Задание 2

Выполнить задание согласно своему варианту. Каждый пункт задания реализовать в виде отдельной функции. Тестирующие функции должны проверять корректность вычисления функций (как в области определения функции, так и вне неё; особое внимание уделить граничным значениям).

1. Реализовать функцию **Logarithm** вычисления $\log_2$ для целочисленного аргумента: определить, в какую степень требуется возвести число 2, чтобы получить целочисленное число, передаваемое функции в виде параметра. Функция должна возвращать вычисленное значение логарифма. Если число не является степенью двойки, возвращать -1. Если аргумент находится вне области определения функции, возвращать -2.

2. Реализовать рекурсивную **RecursiveGCD** и нерекурсивную **GCD** функции нахождения наибольшего общего делителя (НОД) для двух целых чисел, передаваемых в виде параметров. Возвращаемое функциями значение – НОД.

Пояснение. ***Рекурсивной*** называют функцию, которая в своём теле вызывает саму себя. Перед вызовом необходима проверка условия выхода из рекурсии.

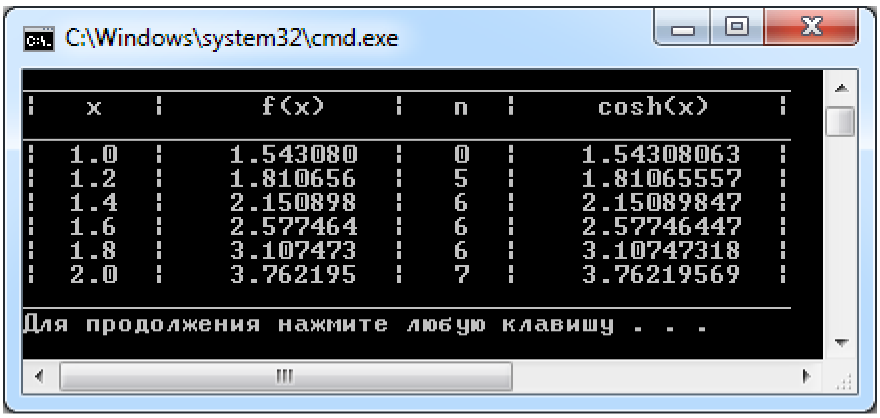
Одним из алгоритмов нахождения НОД с использованием **рекурсии** является ***бинарный алгоритм Евклида***. Он основан на использовании следующих свойств НОД:

- НОД(2m, 2n) = 2 НОД(m, n),
- НОД(2m, 2n+1) = НОД(m, 2n+1),
- НОД(-m, n) = НОД(m, n)

3. Реализовать функцию **Taylor** вычисления с точностью **ε** функции с вещественным параметром $\boldsymbol{f(x)}$, заданной с помощью разложения в ряд Тейлора (см. Пояснение).

Вывести в строку в виде таблицы значения функции на интервале $\boldsymbol{x \in [a,b]}$, изменяющегося с шагом $\boldsymbol{dx}$. Таблицу снабдить шапкой. Каждая строка таблицы должна содержать значение аргумента $\boldsymbol{x}$, значение функции (вычисленное как сумма членов ряда Тейлора), количество просуммированных членов ряда ($\boldsymbol{n}$) для обеспечения заданной точности **ε**, значение функции (вычисленное с помощью вызова функции стандартной библиотеки).

Например, для $f(x) = \mathrm{ch}(x)$, $a = 1.0$, $b = 2.0$, $dx = 0.2$, $\varepsilon = 10^{-6}$ получается таблица вида:



Пояснение. Для достижения заданной точности ε при вычислении суммы ряда

$$C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots$$

требуется суммировать члены ряда C_n, абсолютная величина которых не меньше ε. Для сходящегося ряда абсолютная величина члена ряда C_n при увеличении n стремится к нулю.

При некотором n неравенство $|C_n| \geq \varepsilon$ перестаёт выполняться, и вычисление суммы необходимо прекратить.

Для уменьшения количества выполняемых действий и повышения точности вычислений следует воспользоваться ***рекуррентной формулой*** получения последующего члена ряда через предыдущий:

$C_n = T{*}C_{n-1}$, где T – некоторый множитель.

Например, при вычислении функции гиперболического косинуса в виде суммы ряда (здесь $C_0 = 1$):

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Получим выражение для определения T:

$$T = \frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{x^{2n}(2(n-1))!}{(2n)!\,x^{2(n-1)}} = \frac{x^2}{(2n)(2n-1)}.$$

Следовательно, очередной член ряда можно вычислить, зная предыдущий:

$$C_n = C_{n-1} \cdot \frac{x^2}{(2n)(2n-1)},$$

Для сдачи задания использовать структуру в файловой системе:
gxxxxx/2/Task2/Logarithm.h - файл с объявлением функции Logarithm из пункта 1;
gxxxxx/2/Task2/Logarithm.cpp - файл с определением функции Logarithm из пункта 1;
gxxxxx/2/Task2/GCD.h - файл с объявлением функций GCD и RecursiveGCD из пункта 2;
gxxxxx/2/Task2/GCD.cpp - файл с определением функций GCD и RecursiveGCD из пункта 2;
gxxxxx/2/Task2/Taylor.h - файл с объявлением функции Taylor из пункта 3;
gxxxxx/2/Task2/Taylor.cpp - файл с определением функции Taylor из пункта 3;
gxxxxx/2/Task2.Tests/Logarithm.Tests.cpp - файл с тестами функции Logarithm из пункта 1;
gxxxxx/2/Task2.Tests/GCD.Tests.cpp - файл с тестами функций GCD и RecursiveGCD из пункта 2;
gxxxxx/2/Task2.Tests/Taylor.Tests.cpp - файл с тестами функции Taylor из пункта 3;

Необходимые условия сдачи:

- Стиль должен соответствовать установленным правилам;
- Имена переменных должны быть осмысленными. Никакого транслита и нелогичности;
- Программа должна быть протестирована с помощью gtest;
- Программа должна проходить тесты преподавателя (которых вы не видите).

Варианты заданий

Вариант 1

$$\ln\frac{x+1}{x-1}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right),\ \left|x\right|>1$$

Вариант 2

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,\quad \left|x\right|<\infty$$

Вариант 3

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,\quad -1<x\le 1$$

Вариант 4

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),\ \left|x\right|<1$$

Вариант 5

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right),\ -1\le x<1$$

Вариант 6

$$\operatorname{arcctg}(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots,\ \left|x\right|\le 1$$

Вариант 7

$$\operatorname{arctg}(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)x^{2n+1}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots,\ x>1$$

Вариант 8

$$\operatorname{arctg}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,\ \left|x\right|<1$$

Вариант 9

$$\operatorname{arctg}(x)=-\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)x^{2n+1}}=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots,\ x<-1$$

Вариант 10

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots,\ \left|x\right|<\infty$$

Вариант 11

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad |x| < \infty$$

Вариант 12

$$\operatorname{arth}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad |x| < 1;$$

(Ареа-тангенс $\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$)

Вариант 13

$$\ln(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}} = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} \ldots\right), \quad x > 0$$

Вариант 14

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots, \quad 0 < x < 2$$

Вариант 15

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} - \ldots, \quad |x| < \infty$$

Вариант 16

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)x^{n+1}} = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \ldots, \quad x > \frac{1}{2}$$

Вариант 17

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad |x| < \infty$$

Вариант 18

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1)}\right) = \frac{\pi}{2} -$$

$$-\left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots\right), \quad |x| < 1$$

Вариант 19

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1)} = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots, \quad |x| < 1$$

Вариант 20

$$\operatorname{arcth}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots, \quad |x| > 1$$

(Ареа-котангенс $\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$)