

# Calcul Scientifique

Pierre-Antoine Lambrecht

Novembre 2020

## 1 TP2

### Question 12

(d) Comme on le voit sur les images suivantes, le polynôme de Lagrange  $P(X)$  est une droite confondu avec l'axe des abscisses pour les  $n$  points d'interpolations,  $n \in \{3, 4, 7\}$

Cela s'explique par le fait que notre intervalle est divisé en  $(n-1)$  segments. Or notre intervalle est  $[-3\pi, 3\pi]$  et  $|-3\pi - 3\pi| = 6\pi$ , on a alors  $\frac{6\pi}{n-1}$  :

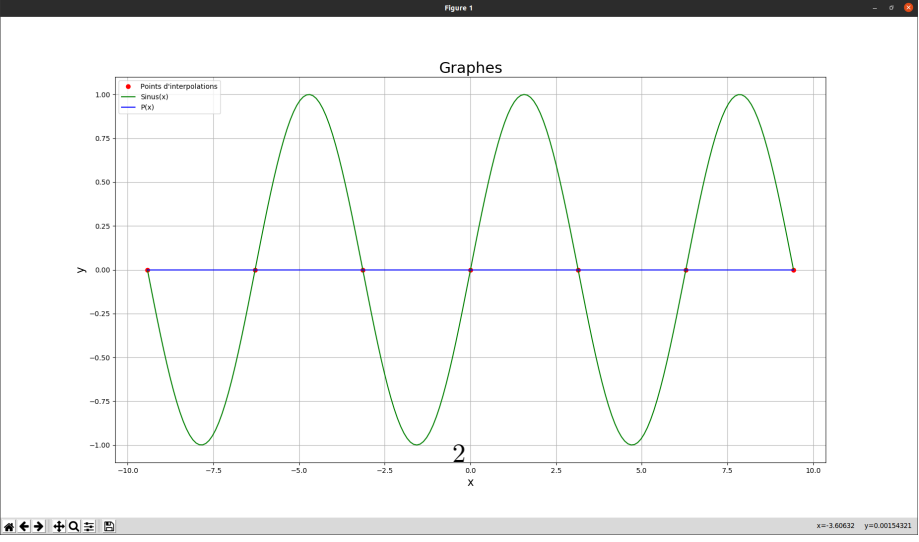
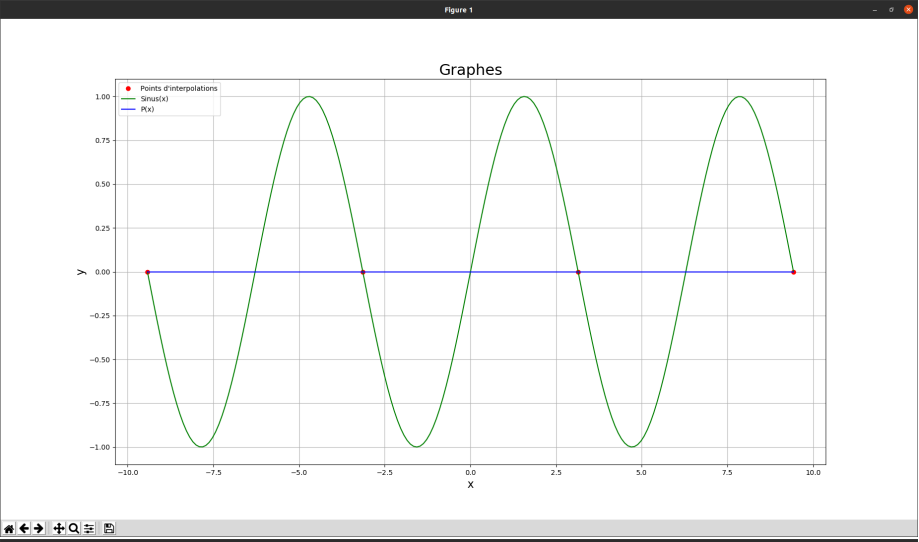
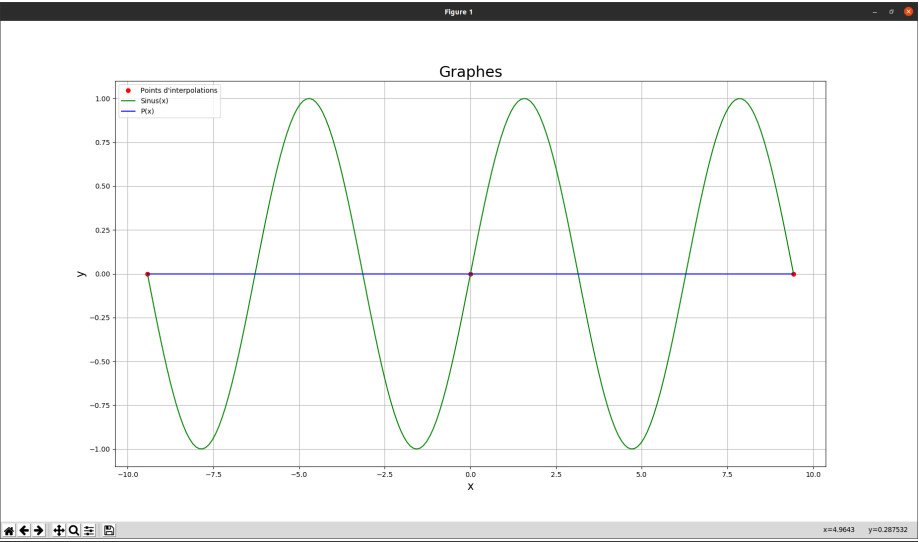
$$\frac{6\pi}{3-1} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad (1)$$

$$\frac{6\pi}{4-1} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi \quad (2)$$

$$\frac{6\pi}{7-1} = \frac{6\pi}{6} = \pi \quad (3)$$

Or  $\sin(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$

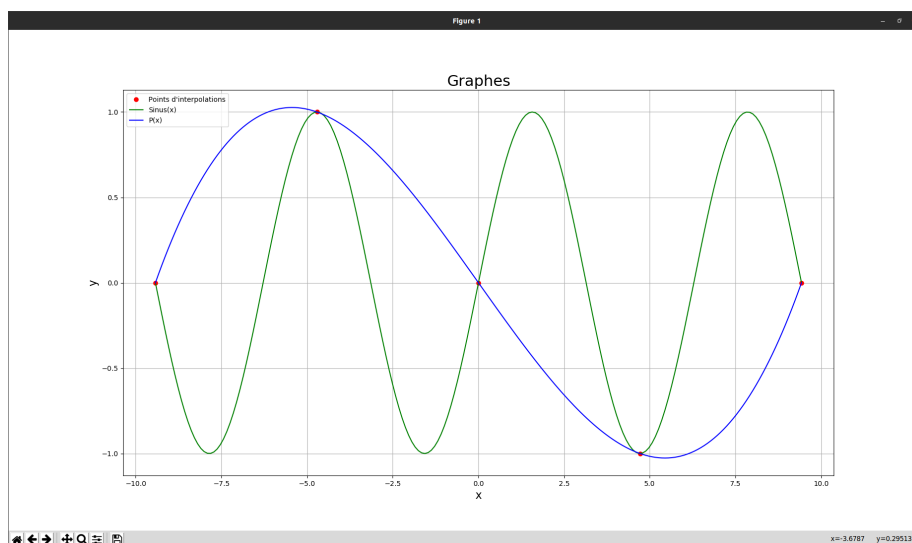
Donc les  $n$  points d'interpolations pour  $n \in \{3, 4, 7\}$  se retrouvent sur l'axe des abscisses.

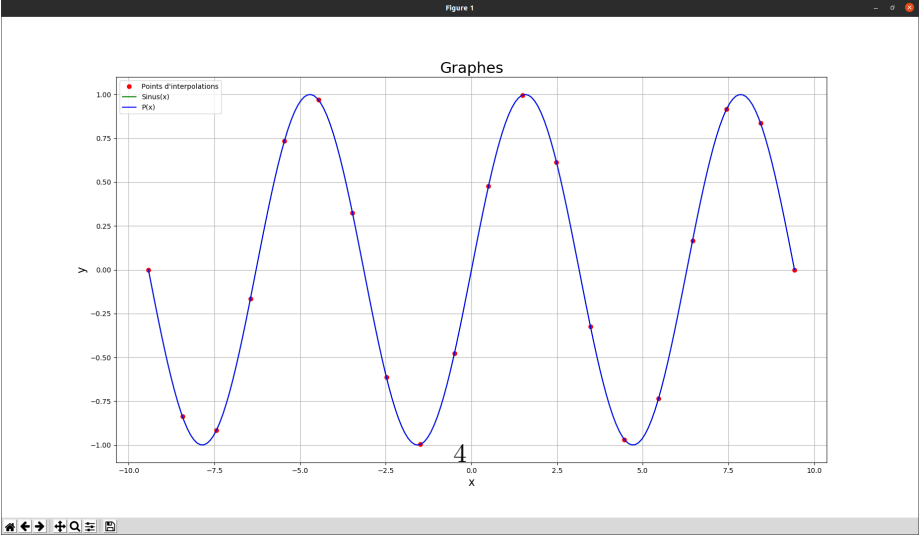
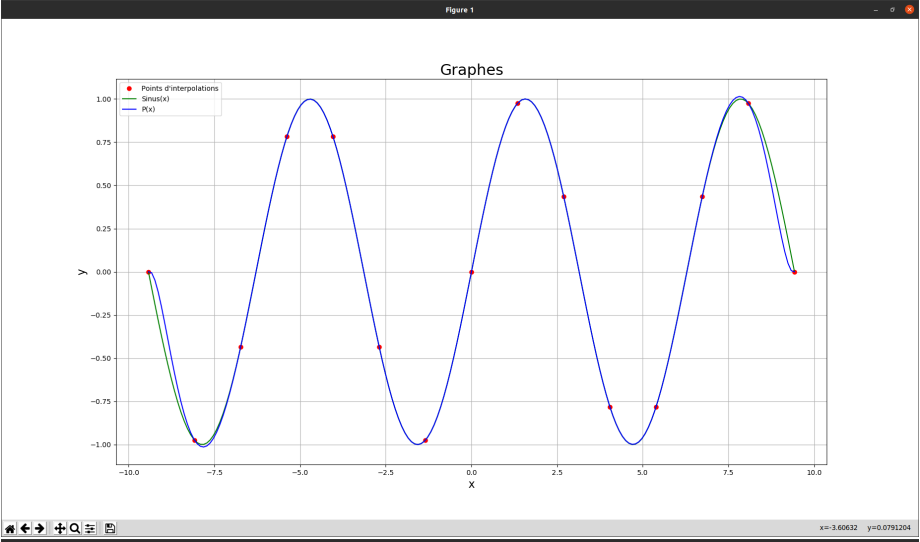
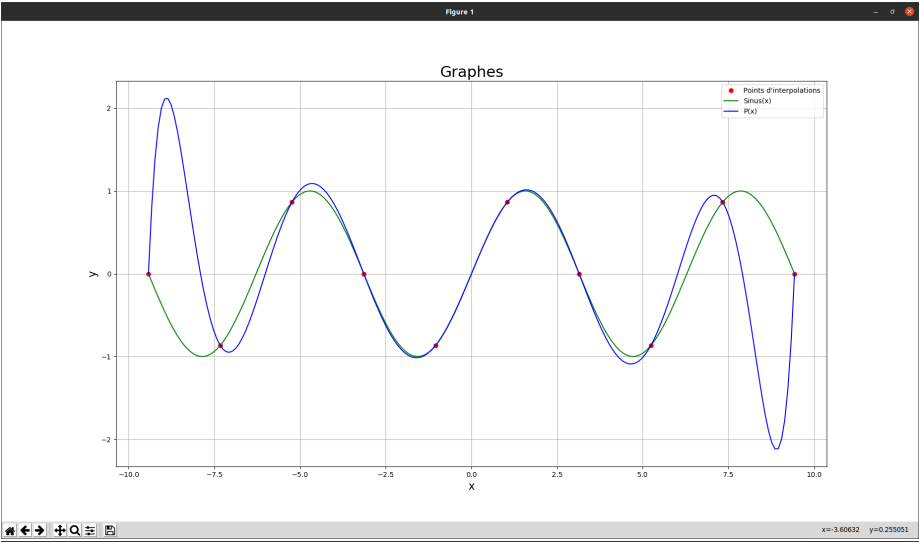


(e) Sur les images ci dessous on a utilisé comme points d'interpolations des multiples de 5 ( $n \in \{5, 10, 15, 20\}$ ).

On remarque que :

- plus le nombre de points d'interpolations augmentent, meilleur est l'approximation de  $\sin(x)$  par  $P(x)$ .
- l'approximation est meilleur autour de 0.
- il y a un gros écart entre  $\sin(x)$  et  $P(x)$  sur les bords de l'intervalle pour  $n = 10$
- mais l'écart maximal entre la fonction et son interpolation n'augmente pas indéfiniment avec  $n$ , donc il n'y a pas de phénomène de Runge





**Question 13** Selon moi c'est à partir de 18 points d'interpolations que l'interpolée colle bien visuellement avec la fonction originale  $\sin(x)$ . C'est aussi à partir de là que l'erreur  $\sup_{x \in [-3\pi, 3\pi]} |\sin(x) - P(x)|$  devient de l'ordre e-3 comme on peut le voir dans la console avec les print.

**Question 15** Dans les images suivantes on a un graphe représentant l'erreur en fonction de  $n$ , plus quelques interpolations remarquables.

Sans surprise on retrouve les erreurs pour  $n = (3, 4, 7)$  de la question 12)(d) en 1. En effet on a vu que  $P(x) = 0$  pour ces valeurs, donc,

$$|\sin(x) - P(x)| = |\sin(x)|$$

et

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

On remarque également des valeurs d'erreurs particulièrement élevées pour certain  $n$ , comme  $n = 6$ ,  $n = 8$  et  $n = 9$  dont on a ajouté les graphes correspondants. On voit bien sur ces graphes à quels endroits ces sup se trouvent, vers les bords de l'intervalle. On a également fait des print de ces erreurs dans la console.

De plus comme  $\sin(x)$  est une fonction paire je pense qu'il est assez raisonnable de penser qu'il a au moins deux sup égaux pour chaque interpolation, c'est à dire que si,

$$\sup_{x_0 \in [-3\pi, 3\pi]} |\sin(x) - P(x)| = a$$

alors,

$$\sup_{-x_0 \in [-3\pi, 3\pi]} |\sin(x) - P(x)| = |-a| = a$$

également.

