Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação

CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

Terceira Prova

Turma: B

NP-completude

Prof. Flávio L. C. de Moura

6 de dezembro de 2018

1. **(2.5 pontos)** O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

   $$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

   Prove que 2-SAT $\in$ P.

   Solução.O problema 2-SAT pode ser resolvido em tempo polinomial fazendo uma transformação da fórmula original para um grafo. Primeiramente é possível observar que uma clausula qualquer $A \vee B$ é equivalente a $\neg A \implies B$ assim como $\neg B \implies A$ o que significa dizer que A verdadeiro implica em B ser verdadeiro para satisfazer a cláusula. Logo podemos construir uma grafo onde cada cláusula do 2-SAT irá adicionar 2 arestas, e cada variável A irá acrescentar 2 vértices $\neg A$ e A no grafo, o que pode ser feito em tempo polinomial relativo a representação na entrada. Sabendo da construção acima, é possivel mostrar por contradição que caso exista um caminho de uma variável X para $\neg X$ e um caminho de $\neg X$ para X então a fórmula não será satisfazivel.

Prova: Suponha que existe um caminho X para $\neg X$ e $\neg X$ para X no grafo e também uma designação de valores para vada variável da fórmula original para a qual está será verdadeira. Suponha que existe o seguinte caminho:

$$X \implies ... \implies A \implies B \implies ... \implies \neg X$$

Sabendo que X é verdadeiro neste caminho entao $\neg X$ deverá ser falso portando todas as variáveis no intervalo [B,$\neg X$] devem ser falsas para que estas clausulas possam ser verdadeiras,da mesma forma para o caminho [X, A] todas as variaveis devem ser verdadeiras para que estas cláusulas também sejam verdadeiras. Porém existe um impasse na cláusula $A \implies B$ onde B deverá ser falso e A deverá ser verdadeiro o que gera um valor verdade falso para esta cláusula fazendo com que a fórmula não seja satisfazivel para X = v. O mesmo raciocinio pode ser feito para o caminho $\neg X \implies X$ que implicaria na fórmula original também não ser satisfazivel para um valor de $\neg X$ = v. Portanto se existem estes dois caminhos não é possivel encontrar um valor verdade para X que satisfaça a fórmula orignal o que contradiz a hipótese de que tal designação existe. Para encontrar um tal caminho é possivel rodar um algortimo de componentes fortemente conexas O(V+E) e verificar se em alguma componente X e $\neg X$, para alguma variável da fórmula, aparecem.

2. **(2.5 pontos)** Em aula, assumimos que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completos. As reduções foram feitas de acordo com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} SAT \arrow[d] \\ 3\text{-}SAT \arrow[d] \\ CLIQUE \end{tikzcd}$$

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo simple que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez. Considere o problema de decisão HAM-CYCLE que pergunta se um dado grafo (não-dirigido) G possui um ciclo Hamiltoniano. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema Q então inicialmente mostre que Q é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que Q é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema Q', e também sabe como mostrar que Q' é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo. Então o diagrama correspondente à sua solução seria:

$$\begin{tikzcd} SAT \arrow[d] & & & \\ 3\text{-}SAT \arrow[r] \arrow[d] & Q' \arrow[r] & Q \arrow[r] & \text{HAM-CYCLE} \\ CLIQUE & & & \end{tikzcd}$$

E todas as reduções (de 3-SAT para Q', de Q' para Q e de Q para HAM-CYCLE) devem ser detalhadas na sua solução.

Solução.

Para provar que HAM-CYCLE é NP-completo precisamos provar duas coisas:

Que é possível conferir que um certo caminho P = (v1,v2,...,vn), vn = v1, forma um caminho hamiltoniano em um grafo G = (V,E) em tempo polinomial, assim provando que HAM-CYCLE está em NP. E que é possível reduzir HAM-CYCLE a partir de um problema NP-completo em tempo polinomial, provando que é NP-Difícil.

Para resolver o primeiro ponto, basta percorrer o caminho, conferindo que existe uma aresta conectando todos os pares de vértices consecutivos, que cada vértice aparece apenas uma vez, exceto o primeiro e o último que devem ser iguais, e que todos os vértices de V estão em P. Esse percorrimento ocorre em tempo polinomial.

Para resolver o segundo ponto, provaremos que $3SAT \leq pHAMCYCLE$

Nós representamos cada variável Xi em uma fórmula lógica como uma estrutura em diamante, como representado na figura 1, e adicionamos um vértice para cada cláusula conjuntiva.

Cada diamante contem um fileira de 2k vértices, sendo k o número de cláusulas, mais k-1 vértices entre cada par de vértices. Com os dois vértices pertencentes ao diamante, temos um total de 3k+1 vértices, como está representado na figura 2.

Para cada variável Xi que aparece em uma cláusula j, conectamos o par de vértices relativos a j dentro do diamante de Xi ao vértice Cj de j, essa conexão é feita por meio de duas arestas novas inseridas no grafo, uma saíndo do vértice a esquerda do par para o vértice Cj e outra saindo de Cj para o vértice a direita do par.

Para cada variável $\neg Xi$ que aparece em uma cláusula j, conectamos o par de vértices relativos a j dentro do diamante de Xi ao vértice Cj de j, essa conexão é feita por meio de duas arestas novas inseridas no grafo, uma saíndo do vértice a direita do par para o vértice Cj e outra saindo de Cj para o vértice a esquerda do par.

A seguir, provaremos que se um procedimento que afirma se existe um ciclo hamiltoniano em grafos for executado sobre essa estrutura, ele afirmará que possui, caso a fórmula seja satisfazível, e que não possui o ciclo, caso não seja.

Para que o ciclo seja hamiltoniano, todos os vértices do grafo devem fazer parte do ciclo, mas para que os vértices Cj que representam cada cláusula sejam visitados, deve-se usar as arestas vindas dos diamantes de diamantes.png

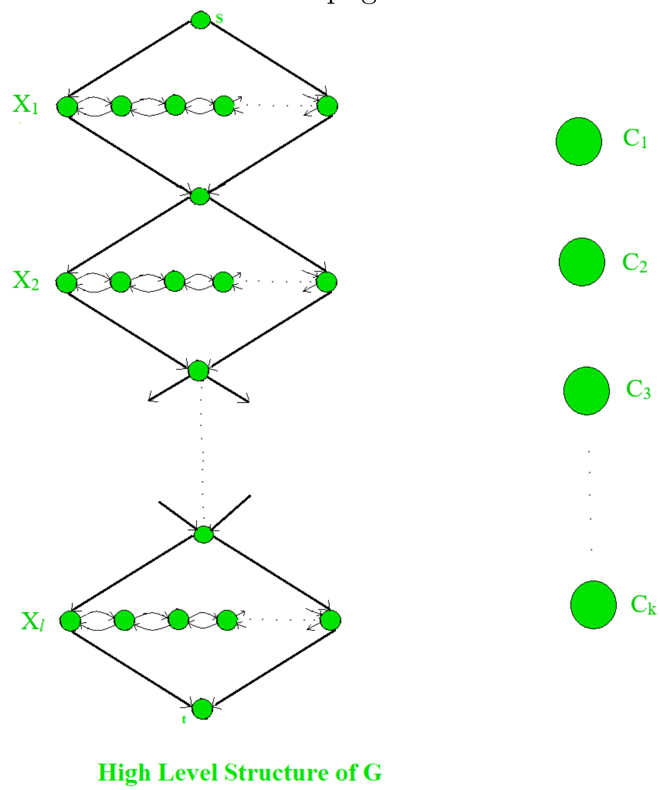

Figura 1: Estrutura de diamantes

que representam seus literais. Porém, caso o diamante de um certo literal Xi esteja sendo percorrido da direita para esquerda, apenas os vértices das cláusulas em que $\neg Xi$ apareça poderão ser visitados. Caso ele esteja sendo percorrido da esquerda para direita, apenas os vértices das cláusulas em que Xi apareça poderão ser visitados.

Portanto, ao se percorrer um diamante Xi, deve-se escolher um lado para percorrê-lo, caso seja percorrido da direita para a esquerda, seria como se o valor de Xi fosse falso, e todas as cláusulas em que $\neg Xi$ aparece serão marcadas e nenhuma cláusula em que Xi aparece seriam marcadas. Caso seja percorrido da esquerda para direita, seria como se o valor de Xi fosse verdadeira, e todas as cláusulas em que Xi aparece serão marcadas e nenhuma cláusula em que $\neg Xi$ aparece seriam no diamante.png

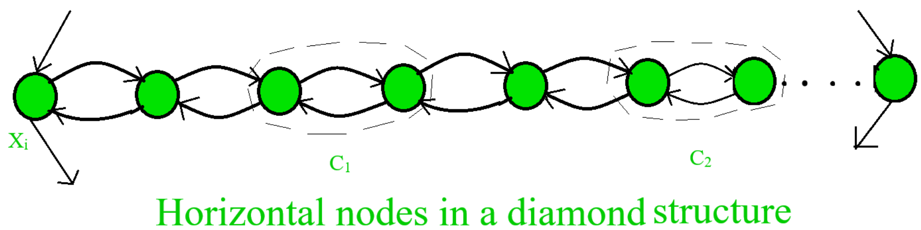

Figura 2: Fileiras no diamante

marcadas.

Dessa forma, para que um vértice Cj que represente uma cláusula j seja visitado, algum dos literais dentro dela tem que possuir um valor verdadeiro. Ou seja, caso o circulo hamiltoniano exista, todos os Cj foram visitados e isso resulta que todos eles possuem pelo menos um literal que possa verdadeiro, caso não exista, alguma das cláusulas não possui um literal verdadeiro sem que falseie outra cláusula.

3. **(2.5 pontos)** Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido) G, que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice $v \in G$, e adicionar uma bola a algum vértice adjacente de v. Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo G, e uma função $p(v)$ que retorna o número de bolas de gude no vértice v, existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de G, exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

   Solução.Para provar que esse problema é NP-completo, primeiro precisamos mostrar que ele é NP, para isso temos que provar que dada uma suposta resposta para um problema, é possível verificar se ela é realmente valida ou não em tempo polinomial.

   (a) Para isso supomos que existe uma sequência de movimentos sobre pares de vértices $R = ((V1,V2),(V3,V4), \ldots , (Vn-1,Vn))$, sendo que cada movimento seria remover duas bolas do vértice a direita e adicionar uma bola ao vértice a esquerda.

Para conferir se R é uma solução para um grafo $G = (V,\ E)$ qualquer e dada a função $p(v)$ que retorna o número de bolas de gude no vértice v, usamos o algoritmo 1 abaixo

Data: sequência R, grafo G e função p
Result: Se R resolve o problema em questão
for *cada par* $(u{,}v) \in R$ **do**
  if $(u{,}v) \in E$ *and* $p(u) \geq 2$ **then**
    $p(u) \leftarrow p(u) - 2$
    $p(v) \leftarrow p(v) + 1$
  else
    return FALSE
  end
end
$S \leftarrow FALSE$
for *cada vértice* $v \in E$ **do**
  if $p(u) = 1$ **then**
    if $S = TRUE$ **then**
      return FALSE
    else
      $S \leftarrow TRUE$
    end
  else
    if $p(u) \neq 0$ **then**
      return FALSE
    else
    end
end
return S

Algorithm 1: verificar uma solução para o problema das bolas

Como o algoritmo 1 executa em tempo polinomial, então é possível verificar o problema das bolas em tempo polinomial.

(b) É possivel realizar uma redução de HAM-CYCLE para o problema em questão(BOLAS). Inicialmente os vértices do grafo serão enumerados de 1 a N, então serão realizadas N iterações onde na i-ésima iteração serão colocadas 2 bolas no vértice i e 1 bola no restante dos vértices o que pode ser feito em tempo polinomial. Suponha que existe um caminho hamiltoniano iniciando do vértice i logo é possível resolver o problema das BOLAS apenas retirando as 2 bolas iniciais e repassando a bola restante pelo caminho, caso todas as iterações possuam tal caminho então teremos um ciclo hamiltoniano. Agora suponha que não existe um caminho hamiltoniano iniciando de algum vértice i, isto significa que um ou mais vértices deverão ser revisitados para que todas as outras bolas dos demais vértices com apenas 1 bola possam ser coletadas, ou seja é necessário que um ou mais vértices possam sofrer mais de uma retirada porém apenas existem N+1 bolas no grafo o que implica em apenas N retiradas logo revisitações não serão possiveis e portanto não existirá uma solução para BOLAS naquela iterção. Sendo assim se ao terminar o loop e alguma das iterações não tiver retornado solução para BOLAS então não existirá um ciclo hamiltoniano neste grafo, caso contrário existirá um ciclo hamiltoniano no gr

4. **(2.5 pontos)** Uma fórmula booleana em *forma normal conjuntiva com disjunção exclusiva (FNCX)* é uma conjunção de diversas cláusulas, e cada cláusula é uma disjunção exclusiva (XOR) de diversos literais. Lembre-se que a disjunção exclusiva é dada por:

a	b	$a \oplus b$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O problema FNCX-SAT pergunta se uma dada fórmula em FNCX é satisfatível. Mostre que o problema FNCX-SAT está em P, ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

Solução.O problema FNCX-SAT está em P e pode ser resolvido com eliminação gaussiana utilizando aritmética modular, basta observar que uma clausula de multiplos literais unidos por XOR possui o mesmo valor verdade que a soma dos valores das variaveis MOD 2, portanto podemos montar um sistema linear com todas as clausulas de uma FNCX-SAT. Considere a seguinte fórmula:

$$(a \oplus b \oplus c) \vee (a \oplus \neg b \oplus c) \vee (a \oplus \neg b \oplus \neg c)$$

É possivel transforma-la em um sistema linear tal que:

$$a + b + c = 1$$

$$a + \neg b + c = 1$$

$$a + \neg b + \neg c = 1$$

Onde cada operação de soma é realizada como uma operação aritmética de módulo 2. Porém como temos negações também é necessário transformar as variaveis a partir das identidades $\neg x = 1 \oplus x, x \oplus x = 0$ fazendo com que o seguinte sistema seja obtido:

$$a + b + c = 1$$

$$a + b + c = 0$$

$$a + b + c = 1$$

Caso o sistema final obtido possua equações linearmente dependentes como acima entao a eliminação gaussiana não pode ser aplicada o que indica que não há uma designação de valores que permita satisfazer a fórmula FNCX-SAT. A verificação pode ser realizada em tempo polinomial quadrático apenas verificando se alguma linha é multipla de outra. Caso não existam equações linearmente dependentes existe uma designação e a mesma pode ser obtida através da resolução do sistema, que pode ser executada também em tempo polinomial.