

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação

## CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

### Terceira Prova

Turma: B

### NP-completude

Prof. Flávio L. C. de Moura

5 de dezembro de 2018

1. **(2.5 pontos)** O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

Prove que  $2\text{-SAT} \in P$ .

**Solução.** O problema 2-SAT pode ser resolvido em tempo polinomial fazendo uma transformação da fórmula original para um grafo. Primeiramente é possível observar que uma cláusula qualquer  $A \vee B$  é equivalente a  $\neg A \implies B$  assim como  $\neg B \implies A$  o que significa dizer que  $A$  verdadeiro implica em  $B$  ser verdadeiro para satisfazer a

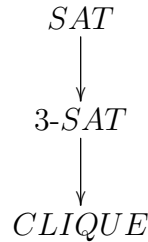
fórmula. Logo podemos construir um grafo onde cada cláusula do 2-SAT irá adicionar 2 arestas, e cada variável  $A$  irá acrescentar 2 vértices  $\neg A$  e  $A$  no grafo, o que pode ser feito em tempo polinomial relativo a representação na entrada. Sabendo da construção acima, é possível mostrar por contradição que caso exista um caminho de uma variável  $X$  para  $\neg X$  e um caminho de  $\neg X$  para  $X$  então a fórmula não será satisfazível.

Prova: Suponha que existe um caminho  $X$  para  $\neg X$  e  $\neg X$  para  $X$  no grafo e também uma designação de valores para cada variável da fórmula original para a qual está será verdadeira. Suponha que existe o seguinte caminho:

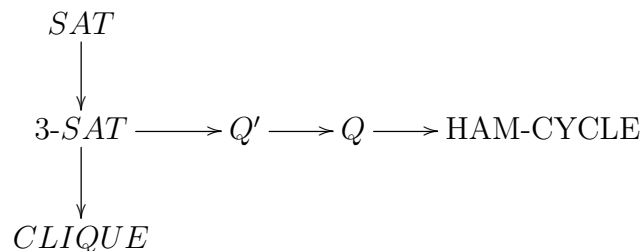
$$X \implies \dots \implies A \implies B \implies \dots \implies \neg X$$

Sabendo que  $X$  é verdadeiro neste caminho então  $\neg X$  deverá ser falso portando todas as variáveis no intervalo  $[B, \neg X]$  devem ser falsas para que estas cláusulas possam ser verdadeiras, da mesma forma para o caminho  $[X, A]$  todas as variáveis devem ser verdadeiras para que estas cláusulas também sejam verdadeiras. Porém existe um impasse na cláusula  $A \vee B$  onde  $B$  deverá ser falso e  $A$  deverá ser verdadeiro o que gera um valor verdade falso para esta cláusula fazendo com que a fórmula não seja satisfazível para  $X = v$ . O mesmo raciocínio pode ser feito para o caminho  $\neg X \implies \dots \implies X$  que implicaria na fórmula original também não ser satisfazível para um valor de  $\neg X = v$ . Portanto se existem estes dois caminhos não é possível encontrar um valor verdade para  $X$  que satisfaça a fórmula original o que contradiz a hipótese de que tal designação existe. Para encontrar um tal caminho é possível rodar um algoritmo de componentes fortemente conexas  $O(V+E)$  e verificar se em alguma componente  $X$  e  $\neg X$ , para alguma variável da fórmula, aparecem.

2. **(2.5 pontos)** Em aula, assumimos que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completos. As reduções foram feitas de acordo com o seguinte diagrama:



Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo simple que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez. Considere o problema de decisão HAM-CYCLE que pergunta se um dado grafo (não-dirigido)  $G$  possui um ciclo Hamiltoniano. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema  $Q$  então inicialmente mostre que  $Q$  é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que  $Q$  é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema  $Q'$ , e também sabe como mostrar que  $Q'$  é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo. Então o diagrama correspondente à sua solução seria:



E todas as reduções (de 3-SAT para  $Q'$ , de  $Q'$  para  $Q$  e de  $Q$  para HAM-CYCLE) devem ser detalhadas na sua solução.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)

3. **(2.5 pontos)** Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido)  $G$ , que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice  $v \in G$ , e adicionar uma bola a algum vértice adjacente

de  $v$ . Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo  $G$ , e uma função  $p(v)$  que retorna o número de bolas de gude no vértice  $v$ , existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de  $G$ , exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)

4. **(2.5 pontos)** Uma fórmula booleana em *forma normal conjuntiva com disjunção exclusiva (FNCX)* é uma conjunção de diversas cláusulas, e cada cláusula é uma disjunção exclusiva (XOR) de diversos literais. Lembre-se que a disjunção exclusiva é dada por:

$a$	$b$	$a \oplus b$
$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

O problema FNCX-SAT pergunta se uma dada fórmula em FNCX é satisfatível. Mostre que o problema FNCX-SAT está em  $P$ , ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)