Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação

CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

Terceira Prova

Turma: B

NP-completude

Prof. Flávio L. C. de Moura

5 de dezembro de 2018

1. **(2.5 pontos)** O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

Prove que 2-SAT $\in$ P.

Solução.O problema 2-SAT pode ser resolvido em tempo polinomial fazendo uma transformação da fórmula original para um grafo. Primeiramente é possível observar que uma clausula qualquer $A \vee B$ é equivalente a $\neg A \implies B$ assim como $\neg B \implies A$ o que significa dizer que A verdadeiro implica em B ser verdadeiro para satisfazer a fórmula. Logo podemos construir uma grafo onde cada cláusula do 2-SAT irá adicionar 2 arestas, e cada variável A irá acrescentar 2 vértices $\neg A$ e A no grafo, o que pode ser feito em tempo polinomial relativo a representação na entrada. Sabendo da construção acima, é possivel mostrar por contradição que caso exista um caminho de uma variável X para $\neg X$ e um caminho de $\neg X$ para X então a fórmula não será satisfazivel.

Prova: Suponha que existe um caminho X para $\neg X$ e $\neg X$ para X no grafo e também uma designação de valores para vada variável da fórmula original para a qual está será verdadeira. Suponha que existe o seguinte caminho:

$$X \implies ... \implies A \implies B \implies ... \implies X$$

Sabendo que X é verdadeiro neste caminho entao $\neg X$ deverá ser falso portando todas as variáveis no intervalo [B,$\neg X$] devem ser falsas para que estas clausulas possam ser verdadeiras,da mesma forma para o caminho [X, A] todas as variaveis devem ser verdadeiras para que estas cláusulas também sejam verdadeiras. Porém existe um impasse na cláusula A-¿B onde B deverá ser falso e A deverá ser verdadeiro o que gera um valor verdade falso para esta cláusula fazendo com que a fórmula não seja satisfazivel para X = v. O mesmo raciocinio pode ser feito para o caminho $\neg X \implies X$ que implicaria na fórmula original também não ser satisfazivel para um valor de $\neg X$ = v. Portanto se existem estes dois caminhos não é possivel encontrar um valor verdade para X que satisfaça a fórmula orignal o que contradiz a hipótese de que tal designação existe. Para encontrar um tal caminho é possivel rodar um algortimo de componentes fortemente conexas O(V+E) e verificar se em alguma componente X e $\neg X$, para alguma variável da fórmula, aparecem.

2. **(2.5 pontos)** Em aula, assumimos que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completos. As reduções foram feitas de acordo com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} SAT \arrow[d] \\ 3\text{-}SAT \arrow[d] \\ CLIQUE \end{tikzcd}$$

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo simple que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez. Considere o problema de decisão HAM-CYCLE que pergunta se um dado grafo (não-dirigido) G possui um ciclo Hamiltoniano. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema Q então inicialmente mostre que Q é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que Q é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema Q', e também sabe como mostrar que Q' é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo. Então o diagrama correspondente à sua solução seria:

$$\begin{tikzcd} SAT \arrow[d] & & & \\ 3\text{-}SAT \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[r] & Q \arrow[r] & \text{HAM-CYCLE} \\ CLIQUE & & & \end{tikzcd}$$

E todas as reduções (de 3-SAT para Q', de Q' para Q e de Q para HAM-CYCLE) devem ser detalhadas na sua solução.

Solução.Escreva aqui sua solução.

3. **(2.5 pontos)** Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido) G, que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice $v \in G$, e adicionar uma bola a algum vértice adjacente

de v. Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo G, e uma função $p(v)$ que retorna o número de bolas de gude no vértice v, existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de G, exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

Solução.Escreva aqui sua solução.

4. **(2.5 pontos)** Uma fórmula booleana em *forma normal conjuntiva com disjunção exclusiva (FNCX)* é uma conjunção de diversas cláusulas, e cada cláusula é uma disjunção exclusiva (XOR) de diversos literais. Lembre-se que a disjunção exclusiva é dada por:

a	b	$a \oplus b$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O problema FNCX-SAT pergunta se uma dada fórmula em FNCX é satisfatível. Mostre que o problema FNCX-SAT está em P, ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

Solução.Escreva aqui sua solução.