2) Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo

Assumindo que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completo.

<u>Prova</u>: Primeiramente mostraremos que HAM-CYCLE é NP.

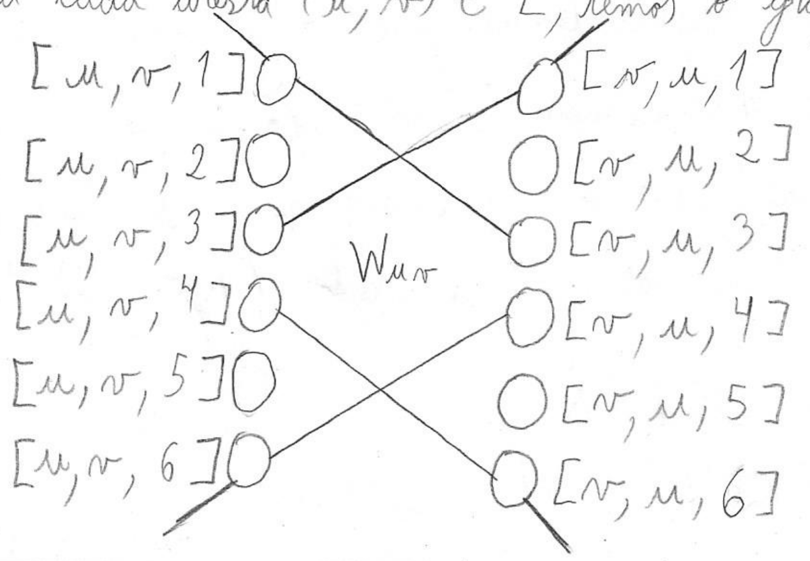
Suponha um grafo $G = (V, E)$ e uma sequência de $|V|$ vértices que fazem um ciclo hamiltoniano. O algoritmo de verificação checa se essa sequência contém cada vértice em $|V|$ exatamente uma vez e com o primeiro vértice repetido no final, isto forma um ciclo em G. Isso é, verifica que há uma aresta entre cada par consecutivo de vertices e entre o primeiro e o último vértice.

Isso pode ser verificado em tempo polinomial (NP)

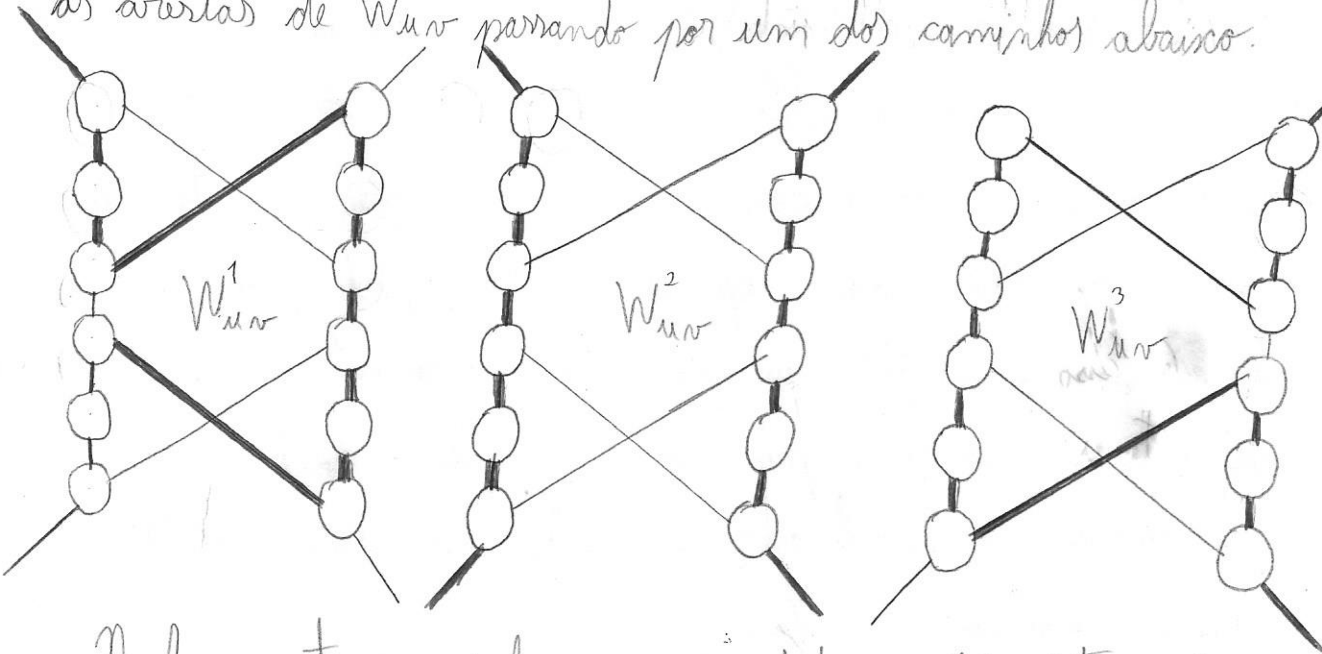
Agora provando que VERTEX-COVER $\leq_p$ HAM-CYCLE temos que HAM-CYCLE é NP-completo.

Suponha um grafo não-direcionado $G_1 = (V, E)$ e um inteiro K, construimos um grafo não direcionado $G' = (V', E')$ que é um ciclo hamiltoniano se e somente se G tiver uma cobertura de vertices de tamanho K.

Para cada aresta $(u, v) \in E$, temos o grafo G'.



Juntamente com a estrutura interna de W_{uv}, impomos as propriedades que desejamos para limitar a conexão entre W_{uv} e o restante do grafo G'. Em particular, apenas os vértices $[u, v, 1]$, $[u, v, 6]$, $[v, u, 1]$ e $[v, u, 6]$ terão arestas incidentes para fora de W_{uv}. Qualquer ciclo hamiltoniano de G' deve atravessar as arestas de W_{uv} passando por um dos caminhos abaixo.



Nenhum outro caminho passa por todos os 12 vértices. Em particular, é impossível construir dois caminhos, um conectando $[u, v, 1]$ a $[v, u, 6]$ e outro conectando $[v, u, 1]$ a $[u, v, 6]$, tal que a união dos dois caminhos contem todos os vértices.

Adicionando dois novos vértices que ligam os W_{uv} para fazer um caminho que contém todos os vértices de todos os W_{uv} e passa por todas as arestas temos que G' é polinomial no tamanho de G e, portanto, construímos G' em tempo polinomial no tamanho de G.

Estes novos vertices são chamados vértices seletivos, somando os vértices de G' com os vértices seletores ($K \leq |V|$) temos

$$|V| = 12|E| + K$$
$$\leq 12|E| + |V| \text{ vértices}$$

As arestas de G' são aquelas em W_{uv}, aquelas que estão entre dois W_{uv} e aquelas conectando os vértices seletores a W_{uv}.

Para cada vértice $u \in V$, grafo G' tem grau$(u) - 1$ arestas entre dois W_{uv}, então temos

$$\sum_{u \in V} (\text{grau}(u) - 1) = 2|E| - |V| \text{ arestas.}$$

Finalmente G' tem 2 arestas para cada par de um vértice seletor e um vértice de V, totalizando $2K|V|$ arestas.

O número total de arestas em G' fica

$$\begin{aligned} |E'| &= (14|E|) + (2|E| - |V|) + (2K|V|) \\ &= 16|E| + (2K - 1)|V| \\ &\leq 16|E| + (2|V| - 1)|V| \end{aligned}$$

Portanto a transformação de G para G' é uma redução

Como cada vértice em cada W_{uv} é visitado por algum caminho, vemos que cada aresta em E é coberta por algum vértice em V ∎