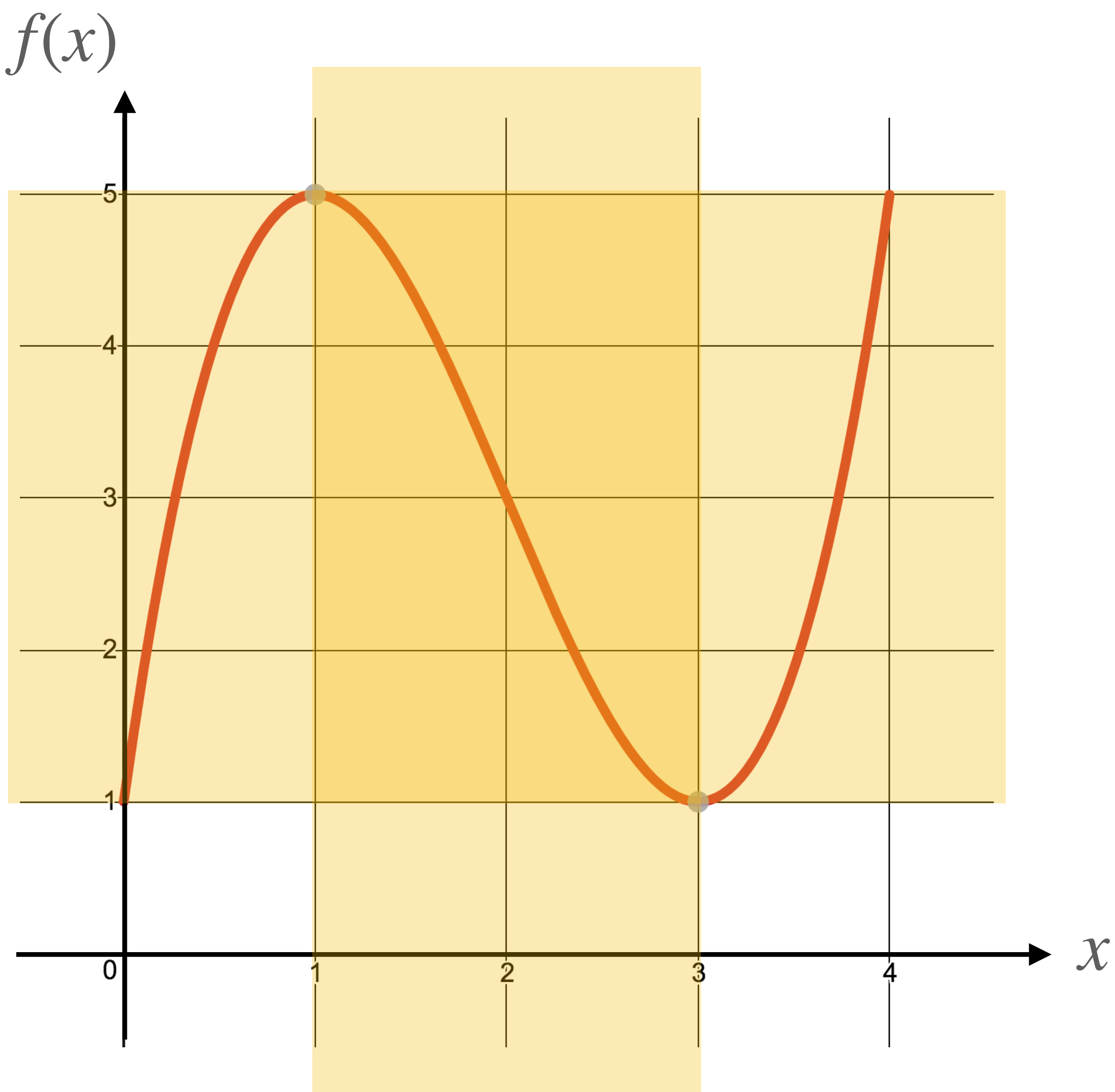
# บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

2301107 Calculus I

# บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

1. **ความหมายของลิมิต**
2. ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา
3. ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับลิมิต
4. ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์
5. ความต่อเนื่อง

# ลิมิตของฟังก์ชัน



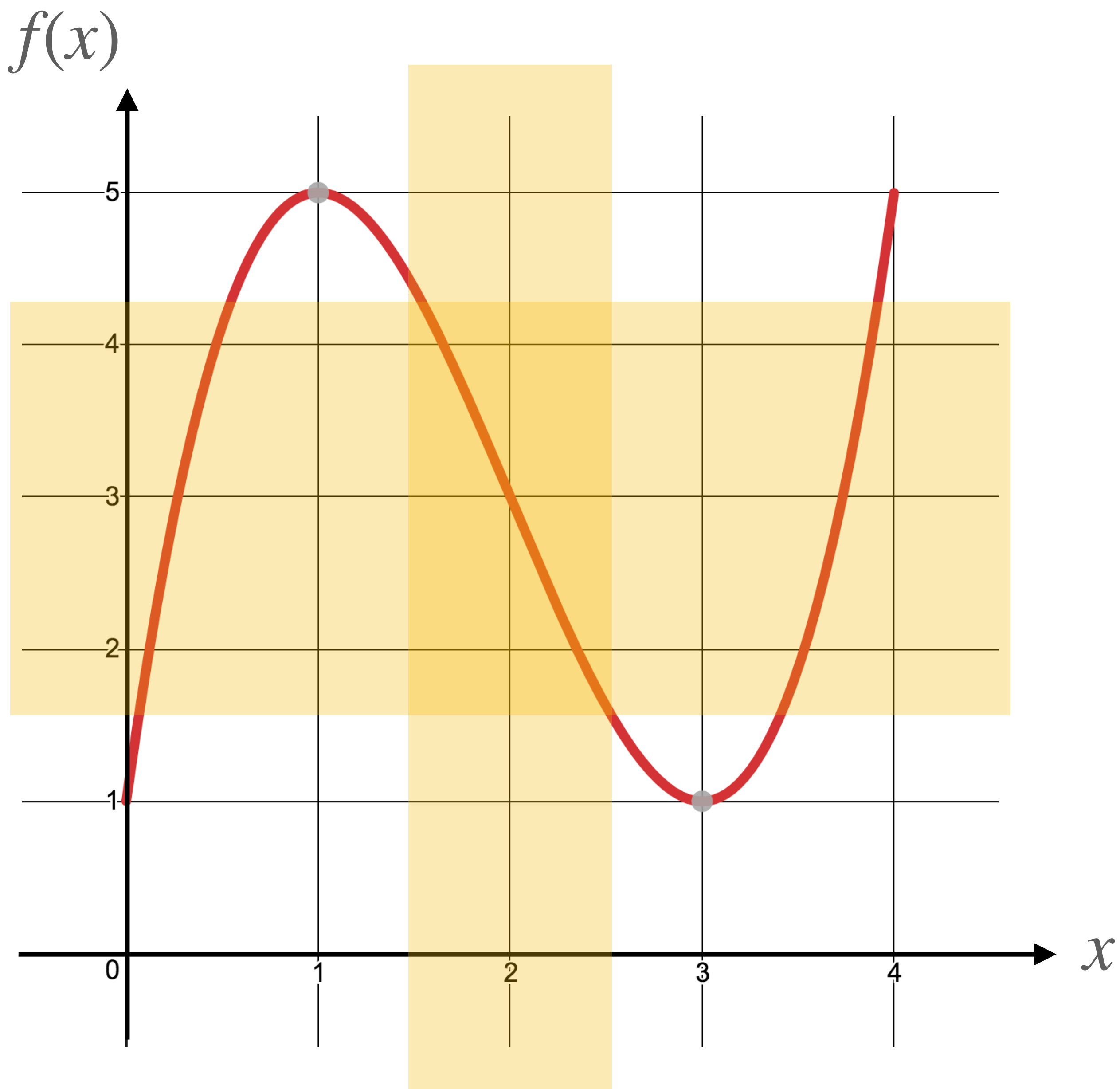

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

- พิจารณาค่าของฟังก์ชัน เมื่อ $x$ มีค่าใกล้ ๆ 2

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| | |
| | |
| | |
| | |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| | |
| | |
| | |
| | |

# ลิมิตของฟังก์ชัน

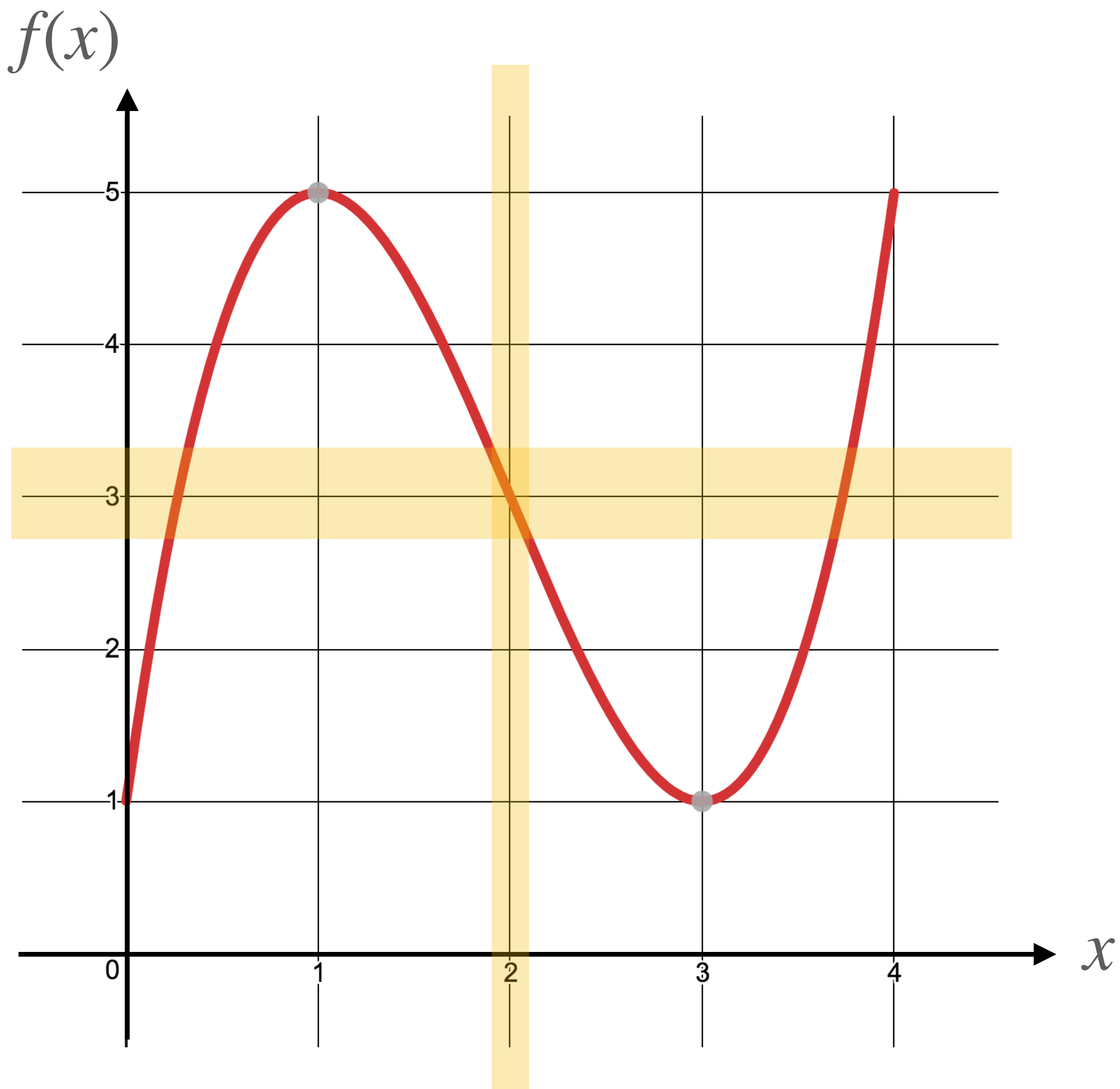



$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

- พิจารณาค่าของฟังก์ชัน เมื่อ $x$ มีค่าใกล้ ๆ 2

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 1 |
| 1.5 | 4.375 | 2.5 | 1.625 |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

# ลิมิตของฟังก์ชัน



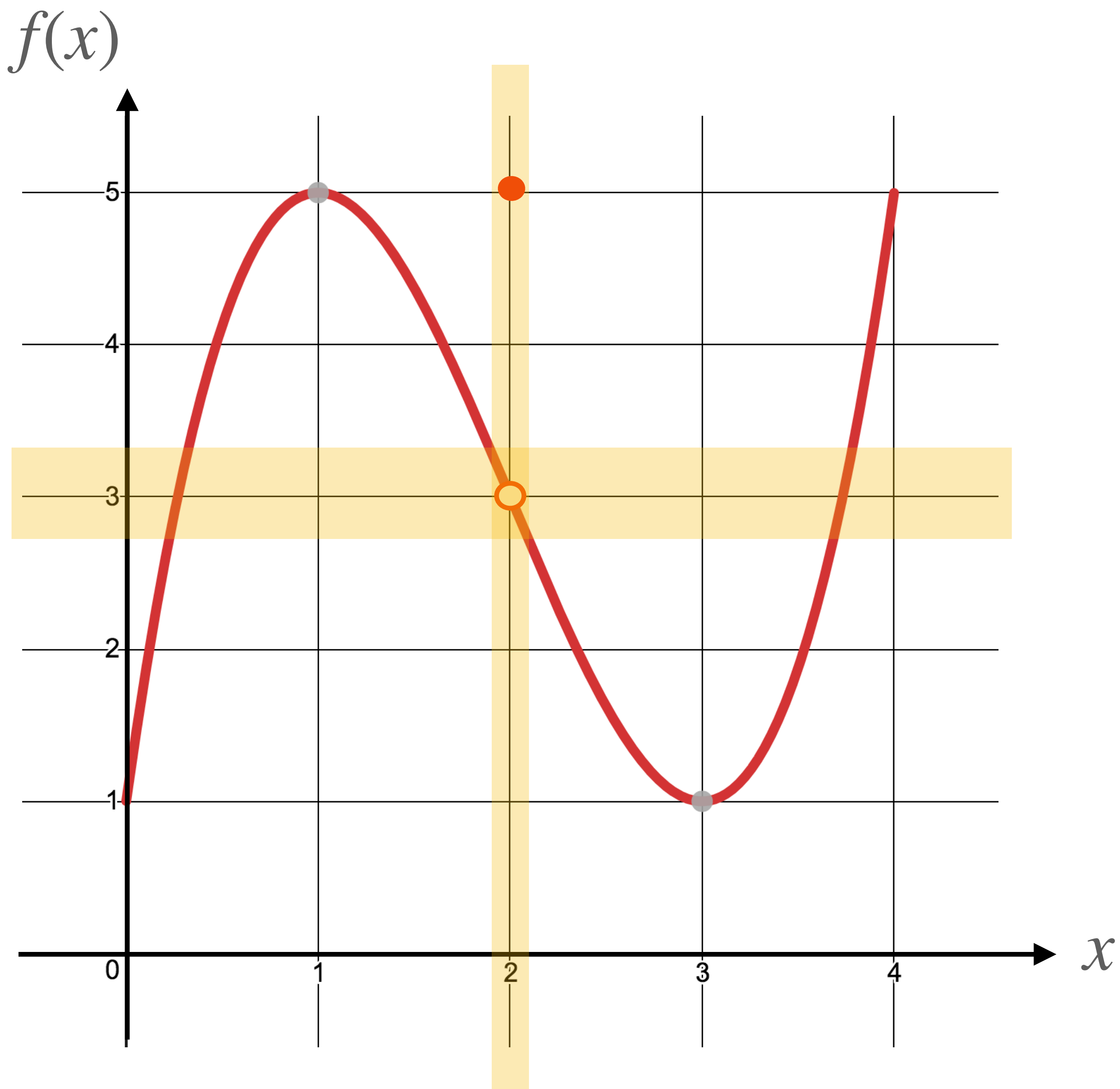

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

- พิจารณาค่าของฟังก์ชัน เมื่อ $x$ มีค่าใกล้ ๆ 2

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 1 |
| 1.5 | 4.375 | 2.5 | 1.625 |
| 1.9 | 3.299 | 2.1 | 2.701 |
| 1.95 | 3.150 | 2.05 | 2.850 |
| 1.99 | 3.030 | 2.01 | 2.970 |

- จะได้ว่า $f(x)$ จะมีค่าใกล้ ๆ 3

# ลิมิตของฟังก์ชัน




$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

- พิจารณาค่าของฟังก์ชัน เมื่อ $x$ มีค่าใกล้ ๆ 2

| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 1 |
| 1.5 | 4.375 | 2.5 | 1.625 |
| 1.9 | 3.299 | 2.1 | 2.701 |
| 1.95 | 3.150 | 2.05 | 2.850 |
| 1.99 | 3.030 | 2.01 | 2.970 |

- จะได้ว่า $f(x)$ จะมีค่าใกล้ ๆ 3
- โดยที่เราไม่สนใจค่าที่ $x = 2$

# ลิมิตของฟังก์ชัน

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามเมื่อ $x$ มีค่าใกล้ $a$ โดยอาจยกเว้นที่ $a$ เราจะกล่าวว่า "$f(x)$ **มีลิมิต**เป็นจำนวนจริง $L$ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ $a$" หรือเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

เมื่อ "เราสามารถทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ $L$ เท่าใดก็ได้ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ $a$ แต่ไม่เท่ากับ $a$"

# ลิมิตของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.5 | 0.67 |
| 0.9 | 0.53 |
| 0.99 | 0.503 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0.33 |
| 1.5 | 0.40 |
| 1.1 | 0.48 |
| 1.01 | 0.498 |

เราสามารถคาดได้ว่า $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

# ลิมิตของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

สังเกตว่า $f(t) = f(-t)$
เราเรียกฟังก์ชันที่มีสมบัติน้ว่า
**ฟังก์ชันคู่ (even function)**

| $t$ | $f(t)$ |
|---|---|
| -1 | 0.162 |
| -0.5 | 0.1655 |
| -0.1 | 0.16662 |
| -0.01 | 0.16666 |

| $t$ | $f(t)$ |
|---|---|
| 1 | 0.162 |
| 0.5 | 0.1655 |
| 0.1 | 0.16662 |
| 0.01 | 0.16666 |

เราสามารถคาดได้ว่า $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = 0.166666... = \frac{1}{6}$

# ลิมิตของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| -1 | 0.841 |
| -0.5 | 0.959 |
| -0.1 | 0.998 |
| -0.01 | 0.99998 |
| -0.001 | 0.9999998 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0.841 |
| 0.5 | 0.959 |
| 0.1 | 0.998 |
| 0.01 | 0.99998 |
| 0.001 | 0.9999998 |

เราสามารถคาดได้ว่า $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

# ลิมิตของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$

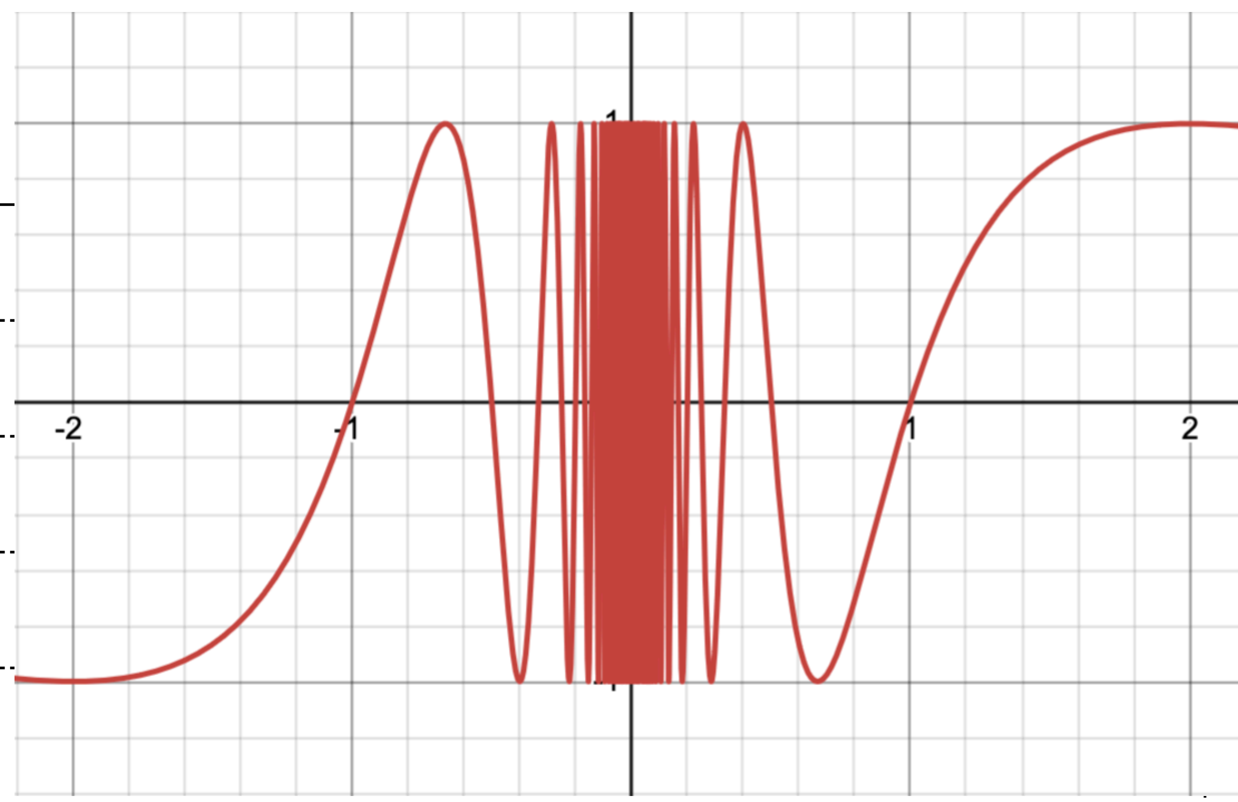
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0.5 | 0 |
| 0.1 | 0 |
| 0.01 | 0 |
| 0.001 | 0 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 0.3 | -0.866 |
| 0.07 | 0.782 |
| 0.009 | -0.342 |
| 0.0031 | 0.968 |
| 0.00097 | 0.225 |

ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$ **ไม่มีค่า**

# ลิมิตของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{\pi}{x}$




| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 0.5 | -0.866 |
| 0.1 | 0.782 |
| 0.01 | -0.342 |
| 0.001 | 0.968 |
| 0.00097 | 0.225 |

ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{\pi}{x}$ **ไม่มีค่า**

# นิยามของลิมิต

**บทนิยาม** เรากล่าวว่า $a \in \mathbb{R}$ เป็นจุดลิมิต (limit point) ของ $E \subseteq \mathbb{R}$ เมื่อ สำหรับทุก $\delta > 0$ จะได้ว่า $((a-\delta, a+\delta) - \{a\}) \cap E \neq \varnothing$ นั่นคือ “$a$ มีจุดใกล้ ๆ อยู่ในเซต $E$ ด้านใดด้านหนึ่ง”

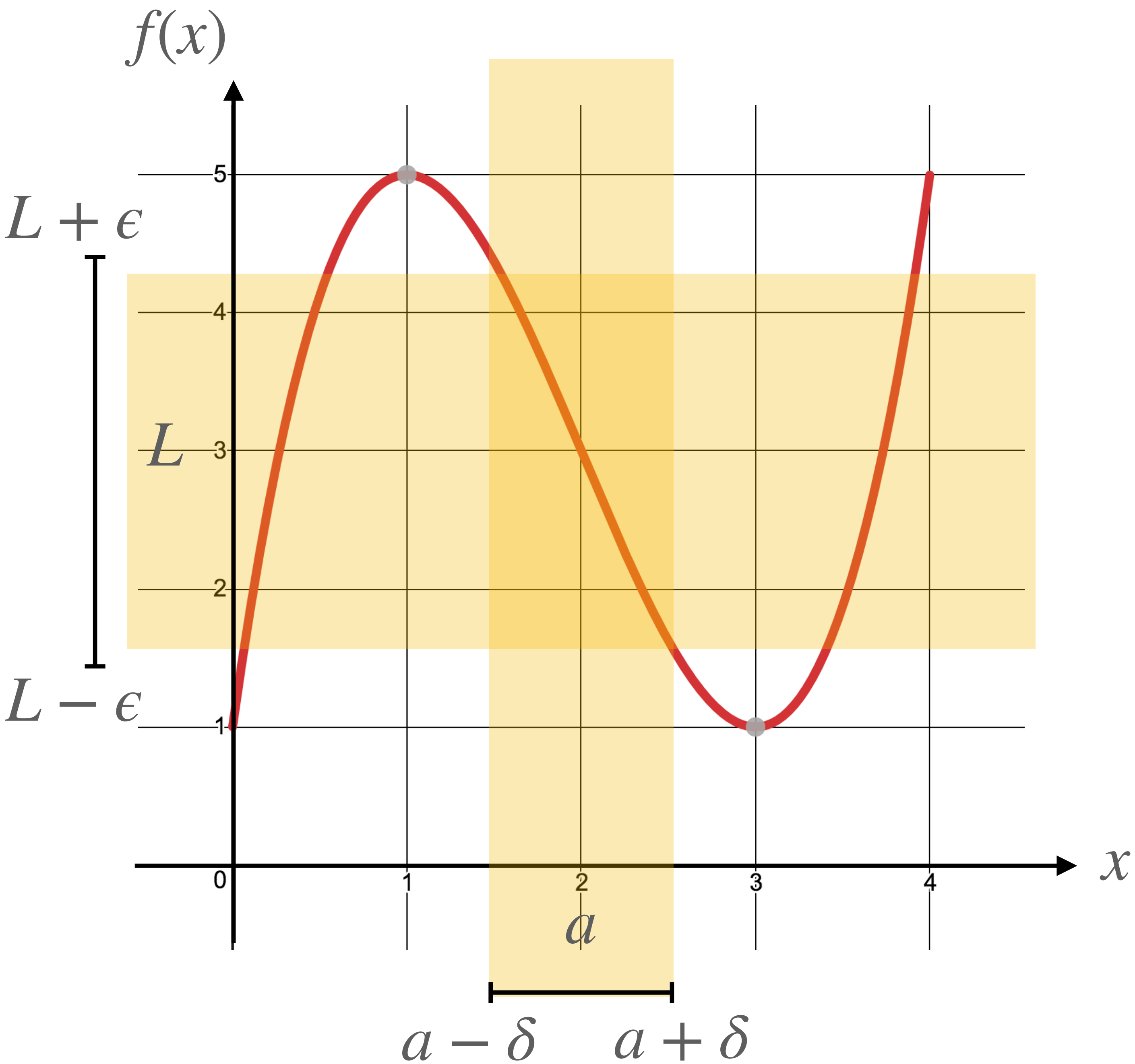
**บทนิยาม** ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $a$ เป็นจุดลิมิตของ $D$ เราจะกล่าวว่า “$f(x)$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง $L$ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ $a$” หรือเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

เมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ สำหรับทุก } x \in D \text{ ซึ่ง } 0 < |x - a| < \delta$$

# นิยามของลิมิต




| $x$ | $f(x)$ | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 1 |
| 1.5 | 4.375 | 2.5 | 1.625 |
| 1.9 | 3.299 | 2.1 | 2.701 |
| 1.95 | 3.150 | 2.05 | 2.850 |
| 1.99 | 3.030 | 2.01 | 2.970 |

- ต้องพิจารณาทุก ๆ $\epsilon > 0$
- ค่าของ $\delta > 0$ จะขึ้นกับ $\epsilon$
- ทุกค่าในช่วงเปิด $(a-\delta, a+\delta)$ (อาจยกเว้น $a$) จะต้องส่งไปยังค่าในช่วง $(L-\epsilon, L+\epsilon)$

# นิยามของลิมิต

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.5 | 0.67 |
| 0.9 | 0.53 |
| 0.99 | 0.503 |

$\epsilon = 0.6 \quad \delta = 1$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0.33 |
| 1.5 | 0.40 |
| 1.1 | 0.48 |
| 1.01 | 0.498 |

เราสามารถคาดได้ว่า $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

# นิยามของลิมิต

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.5 | 0.67 |
| 0.9 | 0.53 |
| 0.99 | 0.503 |

$\epsilon = 0.6 \quad \delta = 1$

$\epsilon = 0.2 \quad \delta = 0.5$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0.33 |
| 1.5 | 0.40 |
| 1.1 | 0.48 |
| 1.01 | 0.498 |

เราสามารถคาดได้ว่า $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

# นิยามของลิมิต

**ตัวอย่าง** จงหา $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.5 | 0.67 |
| 0.9 | 0.53 |
| 0.99 | 0.503 |

$\epsilon = 0.6 \quad \delta = 1$
$\epsilon = 0.2 \quad \delta = 0.5$
$\epsilon = 0.1 \quad \delta = 0.1$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0.33 |
| 1.5 | 0.40 |
| 1.1 | 0.48 |
| 1.01 | 0.498 |

เราสามารถคาดได้ว่า $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$

# นิยามของลิมิต

**ตัวอย่าง** จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to 1} 2x - 1 = 1$

ให้ $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$

ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta = \dfrac{\epsilon}{2}$

จะได้ว่า $|(2x - 1) - 1| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2 \cdot \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$

เพราะฉะนั้น $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|(2x - 1) - 1| < \epsilon$
สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta$

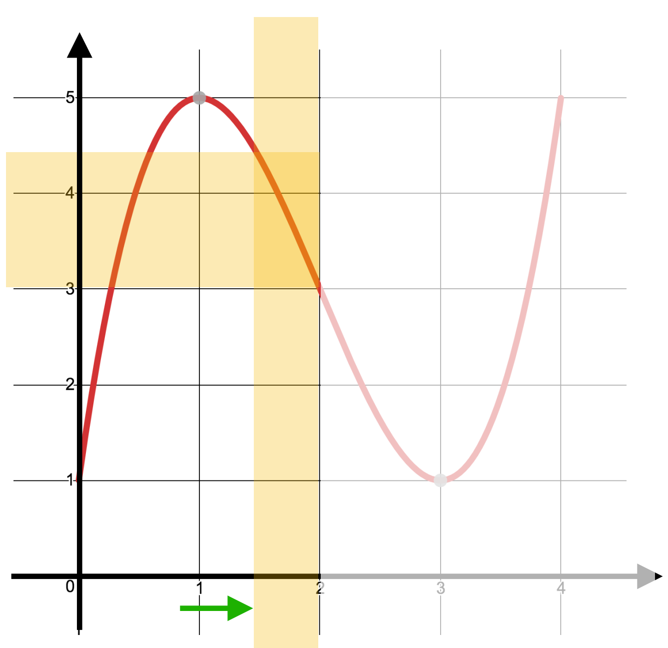
นั่นคือ $\lim_{x \to 1} 2x - 1 = 1$

# ลิมิตทางซ้าย

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามเมื่อ $x$ มีค่าใกล้และน้อยกว่า $a$ เราจะกล่าวว่า "$f(x)$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง $L$ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ $a$ ทางซ้าย" หรือเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

เมื่อ "เราสามารถทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ $L$ เท่าใดก็ได้ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้และน้อยกว่า $a$"



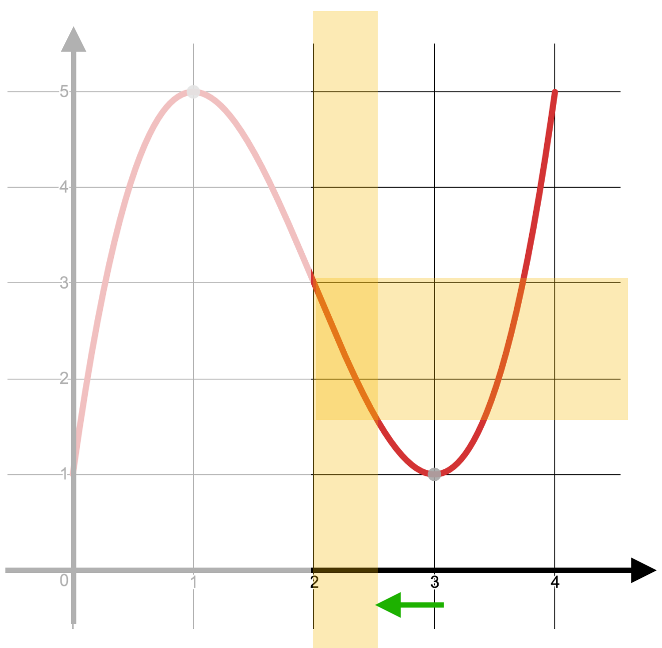

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 1.5 | 4.375 |
| 1.9 | 3.299 |
| 1.95 | 3.150 |
| 1.99 | 3.030 |

# ลิมิตทางขวา

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามเมื่อ $x$ มีค่าใกล้และมากกว่า $a$ เราจะกล่าวว่า “$f(x)$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง $L$ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ $a$ ทางขวา” หรือเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

เมื่อ “เราสามารถทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ $L$ เท่าใดก็ได้ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้และมากกว่า $a$”




| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 2.5 | 1.625 |
| 2.1 | 2.701 |
| 2.05 | 2.850 |
| 2.01 | 2.970 |

# นิยามของลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา

**บทนิยาม** ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $a$ เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (-\infty, a)$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

เมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ สำหรับทุก } x \in D \text{ ซึ่ง } a - \delta < x < a$$

**บทนิยาม** ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $a$ เป็นจุดลิมิตของ $D \cap (a, \infty)$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

เมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

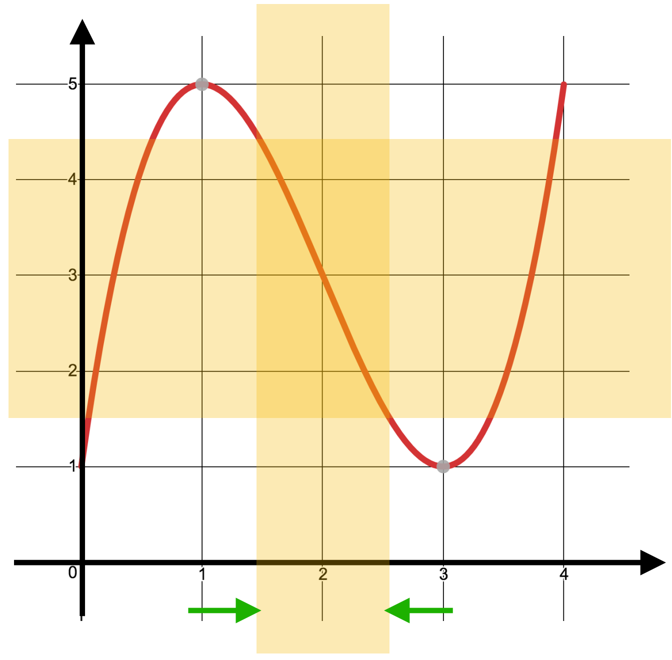
$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ สำหรับทุก } x \in D \text{ ซึ่ง } a < x < a + \delta$$

# ลิมิตทางเดียว

**ทฤษฎีบท** ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามเมื่อ $x$ มีค่าใกล้ $a$ จะได้ว่า

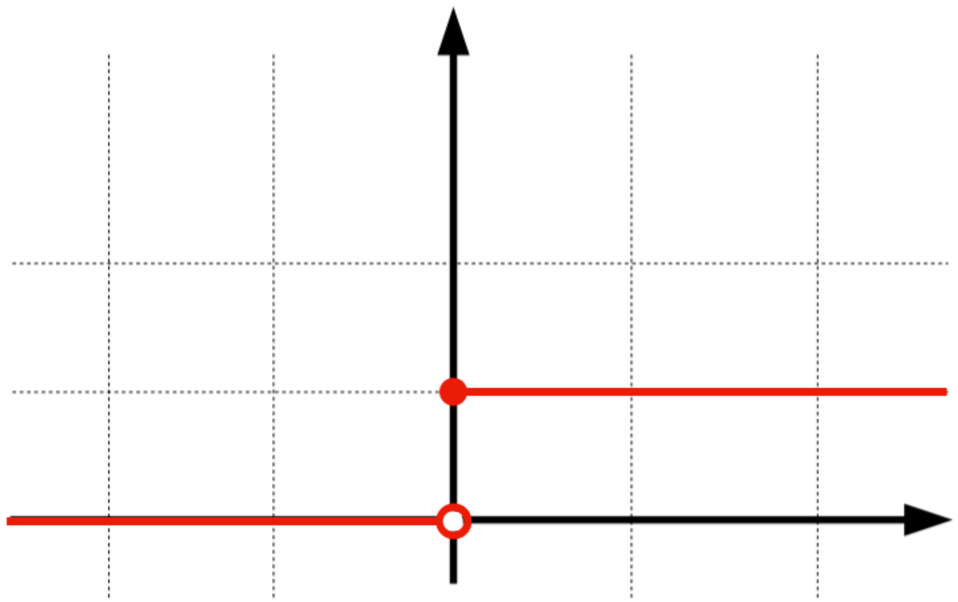
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$



# ลิมิตของฟังก์ชันจากกราฟ

ตัวอย่าง $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } t < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } t \geq 0 \end{cases}$



จงหา $\lim\limits_{t \to 0^-} H(t)$, $\lim\limits_{t \to 0^+} H(t)$ และ $\lim\limits_{t \to 0} H(t)$