Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

Christian Luis Marcondes Costa 15/0153538
Jonatas Gomes Junior 14/0146407

CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

3a Prova - Turma B

1. O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

   $$(x1 \lor \neg x2) \land (\neg x1 \lor \neg x3) \land (x1 \lor x2) \land x3$$

   Prove que 2-SAT ∈ P.

   Solução:

   Considere *n* como o número de variáveis booleanas e *m* como o número de conjunções.

   Construção:
   Suponha um grafo G=(V, E) com *2n* vértices. Com isso, cada um dos vértices deste grafo será um literal e a sua negação. Para cada uma das conjunções (X ∨ Y) na fórmula, construa uma aresta de $\neg X$ para Y e outra aresta de $\neg Y$ para X. Estas arestas significa que se X não é verdadeiro então Y precisa ser verdadeiro e vice versa. Com isso temos que, se existe uma aresta direcionada de X para Y em G, então existe uma conjunção ($\neg x$ ∨ y) na conjunção de disjunções de literais.

Hipótese:

A fórmula é insatisfatível se e somente se existe um X tal que existe um caminho de X para $\neg X$ e existe um caminho de $\neg X$ para X.

Prova (por contradição):

Suponha que tenha caminhos de X para $\neg X$ e de $\neg X$ para X para um vértice qualquer em G, mas que a fórmula também seja satisfazível.

Com X = verdadeiro:

Suponha o caminho de X para $\neg X$ como

X -> a -> b -> …. c -> d -> … -> $\neg X$

Pela construção de G, tem uma aresta entre A e B em G se somente se temos a cláusula $\neg A\ V\ B$ na fórmula. Como o caminho de A para B precisa ser verdadeiro pela construção do grafo G, então o caminho de X para c precisa ser verdadeiro, e o caminho de d para $\neg X$ precisa ser falso, pois $\neg X$ é falso. Contradizendo que tenhamos caminho de X para $\neg X$.

De forma análoga podemos fazer a verificação do caminho de $\neg X$ para X.

Para checar a satisfabilidade da fórmula, podemos percorrer o grafo construído usando algum algoritmo de busca, tais como BFS e DFS. Ambos percorrem o grafo em tempo polinomial. Ao percorrer o grafo, iniciamos de um literal X que não possui sinal e não possui caminho para $\neg X$, marcando todos os literais do caminho como verdadeiro e visitado. Feito isso, o $\neg X$ é escolhido e percorremos os caminhos não visitados marcando todos os literais como falso. Se tivermos caminho de X -> $\neg X$ e $\neg X$ -> X, então a fórmula é insatisfazível, caso contrario, será satisfazível.

Dessa forma, provamos que 2-SAT ∈ P.

2. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema Q então inicialmente mostre que Q é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que Q é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema Q 0 , e também sabe como mostrar que Q 0 é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo.

Solução:

Construção:
Considere cada literal em 3-SAT como *n* e construa *Pn* caminhos, cada um representando um literal. Cada caminho deve ter o *2i* nós, aonde i é o número de conjunções na expressão.

Em seguida construa conecte os nós $P_{n,\,k-1} -> P_{n,\,k}$ e $P_{n,\,k} -> P_{n,\,k-1}$ em todos os Pn caminhos. Feito isso, conecte os nós $P_{n,\,1} -> P_{n+1,\,2i}$ e $P_{n,\,2i} -> P_{n+1,\,1}$ em todos os Pn caminhos.

Adicione nós de origem (S) e destino (T). Faça a ligação de $S -> P_{1,\,1}$ e $S -> P_{1,\,2i}$, com isso faca $P_{n,\,1} -> T$ e $P_{n,\,2i} -> T$. Por fim conecte T -> S. Para cada conjunção Cj com o literal Xi, faça a ligação $P_{i,\,2j-1} -> C_j -> P_{i,\,2j}$ caso Xi não esteja negado. Se Xi estiver negado, o caminho deve ser $P_{i,\,2j-1} <- C_j <- P_{i,\,2j}$.

Pelo grafo construído de G podemos percorrer os Pn caminhos apenas da esquerda para a direita ou da direita para esquerda, considerando que o percorrimento será um ciclo Hamiltoniano H. Se temos uma solução para o problema 3-SAT gerador do grafo G, então podemos percorrer G iniciando pela origem S e percorrendo o caminho Pn da esquerda para a direita caso Xn seja verdadeiro ou da direita para esquerda caso Xn seja falso. Como todas as conjunções são satisfazível, então todos os Cj serão percorridos, formando um ciclo com todos os nós do grafo G, ou seja, um ciclo Hamiltoniano Direcionado (DIR HAM CYCLE). A construção do grafo pode ser feita em tempo polinomial, com isso temos:

$$3SAT \leq_p DIR\ HAM\ CYCLE$$

Para transformar o ciclo Hamiltoniano Direcionado H em um ciclo Hamiltoniano não-direcionado, basta pegar cada um dos nós N entre a origem S e o destino T e transformar N em uma linha, conectada da forma $N_1 - N_2 - N_3$ onde N3 será conectado ao nó que sai N no ciclo H e N1 será conectado ao nó que chega em N no ciclo H. Desta forma, preservamos o direcionamento do ciclo H de forma não direcional.

$$DIR\ HAM\ CYCLE \leq_p UND\ HAM\ CYCLE$$

Com isso, provamos que a redução de 3-SAT para UND HAM CYCLE pode ser feita. Portanto

$$3SAT \leq_p DIR\ HAM\ CYCLE \leq_p UND\ HAM\ CYCLE$$

3. Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido) G, que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices:
   um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice v ∈ G, e adicionar uma bola a algum vértice adjacente de v. Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo G, e uma função p(v) que retorna o número de bolas de gude no vértice v, existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de G, exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

   Solução:

   Construção:
   Nota: Como não foi especificado no problema, está sendo considerado que a bolinha de gude à ser adicionada ao vértice adjacente ao vértice v não pode voltar à outro vértice já visitado anteriormente, a não ser que estejamos no último vértice.

   Considere um Ciclo Hamiltoniano C não direcionado. A transformação de C em um Caminho Hamiltoniano H pode ser feita de uma forma bastante simples. Basta escolhemos um vértice *v* qualquer de C e gerarmos um vértice *v'* que possui as mesmas adjacências que *v'*, portanto *v* e *v'* não devem ser conectadas entre si. Feito isso, podemos conectar o *v* a um nó S (origem) e *v'* a um nó T (destino). Essa transformação pode ser feita em tempo polinomial. Com isso provamos que:

$$HAM\ CYCLE \leq_p HAM\ PATH$$

   Tendo que o Caminho Hamiltoniano é NP-Completo, podemos reduzi-lo para o problema das bolinhas de gude proposto. Para construir o problema das bolinhas considere um Caminho Hamiltoniano H. Conhecendo o nó de origem S e o destino T deste Caminho Hamiltoniano H, podemos adicionar bolinhas a cada um desses nós, seguindo as seguintes especificações:

   1. Adicionar 0 bolinhas ao nó S
   2. Adicionar uma bolinha em cada um dos outros nós

Iniciaremos o percorrimento em S, e visitaremos um nó adjacente N. Em seguida, visitaremos o nó adjacente de N que possui o número de bolinhas de gude como 2, que foi gerado ao visitar N. Note que ao visitar os nós, estamos sempre adicionando +1 ao nó adjacente e zerando os nós visitados. Como a bolinha não pode voltar aos nós já visitados ao não ser em T, sempre teremos um nó com duas bolinhas, a não ser no início S e ao chegar em T. Quando chegarmos em T teremos apenas uma bolinhas restante no grafo, satisfazendo a condição do problema das bolinhas de gude. Com isso temos que:

$$HAM\ PATH \leq_p MARBLE\ BALLS$$

4. Mostre que o problema FNCX-SAT está em P , ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

Solução:

Construção

Tendo a fórmula FNCX, podemos converter cada uma das Conjunções Exclusivas em equações de módulo, já que XOR funciona como uma soma módulo de 2. Podemos montar as equações seguindo os seguintes passos:

1. Se o literal Xi não está negado, então podemos colocar o literal na equação normalmente
2. Caso contrário, o literal deve ser adicionado na equação como (1 + Xi)

Cada conjunção deve ser uma equação diferente. Considere o seguinte exemplo:

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus X_4) \land (X_2 \oplus \neg X_1 \oplus \neg X_3)$$

A primeira conjunção $(X_1 \oplus X_2 \oplus X_4)$ pode ser representada pela seguinte equação:

$$X_1 + X_2 + X_4 \equiv 1 \ (mod\ 2)$$

A segunda conjunção $(X_2 \oplus \neg X_1 \oplus \neg X_3)$ pode ser representada pela seguinte equação:

$$X_2 + (X_1 + 1) + (X_3 + 1) \equiv 1 \ (mod\ 2)$$

Com essas equações podemos montar um sistema de equações lineares. Para verificar se o sistema linear pode ser resolvido, podemos aplicar uma Eliminação Gaussiana, que consegue resolver equações lineares módulo. Como sabemos, a Eliminação Gaussiana pode ser feita em tempo polinomial. Se o sistema possui solução, então a fórmula FNCX é satisfazível.

Com isso, provamos que FNCX-SAT pode ser resolvido em tempo polinomial.