

# Signale und Systeme 2

FS 24 – Prof. Dr. Heinz Mathis

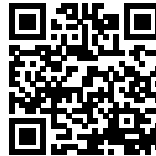
Autoren:

Simone Stitz, Laurin Heitzer

Version:

1.0.20250602

<https://github.com/P4ntomime/signale-und-systeme-2>



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 LTI-Systeme (S. 171)</b>	<b>2</b>	<b>8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)</b>	<b>7</b>
1.1 Zusammenhänge zwischen den Grössen (S. 174-176)	2	8.1 Vorteile der Zustandsraumdarstellung (S. 253-254)	7
1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)	2	8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)	7
1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)	2	8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)	7
1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)	2	8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)	7
1.5 Verzerrungen (S. 187-188)	2	8.5 ZRD mit Matlab	7
1.6 Klirrfaktor (S. 189)	2	8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)	7
1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)	2	8.7 Matrizen diagonalisieren	8
1.8 Übertragung stochastischer Signale (S. 193-194)	3	8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren	8
		8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)	8
<b>2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel</b>	<b>3</b>	8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)	8
2.1 Dämpfungsfaktor $D$ (S. 206)	3	8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (S. 263)	9
2.2 Dämpfungsmass $a$ in Dezibel (S. 206)	3	8.12 Stabilität von ZRDs (S. 275)	9
2.3 Rechenregeln mit Dezibel	3	8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (S. 277)	9
2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (S. 209)	3	8.14 Steuerbarkeit (S. 277)	9
2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel $\leftrightarrow$ Faktor	3	8.15 Ausgangssteuerbarkeit (S. 280-281)	9
2.6 Relativer und Absoluter Pegel (S. 210)	3	8.16 Beobachtbarkeit (S. 278)	9
		8.17 Standardformen der ZRD (S. 267)	10
<b>3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme</b>	<b>3</b>	<b>9 Filter</b>	<b>10</b>
3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)	4	9.1 Grundtypen (S. 291)	10
3.2 Pol-/Nullstellendiagramme (S. 212)	4	9.2 Frequenzgang $H(j\omega)$ – Übertragungsfunktion $H(s)$ (S. 294)	10
3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol-/Nullstellendiagramm	4	9.3 Approximation im Frequenzbereich	10
3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)	4	9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)	11
3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)	4	9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$	11
3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol-/Nullstellendiagramm	4	9.6 Standard-Filtertypen – Überblick	11
3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln	5	9.7 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen	11
3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)	5	9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen	11
3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)	5	9.9 Nomogramme (S. 393)	11
		9.10 LC-Filter: Entnormierung der Komponenten	11
<b>4 Bodediagramm (S. 222)</b>	<b>5</b>	<b>10 Filter-Umwandlungen mittels Frequenztransformation</b>	<b>11</b>
4.1 Bodediagramme mit Matlab	5	10.1 Transformation: Tiefpass – Hochpass (S. 344)	11
4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)	5	10.2 Transformation: Tiefpass – Bandpass (S. 348)	12
4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)	6	10.3 Transformation: Tiefpass – Bandsperre (S. 357)	12
<b>5 Stabilität im Bodediagramm</b>	<b>6</b>	<b>11 Filter-Approximationen im Detail</b>	<b>12</b>
5.1 Amplitudenrand und Phasenrand	6	11.1 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (S. 299)	12
5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm	6	11.2 Approximation nach Butterworth (S. 303)	12
		11.3 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310)	13
<b>6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)</b>	<b>6</b>	11.4 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319)	13
6.1 Nyquistdiagramme mit Matlab	6	11.5 Approximation nach Cauer (S. 322)	13
		11.6 Approximation nach Bessel (S. 328)	14
<b>7 Stabilität im Nyquist-Diagramm</b>	<b>6</b>	<b>12 Anhang</b>	<b>14</b>
7.1 Offener und geschlossener Regelkreis	6	12.1 Übertragungsfunktionen verschiedener Filtertypen	14
7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium	6	12.2 Ableitungsregeln	14
7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)	6	12.3 Ableitungs-Tabelle	14
7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm	6		

## 1 LTI-Systeme (S. 171)

$x(t)$	Eingangssignal
$y(t)$	Ausgangssignal
$\delta(t)$	Dirac-Stoss
$h(t)$	Impulsantwort (Antwort auf Dirac-Stoss)
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$\theta(j\omega)$	Phasengang
$H(s)$	$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ Übertragungsfunktion (UTF)

### 1.1 Zusammenhänge zwischen den Größen (S. 174-176)

Die Impulsantwort  $h(t)$  und der Frequenzgang  $H(j\omega)$  sind ein **Fourier-Transformationspaar**:



Die Impulsantwort  $h(t)$  und die Übertragungsfunktion  $H(s)$  sind ein **Laplace-Transformationspaar**:

$$h(t) \longleftrightarrow H(s)$$

Das Ausgangssignal berechnet sich als:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

#### 1.1.1 Zusammenhang Impulsantwort – Einheitssprungantwort

$h(t)$	Impulsantwort
$g(t)$	Einheitssprungantwort

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$H(s) = s \cdot G(s) \Leftrightarrow G(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

#### 1.1.2 Zusammenhang Impulsantwort & Kausalität LTI-System

Damit ein LTI-System kausal ist, muss dessen Impulsantwort  $h(t)$  für alle  $t < 0$  gleich Null sein.

## 1.2 Phasenlaufzeit $\tau_P(\omega)$ (S. 183)

Die Phasenlaufzeit ist nur für **reine Sinus-Schwingungen** exakt bestimmbar!  
Das System ist beschrieben durch:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \gamma)$$

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

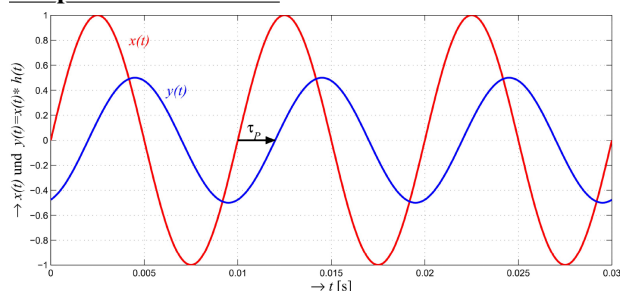
Das Ausgangssignal  $y(t) = x(t) * h(t)$  ist gegenüber dem Eingangssignal  $x(t)$  mit Faktor  $\alpha$  gewichtet und um die Zeit  $t_0$  verzögert.

⇒ Diese Verzögerung wird **Phasenlaufzeit** genannt

$$\tau_P(\omega) = \frac{-\theta(\omega)}{\omega}$$

$\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

#### Beispiel: Phasenlaufzeit



#### 1.2.1 Negative Phasenlaufzeit

Eine negative Phasenlaufzeit bedeutet **nicht**, dass ein System **akausal** ist!

## 1.3 Gruppenlaufzeit $\tau_G(\omega)$ (S. 182)

Definiert für Signale mit **mehreren Frequenzanteilen**

Bei amplitudenmodulierten Signalen bestimmt die Gruppenlaufzeit  $\tau_G(\omega)$  die **Verzögerung der Hüllkurve** der AM.

$$\tau_G(\omega) = \frac{-d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$\theta(\omega)$  entspricht dem Phasengang des Systems

Die Gruppenlaufzeit kann nur dann als **Laufzeit des Signals** interpretiert werden, wenn im Frequenzbereich des Signales die Gruppenlaufzeit und auch die Dämpfung ungefähr konstant sind.

#### 1.3.1 Negative Gruppenlaufzeit

Bei **Vierpolen** mit **konzentrierten Elementen** ist in bestimmten Frequenzbereichen eine **negative Gruppenlaufzeit** möglich, insbesondere in Frequenzbereichen wo die Dämpfung stark ändert. (z.B. Nullstellen der UTF)

Bei negativer Gruppenlaufzeit erscheint die Wirkung **nicht** vor der Ursache!

⇒ Das System ist **nicht** akausal!

Das Maximum der Hüllkurve am Ausgang kann aber **früher** als am Eingang auftreten.

## 1.4 Phasenlaufzeit / Gruppenlaufzeit identisch (S. 186)

Die **Signalverzögerung**, **Phasenlaufzeit**  $\tau_P(\omega)$  und **Gruppenlaufzeit**  $\tau_G(\omega)$  sind identisch, wenn

$$\theta(\omega) = -\omega \cdot t_0$$

und der **Amplitudengang ebenfalls konstant** ist, d.h.  $H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0}$   
Die Signalverzögerung beträgt für **alle Frequenzen**  $t_0 (= \tau_P = \tau_G)$

## 1.5 Verzerrungen (S. 187-188)

Stimmt der zeitliche Verlauf einer Schwingung auf der Empfängerseite nicht mehr mit der Senderseite überein, arbeitet das Übertragungssystem **nicht verzerrungsfrei**.

#### 1.5.1 Lineare Verzerrung

Eine **Dämpfung** eines Signals (z.B. durch einen Tiefpassfilter) entspricht einer **linearen Verzerrung**

#### 1.5.2 Nichtlineare Verzerrung

Nichtlineare Verzerrungen werden durch **Übersteuerung** des Systems (**Kanal**) oder dessen **nichtlineare Kennlinie** hervorgerufen.

Durch nichtlineare Verzerrungen treten **neue**, im Ursprungssignal nicht enthaltene **Schwingungen** auf.

Ein **Mass** für nichtlineare Verzerrungen ist der **Klirrfaktor**

## 1.6 Klirrfaktor (S. 189)

Verhältnis des **Effektivwerts** der **neu** am Ausgang eines Systems entstandenen **Harmonischen** zum Effektivwert des gesamten Signals

$$k = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2}}$$

$U_1$  entspricht der Grundharmonischen  
⇒ Es gilt:  $1 > k \geq 0$

#### 1.6.1 Klirrdämpfungsmass

$$a_k = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{k} \right)$$

#### 1.6.2 Total Harmonic Distortion (THD)

Wird vor allem im englisch-sprachigen Raum verwendet

$$\text{THD} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2}{U_1^2}}$$

$U_1$  entspricht der Grundharmonischen  
⇒ Es gilt:  $\infty > \text{THD} \geq 0$

geringe Verzerrungen:  $\text{THD} \approx k$       allgemein:  $\text{THD} > k$

## 1.7 Verzerrungsfreie Übertragung von Signalen (S. 190)

Frequenzgang  $H(j\omega)$  und Impulsantwort  $h(t)$  eines verzerrungsfreien Signals:

$$H(j\omega) = \alpha \cdot e^{-j\omega t_0} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)} \longleftrightarrow h(t) = \alpha \cdot \delta(t - t_0)$$

Damit ein Signal verzerrungsfrei übertragen wird, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Amplitude** konstant (unabhängig von der Frequenz)  $\Leftrightarrow |H(j\omega)| = \text{konstant} = \alpha \neq 0$   
⇒ Keine Amplitudenverzerrung vorhanden
- Phase** proportional zur Frequenz  $\Leftrightarrow \theta(\omega) = -\omega t_0$   
(äquivalenz zu Abschnitt 1.4) ⇒ Keine Phasenverzerrung vorhanden

1.8 Übertragung stochastischer Signale (s. 193-194)

Wird ein stochastisches Signal  $x(t)$  (schwach stationär) durch ein LTI-System mit Impulsantwort  $h(t)$  übertragen, so berechnet sich das Ausgangssignal  $y(t)$  gemäss Abschnitt 1.1 aus:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \, d\tau \longrightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

1.8.1 Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert  $Y_0$  des Ausgangssignals  $y(t)$  bei der Frequenz  $\omega = 0$  entspricht

$$Y(j\omega = 0) = Y(j0) = X(j0) \cdot H(j0) \Rightarrow Y_0 = X_0 \cdot H(j0)$$

$H(j\omega)$  = Frequenzgang und  $X_0$  = linearer Mittelwert von  $x(t)$

1.8.2 Autokorrelationsfunktion (AKF) des Ausgangssignals

Da  $\varphi_{yy}(\tau)$  und  $Y_0$  nicht von  $t$  abhängen, ist auch  $y(t)$  schwach stationär.

$$\varphi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) \varphi_{xx}(\tau + \alpha - \beta) \, d\alpha \, d\beta = h(-\tau) * h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge für die Fourier-Transformationspaare:

$h(-\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$H^*(j\omega)$

$\varphi_{xx}(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$\Phi_{xx}(j\omega)$

$h(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$H(j\omega)$

$h(\tau) * h(-\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$|H(j\omega)|^2$

1.8.3 Leistungsdichtespektrum (PSD)

Die AKF und das PSD sind ein Fourier-Transformationspaar

$\varphi_{yy}(\tau)$

$\circ \longrightarrow$

$\Phi_{yy}(j\omega)$

AKF

PSD

Daraus folgt der Zusammenhang der Leistungsdichtespektren  $\Phi(j\omega)$

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

Für die AKF des Ausgangssignals  $y(t)$  gilt

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega$$

Die Leistung  $Y^2$  des Ausgangssignals  $y(t)$  berechnet sich beim Zeitpunkt  $\tau = 0$  als

$$Y^2 = \varphi_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) \, d\omega$$

1.8.4 Kreuzkorrelationen

Die Kreuzkorrelationsfunktionen  $\varphi_{xy}(\tau)$  und  $\varphi_{yx}(\tau)$  des stochastischen, reellen Eingangssignals  $x(t)$  (Klasse 2b) und des stochastischen Ausgangssignals  $y(t)$  eines LTI-Systems hängen folgendermassen zusammen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{xy}(j\omega) = H(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = h(-\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = H^*(j\omega) \cdot \Phi_{xx}(j\omega)$$

Somit gilt:

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}(-\tau) \circ \longrightarrow \Phi_{yx}(j\omega) = \Phi_{xy}(-j\omega) = \Phi_{xy}^*(j\omega)$$

2 Dämpfung, Verstärkung, Dezibel

Hinweis: Neben Dezibel gibt es ein weiteres Dämpfungs-/ bzw. Verstärkungsmass: Neper Np Auf dieses Mass wird allerdings nicht genauer eingegangen.  $\Rightarrow$  Skript: S.207

2.1 Dämpfungsfaktor  $D$  (s. 206)

Das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangssignal wird als Dämpfungsfaktor  $D$  bezeichnet

$$D_P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$D_U = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_I = \frac{I_1}{I_2}$$

Die Indizes  $U, P, I$  stehen für die **Effektivwerte** von Spannung, Leistung und Strom.

2.2 Dämpfungsmass  $a$  in Dezibel (s. 206)

Durch **logarithmieren** des Dämpfungsfaktors  $D$  erhält man das Dämpfungsmass  $a$

$$a_P = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$a_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_1}{U_2} \right)$$

$$a_I = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_2} \right)$$

2.2.1 Umrechnung Verstärkungsfaktor  $\Leftrightarrow$  Dezibel

$$\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(v) \Leftrightarrow v = 10^{\frac{\text{dB}}{10}}$$

2.3 Rechenregeln mit Dezibel

- Faktoren multiplizieren  $\Rightarrow$  Dezibel-Werte addieren
- Faktoren dividieren  $\Rightarrow$  Dezibel-Werte subtrahieren

2.4 Spannungsverstärkungsfaktor (s. 209)

Hält man sich strikt an die Definition des Verstärkungsfaktors bzw. die Definition der Dezibel, so würde man für Dämpfungen positive Dezibel-Werte erhalten und für Verstärkungen entsprechend negative Dezibel-Werte. Dies ist gegen die Intuition des Ingenieurs. Somit wurde der **Spannungsverstärkungsfaktor**  $T_U$  definiert. Analog zum Dämpfungsmass  $a$  wird ein **Verstärkungsmass**  $g_U$  definiert.

$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

$$g_U = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right)$$

Aus dieser Definition folgt für die Dezibel-Werte:

- **Verstärkung:** ( $U_2 > U_1$ )  $\Rightarrow$  positive Dezibel-Zahl
- **Dämpfung:** ( $U_2 < U_1$ )  $\Rightarrow$  negative Dezibel-Zahl

Beispiel: Kaskadiertes System (s. 209)



$T_{U_{tot}}$

$=$

$\frac{U_2}{U_1}$

$\cdot$

$\frac{U_3}{U_2}$

$\cdot$

$\frac{U_4}{U_3}$

$\cdot$

$\frac{U_5}{U_4}$

$=$

$\frac{U_5}{U_1}$

$=$

$\frac{10}{1}$

$\cdot$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cdot$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cdot$

$\frac{10}{1}$

$=$

$50$

$a_{U_{tot}}$

$=$

$-20\text{dB}$

$+$

$3\text{dB}$

$+$

$3\text{dB}$

$+$

$-20\text{dB}$

$=$

$-34\text{dB}$

Formuliert mit dem Verstärkungsmass  $g$  ergeben sich umgekehrte Vorzeichen:

$$g_{U_{tot}} = 20\text{ dB} - 3\text{ dB} - 3\text{ dB} + 20\text{ dB} = 34\text{ dB}$$

2.5 Umrechnungs-Tabelle Dezibel  $\Leftrightarrow$  Faktor

**Vorgehen:** Gesuchten dB-Wert als Summe / Differenz von bekannten Werten darstellen  $\Rightarrow$  Summanden in Faktoren 'transferieren' und multiplizieren / dividieren

**Vorgehen:** Gesuchten Faktor als Produkt / Quotient von bekannten Werten darstellen  $\Rightarrow$  Faktoren in Summanden 'transferieren' und addieren / subtrahieren

Dezibel	Faktor
20 = 10 + 10	100 = 10 · 10
12	16 = 2 · 2 · 2 · 2
10	10
9 = 3 + 3 + 3	8 = 2 · 2 · 2
8 = 5 - 3	6.4 = 3.2 · 2
7 = 10 - 3	5 = $\frac{10}{2}$
6 = 3 + 3	4 = 2 · 2
5 = 15 - 10	3.2 = $\frac{32}{10} \approx \sqrt{10}$
4 = 10 - 6 = 10 - 3 - 3	2.5 = $\frac{10}{2 \cdot 2}$
3	2
2 = 12 - 10 = 5 - 3	1.6 = $\frac{16}{10}$
1 = 10 - 3 - 3 - 3	1.25 = $\frac{10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$
0	1
-1	0.8 = $\frac{4}{5}$

2.6 Relativer und Absoluter Pegel (s. 210)

Bei den bisher ausgeführten Pegeln handelt es sich um **relative Pegel**. Im Gegensatz dazu beziehen sich **absolute Pegelangaben** immer auf eine Referenzgrösse (erzeugt von einem Normengenerator, siehe Skript).

$$(L_U)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{U_1} \right) \qquad (L_U)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{U_2}{774.6\text{ mV}} \right)$$

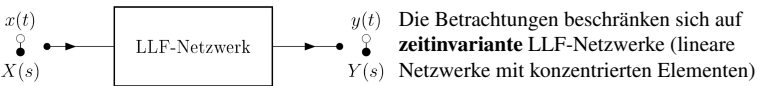
$$(L_I)_{\text{rel}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \qquad (L_I)_{\text{abs}} = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{I_2}{1.291\text{ mA}} \right)$$

$$(L_P)_{\text{rel}} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \qquad (L_P)_{\text{abs}} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_2}{1\text{ mW}} \right)$$

2.6.1 Kennzeichnung absoluter Pegel

Notation	Bezugsgrösse	Notation	Bezugsgrösse
dBW	1 W	dBm	1 mW
dBV	1 V	dBμV	1 μV

3 Frequenzverhalten analoger LTI-Systeme



### 3.1 Zusammenhang Frequenzgang – UTF (S. 211)

Alle LTI-Systeme lassen sich mit einer Differentialgleichung der folgenden Form beschreiben:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Die Laplace-Transformierte der DGL hat die Form

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$	Zählerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$D(s)$	Nennerpolynom mit konstanten, reellen Koeffizienten
$X(s)$	Eingangssignal im Frequenzbereich
$Y(s)$	Ausgangssignal im Frequenzbereich

Die Wurzeln der Gleichung  $N(s) = 0$  ergeben  $m$  endliche Nullstellen; die Wurzeln von  $D(s) = 0$  ergeben  $n$  Pole des Systems. **Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole in der linken Halbebene (LHE) liegen!**

#### 3.1.1 Praktische Schreibweise für Pol-/Nullstellen

Um die Pole bzw. Nullstellen des Systems direkt ablesen zu können, wird  $H(s)$  faktorisiert.  
 $\Rightarrow$  Die UTF  $H(s)$  ist durch die Pole, Nullstellen und den Faktor  $K$  **vollständig bestimmt!**

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

Da die Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten entweder reell sind oder in konjugiert-komplexen Paaren auftreten, ist es meistens sinnvoll, die Systemfunktionen als Produkt von Faktoren 1. und 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten darzustellen.

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + 2\sigma_{zi} s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^r (s^2 + 2\sigma_{pj} s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2r+1}^n (s - p_j)}$$

**Legende:**

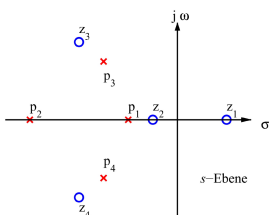
- Beschreibt komplex-konjugierte Nullstellen in der LHE
- Beschreibt reelle Nullstellen in der LHE
- Beschreibt komplex-konjugierte Pole in der LHE
- Beschreibt reelle Pole in der LHE

Alternativ kann  $H(s)$  mittels **Polfrequenzen** und **Polgüten** beschrieben werden:

$$H(s) = \underbrace{\frac{b_m}{a_m}}_K \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}} s + \omega_{zi}^2) \prod_{i=2r+1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^r (s^2 + \frac{\omega_{pj}}{q_{pj}} s + \omega_{pj}^2) \prod_{j=2r+1}^n (s - p_j)}$$

$\omega_{pj}$	Polstellenfrequenzen	$\omega_{zi}$	Nullstellenfrequenzen
$q_{pj}$	Polstellengüten	$q_{zi}$	Nullstellengüten

### 3.2 Pol-/Nullstellendiagramme (S. 212)



Werden die Pole und Nullstellen in der komplexen Zahlenebene dargestellt, so spricht man von einem Pol-/Nullstellen-Diagramm.

In Matlab erzeugt der Befehl pzmap einen solchen Plot

Pole	Kreuze
NS	Kreise

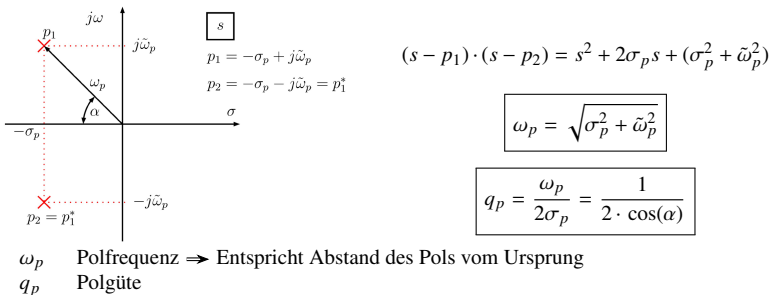
### 3.3 Stabilitätsbetrachtung im Pol-/Nullstellendiagramm

Für **Grenzstabilität** gilt eine **UND-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte. Für **Stabilität und Instabilität** gilt eine **ODER-Verknüpfung** der aufgeführten Punkte.

- **Stabil:**
  - Alle Polstellen in linker Halbebene (LHE)  $\Rightarrow \sigma < 0$
  - Keine Polstellen vorhanden
- **Asymptotisch stabil:**
  - Polstellen nur in der linken Halbebene (LHE)
- **Grenzstabil:**
  - **Keine** Polstellen in der rechten Halbebene (RHE)  $\Rightarrow \sigma > 0$
  - Mindestens eine **einfache Polstelle** auf imaginärer Achse  $\Rightarrow \sigma = 0$
  - **Keine doppelten** Polstellen auf der imaginären Achse  $\Rightarrow \sigma = 0$
- **Instabil:**
  - Mindestens eine Polstelle in der rechten Halbebene (RHE)  $\Rightarrow \sigma > 0$
  - Mindestens eine **mehrfache Polstelle** auf der imaginären Achse  $\Rightarrow \sigma = 0$

### 3.4 Pole in der komplexen Zahlenebene (S. 214)

#### Beispiel: Polynom 2. Ordnung mit komplex-konjugierten Polen



#### Grenzfälle

$\sigma_p = \omega_p$	Doppelpol auf neg. reeller Achse	$\Rightarrow q_p = \frac{1}{2}$
$\sigma_p = 0$	Polpaar auf imaginärer Achse	$\Rightarrow q_p = \infty$

#### 3.4.1 Reelle Pole

$$\omega_p = \sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}$$

$$q_p = \frac{\sqrt{\sigma_{p1} \cdot \sigma_{p2}}}{\sigma_{p1} + \sigma_{p2}} \leq \frac{1}{2}$$

- $\Rightarrow$  Für einzelne (reelle) Pole ist die Güte  $q_p$  nicht definiert.
- $\Rightarrow$  Die Polfrequenz  $\omega_p$  entspricht dem Abstand zum Ursprung.

#### Identische Werte

$$\sigma_{p1} = \sigma_{p2} \quad |q_p| = \frac{1}{2}$$

#### 3.4.2 Verallgemeinerung des Beispiels (S. 214)



#### Hinweise

- Pole sind als rote Kreuze dargestellt
- Für die NS (Nullstellenfrequenzen, Nullstellengüten) gelten die gleichen geometrischen Beziehungen wie für die Polstellen

### 3.5 Bestimmung Frequenzgang aus UTF (S. 216)

Um den Frequenzgang zu erhalten, kann  $s = j\omega$  eingesetzt werden.

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

$H(s)$	Übertragungsfunktion (UTF)	$ H(j\omega) $	Amplitudengang
$H(j\omega)$	Frequenzgang	$\theta(\omega)$	Phasengang

Der Frequenzgang bzw. Amplitudengang und Phasengang werden folgendermassen dargestellt:

- **Nyquist-Diagramm**  
 $H(j\omega)$  wird in Polarkoordinaten mit  $\omega$  als Parameter aufgetragen
- **Bode-Diagramm**  
 $\alpha_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |H(s)|$  und  $\theta(\omega)$  werden je in Funktion von  $\log_{10}(\omega)$  aufgetragen

### 3.6 Bestimmung Frequenzgang aus Pol-/Nullstellendiagramm

Durch einsetzen einer beliebigen Auswertungsfrequenz  $j\omega_0$  in die Übertragungsfunktion  $H(s)$  ergibt sich der Frequenzgang  $H(j\omega_0)$  als:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{(j\omega_0 - z_1)(j\omega_0 - z_2) \dots (j\omega_0 - z_m)}{(j\omega_0 - p_1)(j\omega_0 - p_2) \dots (j\omega_0 - p_n)} = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\theta(\omega_0)}$$

Die einzelnen Faktoren in Zähler und Nenner können in Betrag und Phase aufgeteilt werden, beispielsweise folgendermassen:

$$(j\omega_0 - p_1) = |j\omega_0 - p_1| \cdot e^{j\theta_{z1}} = A_{z1} \cdot e^{j\theta_{z1}}$$

Angewendet auf alle Faktoren kann der Frequenzgang  $H(j\omega_0)$  in den **Amplitudengang**  $|H(j\omega)|$  und den **Phasengang**  $\theta(\omega)$  separiert werden:

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \dots A_{zm} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \dots + \theta_{zm})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \dots A_{pn} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \dots + \theta_{pn})}}$$

#### Betrag

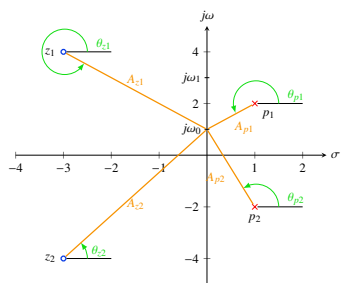
$$|H(j\omega_0)| = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{j=1}^n A_{pj}}$$

#### Phase

$$\theta(\omega_0) = \underbrace{\text{Phase von } K}_{\text{meistens 0}} + \sum_{i=1}^m \theta_{zi} - \sum_{j=1}^n \theta_{pj}$$

Damit Pole / NS komplex konjugiert werden: Diskriminante  $D = b^2 - 4ac \stackrel{!}{<} 0$

### 3.6.1 Zusammenhang mit Pol-/Nullstellendiagramm



Die Auswertungsfrequenz  $j\omega$  ist variabel und 'wandert' auf der **imaginären Achse**. Für eine bestimmte Auswertungsfrequenz  $j\omega_0$  können die Faktoren von  $H(j\omega_0)$  als **Abstand** und **Phase** zu den Pol- bzw Nullstellen interpretiert werden. Somit kann grafisch aus dem Pol-/Nullstellendiagramm ein Rückschluss auf den Amplitudengang gezogen werden.

$$H(j\omega_0) = K \cdot \frac{A_{z1} \cdot A_{z2} \cdot e^{j(\theta_{z1} + \theta_{z2})}}{A_{p1} \cdot A_{p2} \cdot e^{j(\theta_{p1} + \theta_{p2})}}$$

### 3.7 Vorgehen Frequenzgang aus Pol-NS-Diagramm ermitteln

- (Schluss-Steigung = Anzahl Nullstellen - Anzahl Polstellen) · 20 dB/Dek
- Sind im Ursprung **keine** Pole / Nullstellen, so ist die Steigung für tiefe Frequenzen = 0
- Befinden sich am gleichen Ort eine Polstelle **und** eine Nullstelle, so heben sie sich auf
- Einfache reelle Nullstelle: Ab dieser Frequenz Steigung von +20 dB/Dek
- Einfacher reeller Pol: Ab dieser Frequenz Steigung von -20 dB/Dek
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Polstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Überschwinger**
- Sind im Pol-NS-Diagramm komplex-konjugierte Nullstellen vorhanden, so enthält der Amplitudengang **Senken**
- Pole bzw. Nullstellen mit **kleinstem Abstand** zum Ursprung haben am meisten Einfluss

### 3.8 Allpassnetzwerk (S. 220)

Ein Allpass ist ein Netzwerk, bei dem der **Amplitudengang für alle Kreisfrequenzen  $\omega$  konstant** ist

$$|H(j\omega)| = \text{const} \neq 0$$

⇒ Im Pol-/Nullstellendiagramm ist ein Allpass dargestellt durch eine **zur  $j\omega$ -Achse symmetrische Pol-/Nullstellenkonfiguration**



$$\text{UTF Allpass: } H_A(s) = K \cdot \frac{Q(-s)}{Q(s)}$$

Für einen Allpass gilt:

- Ein stabiler Allpass besitzt einen **streng monoton abfallenden** Phasengang
- Jede beliebige (realisierbare) UTF  $H(S)$  kann **immer** in ein allpassfreies Netzwerk  $H_M(s)$  und einen Allpass  $H_A(s)$  **zerlegt** werden (⇒ siehe Beispiel Abschnitt 3.9)

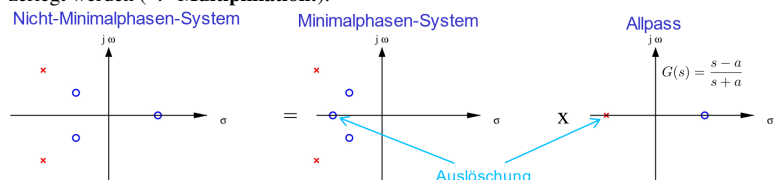
$$H(s) = H_M(s) \cdot H_A(s)$$

### 3.9 Minimalphasige- und nicht-minimalphasige Systeme (S. 221)

- Minimalphasennetzwerke:
  - besitzen **keine Nullstellen in der rechten Halbebene (RHE)** ( $\sigma \leq 0$ )
  - ⇒ Nullstellen auf der  $j\omega$ -Achse sind erlaubt!
  - **entweder** ein frei wählbarer Amplituden- **oder** Phasengang
- Nicht-Minimalphasennetzwerke
  - Amplituden- und Phasengang unabhängig voneinander wählbar

#### Beispiel: Zerlegung nicht-minimalphasiges System

Ein nicht-minimalphasiges System kann in ein minimalphasiges System und einen Allpass zerlegt werden (⇒ **Multiplikation!**).



### 4 Bodediagramm (S. 222)

Beispiele verschiedener Bodediagramme und zugehöriger Pol-/Nullstellendiagramme siehe Skript, Kapitel 5.4.3 (S. 222)

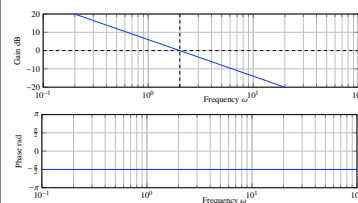
#### 4.1 Bodediagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 0.1 * s; % UTF des Systems
3 bode(G) % Bode-Plot des Systems
4 bodemag(G) % Amplitudengang des Systems
```

### 4.2 Approximationen im Bodediagramm (S. 230)

#### 4.2.1 Pol im Ursprung

$$H(s) = \frac{\alpha}{s} = \frac{2}{s}$$



Betrag zeichnen

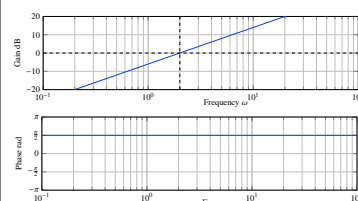
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei  $\omega = \alpha$
3. Gerade mit  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$  durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch  $-\frac{\pi}{2}$

#### 4.2.2 Nullstelle im Ursprung

$$H(s) = \alpha \cdot s = 3 \cdot s$$



Betrag zeichnen

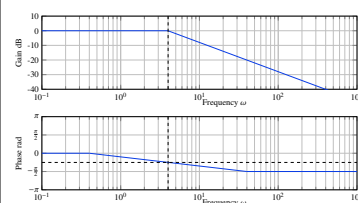
1. Waagrechte Gerade fein einzeichnen bei 0 dB
2. Senkrechte Gerade fein einzeichnen bei  $\omega = \frac{1}{\alpha}$
3. Gerade mit  $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$  durch Schnittpunkt der beiden feinen Geraden einzeichnen

Phase zeichnen

1. Waagrechte Gerade durch  $+\frac{\pi}{2}$

#### 4.2.3 Reeller Pol

$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{4}{s + 4}$$

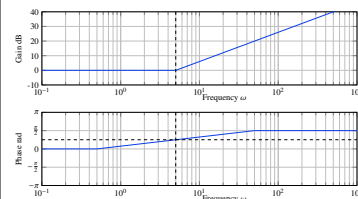


Betrag zeichnen

1. 0 dB von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \alpha$
  2.  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$  einzeichnen ab  $\omega = \alpha$
- Phase zeichnen
1. 0 bis  $\omega = \frac{\alpha}{10}$
  2.  $-\frac{\pi}{2}$  ab  $\omega = 10 \cdot \alpha$
  3. Gerade zwischen beiden Geraden
  4.  $(-\frac{\pi}{4})$  bei  $\omega = \alpha$

#### 4.2.4 Reelle Nullstelle

$$H(s) = \frac{s + \alpha}{\alpha} = \frac{s}{\alpha} + 1 = \frac{s + 5}{5}$$



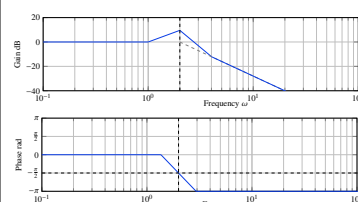
Betrag zeichnen

1. 0 dB von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \alpha$
  2.  $+20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$  einzeichnen ab  $\omega = \alpha$
- Phase zeichnen
1. 0 bis  $\omega = \frac{\alpha}{10}$
  2.  $+\frac{\pi}{2}$  ab  $\omega = 10 \cdot \alpha$
  3. Gerade zwischen beiden Geraden
  4.  $(+\frac{\pi}{4})$  bei  $\omega = \alpha$

#### 4.2.5 Konjugiert-komplexe Pole

$$\text{Voraussetzung: } |q_p| > \frac{1}{2}$$

$$H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} = \frac{2^2}{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}$$



Betrag zeichnen

1. 0 dB von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \frac{\omega_p}{2}$
2.  $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$  fein einzeichnen ab  $\omega_p$   
⇒ stark zeichnen ab  $\omega = 2 \cdot \omega_p$
3. Maximalwert =  $20 \cdot \log_{10}(q_p)$  bei  $\omega_p$
4. Gerade von  $\omega = \frac{\omega_p}{2}$  zu Maximalwert
5. Gerade von Maximalwert zu  $\omega = 2 \cdot \omega_p$

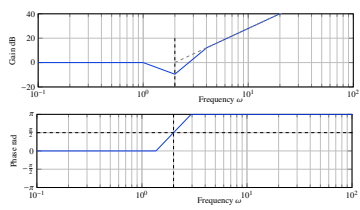
Phase zeichnen

1. 0 bis  $\omega < \frac{\omega_p}{10 \cdot 2q_p}$
2.  $-\pi$  ab  $\omega > \omega_p \cdot 10 \frac{1}{2q_p}$
3. Gerade zwischen 0 und  $\pi$  Geraden
4.  $(-\frac{\pi}{2})$  bei  $\omega = \omega_p$



4.2.6 Konjugiert-komplexe Nullstellen

Voraussetzung:  $|q_z| > \frac{1}{2}$

$$H(s) = \frac{s^2 + s \frac{\omega_z}{q_z} + \omega_z^2}{\omega_z^2} = \frac{s^2 + s \frac{2}{3} + 2^2}{2^2}$$


**Betrag zeichnen**

- 0 dB von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \frac{\omega_z}{2}$
- +40  $\frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$  fein einzeichnen ab  $\omega_z$   
 $\Rightarrow$  stark zeichnen ab  $\omega = 2 \cdot \omega_z$
- Minimalwert =  $-20 \cdot \log_{10}(q_z)$  bei  $\omega_z$
- Gerade von  $\omega = \frac{\omega_z}{2}$  zu Minimalwert
- Gerade von Minimalwert zu  $\omega = 2 \cdot \omega_z$

**Phase zeichnen**

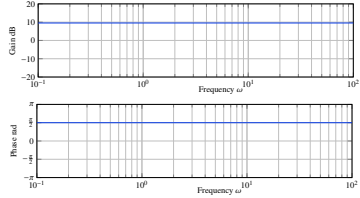
- 0 bis  $\omega < \frac{\omega_z}{10 \cdot 2q_z}$
- + $\pi$  ab  $\omega > \omega_z \cdot 10 \cdot 2q_z$
- Gerade zwischen 0 und  $-\pi$  Geraden
- ( $\frac{\pi}{2}$  bei  $\omega = \omega_z$ )

Hinweis: Berechnungs-Tabelle aus Skript, S. 235

$q_p$	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$10^{\frac{1}{20q_p}}$	10	3.16	2.15	1.78	1.47	1.33	1.26	1.21	1.15	1.12	1.06	1.02	1.01
$10^{-\frac{1}{20q_p}}$	0.1	0.316	0.464	0.562	0.681	0.750	0.794	0.825	0.866	0.891	0.944	0.977	0.989

4.2.7 Konstanter Faktor

- $H(s) = \alpha \cdot e^{j\beta} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ 
  - Betrag =  $20 \cdot \log_{10}(\alpha) = \text{const}$
  - Phase =  $\beta = \text{const}$



4.2.8 Weitere Bemerkungen

- Inverser Frequenzgang:**
  - Amplitudengang an 0 dB-Linie spiegeln
  - Phasengang an 0 rad- bzw. 0°-Linie spiegeln
- Serieschaltung von mehreren Teilsystemen**
  - Erfolgt durch **grafische Addition** der einzelnen Systeme
- Bei Knickpunkten ist Approximationsfehler am größten

4.3 Ergänzung: Konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen (S. 228)

Ein Tiefpass 2. Ordnung enthält eine Überhöhung und somit ein absolutes Maximum.

UTF Tiefpass 2. Ordnung:  $H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2}$

Frequenz beim Maximum:  $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2q_p^2}} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\sigma_p^2}$

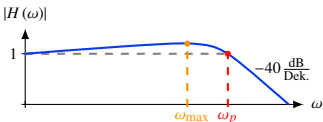
Höhe des Maximums:  $|H(\omega_{\max})| = \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4q_p^2}}}$

$\Rightarrow$  Es gilt:  $\omega_{\max} \leq \omega_p$

**4.3.1 Spezialfall  $q = 1$**

Frequenz:  $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$

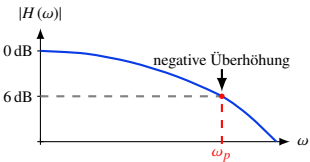
Höhe:  $|H(\omega_{\max})| = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1.15$



4.3.2 Spezialfall  $q = \frac{1}{2}$

Frequenz:  $\omega_{\max} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(\frac{1}{2})^2}} = \omega_p \cdot \sqrt{1 - 2} \in \mathbb{C}$

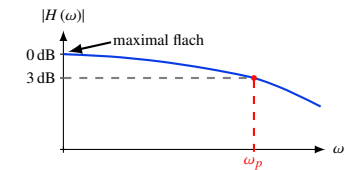
Höhe:  $|H(\omega_{\max})| = \infty$



4.3.3 Spezialfall  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Frequenz:  $\omega_{\max} = 0$

Höhe:  $|H(\omega_{\max})| = q_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB}$



5 Stabilität im Bodediagramm

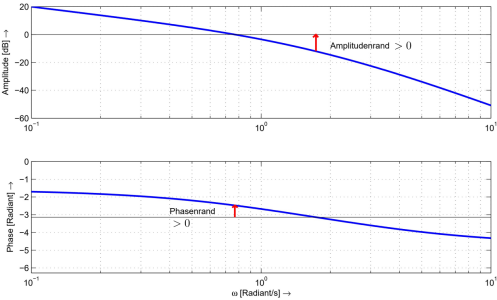
Es gilt, dass wenn der **offene** Regelkreis  $H(s)$  nur Pole in der linken  $s$ -Halbebene hat (und höchstens zwei Pole im Ursprung bei  $s = 0$ ), der **geschlossene** Regelkreis genau dann **asymptotisch stabil** ist, wenn  $H(j\omega)$  für die **Durchgangsfrequenz**  $\omega_D$  bei der die Amplitude  $20 \cdot \log_{10}(|H(j\omega_D)|) = 0 \text{ dB}$  ist, und eine Phase  $> -\pi$  hat.  
 $\Rightarrow$  Amplitudenrand und Phasenrand müssen  $> 0$  sein, damit das System stabil ist!

5.1 Amplitudenrand und Phasenrand

- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**

- Abstand des Amplitudengangs zur 0 dB-Linie bei der Kreisfrequenz  $\omega$ , bei der die Phase gleich  $-\pi$  bzw.  $-180^\circ$  ist.
- Phasenrand (Phasenreserve)**
  - Abstand des Phasengangs zur  $-\pi$ -Linie bei der Kreisfrequenz  $\omega$ , bei der die Amplitude gleich 0 dB ist.

5.2 Amplitudenrand und Phasenrand im Bodediagramm



Das System ist **stabil**, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand  $> 0$  sind.

6 Ortskurve (Nyquist-Diagramm) (S. 240)

Bei der Ortskurve werden alle komplexen Werte des Frequenzgangs in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  (aufsteigende Werte von  $f$ ) in der **komplexen Ebene** eingetragen. Ortskurven werden vor allem in der Regelungstechnik dazu verwendet, um die **Stabilität** eines geschlossenen Regelkreises abzuschätzen.

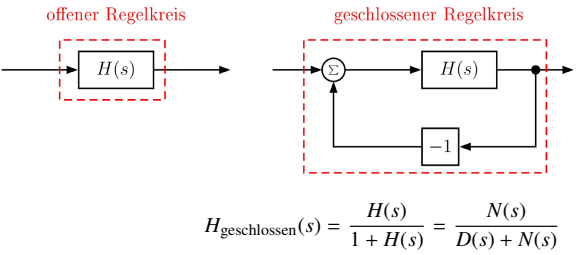
6.1 Nyquistdiagramme mit Matlab

```
1 s = tf('s');
2 G = 1 + 1/s; % UTF des Systems
3 nyquist(G)
```

7 Stabilität im Nyquist-Diagramm

Die Idee des Nyquist-Kriteriums ist es, anhand der **Ortskurve**  $H(s)$  (**offener Regelkreis**) einen Aussage über die **Stabilität** des **geschlossenen Regelkreises** zu machen. Ausserdem kann mittels **Amplitudenrand** und **Phasenrand** eine **relative Aussage** über die Stabilität des Systems gemacht werden.

7.1 Offener und geschlossener Regelkreis



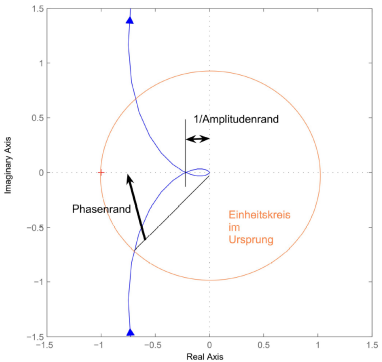
7.2 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

Ist der **offene** Regelkreis  $H(s)$  **asymptotisch stabil** (alle Pole in der LHE), so ist der **geschlossene** Regelkreis  $\frac{H(s)}{1+H(s)}$  asymptotisch stabil, wenn die **Ortskurve** des **offenen** Regelkreises den kritischen Punkt  $(-1 + j0)$  mit wachsender Frequenz weder umkreist noch durchläuft, sondern 'links liegen lässt'.

7.3 Amplitudenrand und Phasenrand (Verstärkungsreserve)

- Mit dem Amplitudenrand und dem Phasenrand kann ausgesagt werden, um wieviel entweder die **Verstärkung** oder die **Phase** erhöht werden kann, bis der geschlossene Regelkreis **instabil** (bzw. **grenzstabil**) wird.
- Amplitudenrand (Verstärkungsreserve)**
    - Frequenz, bei welcher die **negative** reelle Achse geschnitten wird:  $\omega_\pi$
    - Bei  $\omega_\pi$ :  $\frac{1}{\text{Amplitudenrand}}$  = Abstand zum Ursprung
  - Phasenrand (Phasenreserve)**
    - Frequenz, bei welcher Eintritt in den Einheitskreis erfolgt:  $\omega_D$
    - Bei  $\omega_D$ : Winkel bis zu  $180^\circ$

7.4 Amplitudenrand und Phasenrand im Nyquist-Diagramm



Das System ist **stabil**, da der kritische Punkt  $(-1 + j0)$  'links liegen gelassen' wird, wenn man sich mit aufsteigender Frequenz auf der Ortskurve bewegt. Es kann auch argumentiert werden, dass das System stabil ist, da sowohl Amplitudenrand als auch Phasenrand  $> 0$  sind.

## 8 Zustandsraumdarstellung (ZRD)

**Grundidee:** Differentialgleichung  $n$ . Ordnung eines Systems durch ein **Differentialgleichungssystem** von  $n$  Gleichungen 1. Ordnung darzustellen.

### 8.1 Vorteile der Zustandsraumdarstellung (S. 253-254)

- Innere Systemstabilitäten können erkannt werden, die bei der Untersuchung der UTF nicht festgestellt werden können  $\Rightarrow$  Einblick in den **inneren Aufbau** eines Systems
- Wichtig in der Regelungstechnik
- ZRD hat Vorteile bei der **numerischen** Behandlung von Systemen
- Beschreibung durch **Energiespeicher**
  - in der Elektrotechnik  $L$  und  $C$
- Nur Integratoren** werden verwendet, keine Differentiatoren

### 8.2 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Zeitbereich (S. 255)

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t)\end{aligned}$$

$\underline{u}(t)$  Eingangsvektor ( $m$  Zeilen)  
 $\underline{x}(t)$  Zustandsvektor ( $n$  Zeilen)  
 $\underline{y}(t)$  Ausgangsvektor ( $k$  Zeilen)

- obere Gleichung: **Zustandsgleichung**
- untere Gleichung: **Ausgangsgleichung**
- A Systemmatrix** ( $n \times n$ -Matrix)  
 Sie bestimmt das Verhalten des **ungestörten Systems** ( $\underline{u}(t) = 0$ ) und bestimmt z.B. die innere Stabilität des gesamten Systems.
- B Eingangsmatrix (Steuermatrix)** ( $n \times m$ -Matrix)  
 Sie bestimmt die Wirkung der **Steuergrößen**  $\underline{u}(t)$  auf die **Zustandsgrößen**  $\underline{x}(t)$
- C Ausgangsmatrix (Beobachtungsmatrix)** ( $k \times n$ -Matrix)  
 Sie kennzeichnet die Abhängigkeit des **Zustandes**  $\underline{x}(t)$  von der beobachtbaren Ausgangsgröße  $\underline{y}(t)$
- D Durchgangsmatrix** ( $k \times m$ -Matrix)  
 Sie bestimmt die unmittelbare Wirkung der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  auf den Ausgang  $\underline{y}(t)$

#### Beispiel: ZDR aus Differentialgleichung aufstellen

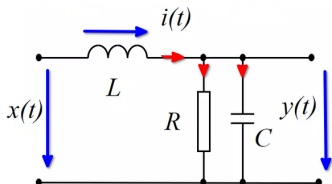
Gegeben ist folgende DGL:  $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + \frac{1}{2}y(t) = u(t)$   
 Die Differentialgleichung kann in zwei Gleichungen 1. Ordnung zerlegt werden:  $x_2 = y$  und  $x_1 = \dot{y}$ . Somit ergibt sich folgendes dynamisches Verhalten der Zustände:

$$\dot{x}_2 = \dot{y} = x_1, \quad \dot{x}_1 = \ddot{y} = u - \dot{y} - \frac{1}{2}y = u - x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

In Matrixschreibweise ergibt sich also die ZDR:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

#### Beispiel: ZRD aus Schaltung aufstellen



- DGL Induktivität:  $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$   
 $\Rightarrow u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- DGL Kapazität:  $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}$   
 $\Rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$

Maschen:  $L \cdot \frac{\partial i(t)}{\partial t} + y(t) = x(t)$   
 Knoten:  $\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \left( i(\tau) - \frac{y(\tau)}{R} \right) d\tau = y(t)$

Beide Gleichungen in ihre differentielle Form bringen (zweite Gleichung ableiten)

$$L \cdot i'(t) + y(t) = x(t) \\ i(t) - \frac{y}{R} = C \cdot y'(t)$$

Gleichungen umformen, sodass die ZRD aufgestellt werden kann

$$\begin{aligned}i'(t) &= -\frac{1}{L}y(t) + \frac{1}{L}x(t) \\ y'(t) &= \frac{1}{C}i(t) - \frac{1}{RC}y(t)\end{aligned}$$

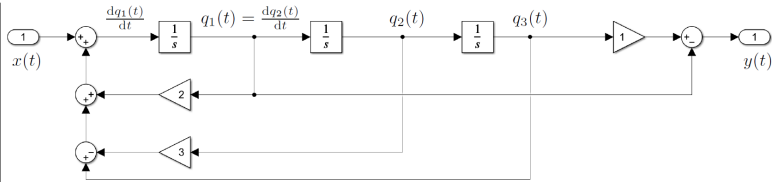
Zustände:  $i(t), y(t)$   
 Eingang:  $x(t)$   
 Ausgang:  $\tilde{y}(t) = y(t)$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} i'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t) \\ \tilde{y}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot u(t)\end{aligned}$$

#### Beispiel: ZRD aus Signalflussdiagramm aufstellen

Das ZRD zu folgendem System soll aufgestellt werden. Dazu müssen die Matrizen  $A, B, C$  und  $D$  gefunden werden.

$$\text{Zustandsvektor: } \underline{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} \text{ und dessen Ableitung } \dot{\underline{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix}$$

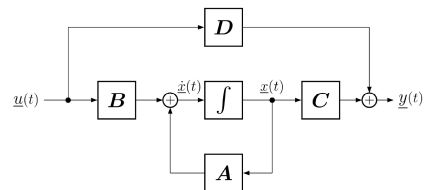


$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B \cdot x(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \cdot u(t)\end{aligned}$$

### 8.3 Zustandsraumdarstellung (ZRD) im Laplace-Bereich (S. 264)

$$\begin{aligned}s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \underline{A}\underline{X}(s) + \underline{B}\underline{U}(s) \\ \underline{Y}(s) &= \underline{C}\underline{X}(s) + \underline{D}\underline{U}(s)\end{aligned}$$

$\underline{U}(s)$  Eingangsvektor ( $m$  Zeilen)  
 $\underline{X}(s)$  Zustandsvektor ( $n$  Zeilen)  
 $\underline{Y}(s)$  Ausgangsvektor ( $k$  Zeilen)  
 $\underline{I}$  Einheitsmatrix  
 $\underline{H}(s)$  Übertragungsmatrix ( $k \times m$ )



$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

Mit Anfangsbedingungen  $\underline{x}(0) = 0$  ergibt sich folgender Zusammenhang, was der Übertragungsfunktion (UTF) entspricht, aber im allgemeinen Fall eine **Matrix** ist.

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}}_{\underline{H}(s)} \underline{U}(s)$$

**Hinweis:** Die Übertragungsmatrix  $\underline{H}(s)$  lässt sich auch aus den diagonalisierten Matrizen berechnen!

$$\underline{H}(s) = \underline{C} \text{diag}(s\underline{I} - \underline{A}_{\text{diag}})^{-1} \underline{B}_{\text{diag}} + \underline{D}_{\text{diag}}$$

**Hinweis:** Aus einem Signalflussdiagramm (SFD) ist es meist sehr einfach, die gesuchten Größen der ZRD zu finden.

#### 8.3.1 Übertragungsmatrix und Übertragungsfunktion (S. 266)

##### Übertragungsmatrix

- MIMO-Systeme
- Beschreibung in Matrizenform

$$\underline{Y}(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{U}(s)$$

- $\underline{H}(s)$  hat gleiche Grösse (Dimensionen) wie Durchgangsmatrix  $\underline{D}$

##### Übertragungsfunktion

- SISO-Systeme
- Matrix-Form wird zu 'normaler' Gleichung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

### 8.4 Ordnung eines Systems (S. 256)

Die **Ordnung** eines Systems definiert die **kleinste Anzahl von Zustandsgrößen**  $x(t)$ . Äquivalent dazu kann die Ordnung eines Systems auch als die **Anzahl der unabhängigen Energiespeicher** definiert werden.

### 8.5 ZRD mit Matlab

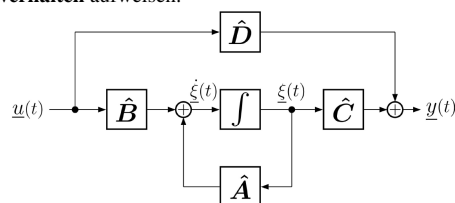
$$H(s) = \frac{b_1 s^i + b_{i-1} s^{i-1} \dots b_1 s^1 + b_0}{a_i s^i + a_{i-1} s^{i-1} \dots a_1 s^1 + a_0}$$

- `[b, a] = ss2tf(A,B,C,D)` %  $\underline{H}(s)$  aus Matrizen berechnen
- `(A,B,C,D) = tf2ss(b, a)` % Matrizen aus  $\underline{H}(s)$  berechnen

### 8.6 Äquivalente Zustandsraumdarstellung (ZRD) (S. 257)

Mit einer **Transformationsmatrix**  $\underline{T}$  ( $n \times n$ -Matrix, nicht singulär,  $\underline{T}\underline{T}^{-1} = \underline{I} = \underline{T}^{-1}\underline{T}$ ) kann man **verschiedenste Zustandsgrößen** und **Zustandsraumdarstellungen** erhalten, die aber alle ein **identisches Systemverhalten** aufweisen.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\xi}}(t) &= \underbrace{\underline{T}\underline{A}\underline{T}^{-1}}_{\hat{A}} \underline{\xi}(t) + \underbrace{\underline{T}\underline{B}}_{\hat{B}} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underbrace{\underline{C}\underline{T}^{-1}}_{\hat{C}} \underline{\xi}(t) + \underbrace{\underline{D}}_{\hat{D}} \underline{u}(t)\end{aligned}$$



Die obige ZRD ist **äquivalent** zur ZRD aus Abschnitt 8.2 bezüglich  $\underline{y}(t)$  und  $\underline{u}(t)$ . Das bedeutet, dass die **Zustandsgrößen**  $\underline{\xi}(t)$  und  $\underline{x}(t)$  **willkürlich** gewählt werden können, solange  $\mathbf{T}$  nicht singular ist (Determinante von  $\mathbf{T} \neq 0$ ).

Physikalisch sinnvolle Zustandsgrößen sind:

- Spannungen über Kapazitäten
- Ströme durch Induktivitäten

8.7 Matrizen diagonalisieren

Oft wird die **Systemmatrix**  $\mathbf{A}$  diagonalisiert, um **entkoppelte Zustände** zu erhalten. Anstelle der Matrix  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$  wird dann üblicherweise  $\mathbf{A}_{\text{diag}}$  verwendet.

$\lambda_i$	Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$
$\vec{v}_i$	Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{V}$	Matrix mit Eigenvektoren von $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda}$	Diagonalisierte Matrix $\mathbf{A}$ mit Eigenwerten $\lambda_i$ auf Diagonale
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix

$$\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$$
$$\mathbf{C}_{\text{diag}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{V}$$

$$\mathbf{B}_{\text{diag}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$
$$\mathbf{D}_{\text{diag}} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}^{-1}$$
$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{V}$$

8.7.1 Vorgehen Matrix A diagonalisieren

- Ansatz:  $\mathbf{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$  bzw.  $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$
- Determinante des charakteristischen Polynoms Null setzen:  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Rightarrow$  Eigenwerte  $\lambda_i$
- Für jeden gefundenen Eigenwert müssen Eigenvektoren  $\vec{v}_i$  gefunden werden:
  - Eigenwert  $\lambda_i$  in Gleichungssystem  $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$  einsetzen
  - Einen Wert von  $\vec{v}_i = 1$  wählen und Eigenvektor  $\vec{v}_i$  als Spaltenvektor schreiben
- Matrix  $\mathbf{V}$  aus Eigenvektoren 'zusammenbauen'
- Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  'zusammenbauen', indem man Eigenwerte  $\lambda_i$  auf Diagonale schreibt

Beispiel: Matrix A diagonalisieren (S. 258)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 7 \\ -1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) - 7 \cdot (-1) = 0$$

$\Rightarrow$  Mitternachtsformel  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  liefert die Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 5$

Form:  $a\lambda^2 + b\lambda + c$

Ersten Eigenwert  $\lambda_1 = -1$  in  $(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$  einsetzen

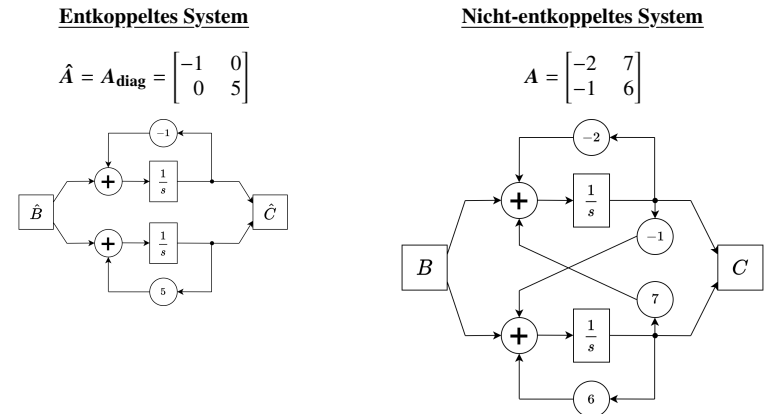
$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$
$$1 \cdot v_{11} - 7 \cdot v_{21} = 0$$

Wähle  $v_{21} = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

Gleiches Vorgehen für zweiten Eigenvektor  $\vec{v}_2$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{V} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

8.7.2 Entkoppeltes vs. nicht-entkoppeltes System



8.8 Einschub – Lineare Algebra: 2x2 Matrix invertieren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{mit } \det(\mathbf{A}) = ad - bc$$

8.9 Lösung der ZRD im Zeitbereich (S. 259-260)

Die Zustandsgleichung  $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A} \underline{x}(t) + \mathbf{B} \underline{u}(t)$  ist eine Differentialgleichung. Sie soll mit dem Ansatz einer Exponentialfunktion gelöst werden. Für Systeme mit nur **einem Zustand** würde man den Ansatz  $\underline{x}(t) = e^{at}$  wählen.

Da im Allgemeinen Systeme mit **mehreren Zuständen** betrachtet werden, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Der Ansatz ist beschrieben als **Taylor-Reihe**.

Durch einsetzen des Ansatzes in die Zustandsgleichung ergibt sich für den Ausgangsvektor  $\underline{y}(t)$  die folgende Lösung der ZRD im Zeitbereich

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} \Phi(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} \Phi(t - \tau) \mathbf{B} \underline{u}(\tau) \, d\tau + \mathbf{D} \underline{u}(t)$$

**Hinweis:**  $\Phi(t) = e^{At}$  heisst **Fundamentalmatrix**.

8.10 Fundamentalmatrix (S. 260-263)

Die Fundamentalmatrix (auch Transitionsmatrix genannt) ist definiert als

$$e^{At} = \Phi(t)$$

Sie wird benötigt, um die Zustandsraumdarstellung im **Zeitbereich** zu lösen. Es gibt mehrere Methoden, die quadratische ( $n \times n$ ) Fundamentalmatrix zu bestimmen.

8.10.1 Methode 1 – Inverse Laplace-Transformation

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

Beispiel: Inverse Laplace-Transformation

Mit der **Systemmatrix**  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  ergibt sich  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$

Somit ist  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \bullet \circ \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \Phi(t)$

8.10.2 Methode 2 – Diagonalisierung von  $\Phi(t) = e^{At}$

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathbf{V} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{\Phi_{\text{diag}}(t)} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

Wenn  $\mathbf{A}_{\text{diag}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$  ist und  $\lambda_i$  die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind.

8.10.3 Methode 3 – Spektrale Zerlegung

$\Rightarrow$  TODO

8.10.4 Methode 4 – Satz von Cayley-Hamilton

Der Satz von Caley-Hamilton besagt, dass jede quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  ihr eigenes charakteristisches Polynom erfüllt. Das bedeutet, wenn man das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  berechnet und dann die Matrix  $\mathbf{A}$  selbst einsetzt, ergibt sich die Nullmatrix.

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n = 0$$

Der Satz von Caley-Hamilton besagt nun, dass wenn man anstelle von  $\lambda$  die Matrix  $\mathbf{A}$  selbst einsetzt, die folgende Gleichung immer noch gilt:

$$p(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{A}^2 + \dots + a_n \mathbf{A}^n = 0$$

Beispiel: Satz von Cayley-Hamilton

Gegeben sei die  $2 \times 2$  Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

char. Polynom:  
 $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass:

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Alle Terme können nun eingesetzt werden:

$$\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zusammenhang zwischen Satz von Cayley-Hamilton und der  $\Phi(t)$

Das Ziel ist es, wie bereits im vorangegangenen Beispiel, die **Fundamentalmatrix**  $e^{At}$  zu bestimmen. Dies lässt sich mithilfe der folgenden Taylor-Reihe ausdrücken:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

Um diese Reihe zu vereinfachen, wird der **Satz von Cayley-Hamilton** eingesetzt. Dieser besagt, dass jede quadratische Matrix  $\mathbf{A}^k$  ihr eigenes charakteristisches Polynom erfüllt. Dadurch können alle höheren Potenzen  $\mathbf{A}^k$  mit  $k \geq n$  durch eine Linearkombination der Matrizen  $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$  dargestellt werden. Somit ergibt sich eine endliche Darstellung

der Matrixexponentialfunktion:

$$e^{At} = b_0(t)\mathbf{I} + b_1(t)\mathbf{A} + b_2(t)\mathbf{A}^2 + \dots + b_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1}$$

Mit dem Zusammenhang der Eigenwerte ergibt sich schliesslich:

$$e^{\lambda_i t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_i + b_2(t)\lambda_i^2 + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

Zusammenfassung für 2x2-Matrix:

Für eine **2x2-Matrix** müssen also die **Eigenwerte** bestimmt werden und dann folgendes Gleichungssystem nach  $b_0(t)$  und  $b_1(t)$  aufgelöst werden:

$$e^{\lambda_0 t} = b_0(t) + b_1(t) \cdot \lambda_0 e^{\lambda_1 t} = b_0(t) + b_1(t) \cdot \lambda_1$$

Die **Fundamentalmatrix**  $\Phi(t)$  kann dann über die folgende Gleichung einfach berechnet werden:

$$\Phi(t) = e^{At} = b_0(t) \cdot \mathbf{I} + b_1(t) \cdot \mathbf{A}$$



Beispiel: Bestimmung von  $\Phi(t)$  mittels Satz von Cayley-Hamilton

Gegeben sei die Systemmatrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
 char. Polynom:  
$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

Somit ergeben sich die Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = -2$ . Eingesetzt in obiges System ergibt:

$$e^{-1t} = b_0(t) - b_1(t) * e^{-2t} = b_0(t) - 2b_1(t)$$

woraus sich für  $b_0(t)$  und  $b_1(t)$  folgende Funktionen ergeben:

$$b_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \qquad b_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Eingesetzt in:

$$\Phi(t) = e^{At} = b_0(t) \cdot I + b_1(t) \cdot A$$

ergibt sich die Fundamentalmatrix:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} + e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8.10.5 Methode 5 – Definition der Reihenentwicklung

Die Matrix  $A$  sei definiert als eine Dreiecksmatrix mit Parametern  $a$  und  $c$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

Die Potenz der Matrix wird berechnet aus

$$A^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-l-1} c^l & c^k \end{bmatrix}$$

Beispiel: Definition der Reihenentwicklung

Für  $a = 1$  und  $c = -2$  ergibt sich für  $A^k$

$$A^k = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^k - (-2)^k & (-2)^k \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Fundamentalmatrix ist mittels Anwendung der Taylor-Reihe somit

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

8.10.6 Eigenschaften der Fundamentalmatrix  $\Phi(t) = e^{At}$

$\Phi(0) = I$	$e^{A \cdot 0} = I$
$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$	$(e^{A \cdot t})^{-1} = e^{-A \cdot t}$
$\Phi^k(t) = \Phi(kt)$	$(e^{A \cdot t})^k = e^{A \cdot k \cdot t}$
$\Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2)$	$e^{A \cdot t_1} \cdot e^{A \cdot t_2} = e^{A(t_1+t_2)}$
$\Phi(t_2 - t_1) \cdot \Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$	$e^{A(t_2-t_1)} \cdot e^{A(t_1-t_0)} = e^{A(t_2-t_0)}$

Hinweis:  $\Phi(t)$  ist stets invertierbar

8.10.7 Fundamentalmatrix in Matlab

```
1 syms t % t als symbolischer Wert
2 A = [0 6; 1 5]; % Matrix A
3 expm(A*t) % Fundamentalmatrix
```

8.11 Lösung der ZRD im Zeitbereich – SISO-Systeme (s. 263)

Die Impulsantwort  $h(t)$  eines SISO-Systems ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= C \Phi(t) B * u(t) + D u(t) = h(t) * u(t) \\ h(t) &= C \Phi(t) B + D \delta(t) \end{aligned}$$

8.12 Stabilität von ZRDs (s. 275)

Ein LTI-System ist **asymptotisch stabil**, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen (bzw. einen negativen Realteil haben).

Unter Betrachtung der ZRD wird diese Bedingung interpretiert als: Wenn alle **Eigenwerte** der **Systemmatrix**  $A$  einen **negativen Realteil** besitzen, ist das System **asymptotisch stabil**.

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \rightarrow \quad \forall \lambda \quad \text{Re}\{\lambda\} < 0$$

**Achtung: Umgekehrt gilt diese Aussage nicht!** Ein asymptotisch stabiles LTI-System bedeutet **nicht**, dass alle Eigenwerte der Systemmatrix  $A$  des Systems einen negativen Realteil besitzen.  
⇒ Pol-/Nullstellenkürzungen

8.13 Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit – Begriffe (s. 277)

Beobachtbarkeit der Zustände

- Ein System ist **beobachtbar**, wenn wir, gegeben das Eingangssignal  $\underline{u}(t)$  und das Ausgangssignal  $y(t)$ , über eine endliche Zeitspanne  $t_0 \leq t \leq t_1$  die Zustände  $\underline{x}(t)$  eindeutig bestimmen können.
- Ein System ist **nicht beobachtbar**, wenn es Zustände  $\underline{x}(t)$  gibt, die **keinen** Einfluss auf diegänge  $y(t)$  haben.  
⇒ Man kann aus dem Verhalten von  $\underline{y}(t)$  **nicht** auf die Zustände  $\underline{x}(t)$  schliessen.

Steuerbarkeit der Zustände

- Ein System ist **steuerbar**, wenn es für jeden Anfangszustand  $\underline{x}_0$  und jeden Endzustand  $\underline{x}_1$  eine Steuerfunktion  $\underline{u}(t)$  gibt, die das System in einer endlichen Zeitspanne  $t_0 \leq t \leq t_1$  von  $\underline{x}_0$  zu  $\underline{x}_1$  bringt, d.h.  $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$ .
- Ein System ist **nicht steuerbar**, wenn es Zustände  $\underline{x}(t)$  gibt, die nicht von den Eingängen  $\underline{u}(t)$  beeinflusst werden.

Bemerkungen:

- System  $(A, B, C, D)$  ist bekannt
- Äquivalent reicht es, wenn wir  $\underline{x}(0)$  bestimmen können

8.14 Steuerbarkeit (s. 277)

Gemäss der äquivalenten ZRD (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  und  $\hat{D}$  mit einer Matrix  $V$  diagonalisiert, sodass  $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV, \hat{B} = V^{-1}B, \hat{C} = CV$  und  $\hat{D} = D$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ( $A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$ ), **alle** Elemente von  $\hat{B} = V^{-1}B$  **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ( $m > 1$ ) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig steuerbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ( $A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$ ), in **jeder Zeile** von  $\hat{B} = V^{-1}B$  **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.14.1 Steuerbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig steuerbar**, wenn

- Der **Rang** der Steuerbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung**  $n$  des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ( $m = 1$ ): Die **Determinante** von  $Q_{\text{Steuerbarkeit}}$  **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Steuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$		Dimension: $n \times n \cdot m$	
$\mathbf{A}$	Systemmatrix ( $n \times n$ )	$n$	Zustände
$\mathbf{B}$	Eingangsmatrix ( $n \times m$ )	$m$	Eingänge

Steuerbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 ctrb(A, B); % Steuerbarkeitsmatrix
2 rank(ctrb(A, B)) % Rang der Steuerbarkeitsmatrix
```

8.15 Ausgangssteuerbarkeit (s. 280-281)

Vielfach ist nicht nur die Beeinflussung der **Zustände** beim Entwurf eines Regelsystems gewünscht, sondern die Steuerung der **Ausgänge**  $\underline{y}(t)$  Die **vollständige Steuerbarkeit** ist weder hinreichend noch notwendig für die **Ausgangssteuerbarkeit**. Die Ausgangssteuerbarkeit ist definiert als:

Ein **LTI-System** ist **vollständig ausgangssteuerbar**, wenn es eine **Steuerfunktion**  $\underline{u}(t)$  gibt, welche die **Ausgänge**  $\underline{y}(t)$  innerhalb einer endlichen Zeitspanne  $t_0 \leq t \leq t_1$  in einen **Endwert**  $\underline{y}(t_1)$  bringt.

8.15.1 Ausgangssteuerbarkeitsmatrix

Es lässt sich zeigen, dass ein System nur dann vollständig ausgangssteuerbar ist, wenn die Ausgangssteuerbarkeitsmatrix  $Q_{\text{Ausgangssteuerbarkeit}}$  ( $k \times (n + 1) \cdot m$ -**Matrix**) den Rang  $k$  ( $k :=$  Ausgänge) besitzt, wobei gilt:

$$Q_{\text{Ausgangssteuerbarkeit}} = \begin{bmatrix} C & CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^{n-1}BD \end{bmatrix}$$

8.16 Beobachtbarkeit (s. 278)

Gemäss der äquivalenten ZRD (siehe Abschnitt 8.6) werden die Matrizen  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  und  $\hat{D}$  mit einer Matrix  $V$  diagonalisiert, sodass  $\hat{A} = A_{\text{diag}} = V^{-1}AV, \hat{B} = V^{-1}B, \hat{C} = CV$  und  $\hat{D} = D$

Ein **SISO-System** mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Diagonalform** bzw. Parallelform ( $A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$ ), **alle** Elemente von  $\hat{C} = CV$  **ungleich Null** sind.

Ein **MIMO-System** ( $m > 1$ ) mit **einfachen Eigenwerten** ist genau dann **vollständig beobachtbar**, wenn nach der Transformation auf **Parallelform** ( $A_{\text{diag}} = \hat{A} = V^{-1}AV$ ), in **jeder Spalte** von  $\hat{C} = CV$  **mindestens ein Element ungleich Null** ist.

8.16.1 Beobachtbarkeitsmatrix

Ein System ist **vollständig beobachtbar**, wenn

- Der **Rang** der Beobachtbarkeitsmatrix gleich der **Ordnung**  $n$  des Systems
- Falls nur **ein Eingang** ( $m = 1$ ): Die **Determinante** von  $Q_{\text{Beobachtbarkeit}}$  **ungleich Null** ist

$Q_{\text{Beobachtbarkeit}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$	Dimension: $k \cdot n \times n$
$A$	Systemmatrix ( $n \times n$ )
$C$	Beobachtungsmatrix ( $k \times m$ )
$n$	Zustände
$m$	Eingänge
$k$	Ausgänge

Beobachtbarkeitsmatrix in Matlab

```
1 obsv(A, C);           % Beobachtbarkeitsmatrix
2 rank(obsv(A, C))      % Rang der Beobachtbarkeitsmatrix
```

8.17 Standardformen der ZRD (s. 267)

Die allgemeine Differentialgleichung von SISO-Systemen der Form

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

ergibt mit der Laplace-Transformation und mit  $m \leq n$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Diese UTF  $H(s)$  kann mit verschiedenen ZRDs (**Normalformen**) abgebildet werden.  
**Wichtig:** Für alle folgenden Normalformen werden die Zustände  $x_i$  im blockdiagramm unmittelbar nach den Integratoren verwendet.

8.17.1 Regelungsnormalform (S. 267-268)

Die Regelungsnormalform kann **direkt aus der UTF  $H(s)$**  aufgestellt werden.  
Für  $m = n$  sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n & b_1 - a_1 b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist  $m < n$  und die **Ausgangsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.17.2 Beobachtungsnormalform (S. 269-270)

Ein System, welches in Beobachtungsnormalform dargestellt werden kann, ist **beobachtbar!** Für  $m = n$  sieht die Regelungsnormalform folgendermassen aus:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

In den meisten Fällen ist  $m < n$  und die **Zustandsgleichung** vereinfacht sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.17.3 Regelungsnormalform ↔ Beobachtungsnormalform

Die beiden Formen sind **dual** und weisen folgende Zusammenhänge auf (**Transposition**):

- **A** ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt
- **B** und **C** sind vertauscht
- **D** bleibt gleich

8.17.4 Jordan-Normalform (S. 271-273)

Die UTF wird mittels einer **Partialbruchzerlegung** dargestellt. Die Parameter der Partialbruchzerlegung können dann direkt in die Matrix  $A = A_{\text{diag}}$  eingetragen werden.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = b_n + \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

Die Diagonalform für **einfache, reelle Pole** mit  $m = n$  ist:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

**Hinweis:** Mit  $m < n$  vereinfacht sich die **Ausgangsgleichung** zu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

8.17.5 Diagonalform (S. 271-273)

Eine weitere Darstellungsform der Diagonalform ergibt sich mittels **Transposition** der Jordan-Normalform:

- **A** ist an der Hauptdiagonalen gespiegelt (ergibt wiederum **A**)
- **B** und **C** sind vertauscht
- **D** bleibt gleich

9 Filter

9.1 Grundtypen (S. 291)

Filter sind mehrheitlich **frequenzselektive, lineare Netzwerke**, welche gewisse Frequenzbereiche übertragen und andere dämpfen. Die fünf **frequenzselektiven Grundtypen** sind:

- Tiefpass (TP)
- Bandpass (BP)
- Allpass
- Hochpass (HP)
- Bandsperre, Notch (BS)

9.2 Frequenzgang  $H(j\omega)$  – Übertragungsfunktion  $H(s)$  (S. 294)

Für den Frequenzgang  $H(j\omega)$  und die Übertragungsfunktion  $H(s)$  gelten die folgenden Zusammenhänge

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(s) \cdot H(-s) = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

**Hinweis:**  $|H(j\omega)|^2$  ist immer eine Funktion in  $\omega^2$ , da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist!

Da in der Praxis **jeweils nur  $H(s)$  interessant** ist, muss  $H(s)$  aus  $|H(j\omega)|^2$  'isoliert' werden. Dies ist durch den folgenden Zusammenhang möglich.

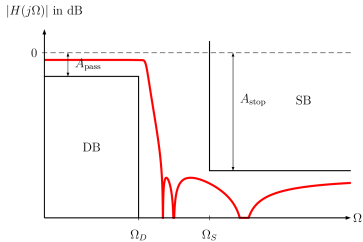
$$\frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N(-s)}{D(-s)} = |H(j\omega)|^2 \Big|_{\omega^2 = -s^2}$$

**Hinweis:**  $D(s)$  muss aus Stabilitätsgründen ein Hurwitz-Polynom sein!

9.3 Approximation im Frequenzbereich

Die wichtigste Aufgabe der Filtertheorie ist die **Bestimmung der Übertragungsfunktion, die einen vorgegebenen Frequenzgang gewährleistet**. Zuerst soll der **Amplitudengang**  $|H(j\omega)|$  im Frequenzbereich approximiert werden. Der vorgeschriebene Phasengang wird dann allenfalls mit zusätzlichen Allpass-Filtern erreicht.

9.3.1 Toleranzschema (Stempel und Matritze) – Filterspezifikation



Die Anforderungen an ein Filter werden häufig im **Toleranzschema beschrieben**. Dieses steht jeweils 'auf dem Kopf'.

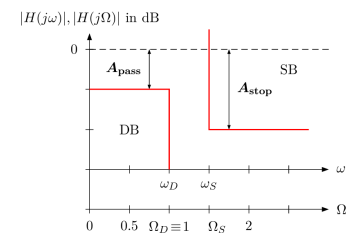
- Im **Durchlassbereich (DB)** bestimmt der Stempel die maximal zulässige **Dämpfung  $A_{\text{max}}$**
- Im **Sperrbereich (SB)** bestimmt die Matritze die minimal nötige **Dämpfung  $A_{\text{min}}$**

$$A_{\text{dB}}(\omega) = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{|H(\omega)|^2}\right) = -20 \cdot \log(|H(\omega)|) \Rightarrow \text{Dämpfung!}$$

### 9.3.2 Frequenznormierung

Um möglichst kompakte **Tabellen** zu haben, wird auf Frequenzen normiert. Grundsätzlich kann auf eine beliebige Frequenz normiert werden. Allerdings gilt grundsätzlich:

- **HP / TP:** Normierung bezüglich **Grenzfrequenz** des Durchlassbereichs  $\omega_r = \omega_D$
- **BP / BS:** Normierung bezüglich der Mittenfrequenz  $\omega_r = \omega_m$

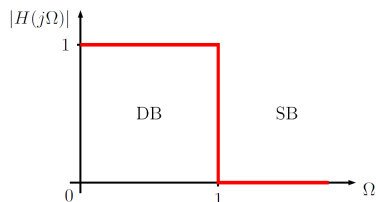


#### Normierte Grössen

$$S = \frac{s}{\omega_r} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_r} \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\omega_r}$$

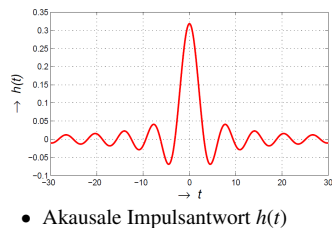
**Entnormierung:** Jeweils  $S$  in der normierten Funktion durch  $\frac{s}{\omega_r}$  ersetzen.

### 9.4 Ideales Tiefpassfilter (S. 297)



- DB: keine Dämpfung
- SB: kein Ausgangssignal

⇒ Ideales Tiefpass ist physikalisch nicht realisierbar. ⇒ **Approximationen**



- Akausale Impulsantwort  $h(t)$

### 9.5 Amplitudengang mit char. Funktion $K(\Omega^2)$

Um Wurzelausdrücke zu vermeiden, wird der folgenden Ansatz verwendet

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)}$$

Im Fall des (idealen) Tiefpasses gilt für die charakteristische Funktion  $K(\Omega^2)$

Durchlassbereich (DB)  $0 \leq K(\Omega^2) \ll 1$  für  $0 \leq \Omega < 1$  ⇒  $|H(j\Omega)|^2 \approx 1$

Sperrbereich (SB)  $K(\Omega^2) \gg 1$  für  $\Omega > 1$  ⇒  $|H(j\Omega)|^2 \approx 0$

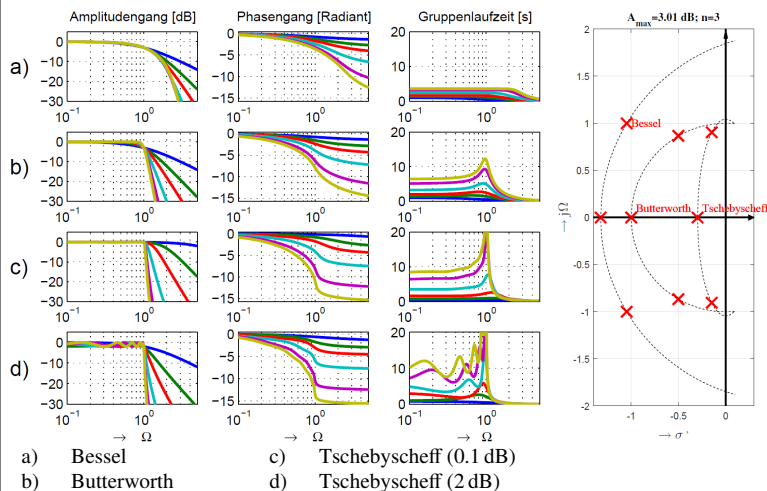
### 9.6 Standard-Filtertypen – Überblick

- **Kritisch-gedämpfte Filter**
  - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
  - + Kein Überspringen bei Impuls- und Sprungantwort
  - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
  - Kaskadierung von  $n$  wirkungsfreien, identischen Filtern 1. Ordnung
  - Bei  $\Omega = 1$  ⇒ Dämpfung von 3 dB
  - Steilheit:  $-n \cdot 20$  dB / Dekade
  - Allpolfilter:  $n$  Pole am gleichen Ort in der LHE
- **Butterworth**
  - + **Kein Rippel** im Durchlass- und Sperrbereich
  - + Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang **maximal flach**
  - Überhöhung in der Gruppenlaufzeit der Grenzfrequenz
  - Braucht **hohe Ordnung** für steilen Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
  - Bei  $\Omega = 1$  ⇒ Dämpfung von 3 dB
  - Steilheit:  $-n \cdot 20$  dB / Dekade
  - Allpolfilter: Pole auf Einheitskreis mit Abstand  $\frac{\pi}{n}$
- **Tschebyscheff-I**
  - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
  - **Rippel im Durchlassbereich** (abhängig von Ordnung  $n$ )
  - Keine konstante Gruppenlaufzeit (wellig)
  - Bei  $\Omega = 1$  ⇒ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor  $e$
  - Steilheit:  $-n \cdot 20$  dB / Dekade
  - Allpolfilter: Pole auf einer Ellipse
- **Tschebyscheff-II**
  - + Schon für kleine Ordnungen **relativ steil** im Übergang von Durchlass- und Sperrbereich
  - **Rippel im Sperrbereich** (abhängig von Ordnung  $n$ )
  - Relativ konstante Gruppenlaufzeit
  - Bei  $\Omega = 1$  ⇒ Dämpfung abhängig von Rippelfaktor  $e$
  - Steilheit:  $-n \cdot 20$  dB / Dekade
  - Kein Allpolfilter
- **Cauer**
  - + Steilster Übergang von Durchlass- zu Sperrbereich
  - **Rippel in Durchlassbereich und Sperrbereich** (abhängig von Ordnung  $n$ )
  - **Kombination aus Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II**
  - Kein Allpolfilter
- **Bessel**
  - + **Flachster Übergang** von Durchlass- und Sperrbereich von allen Filtern
  - + Konstante Gruppenlaufzeit
  - Für steile Filter im Durchlass- und Sperrbereich nicht geeignet
  - Allpolfilter: Pole auf exzentrischen Kreisen in LHE

### 9.7 Gegenüberstellung der Filter-Approximationen

	Krit. Gedämpft	Butterworth	Tschebyscheff 1	Tschebyscheff 2	Cauer	Bessel
Allpolfilter	ja	ja	ja	nein	nein	ja
Pol-Lage	reelle Achse <0	Halbkreis LHE	Ellipse LHE	LHE	Ellipse LHE	exzent. Kreis
NS-Lage	-	-	-	$j\omega$ -Achse	$j\omega$ -Achse	-
DB	monoton	monoton maximalflach	wellig konst. Rippel	monoton	wellig konst. Rippel	monoton
SB	streng	monoton	monoton	wellig konst. Rippel	wellig konst. Rippel	monoton
Phasengang	sehr gut	mittel	schlecht	schlecht	wild	bestmöglich

#### 9.7.1 Frequenzgänge / Lage der Pol- und Nullstellen (S. 334)



### 9.8 Vorgehen Filter dimensionieren / auslegen

1. Gemäss Anforderungen geeigneten Filtertyp wählen (⇒ 9.6)
2. Toleranzschema gemäss Anforderungen erstellen **inkl. Normierung** (⇒ 9.3.1)
3. Ordnung des Filters bestimmen (Formel oder **Nomogramm** ⇒ 9.9)
4. Übertragungsfunktion bestimmen (⇒ **Tabelle: Skript S. 397, Anhang 7B**)
5. Implementierung mit LC-Filtern: Topologie wählen (⇒ **Skript S. 409, Anhang 7C**)
6. **Normierte** Bauteilwerte aus entsprechender Tiefpass-Tabelle herauslesen (Anhang 7C)
7. **Falls nicht auf  $\omega_r = \omega_{3dB}$  normiert wurde:** Normierte Werte auf  $\Omega_{3dB}$  korrigieren: ⇒ Division durch **Korrekturfaktor** aus Skript S. 401 Tabelle 7.8
8. Komponenten mittels **Entnormierung** bestimmen (⇒ 9.10)
9. **Entnormierung** der Frequenz (⇒ 9.3.2)  
 $\omega_{3dB} = \text{Korrekturfaktor} \cdot \omega_r = \text{Korrekturfaktor} \cdot 2\pi f_r$
10. Frequenztransformation (bzw. Komponenten-Transformation) zu HP, BP oder BS durchführen (⇒ 10)

### 9.9 Nomogramme (S. 393)

Nomogramme können verwendet werden, um die **Ordnung eines Filters** zu bestimmen.

#### Benutzung von Nomogrammen

1.  $P_1$ : Verbindung von  $A_{\max}$  zu  $A_{\min}$
2.  $P_2$ : Verlängerung von  $P_1$  bis zum 'Diagramm-Rand'
3.  $P_3$ : Horizontale Linie vom Rand in Diagramm hinein
4.  $P_4$ : Bei  $\Omega = \frac{\Omega_S}{\Omega_D} = \frac{\omega_S}{\omega_D} = \frac{f_S}{f_D}$  vertikale Linie ziehen
5.  $P_5$ : Schnittpunkt: 'hochfahren' zur nächsten Kurve ⇒ Ordnung  $n$  der Kurve ablesen

### 9.10 LC-Filter: Entnormierung der Komponenten

$$L = \frac{L_{\text{norm}}}{\omega_r} \cdot R_r$$

$$C = \frac{C_{\text{norm}}}{\omega_r \cdot R_r}$$

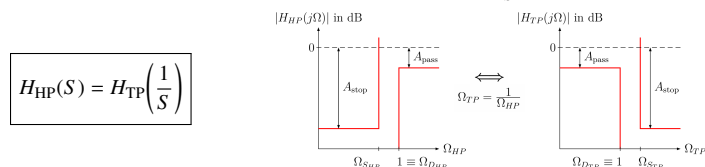
$$R = R_{\text{norm}} \cdot R_r$$

$L_{\text{norm}}$  normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C  
 $C_{\text{norm}}$  normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C  
 $R_{\text{norm}}$  normierter Wert gemäss Skript, Anhang 7C  
 $\omega_r$  Frequenz, auf welche normiert wurde ( $\omega_D$  oder  $\omega_m$  gemäss 9.3.2)  
 $R_r$  Tatsächlicher Wert von  $R_2$  gemäss Topologie Skript S. 409

### 10 Filter-Umwandlungen mittels Frequenztransformation

#### 10.1 Transformation: Tiefpass – Hochpass (S. 344)

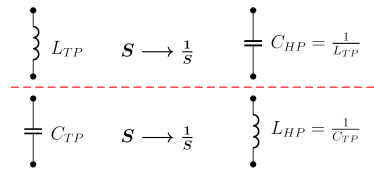
In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle  $S$  durch  $\frac{1}{S}$  ersetzt



Zwischen allen normierten Frequenzen, im Speziellen den normierten **Eckfrequenzen** der **Sperrbereiche**  $\Omega_{S_{TP}}$  und  $\Omega_{S_{HP}}$  und **Durchlassbereiche**  $\Omega_{D_{TP}}$  und  $\Omega_{D_{HP}}$  gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{S_{HP}}} \quad 1 = \Omega_{D_{TP}} = \frac{1}{\Omega_{D_{HP}}}$$

### 10.1.1 Bauteiltransformationen



### 10.1.2 Singularitäten

Pole:  $P_{k,HP} = \frac{1}{P_{k,TP}}$   
Nullstellen:  $Z_{i,HP} = \frac{1}{Z_{i,TP}}$

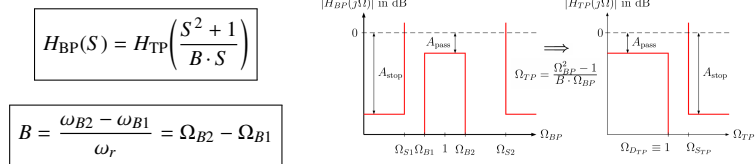
⇒ Polgüte bleibt erhalten

## 10.2 Transformation: Tiefpass – Bandpass (s. 348)

In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle  $S$  durch  $\frac{S^2+1}{B \cdot S}$  ersetzt, wobei  $B$  der normierten Bandbreite entspricht.

**Voraussetzung:**  $\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}}$

Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, muss sie erfüllt werden, indem das Toleranzschema 'strenger' ausgelegt wird.

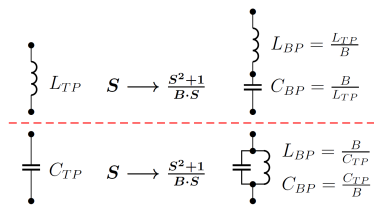


Zwischen allen normierten Frequenzen  $\Omega_{S_{TP}}$ ,  $\Omega_{S1}$ ,  $\Omega_{S2}$ ,  $\Omega_{B1}$  und  $\Omega_{B2}$  gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{B} = \frac{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}}{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}} = \frac{\omega_{S2} - \omega_{S1}}{\omega_{B2} - \omega_{B1}} = \frac{f_{S2} - f_{S1}}{f_{B2} - f_{B1}}$$

**Hinweis:** Die Transformation erhöht die Filterordnung um Faktor 2

### 10.2.1 Bauteiltransformationen



### 10.2.2 Singularitäten

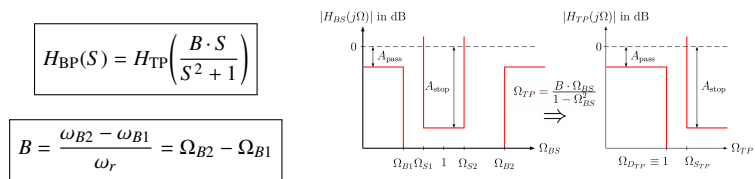
⇒ Siehe Skript S. 351-352

## 10.3 Transformation: Tiefpass – Bandsperre (s. 357)

In der Übertragungsfunktion des Tiefpasses werden alle  $S$  durch  $\frac{B \cdot S}{S^2+1}$  ersetzt, wobei  $B$  der normierten Bandbreite entspricht.

**Voraussetzung:**  $\omega_r = \sqrt{\omega_{B1} \cdot \omega_{B2}} = \sqrt{\omega_{S1} \cdot \omega_{S2}}$

Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, muss sie erfüllt werden, indem das Toleranzschema 'strenger' ausgelegt wird.

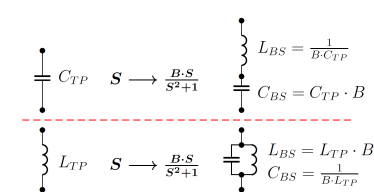


Zwischen allen normierten Frequenzen  $\Omega_{S_{TP}}$ ,  $\Omega_{S1}$ ,  $\Omega_{S2}$ ,  $\Omega_{B1}$  und  $\Omega_{B2}$  gilt:

$$\Omega_{S_{TP}} = \frac{B}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \frac{\Omega_{B2} - \Omega_{B1}}{\Omega_{S2} - \Omega_{S1}} = \frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{\omega_{S2} - \omega_{S1}} = \frac{f_{B2} - f_{B1}}{f_{S2} - f_{S1}}$$

**Hinweis:** Die Transformation erhöht die Filterordnung um Faktor 2

### 10.3.1 Bauteiltransformationen



### 10.3.2 Singularitäten

⇒ Siehe Skript S.359

## 11 Filter-Approximationen im Detail

### 11.1 Approximation mittels kritisch-gedämpfter Filter (s. 299)

Tiefpassfilter  $n$ . Ordnung mit kritischer Dämpfung haben jeweils einen  **$n$ -fachen Pol** auf der **negativen  $\sigma$ -Achse**.

- Impuls- und Sprungantwort können nicht oszillieren
- Geringe Flankensteilheit im Übergangsbereich

Die Übertragungsfunktion  $H(s)$  ergibt sich als:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^n} \quad \begin{array}{ll} n & \text{Ordnung des Filters} \\ \omega_c & 3 \text{ dB-Punkt jedes der } n \text{ Teilfilter} \end{array}$$

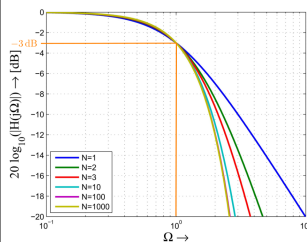
Will man bei der Kreisfrequenz  $\omega_D$  eine Dämpfung von  $\alpha$  dB haben, so muss  $\omega_c$  (der  $n$  identischen Teilfilter) gewählt werden als

$$\omega_c = \frac{\omega_D}{\sqrt{10^{\frac{\alpha}{10n}} - 1}}$$

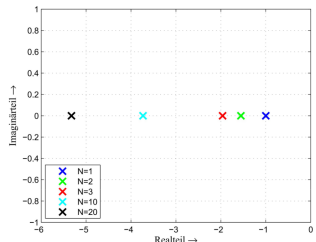
### 11.1.1 Eigenschaften kritisch-gedämpfte Filter

- Alle Pole am **gleichen Ort** auf negativer  $\sigma$ -Achse ⇒ Allpolfilter
- Für  $\Omega = 0$  ist für sämtliche  $n$ :  $|H(0)| = H_{\max} = 1$
- Für  $\Omega = 1$  ist für sämtliche  $n$ :  $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB Dämpfung}$
- Für  $\Omega \gg 1$  wird  $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$
- Amplitudengang bei  $\Omega = 0$  maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit
- Pole verschieben sich bei höherer Ordnung näher in Richtung imaginäre Achse
- Gruppenlaufzeit konstant bis  $\omega_D$

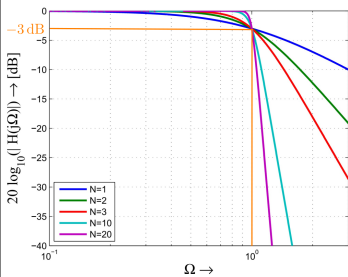
#### Amplitudengänge



#### Pol-Lagen



### 11.2 Approximation nach Butterworth (s. 303)



Die charakteristische Funktion wird bei der Butterworth-Approximation als  $K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n = \Omega^{2n}$  gewählt. Der Amplitudengang  $|H(j\Omega)|$  folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

### 11.2.1 Eigenschaften der Butterworth-Approximation (s. 303)

- Durchlassbereich**
  - Für  $\Omega = 0$  ist für sämtliche  $n$ :  $|H(0)| = H_{\max} = 1$
  - Für  $\Omega = 1$  ist für sämtliche  $n$ :  $|H(j)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 \text{ dB Dämpfung}$
  - Amplitudengang bei  $\Omega = 0$  maximal flach, da alle Ableitungen = 0 sind
- Sperrbereich**
  - Für  $\Omega \gg 1$  wird  $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n} \Rightarrow -n \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$
- Allgemein**
  - Amplitudengang ist streng-monoton fallend ⇒ keine Welligkeit

### 11.2.2 Bestimmung von $H(s)$ aus $|H(j\Omega)|$ (s. 304)

Aus dem Ansatz

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{1}{D(-s)}$$

kann der folgende Teil isoliert betrachtet werden ( $D(s)$  ist ein Hurwitz-Polynom):

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n$$

Mit dem Ansatz

$$D(s) = \prod_{j=1}^n (s^2 + a_j \cdot s + b_j) \prod_{j=2r+1}^n (s - c_j)$$

wird das Produkt  $D(s) \cdot D(-s)$  bestimmt. Anschliessend wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt.

### 11.2.3 Bestimmung der Pol-Lage (s. 307)

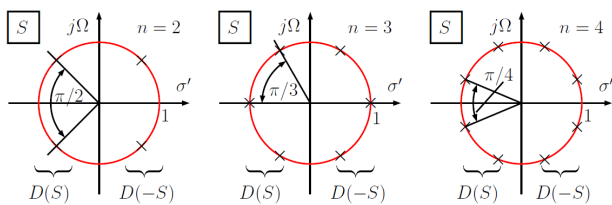
Der Zusammenhang aus Abschnitt 11.2.2 kann für die Bestimmung der Pole auf Null gesetzt werden:

$$D(s) \cdot D(-s) = 1 + (-s^2)^n \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Auflösen der Gleichung nach  $s$  kommen die Pole auf dem **Einheitskreis** zu liegen.

- Abstand zwischen den Polen:  $\frac{\pi}{n}$
- Ordnung  $n$  gerade: keine reellen Pole
- Ordnung  $n$  ungerade: zwei reelle Pole bei  $\pm 1$
- Für **Nummerpolynom**  $D(s) = \frac{1}{H(s)}$  **müssen nur Pole in der linken Halbebene berücksichtigt werden!**



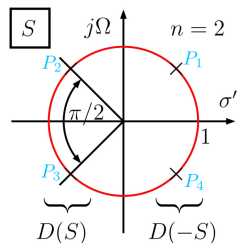


## Beispiel: Butterworth 2. Ordnung – $H(s)$ und Pol-Lage bestimmen

$$\text{Ansatz: } H(S) \cdot H(-S) = \frac{1}{D(S)} \cdot \frac{1}{D(-S)} = \frac{1}{1 + (-S^2)^n}$$

Für die Ordnung  $n = 2$  ergibt sich das Nennerpolynom zu:

$$D(S) \cdot D(-S) = 1 + S^4 \Leftrightarrow S^4 = -1 \Leftrightarrow e^{j(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$$



Aufgelöst nach  $S$  liegen die Nullstellen auf dem Einheitskreis mit Abstand  $\frac{\pi}{4}$  verteilt.

**Rechte Halbebene**      **Linke Halbebene**

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

⇒ Für die Übertragungsfunktion  $H(s)$  sind nur die Nullstellen in der **linken Halbebene** relevant!

Die Übertragungsfunktion  $H(S)$  ergibt sich aus

$$H(S) = \frac{1}{D(S)} = \frac{1}{(S - P_2) \cdot (S - P_3)} = \frac{1}{S^2 + \sqrt{2}S + 1}$$

Alternativ kann die Übertragungsfunktion  $H(S)$  auch mittels folgendem Ansatz für  $D(S)$  und anschließendem Koeffizientenvergleich von  $D(S) \cdot D(-S)$  bestimmt werden.

$$\text{Ansatz: } D(S) = S^2 + a_1S + b_1$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } D(S) \cdot D(-S) = S^4 + (2b_1 - a_1^2)S + b_1^2 \stackrel{!}{=} S^4 + 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{2} \text{ und } b_1 = 1 \Rightarrow S^2 + \sqrt{2}S + 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

## 11.2.4 Bestimmung der Filterordnung (S. 308)

Aus dem Toleranzschema lassen sich für die 'Ecken' die folgenden beiden Bedingungen aufstellen:

$$A(\Omega_D) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_D^{2n}) = A_{pass}$$

$$A(\Omega_S) = 10 \cdot \log_{10}(1 + \Omega_S^{2n}) = A_{stop}$$

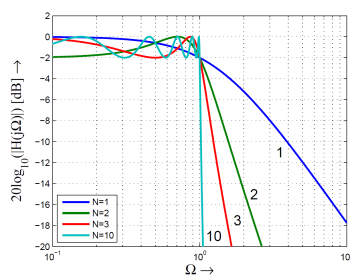
Mittels Umformungen und aufgelöst nach  $n$  ergibt sich die Filter-Ordnung als

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}\right)}{2 \cdot \log_{10}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

[.] bedeutet 'aufrunden auf ganze Zahl' (ceil()-Funktion)

⇒ Alternativ kann die Ordnung  $n$  auch mit dem **Nomogramm** bestimmt werden.

## 11.3 Approximation nach Tschebyscheff-I (S. 310)



Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-I als  $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$  gewählt. Der Amplitudengang  $|H(j\Omega)|$  folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 \cdot C_n^2(\Omega)}}$$

$e$  **Rippelfaktor** (Konstante)  
 $C_n(\Omega)$  Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung  $n$

Das Tschebyscheff-Polynom  $C_n(\Omega)$  ist im Durchlassbereich und im Sperrbereich **unterschiedlich definiert!**

$$\text{Durchlassbereich } (|\Omega| \leq 1)$$

$$\text{Sperrbereich } (|\Omega| \geq 1)$$

$$C_n(\Omega) = \cos(n \cdot \arccos(\Omega))$$

$$C_n(\Omega) = \cosh(n \cdot \operatorname{arccosh}(\Omega))$$

Für die Ordnung  $n \geq 2$  lässt sich das Tschebyscheff-Polynom  $C_n(\Omega)$  mittels Rekursionsformel berechnen

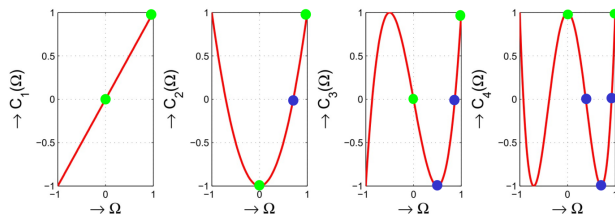
$$C_n(\Omega) = 2\Omega C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega) \quad C_0(\Omega) = 1 \quad C_1(\Omega) = \Omega$$

Zwischen dem Rippelfaktor  $e$  und der maximalen Dämpfung  $A_{max}$  gilt der Zusammenhang:

$$A_{max} = 10 \cdot \log_{10}(1 + e^2) \Leftrightarrow e = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10}} - 1}$$

## 11.3.1 Eigenschaften der Tschebyscheff-I-Approximation (S. 311)

Im **Durchlassbereich** schwankt das Tschebyscheff-Polynom in den Grenzen  $\pm 1$ . Im **Sperrbereich** nimmt  $C_n$  monoton mit  $\Omega$  zu.



### • Durchlassbereich

- Für  $\Omega = 0$  ist für ungerade  $n$ :  $|H(0)| = H_{max} = 1$
- Für  $\Omega = 0$  ist für gerade  $n$ :  $|H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$
- Für  $\Omega = 1$  ist für sämtliche  $n$ :  $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \Rightarrow$  **nicht 3 dB Dämpfung**
- Aus der Anzahl **Wendepunkte** und **Endpunkte** des Amplitudengangs im **Durchlassbereich** ( $0 \leq \Omega \leq 1$ ) lässt sich die **Ordnung  $n$**  bestimmen.

**Ordnung = (Summe aller Wendepunkte) plus beide Endpunkte minus 1**

### • Sperrbereich

- Für  $\Omega \gg 1$  wird  $|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{e \cdot C_n(\Omega)} \Rightarrow$   **$-n \cdot 20$  dB/ Dekade** bzw.  **$-n \cdot 6.02$  dB/ Oktave**
- Fixe Ordnung  $n$ : Je grösser der Rippelfaktor  $e$ , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich
- Fixer Rippelfaktor  $e$ : Je grösser die Ordnung  $n$ , desto steiler der Abfall in den Sperrbereich

## 11.3.2 Pol-Lagen (S. 313)

- Die Pole liegen auf einer **Ellipse**
- Allpolfilter
- Je näher die Pole an der  $j\omega$ -Achse liegen, desto mehr Rippel gibt es im Phasengang

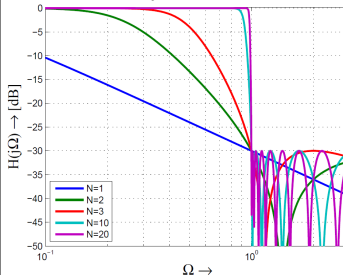
## 11.3.3 Filterordnung (S. 316)

$$n = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

⇒ **Nomogramme!**

## 11.4 Approximation nach Tschebyscheff-II (S. 319)

### Inverses Tschebyscheff-Filter

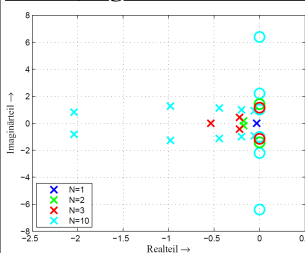


Die charakteristische Funktion wird bei der Tschebyscheff-II-Approximation als  $K(\Omega^2) = e^2 \cdot C_n^2(\Omega)$  gewählt. Der Amplitudengang  $|H(j\Omega)|$  folgt somit der Gleichung

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{e^2 C_n^2(\Omega)}}}$$

$e$  **Rippelfaktor** (Konstante)  
 $C_n(\Omega)$  Tschebyscheff-Polynom erster Art der Ordnung  $n$

### 11.4.1 Lage der Pole und Nullstellen (S. 321)



### • Kein Allpolfilter

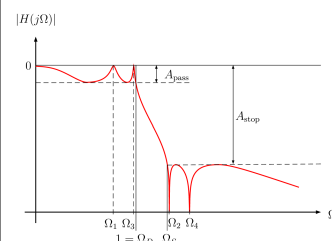
- Gerade Ordnung  $n$ :  $n$  Pole und  $n$  Nullstellen
- Ungerade Ordnung  $n$ :  $n$  Pole und  $n - 1$  Nullstellen

### 11.4.2 Filterordnung (S. 319)

$$n = \left\lceil \frac{\arccos\left(\sqrt{\frac{10^{A_{stop}/10} - 1}{10^{A_{pass}/10} - 1}}\right)}{\arccos\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)} \right\rceil$$

Die Filterordnung berechnet sich identisch wie bei der Tschebyscheff-I-Approximation!  
⇒ Gleiches Nomogramm wie für Tschebyscheff-I

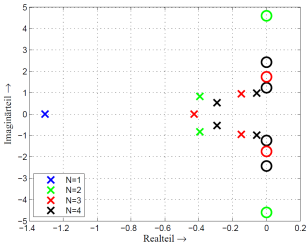
## 11.5 Approximation nach Cauchy (S. 322)



### Kombination von Tschebyscheff-I und Tschebyscheff-II

Daher spricht man auch von Complete-Chebyshev- oder Chebyshev-Cauer-Filtern (CC-Filter).

11.5.1 Lage der Pole und Nullstellen (S. 325)



- **Kein** Allpolfilter
  - Gerade Ordnung  $n$ :  $n$  Pole und  $n$  Nullstellen
  - Ungerade Ordnung  $n$ :  $n$  Pole und  $n - 1$  Nullstellen
- Nullstellen auf  $j\omega$ -Achse **ausserhalb vom Einheitskreis**

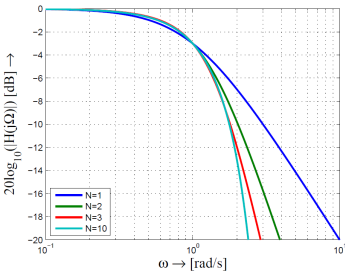
11.5.2 Filterordnung (S. 326)

$$n = \left\lceil \frac{K \left( \left( \frac{\Omega_D}{\Omega_S} \right)^2 \right) K \left( 1 - \frac{10^{A_{pass}/10} - 1}{10^{A_{stop}/10} - 1} \right)}{K \left( 1 - \left( \frac{\Omega_D}{\Omega_S} \right)^2 \right) K \left( \frac{10^{A_{pass}/10} - 1}{10^{A_{stop}/10} - 1} \right)} \right\rceil$$

mit  $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2(\theta)}} d\theta$

⇒ Nomogramm!

11.6 Approximation nach Bessel (S. 328)



Bessel-Filter liefern eine möglichst **lineare Phase**, d.h. eine **konstante Gruppenlaufzeit**.  
Die Übertragungsfunktion  $H(S)$  lautet

$$H(S) = K \cdot e^{-ST_0}$$

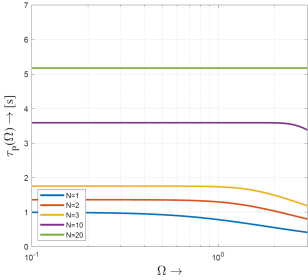
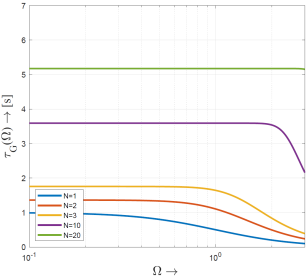
Für die Gruppenlaufzeit folgt somit

$$\tau_g(\Omega) = \frac{-d\theta(\Omega)}{d\Omega} = T_0 = \text{const}$$

Ohne Einschränkung kann in der UTF  $T_0 = 1$  und  $K = 1$  gesetzt werden:

$$H(S) = e^{-S} = \frac{1}{e^S} \approx \frac{1}{D(S)}$$

11.6.1 Gruppenlaufzeit  $\tau_g(\Omega)$  und Phasenlaufzeit  $\tau_p(\Omega)$  (S. 331)



12 Anhang

12.1 Übertragungsfunktionen verschiedener Filtertypen

Filtertyp	UTF $H(s)$	Bemerkung
Allpass	$\frac{s-a}{s+a}$	entspricht $\frac{H(-s)}{H(s)}$
Tiefpass	$\frac{a}{s+b}$	Zählergrad = 0
Hochpass	$\frac{as}{s+b}$	Zählergrad = Nennergrad
Bandpass	$\frac{as}{s^2+bs+c}$	Zählergrad ≠ 0 und Zählergrad < Nennergrad
Bandsperre	$\frac{s^2+bs+c}{as}$	Nennergrad ≠ 0 und Nennergrad < Zählergrad
FRN (Notch)	$K \cdot \frac{s^2+2\sigma_zs+\omega_p^2}{s^2+2\sigma_ps+\omega_p^2}$	mit $\sigma_p > \sigma_z$
FEN	$K \cdot \frac{s^2+2\sigma_zs+\omega_p^2}{s^2+2\sigma_ps+\omega_p^2}$	mit $\sigma_p < \sigma_z$

12.2 Ableitungsregeln

Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

12.3 Ableitungs-Tabelle

Function $f(x)$	Derivative $\frac{df(x)}{dx}$	Function $f(x)$	Derivative $\frac{df(x)}{dx}$
1	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^x$	$e^x$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$a^x$	$\ln(a) \cdot a^x$