

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação

## CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

### Terceira Prova

Turma: B

### NP-completude

Prof. Flávio L. C. de Moura

26 de novembro de 2018

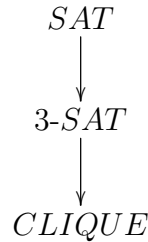
1. **(2.5 pontos)** O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

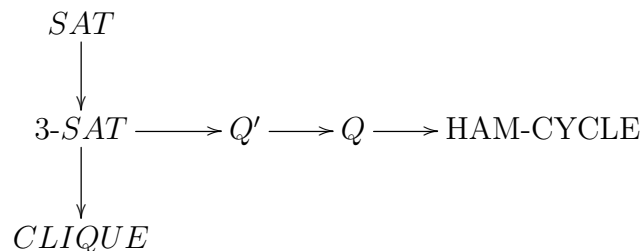
Prove que 2-SAT  $\in$  P.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)

2. **(2.5 pontos)** Em aula, assumimos que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completos. As reduções foram feitas de acordo com o seguinte diagrama:



Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo simple que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez. Considere o problema de decisão HAM-CYCLE que pergunta se um dado grafo (não-dirigido)  $G$  possui um ciclo Hamiltoniano. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema  $Q$  então inicialmente mostre que  $Q$  é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que  $Q$  é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema  $Q'$ , e também sabe como mostrar que  $Q'$  é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo. Então o diagrama correspondente à sua solução seria:



E todas as reduções (de 3-SAT para  $Q'$ , de  $Q'$  para  $Q$  e de  $Q$  para HAM-CYCLE) devem ser detalhadas na sua solução.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)

3. **(2.5 pontos)** Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido)  $G$ , que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice  $v \in G$ , e adicionar uma bola a algum vértice adjacente

de  $v$ . Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo  $G$ , e uma função  $p(v)$  que retorna o número de bolas de gude no vértice  $v$ , existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de  $G$ , exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)

4. **(2.5 pontos)** Uma fórmula booleana em *forma normal conjuntiva com disjunção exclusiva (FNCX)* é uma conjunção de diversas cláusulas, e cada cláusula é uma disjunção exclusiva (XOR) de diversos literais. Lembre-se que a disjunção exclusiva é dada por:

$a$	$b$	$a \oplus b$
$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

O problema FNCX-SAT pergunta se uma dada fórmula em FNCX é satisfatível. Mostre que o problema FNCX-SAT está em  $P$ , ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)