{RES} = 40^\circ \dots 70^\circ$
- Verstärkungsreserve von  $K_{RES} > 4$  ( $\approx 12$  dB)

### 3.5 Nyquistdiagramme mit MatLab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems
3 nyquist(G)
```

### 3.6 Vorgehen: Nyquistdiagramme zeichnen

- Werte für  $G(\omega = 0)$  und  $G(\omega = \infty)$  berechnen
- Anzahl j im Zähler **plus** Anzahl j im Nenner entspricht Anzahl Quadranten, welche zwischen  $\omega = 0$  und  $\omega = \infty$  durchlaufen werden
- Polstellen:  $|G(j\omega)| \downarrow$ ;  $\angle G(j\omega) \downarrow$  ⇒ Bewegung im Uhrzeigersinn ⇒ Bei den Nullstellen ist  $\angle G(j\omega) = \pm 45^\circ$
- Nullstellen:  $|G(j\omega)| \uparrow$ ;  $\angle G(j\omega) \uparrow$  ⇒ Bewegung im Gegenuhrzeigersinn
- Frequenzen der Pol- bzw. Nullstellen berechnen

### 4 Dezibel dB

#### 4.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor – Dezibel dB (S. 133)

$$|K|_{dB} = 20 \text{ dB} \cdot \log_{10} |K| \Leftrightarrow |K| = 10^{\left(\frac{|K|_{dB}}{20}\right)}$$

**Hinweis:** Die Betragsstriche nur Notation!  $|K|$  kann sehr wohl negativ sein!

#### 4.1.1 Rechenregeln

- Multiplikation ⇒ Addition  
 $|K_1 \cdot K_2|_{dB} = |K_1|_{dB} + |K_2|_{dB}$
- Division ⇒ Subtraktion  
 $\left|\frac{K_1}{K_2}\right|_{dB} = |K_1|_{dB} - |K_2|_{dB}$
- Kehrwert ⇒ Negatives Vorzeichen  
 $\left|\frac{1}{K_1}\right|_{dB} = |1|_{dB} - |K_1|_{dB} = -|K_1|_{dB}$

#### 4.2 dB–Umrechnungstabelle (S. 133)

Faktor [1]	Dezibel dB	Faktor [1]	Dezibel dB
100	40	2	6
10	20	$\sqrt{2}$	3
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-3
0.1	-20	$\frac{1}{2}$	-6
0.01	-40		

### 5 Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist eine weitere Variante, den Frequenzgang  $G(j\omega)$  grafisch darzustellen. Die Darstellung beinhaltet zwei Graphen.

- Amplitudengang  $|G(j\omega)|$  in Dezibel dB
- Phasengang  $\angle G(j\omega)$  in Grad  $^\circ$
- Die Frequenzachse ist **logarithmisch** mit  $\log_{10}(\omega)$
- **Ein Bodediagramm kann in ein Nyquistdiagramm umgezeichnet werden, aber nicht umgekehrt!**

#### 5.0.1 Logarithmische Frequenzachse (S. 134)

- Serieschaltung von Systemen

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

- Amplitudengang

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} + |G_2(j\omega)|_{dB}$$

⇒ Grafisch multiplizieren wäre schwierig, grafisch addieren geht gut

- Phasengang

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

⇒ Die Phase muss nicht logarithmisch sein, wir haben schon eine Addition

#### 5.1 Vorgehen: Bode-Diagramm zeichnen

Das Diagramm wird approximativ mit **Geraden** gezeichnet!

- Frequenzgang in folgende Form bringen:

$$G(j\omega) = K_0 \cdot (j\omega)^v \cdot \frac{(1 + T_{n0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{n1} \cdot j\omega) \cdot \dots}{(1 + T_{p0} \cdot j\omega) \cdot (1 + T_{p1} \cdot j\omega) \cdot \dots} \cdot e^{-j\omega T_t}$$

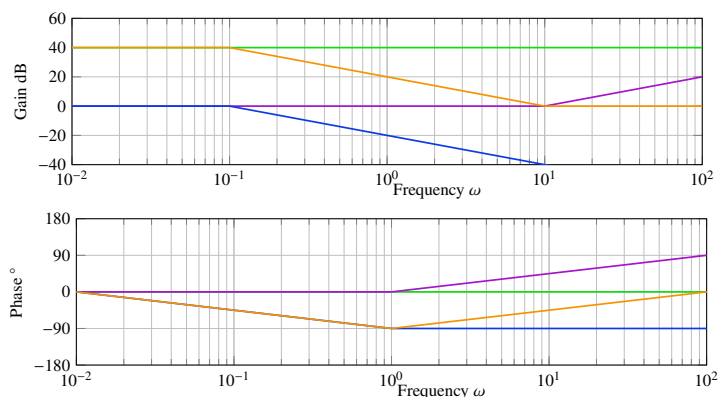
- Für  $\omega = 0$  sind alle  $(1 + T \cdot j\omega) = 1 = 0$  dB
- Für  $\omega = \frac{1}{T}$  sind alle  $(1 + T \cdot j\omega) = 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 3 \text{ dB} \angle 45^\circ$

- Frequenzen der Nullstellen berechnen:  $\omega = \frac{1}{T_n}$
- Frequenzen der Polstellen berechnen:  $\omega = \frac{1}{T_p}$
- Jede **Nullstelle** bewirkt
  - einen Knick um  $+20$  dB / Dekade **nach oben** im Amplitudengang
  - einen Phasenhub von  $+90^\circ$  über 2 Dekaden ⇒  $+45^\circ$  beim Knick
- Jede **Polstelle** bewirkt
  - einen Knick um  $-20$  dB / Dekade **nach unten** im Amplitudengang
  - einen Phasenverlust von  $-90^\circ$  über 2 Dekaden ⇒  $-45^\circ$  beim Knick
- Einzelne Faktoren einzeichnen ⇒ Wenn Faktor quadriert ist, zwei mal einzeichnen!
- Grafische Addition der Faktoren für gesamten Frequenzgang

#### Beispiel: Bode-Diagramm zeichnen

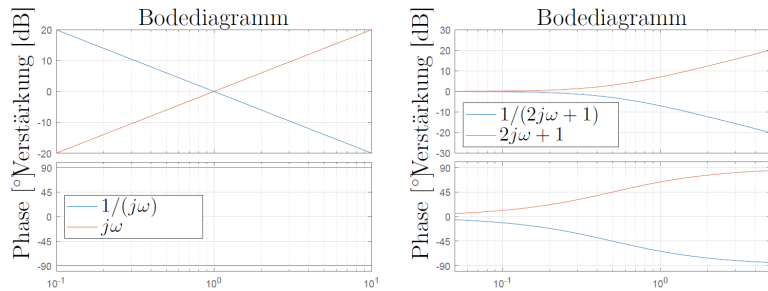
$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 0.1)} \xrightarrow{\text{Standardform}} G(j\omega) = 100 \cdot \frac{(1 + 0.1 j\omega)}{(1 + 10 j\omega)}$$

- $|K_0|_{dB} = |100|_{dB} = 40 \text{ dB}$  ⇒  $\angle G(100) = 0^\circ$
- Nullstelle:  $|1 + 0.1 j\omega|_{dB}$  ⇒ Knick bei  $\omega = \frac{1}{0.1 \text{ s}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- Polstelle:  $|1 + 10 j\omega|_{dB}$  ⇒ Knick bei  $\omega = \frac{1}{10 \text{ s}} = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- **Ergebnis:** Grafische Addition der Teilresultate



### 5.1.1 Inverse Frequenzgänge (S. 137)

Um das Bodediagramm des inversen Frequenzgangs  $\frac{1}{G(j\omega)}$  zu erhalten, muss bei Betrag und Phase das **Vorzeichen gedreht** werden.

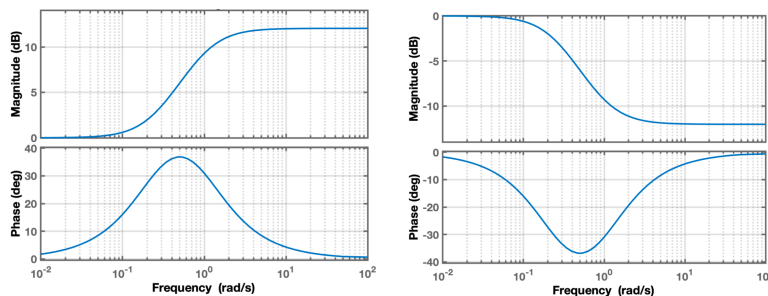


### 5.1.2 Lead-Lag-Glied

$$\text{Lead-Lag-Glied: } G(s) = K \cdot \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1}$$

Lead-Glied ( $T_1 > T_2$ )

Lag-Glied ( $T_2 > T_1$ )



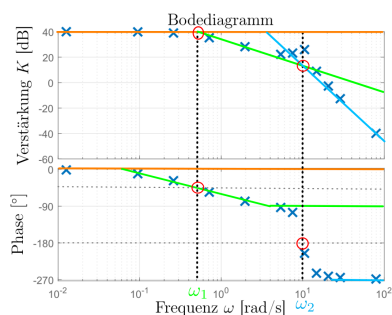
$$\text{Maximale Phasenänderung bei: } \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}$$

⇒ Bei der Regler-Auslegung werden vor allem Lead-Glieder verwendet, um **Phase anheben** zu können

### 5.2 Modellbildung (UTF) mittels Frequenzmessung (S. 139)

Um aus einem gegebenen Bodediagramm die Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$  zu ermitteln, werden die Zeichenregeln aus Abschnitt 5.1 **rückwärts angewendet**. Dazu werden die Punkte einer gegebenen Messung mittels Geraden approximiert. Mittels dieser Approximationen können die einzelnen Komponenten (Faktoren) der gesuchten UTF ermittelt werden.

#### Beispiel: Übertragungsfunktion $G(s)$ aus Bodediagramm ermitteln



Aus den Steigungen der Geraden ist ersichtlich, dass folgende Komponenten in  $G(s)$  enthalten sein müssen:  
Verstärkung  $K$ ,  $PT_1$ -Glied,  $PT_2$ -Glied

$$G(s) = K \cdot \frac{1}{(sT_1 + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2^2 s^2 + 2\zeta T_2 s + 1)}$$

Werte der Parameter aus Bodediagramm bestimmen:

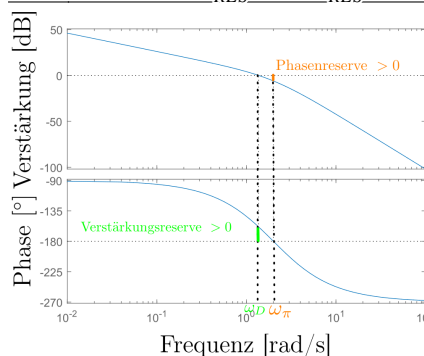
- $|K|_{dB} = 40 \Rightarrow K = 100$
- $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 0.5 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{0.5} = 2$
- $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 10 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{10} = 0.1$
- $\zeta = 0.1 \Rightarrow$  gegeben

### 5.3 Stabilität im Bodediagramm (S. 140)

Analog zum Punkt  $-1$  im Nyquistdiagramm kann die Stabilität auch im Bodediagramm beurteilt werden. Auch bei dieser Betrachtung sind die folgenden Frequenzen relevant.

- Durchtrittsfrequenz  $\omega_D \Rightarrow$  Phasenreserve  $\Phi_{RES}$   
Frequenz, bei der die Verstärkung 1 ist:  $|G_0(j\omega_D)| = 1$  ( $= 0$  dB)
- Phasenschnittfrequenz  $\omega_\pi \Rightarrow$  Verstärkungsreserve  $K_{RES}$   
Frequenz, bei der die Phase  $-180^\circ$  beträgt:  $\angle G_0(j\omega_\pi) = -\pi$  rad ( $= -180^\circ$ )

#### 5.3.1 Parameter $K_{RES}$ und $\Phi_{RES}$ aus Bodediagramm lesen



- Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$   
 $K_{RES} = 0 \text{ dB} - K_{@180^\circ}$
- Phasenschnittfrequenz  $\omega_\pi$   
 $\Phi_{RES} = \Phi_{@0\text{dB}} + 180^\circ$

**Achtung:** Das Vorzeichen von  $K_{RES}$  bzw.  $\Phi_{RES}$  ist essentiell für die Stabilitäts-Beurteilung und darf auf keine Fall vernachlässigt werden!

### 5.3.2 Beurteilung der Stabilität des Systems

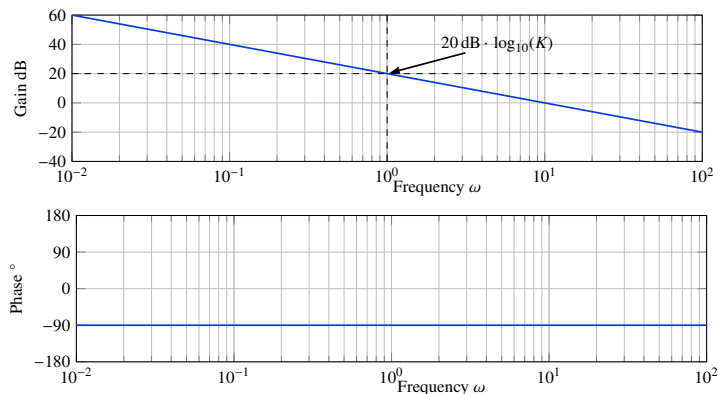
Wenn das System die **Anforderungen des Nyquist-Kriteriums erfüllt**, verhält sich die Stabilität des Systems folgendermassen:

- **Grenzstabilität:** Amplitudengang bei 0 dB und Phasengang bei  $-180^\circ$
- **Instabilität:** Amplitudengang  $> 0$  dB
- **Stabilität:** Amplitudengang  $< 0$  dB
- **Stabilität:**  $\omega_\pi > \omega_D$

## 6 Anhang

### 6.1 Bodediagramm eines Integrators

Ein Integrator mit  $G(s) = \frac{K}{s}$  hat seine Polstelle bei der Frequenz  $\omega = 0$ . Im Bodediagramm wird der Integrator so dargestellt, dass bei Frequenz  $\omega = 0$  die Verstärkung  $20 \text{ dB} \cdot \log_{10}(K)$  erreicht ist.



### 6.2 Bodediagramm mit Nullstelle bei $\omega = 0$

Ein System mit  $G(s) = K \cdot s$  wird im Bodediagramm so dargestellt, dass bei Frequenz  $\omega = 0$  die Verstärkung  $20 \text{ dB} \cdot \log_{10}(K)$  erreicht ist. Im Gegensatz zu Abschnitt 6.1 beträgt die Steigung der Amplitude  $+20 \text{ dB/Decade}$  und die Phase ist konstant bei  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$