Calcul scientifique : TP3 Intégration numérique

Pierre-Antoine Lambrecht

Décembre 2020

1 Questions d'analyse

On considère la fonction f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ donné par :

$$f(x) = \sin(x)$$

La primitive de f est :

$$F = \int_x \sin(x).dx = -\cos(x)$$

On a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x).dx = [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(0) = 0 - (-1) = 1$$

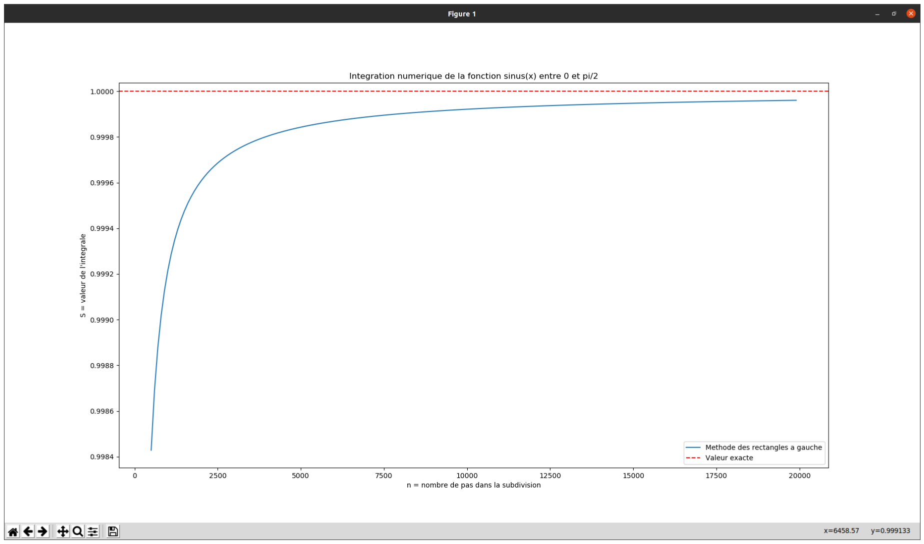
2 Exercice 1

3) On constate qu'avec la méthode des rectangle à gauche, n, le nombre de rectangle (ou le nombre de pas dans la subdivision) semble être proportionelle à l'erreur E.

Pour $a = (2, 3, 4)$ on a,

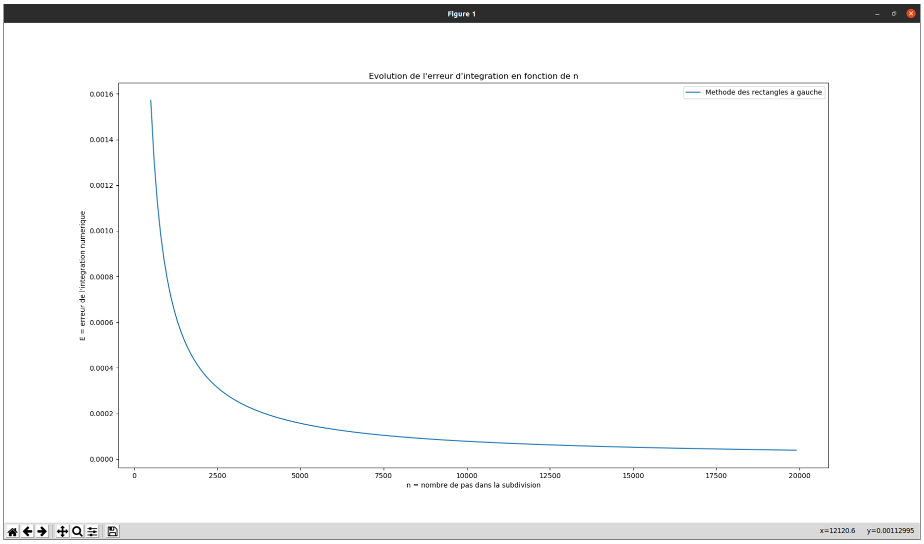
$$n = 10^a \Longrightarrow E = 7,8..... \times 10^{-a+1}$$

4)Méthode des rectangles à gauche



Premier graphique :

- représente l'évolution de notre approximation de l'intégrale de sin(x) sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ comparé à ça valeur exacte.
- l'approximation de l'intégrale pas la méthode des rectangles à gauche approche la valeur exact I par en dessous (l'aire de notre approximation est toujours inférieur a I).
- on remarque qu'elle avance assez vite au début mais ralentie de manière très significative quand n devient assez grand (au alentour de $n = 3000$). La fonction ressemble beaucoup à la fonction $-e^{-x}$.



Deuxième graphique :

- représente l'évolution de E, la valeur de l'erreur, en fonction de n (nombre de rectangle utilisé dans l'approximation).
- Cette fonction ressemble cette fois à la fonction e^{-x} et donc tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

3 Exercice 2

1)(e) Méthode des rectangles à droite et milieu

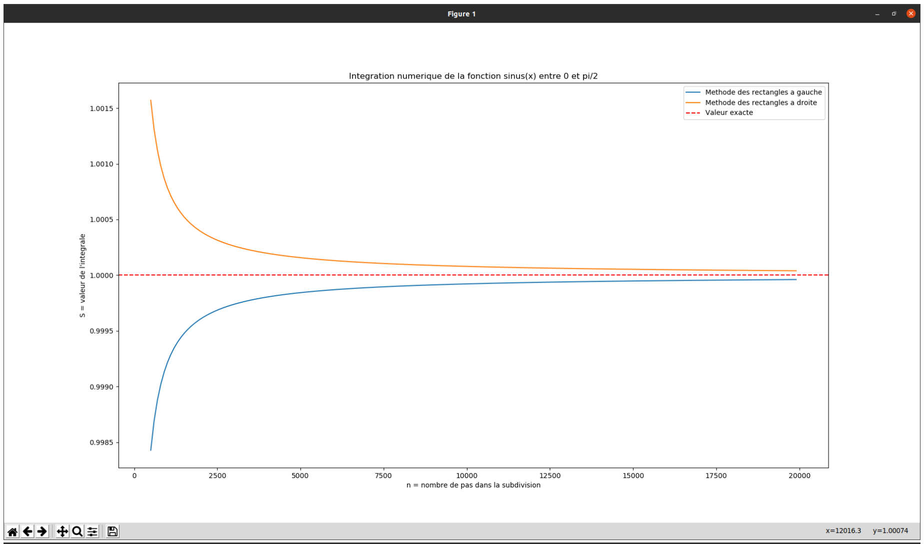


Figure 1
Integration numerique de la fonction sinus(x) entre 0 et pi/2
Methode des rectangles a gauche
Methode des rectangles a droite
Valeur exacte
S = valeur de l'integrale
n = nombre de pas dans la subdivision
x=12016.3 y=1.00074

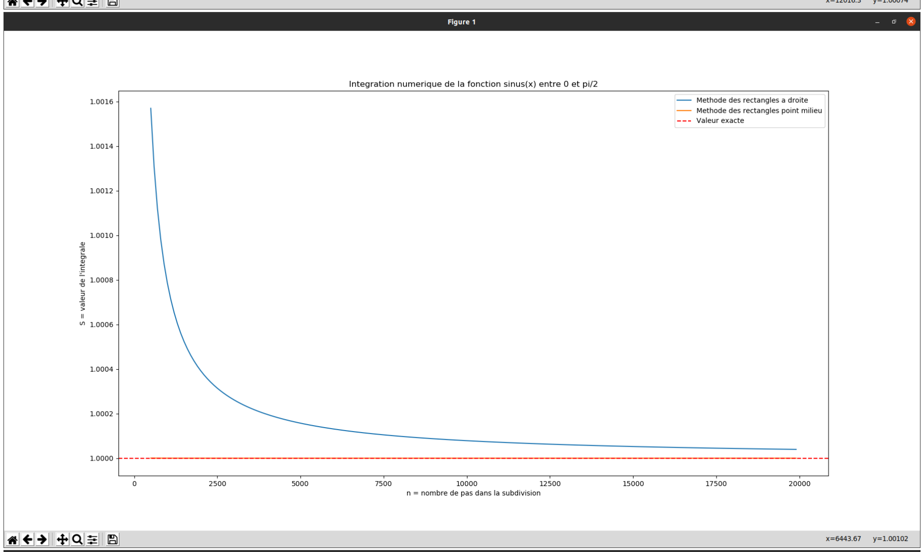


Figure 1
Integration numerique de la fonction sinus(x) entre 0 et pi/2
Methode des rectangles a droite
Methode des rectangles point milieu
Valeur exacte
S = valeur de l'integrale
n = nombre de pas dans la subdivision
x=6443.67 y=1.00102

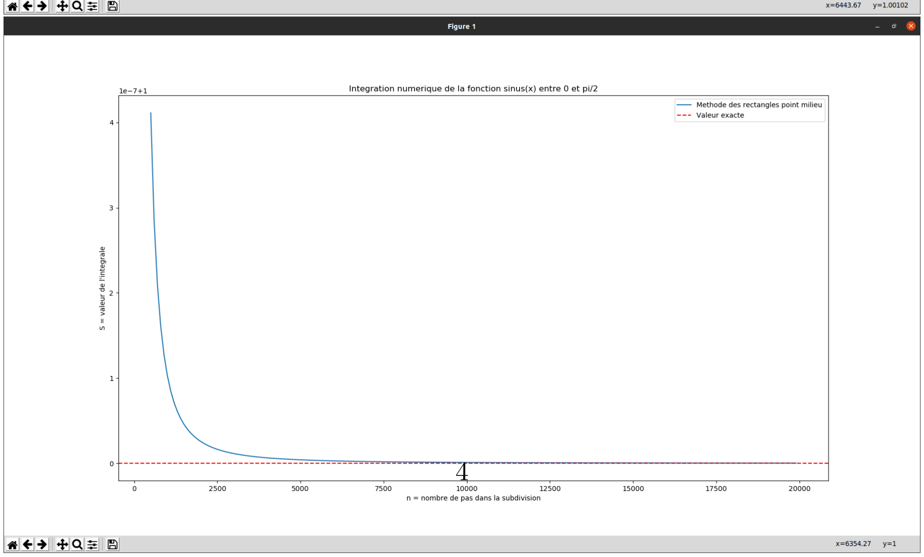
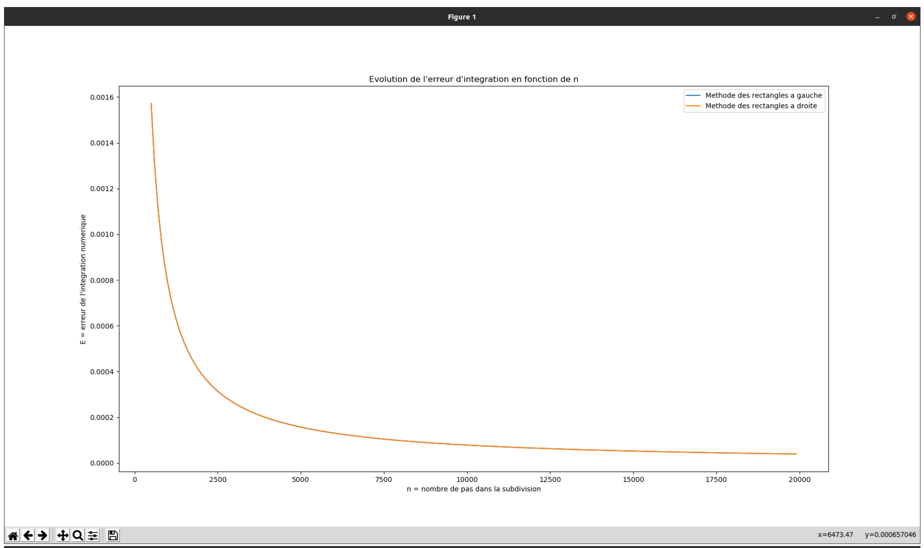
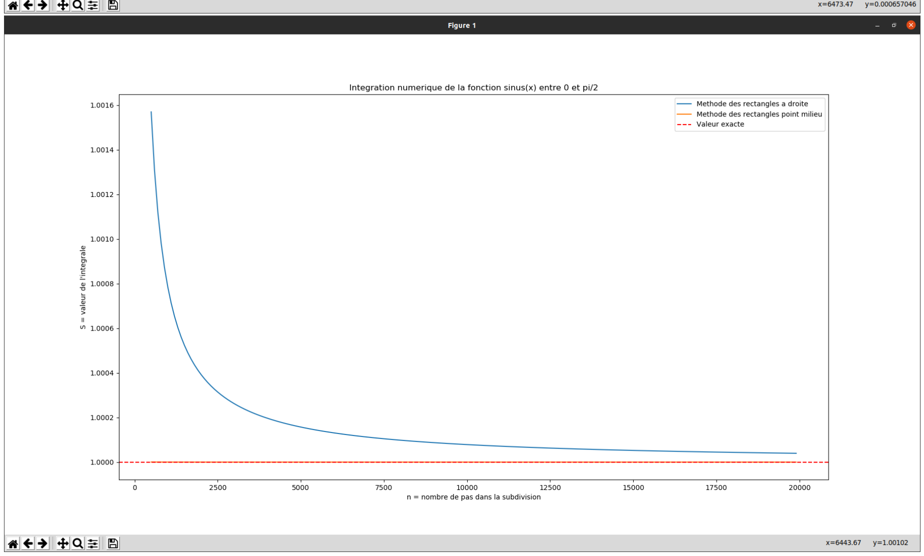


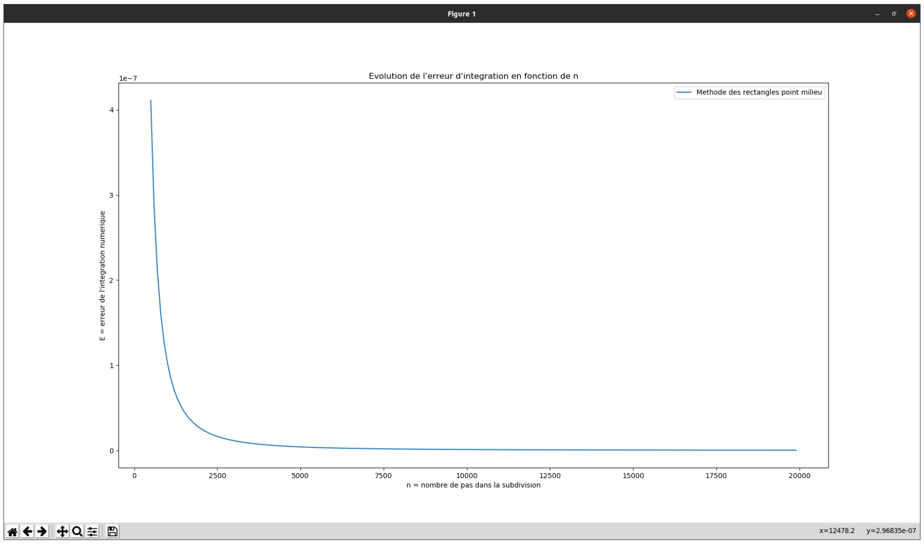
Figure 1
Integration numerique de la fonction sinus(x) entre 0 et pi/2
1e−7+1
Methode des rectangles point milieu
Valeur exacte
S = valeur de l'integrale
n = nombre de pas dans la subdivision
x=6354.27 y=1

Premier graphique :

- la méthode des rectangles à droite est symétrique à celle des rectangles à gauche.
- son approche se fait cette fois par au dessus (l'aire de notre approximation est toujours supérieur a I).
- la méthode des rectangles milieux est quand à elle (toute de suite) très bonne, cela s'explique par le fait que l'aire que l'on a en trop s'annule assez bien avec celle que l'on perd avec cette approximation par des rectangles.



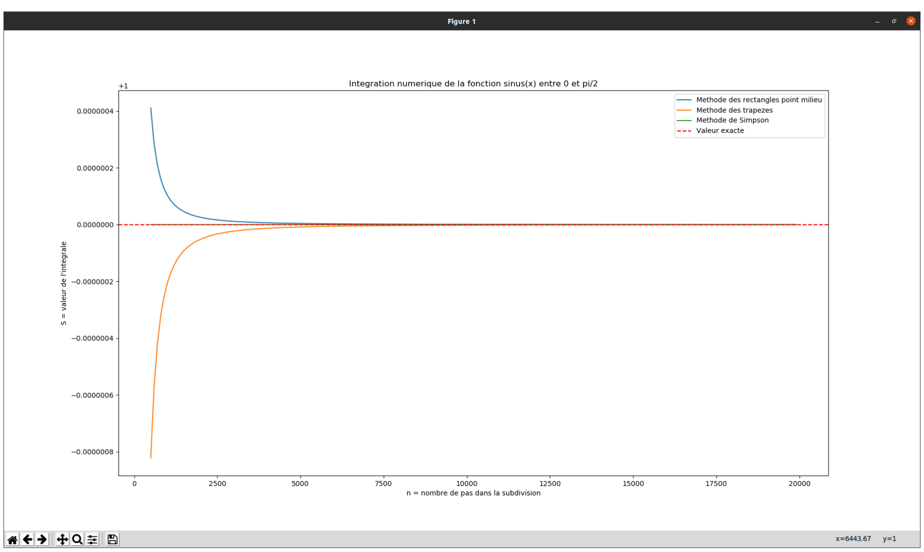




Deuxième graphique :

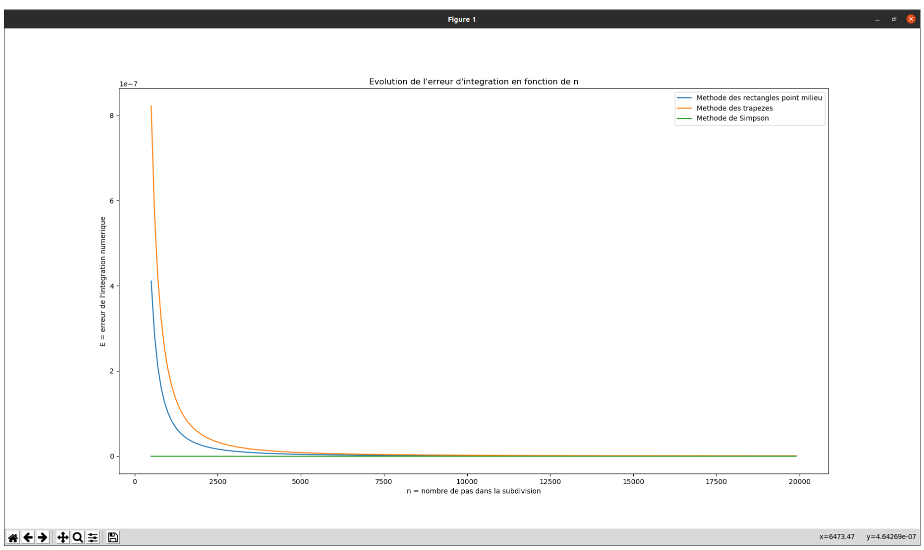
- l'évolution de l'erreur de la méthode à droite est similaire de celle à gauche. On peu voire une différence en zoomant mais pas de manière significative.
- l'évolution de l'erreur de la méthode du point milieu est rapidement très bonne. Et même après $n = 20000$ les deux autres ne l'ont pas rattrapé.

2)(e) Méthode des trapèzes



Premier graphique :

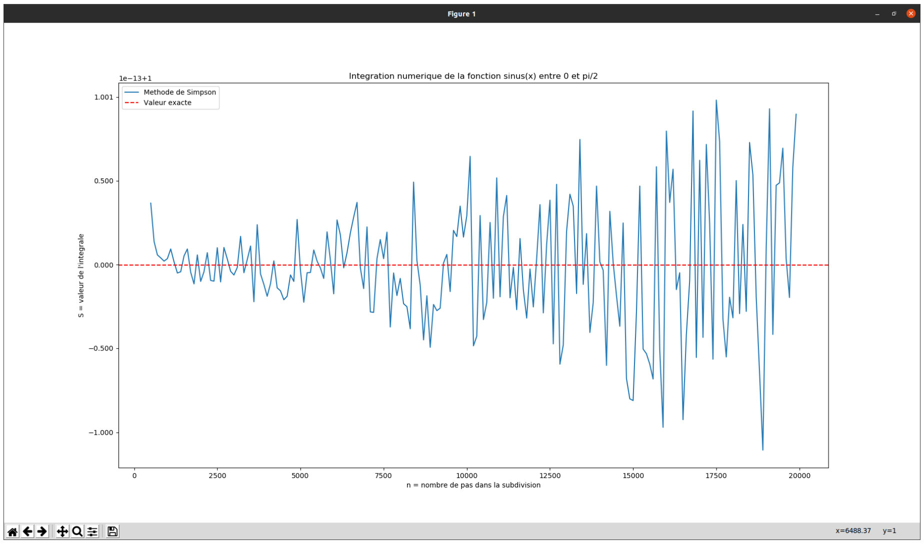
- l'approche par la méthode des trapèzes semble plutôt bonne et assez similaire à celle des rectangles point milieux .
- son approche se fait ici par en dessous.
- la méthode des trapèze est néanmoins moins bonne que la méthode des rectangles milieu pour notre approximation de I. Cela est dut au fait que les trapèzes sont toujours en dessous alors que les rectangles milieu on une partie en dessous et une partie au dessus et donc les écarts s'annule en partie.
- même de manière générale, la méthode du point milieu est meilleur que celle des trapèzes pour les raisons évoquées. (*"L'erreur est deux fois plus petite que celle donnée par la méthode des trapèzes."* Source : Wikipedia Méthode du point médian). Et les deux méthodes sont exactes pour des polynômes de degré inférieur ou égale à 1.

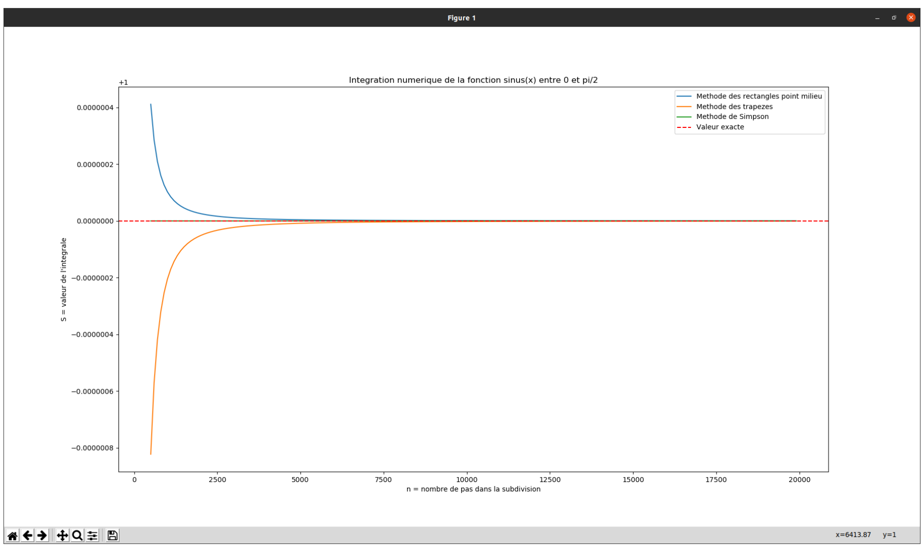


Deuxième graphique :

- comme la méthode rectangle point milieu, l'évolution de l'erreur de la méthode des trapèzes est elle rapidement très bonne.

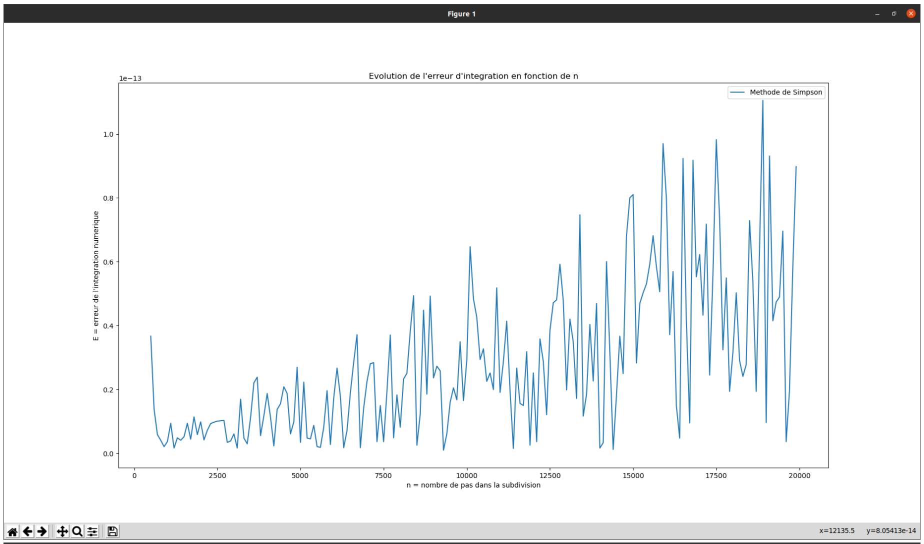
3)(e) Méthode de Simpson

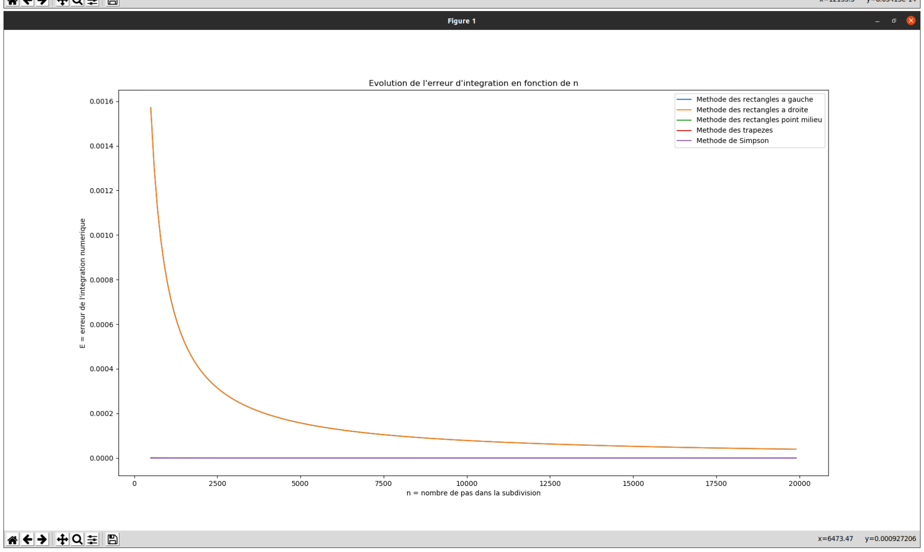




Premier graphique :

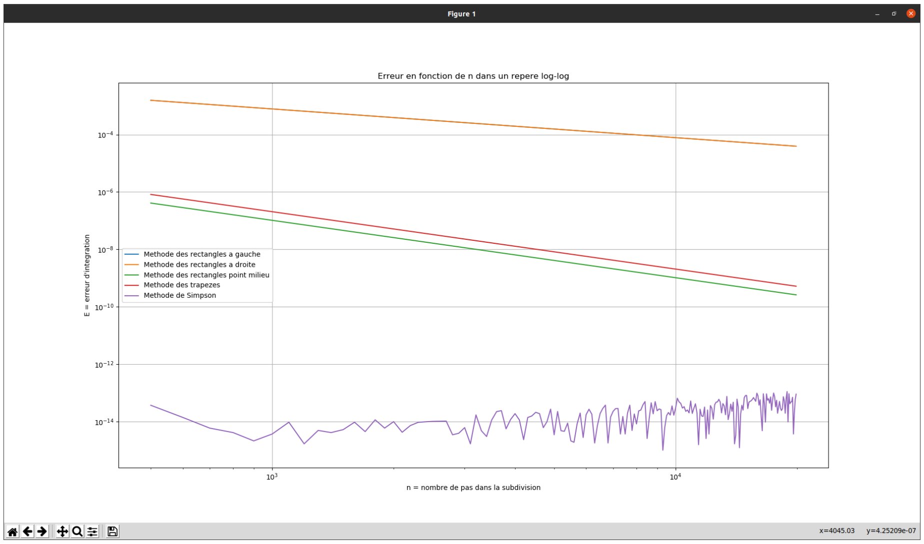
- l'approche par la méthode de Simpson est vraiment excellente et si on ne la regarde pas séparément des autres méthodes elle requière de nombreux zoom avant de voir la différence avec l'intégrale exacte I .
- elle passe parfois en dessous et parfois au dessus de I.
- c'est de loin la meilleur méthode vu jusqu'à présent.





Deuxième graphique :

- l'évolution de l'erreur de la méthode de Simpson est elle aussi ici excellente.



4) Troisième graphique

- Les approximation par des rectangles (droite, gauche, milieu) et trapèzes sont toutes les 4 représenté linéaire dans un repère log-log. Ce qui confirme notre hypothèse qu'elles ont une nature exponentielle.
- Les méthodes rectangles à gauche et à droite sont encore une fois similaire, et moins bonne que celle par trapèzes et rectangle du milieu. Elles commence en $x = 500$ avec une erreur de l'ordre de $1e(-03)$ et descendent jusqu'à $1e(-05)$ en $x = 20000$.
- Les méthodes rectangles milieux et trapèzes sont en dessous avec une erreur qui commence à $1e(-07)$ et descend jusqu'à $1e(-10)$ en $x = 20000$.
- Les méthodes par rectangles du milieu et trapèzes sont assez proche et parallèle. L'erreur tend plus rapidement vers 0 qu'avec les méthodes rectangles à gauche/droite.
- La méthode de Simpson est imbattable par rapport aux 4 autres. L'erreur descend jusqu'à $1e(-15)$ et oscille. Pour $x = 500$ l'erreur est d'ordre $1e(-14)$ et pour $x = 20000$, E est toujours d'ordre $1e(-14)$.