NOMES: Matheus Schmitz Oliveira / Marcelo Axel
MATRÍCULAS: 15/0018371 // 15/0080727

---

(1) PROVE QUE 2-SAT $\in$ P.

A expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

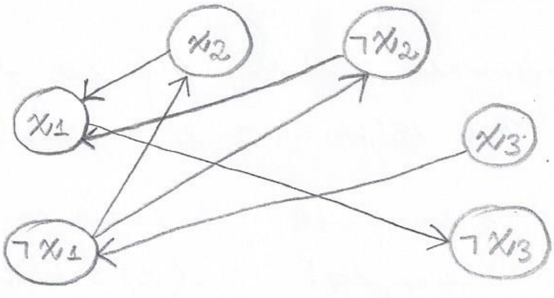
$$\text{FÓRMULA} \rightarrow \psi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge \overbrace{(\neg x_1 \vee \neg x_3)}^{\text{CLÁUSULA}} \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge \underbrace{x_3}_{\text{VARIÁVEL}}$$

Considerar a fórmula ψ com <u>n</u> variáveis e <u>m</u> cláusulas.

Para mostrar que 2-SAT $\in$ P, será necessário construir um grafo e percorrer vértices sobre ele.

O grafo $G = (V, E)$ possuirá $2n$ vértices. Cada vértice representará um literal para cada variável em ψ.

Sendo x e y literais, cria-se o grafo direcionado ligando-se $\boxed{\bar{x} \rightarrow y \quad \text{e} \quad \bar{y} \rightarrow x}$, que significa dizer: Se x não é verdadeiro, então y tem que ser verdadeiro e se y não é verdadeiro, então x tem que ser.



<u>Afirmação</u>: ψ é satisfatível $\overset{(\leftrightarrow)}{\text{se e somente se}}$ nenhuma componente fortemente conexa do grafo G contiver uma variável e sua negação.

$\longrightarrow$

($\Rightarrow$): Considere ψ satisfatível e xy uma aresta em G.

Então, se $val(x)$ = VERDADEIRO, então $val(y)$ = VERDADEIRO.

continua...

De fato, xy foi adicionado ao grafo por conta da cláusula $\overline{x} \vee y$. Assim, se $val(x)$ = VERDADEIRO, então $val(\overline{x})$ = FALSO, e $val(y)$ = VERDADEIRO.

Para qualquer literal x, sendo ambos x e $\overline{x}$ VERDADEIROS ou ambos FALSOS, se existir um caminho dirigido de x a $\overline{x}$, então o valor de x_i deve ser FALSO.

Similarmente, se existir um caminho do literal $\overline{x}$ ao literal x, então o valor de $\overline{x}$ que satisfaça qualquer atribuição deve ser FALSO.

O item anterior implica que se ψ possui uma atribuição satisfatível, então para nenhum literal x existe ou um caminho de x a $\overline{x}$ ou um caminho de $\overline{x}$ a x. Dessa forma, nenhuma componente fortemente conexa de G contém x e $\overline{x}$.

($\Leftarrow$): * Objetivo: Para cada variável x, $val(x)$ = VERDADEIRO se e somente se x aparecer depois de $\overline{x}$; senão, $val(x)$ = FALSO.

* Afirmação: Para nenhuma aresta xy do grafo o vértice x é VERDADEIRO e o vértice y é FALSO.

* Prova (por contradição): Assumindo que está incorreto, a aresta xy será um contra-exemplo: $val(x)$ = VERDADEIRO e $val(y)$ = FALSO. Considere x na componente biconexão B_i. O motivo para a aresta xy estar no grafo é a cláusula $\overline{x} \vee y$ que também gerou a aresta $\overline{x}\,\overline{y}$. Sendo $val(x)$ = VERDADEIRO, $val(\overline{x})$ = FALSO, o vértice $\overline{x}$ aparece antes da componente biconexa B_i, chamada de B_j, onde $j < i$. Sendo $val(y)$ = FALSO, o vértice y aparece após B_i, B_K com $K > j$. Mas qualquer aresta de B_K a B_j, com $j < K$ contradiz a ordem topológica das componentes biconexas. Assim, a afirmação garante que ψ é satisfatível. De fato, se existir uma cláusula $x \vee y$ com $val(x) = val(y)$ = FALSO, teríamos uma aresta $\overline{x}y$ com $val(\overline{x})$ = VERDADEIRO e $val(y)$ = FALSO, contradizendo a afirmação. ▨