Universidade de Bras´ılia
Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação

CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

Terceira Prova

Turma: B

NP-completude

Prof. Flávio L. C. de Moura

26 de novembro de 2018

Jônatas Rocha de Paiva – 140177043

Matheus de Oliveira Braga – 140155571

1. **(2.5 pontos)** O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

Prove que 2-SAT $\in$ P.

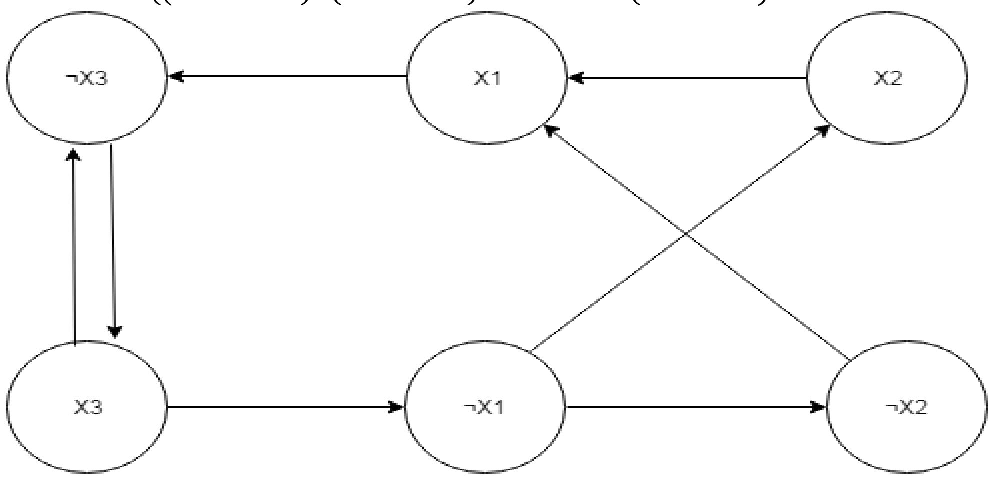
Solução.

F = (X1 ∨ $\overline{X2}$) ∧ ($\overline{X1}$∨$\overline{X3}$) ∧ (X1∨X2)∧(X3∨X3)

Para 2-SAT ser satisfatível a forma normal conjuntiva fornecida deve ser satisfeita, ou seja, deve ser TRUE para alguma atribuição de Xi.

Cláusula 1: ($\overline{X1} \rightarrow \overline{X2}$) ∧(X2→X1) Cláusula 2: (X1→ $\overline{X3}$)∧(X3→ $\overline{X1}$)

Cláusula 3: (($\overline{X1} \rightarrow X2$)∧($\overline{X2} \rightarrow X1$) Cláusula 4: ($\overline{X3} \rightarrow X3$)



Na cláusula 4 há uma contradição e como X3 e $\overline{X3}$ pertencem ao mesmo componente fortemente conexo, estão em um ciclo, ou seja, $PATH(\bar{A} \rightarrow B)\&PATH(\bar{B} \rightarrow A)$ existe, logo, a forma conjuntiva normal não é satisfatível. Como exemplo: Se X1 for TRUE, para as cláusulas serem TRUE, X3 deve ser TRUE e FALSE ao mesmo tempo, sendo assim, é impossível ter atribuições de X1, X2 e X3 tal que, a expressão 2-SAT, F, seja TRUE.

2. **(2.5 pontos)** Em aula, assumimos que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completos. As reduções foram feitas de acordo com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
SAT \arrow[d, dash, "j\times"'] \\
3\text{-}SAT \arrow[d, dash] \\
CLIQUE
\end{tikzcd}$$

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo simple que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez. Considere o problema de decisão HAM-CYCLE que pergunta se um dado grafo (não-dirigido) G possui um ciclo Hamiltoniano. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema Q então inicialmente mostre que Q é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que Q é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema Q^j, e também sabe como mostrar que Q^j é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo. Então o diagrama correspondente à sua solução seria:

$$\begin{tikzcd}
SAT \arrow[d, dash, "j\times"'] & & & \\
3\text{-}SAT \arrow[r] \arrow[d, dash] & Q^j \arrow[r] & Q \arrow[r] & \text{HAM-CYCLE} \\
CLIQUE & & &
\end{tikzcd}$$

E todas as reduções (de 3-SAT para Q^j, de Q^j para Q e de Q para HAM-CYCLE) devem ser detalhadas na sua solução.

Solução.

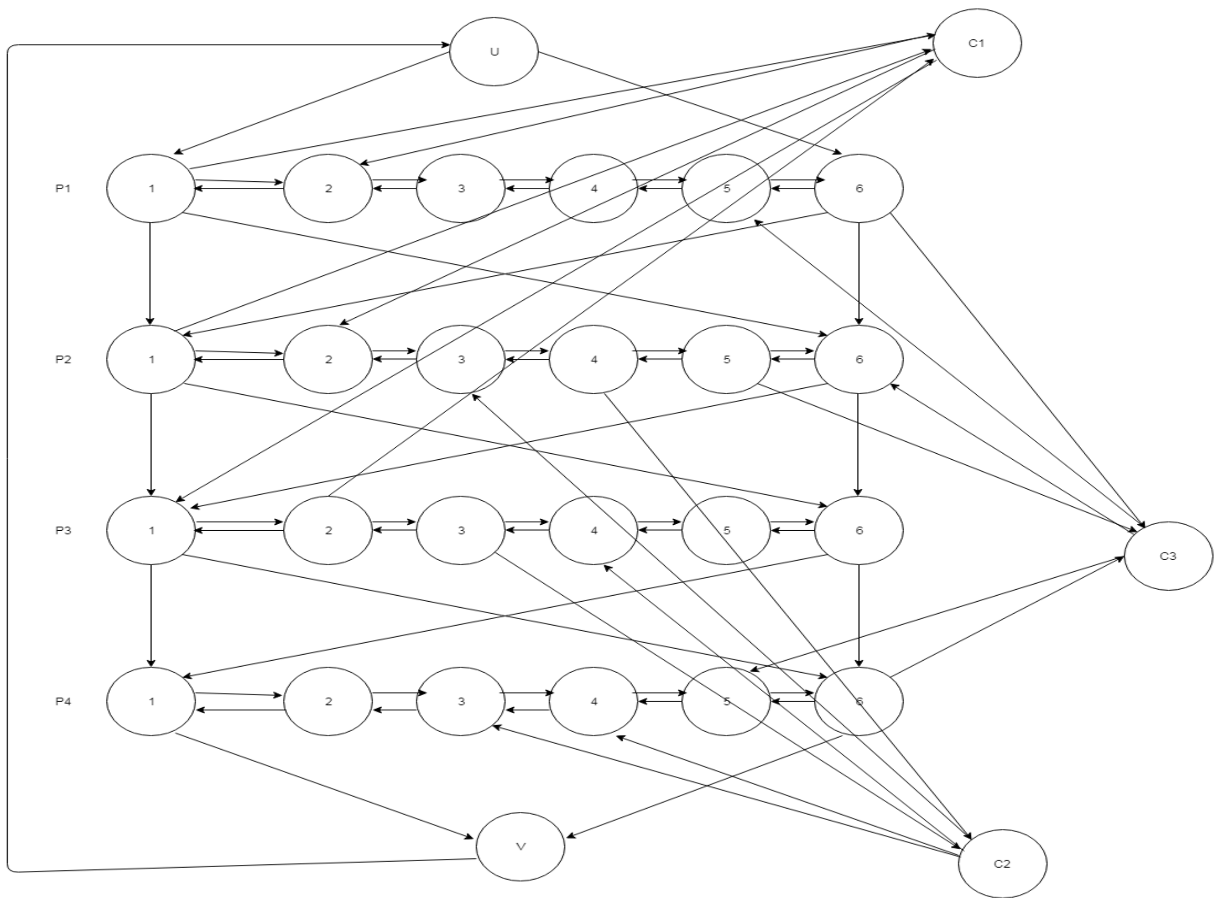
Reduzindo um problema HAM-CYCLE a partir de 3-SAT, deve-se provar que 3-SAT ≤ pHAMPATH, tal que HAMPATH = {(G, u, v)} | G. E mostrando que HAMPATH é NP, prova-se que HAMPATH é NP-completo.

Para mostrar que HAMPATH é NP, usa-se um verificador para tempos polinomiais e um certificado sendo um caminho de u até v em G, se existir. E para mostrar que HAMPATH é NP-completo, mostra-se que 3-SAT é reduzível em tempo polinomial para HAMPATH, já que se sabe que 3-SAT é NP-completo.

A partir de uma expressão 3-SAT de n variáveis, modela-se o grafo com uma origem u e um destino v, e de forma a construir caminhos Pi com 2k nós (Vi,1 , Vi,2 , ... , Vi,2k) sendo k o número de cláusulas, para cada variável Xi. Liga-se todos os nós, com cada nó tendo dois caminhos, representando atribuições TRUE e FALSE, formando uma estrutura de diamante. Representa-se cada cláusula como um único nó Cj, e as conecta. Se Cj contém Xi, conecta Cj em Vi,2j-1 e Vi,2j da esquerda para a direita, e se, Cj contém $\overline{X\imath}$ conecta Cj em Vi,2j-1 e Vi,2j da direita para a esquerda, e por fim, liga uma aresta de v para u.

Como exemplo:

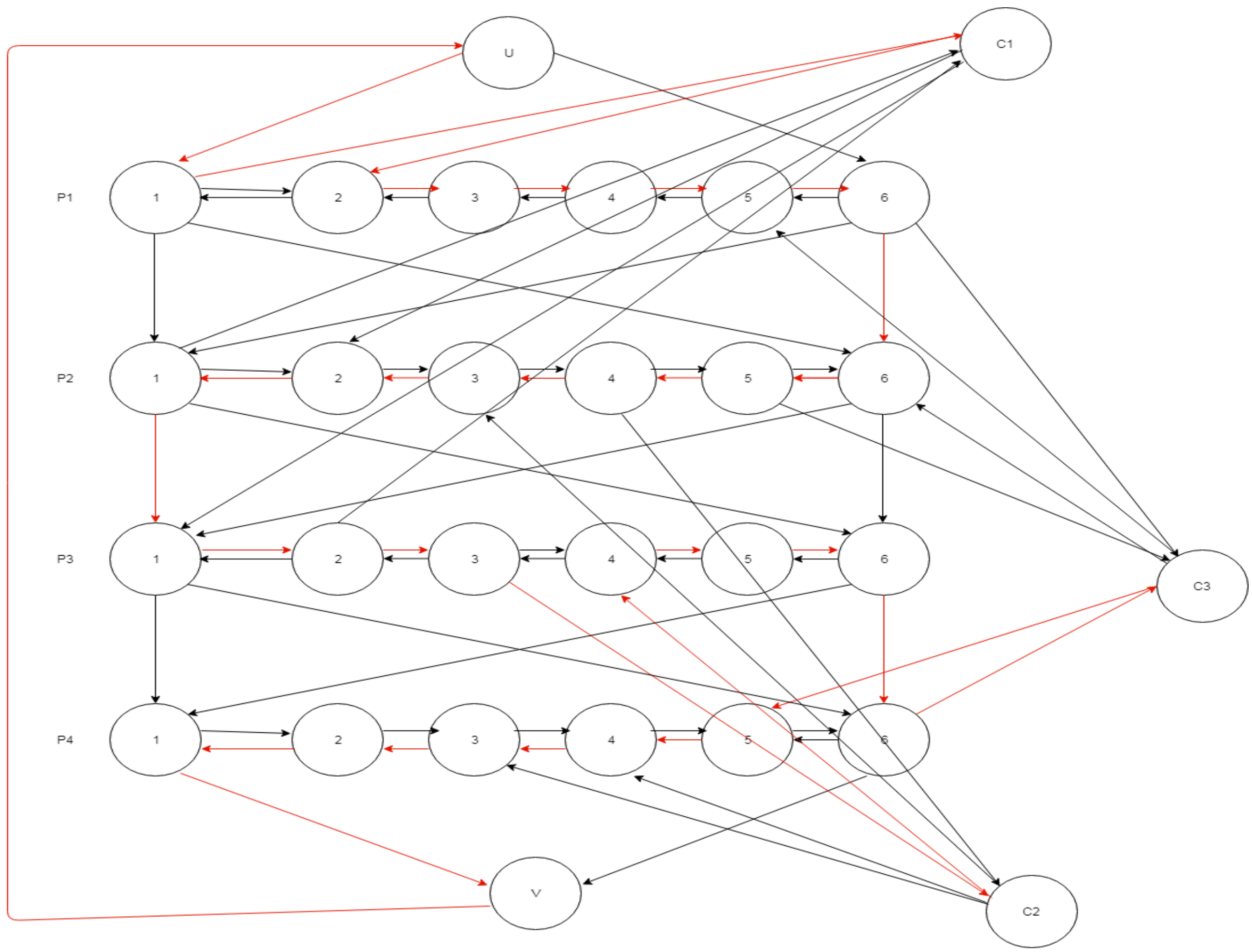
$$F = (X1 \vee X2 \vee \overline{X3}) \wedge (\overline{X2} \vee X3 \vee X4) \wedge (X1 \vee \overline{X2} \vee X4)$$



Se existe um ciclo Hamiltoniano H no grafo G, atribui-se Xi = True, se H percorre Pi da esquerda para a direita, e atribui-se Xi = False, se H percorre Pi da direita para a esquerda. Já que H visita cada nó cláusula Cj, ao menos um Pi é percorrido na direção certa relativo ao nó Cj. A atribuição obtida satisfaz à forma normal conjuntiva fornecida. Ademais, se a expressão 3-SAT é satisfeita, seleciona um caminho que percorre Pi da esquerda para direita se Xi = True ou da direita para a esquerda se Xi = False, inclui as cláusulas no caminho quando possível, conecta u em P1, Pn em v e Pi em Pi+1 apropriadamente para manter a continuidade do caminho e conecta v em u para completar o ciclo.

Logo, a atribuição satisfaz todas as cláusulas e todos os nós cláusulas são incluídos no caminho. Os nós Pi, u e v estão todos incluídos e o caminho percorre unidirecionalmente sem repetir nenhum nó. Sendo assim, o caminho obtido é um ciclo Hamiltoniano.

Exemplo de atribuição: X1 = True, X2 = False, X3 = True, X4 = False



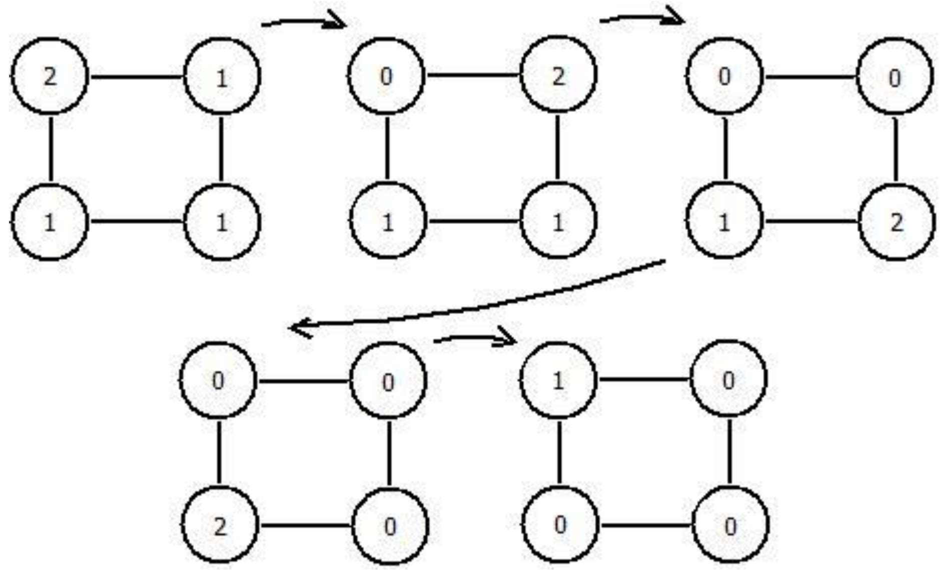
3. **(2.5 pontos)** Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido) G, que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice $v \in G$, e adicionar uma bola a algum vértice adjacente de v. Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo G, e uma função $p(v)$ que retorna o número de bolas de gude no vértice v, existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de G, exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

Solução.

É possível encontrar a solução para este problema se provarmos que é np-completo. Para isso, primeiro precisamos provar se é NP, verificando se existe uma solução em tempo polinomial. Podemos realizar uma simulação de algoritmo onde percorremos o grafo a partir de um vértice e visitamos cada um dos outros apenas uma vez. Para cada vértice visitado, retiramos 2 bolas de cada vez colocando apenas 1 no próximo vértice, este passo é repetido no mesmo vértice até que não seja mais possível retirar mais bolas respeitando as regras do jogo previamente descritas. Pulamos então para o próximo vértice e realizamos os passos acima novamente. O percorrimento do grafo é feito apenas em 1 sentido, podendo ser escolhido tanto para a direita ou para esquerda, desde que este sentido seja respeitado durante todo o ciclo. Este percorrimento é feito em tempo polinomial.

Podemos notar então que com esta simulação, é possível montar um ciclo Hamiltoniano a partir do problema proposto. Como provamos que um ciclo Hamiltoniano é NP-completo, se fizermos a redução correta, podemos provar que o problema também é NP-completo.

Dessa forma, montamos um grafo que simula o problema de forma que o vértice inicial possua 2 bolas e todos os outros possuam apenas 1, sendo 4 vértices no total, e então percorremos o grafo da esquerda para a direita.



No final, visitamos cada um dos vértices apenas uma vez e chegamos à solução do problema proposto, podendo-se concluir que podemos reduzir o ciclo Hamiltoniano ao problema, mostrando que este também é np-completo.

4. **(2.5 pontos)** Uma fórmula booleana em *forma normal conjuntiva com disjunção exclusiva (FNCX)* é uma conjunção de diversas cláusulas, e cada cláusula é uma disjunção exclusiva (XOR) de diversos literais. Lembre-se que a disjunção exclusiva é dada por:

a	b	$a \oplus b$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O problema FNCX-SAT pergunta se uma dada fórmula em FNCX é satisfatível. Mostre que o problema FNCX-SAT está em P, ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

Solução.

Pode-se, simplesmente, provar que FNCX-SAT é NP-completo com uma redução a partir de 3-SAT. Qualquer cláusula 3-SAT ($X1 \vee X2 \vee X3$) pode ser escrita como uma expressão igualmente satisfatível ($X1 \vee \bar{Y}$)$\wedge$($Y \oplus X2 \oplus Z$)$\wedge$($\bar{Z} \vee X3$), com y e z sendo variáveis introduzidas.

Afim de se ter uma prova de que um problema é NP-completo, para algum caso com 2 ou 3 literais e com relações XOR, usa-se o Teorema da Dicotomia de Schaefer. Considerando-o como um problema de satisfação de restrições (CSP) sobre um conjunto Γ de relações de aridade até 3, R(x,y,z). O problema CSP(Γ) é resolvido em tempo polinomial se Γ tem uma das 6 operações abaixo, como polimorfismo:

1. Operação Unária 0;
2. Operação Unária 1;
3. Operação binária AND;
4. Operação binária OR;
5. Operação ternária Majority(x,y,z) = $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$;
6. Operação ternária Minority(x,y,z) = $x \oplus y \oplus z$.

Caso contrário, CSP(Γ) é NP-completo.

Dado um problema que possua um conjunto de relações:

$\Gamma = x \vee y,\ x \oplus y \oplus z,\ \bar{x} \vee \bar{y}$

1. Não é um polimorfismo de nenhuma relação de Γ

2. Não é um polimorfismo de nenhuma relação de Γ
3. Não é um polimorfismo de nenhuma relação de Γ, para x ∨ y (0,0,0) não satisfaz a relação
4. Não é um polimorfismo de nenhuma relação de Γ, para $\bar{x}\vee\bar{y}$ (1,1,0) não satisfaz a relação
5. Não é um polimorfismo de nenhuma relação de Γ, para x ⊕ y ⊕ z, (1,0,1) satisfaz a relação porém, (0,0,0) não satisfaz a relação
6. Não é um polimorfismo de nenhuma relação de Γ, para x ∨ y, (0,1,0) e (1,0,1) satisfazem a relação porém, (1,1,0) não satisfaz

Logo, o problema exemplo, é NP-completo. Porém, se a cláusula estiver limitada a apenas dois literais, x ⊕ y é equivalente a (x ∨ y) ∧ ($\bar{x}\vee\bar{y}$), cuja satisfatibilidade pode ser determinado em tempo polinomial.

E por fim, pode-se obter uma prova geral de um problema aleatório k-XORSAT com n variáveis e m = nα cláusulas, considerando-o como um sistema de equações lineares, usa-se a eliminação Gaussiana.

A partir do teorema (Dubois, Mandler 2002), para qualquer k≥3, existe um $\alpha_s = \alpha_s(k)$ tal que, com alta probabilidade, instâncias aleatórias são SAT se $\alpha \in [0, \alpha_s)$, ou UNSAT se $\alpha \in (\alpha_s , \infty)$, $\alpha_s(k)$ sendo determinado como: $\alpha_s(3) = 0.9179$, $\alpha_s(4) = 0.9768$, $\alpha_s(5) = 0.9924$, ... E de acordo teorema (Kanoria, Kraning, Ibrahimi, Montanari, 2011), para qualquer k≥3 existe $\alpha_d = \alpha_d(k) \in (0, \alpha_s(k))$ tal que, com alta probabilidade, soluções são bem conexas se $\alpha \in [0, \alpha_d)$, soluções estão em $e^{n\Sigma}$ e em aglomerados bem separados se $\alpha \in (\alpha_d , \alpha_s)$, cada aglomerado é internamente bem conexo, ademais, $\Sigma(\alpha, k)$, $\alpha_d(k)$ é dado por: $\alpha_d(3) = 0.8185$, $\alpha_d(4) = 0.772$, $\alpha_d(5) = 0.7018$...

$$S \equiv \{soluções\} \subseteq \{0,1\}$$
$$\varsigma(S,l) \equiv (\mathrm{S}, \varepsilon \equiv \{(\mathrm{x},\mathrm{x}') \quad \mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{x}') \leq l\})$$
$$\phi(S;l) \equiv min_{A\subseteq S}\frac{cut_{\varsigma(S,l)}(A, S\backslash A)}{\min(|\mathrm{A}|, |\mathrm{S}\backslash \mathrm{A}|)}$$

Para qualquer k≥3 existe $\alpha_d = \alpha_d(k)$, Σ explícito, tal que: Se $\alpha \in [0, \alpha_d)$, $\phi(\mathrm{S}; (logn)^C) \geq 1/2$; Se $\alpha \in (\alpha_d, \alpha_s)$, $\phi(S; n\varepsilon) = 0$; Se $\alpha \in (\alpha_d, \alpha_s)$, existe uma partição $S = S_1 \cup \ldots \cup S_N$ tal que, para cada S_α, temos

ϕ(S; $(logn)^C$)$\geq 1/2$, para cada $S_\alpha \neq S_\beta$, temos d(S_α, S_β) $\geq n\varepsilon$, e para cada σ>0, $\exp\{n(\Sigma - \sigma)\} \leq N \leq \exp\{n(\Sigma + \sigma)\}$. Concluindo, se $\alpha \in [0, \alpha_d)$, existe um algorítmo de eliminação Gaussiano que consegue encontrar uma solução em tempo $n(logn)^C$, com alta probabilidade. E para $\alpha \in (\alpha_d, \alpha_s)$, a eliminação Gaussiana obtém uma solução em tempo $\theta(n^3)$, logo, um problema aleatório k-XORSAT está em P.