Prova 3

Lucas Campos Jorge - 15/0154135
Rafael Martins Pereira Chianca - 15/0145608

1- Para provarmos que 2-SAT $\in P$, precisamos provar que 2-SAT pode ser resolvido em tempo polinomial. Exemplo de instância 2-SAT:

$$\phi = (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2)$$

Para decidirmos se uma instância 2-SAT é satisfátivel ou não, podemos transformar o problema em um problema de grafos.

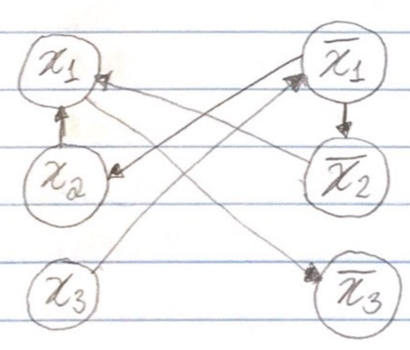
Com um grafo $G = (V, E)$, podemos associar cada literal x_i e $\overline{x_i}$ a um vértice, tal que G possui $2n$, sendo n a quantidade de literais de ϕ.

As arestas de G são definidas pela seguinte relação:

$$(a \vee b) \Rightarrow \overline{a} \rightarrow b \,,\; \overline{b} \rightarrow a$$

Esta relação descreve que em uma claúsula $(a \vee b)$, se 'a' não é verdadeiro, 'b' deve ser verdadeiro, logo $\overline{a}$ implica em b. O contrário também é válido. Portanto, criamos uma aresta (u, v) para cada claúsula $(\overline{u} \vee v)$ em ϕ.

Utilizando ϕ como exemplo, podemos formar o seguinte grafo:



Com a construção do grafo, a implicação de um literal $a \rightarrow b$ se propaga pela representação, logo, se há um caminho de um literal x_i para $\overline{x_i}$, haveria uma contradição, caracterizando ϕ como insatisfátivel.

Logo, se conferirmos, no grafo G, a existência de um caminho de x_i para $\overline{x_i}$ ou $\overline{x_i}$ para x_i, podemos dizer que ϕ não é satisfatível, caso contrário, é satisfatível.

Portanto, como a transformação para a representação do grafo pode ser feita em tempo polinomial e a verificação de um caminho em grafo a partir de um grafo pode ser feita com busca em largura, com custo $O(V+E)$. Sendo assim, podemos concluir que 2-SAT pode ser resolvido em tempo polinomial, logo 2-SAT $\in$ P.

2) Para provar que o ham cycle é NP-completo, sendo ham cycle Q, devemos provar:

1- Q é NP

2- Q é NP-difícil

1: Para provar que Q é NP, basta provar que, a partir de uma solução, conseguimos verificá-la em tempo polinomial.

Tendo uma solução de ham cycle P de um grafo G, podemos verificá-la percorrendo o caminho verificando se todos os vértices só foram percorridos apenas uma vez e todos configuram o grafo G. Com isso, à complexidade estará limitada pela representação do grafo G, configurando $\Theta(V+E)$.

Portanto, por essa verificação ser em tempo polinomial, prova que ham cycle é NP.

2: Para provarmos que Q é NP-difícil, precisamos de outro problema Q', onde $Q' \leq_P Q$ e $Q' \in NP$.

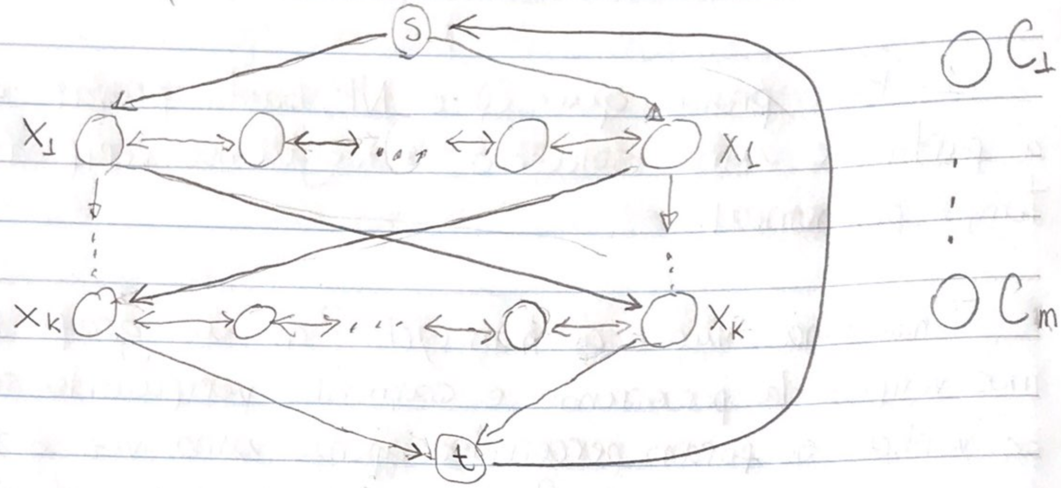
Para isso, utilizaremos 3SAT como Q'.

Utilizaremos uma transformação na qual uma forma conjuntiva normal com, no máximo, 3 literais, como no exemplo:

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \dots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

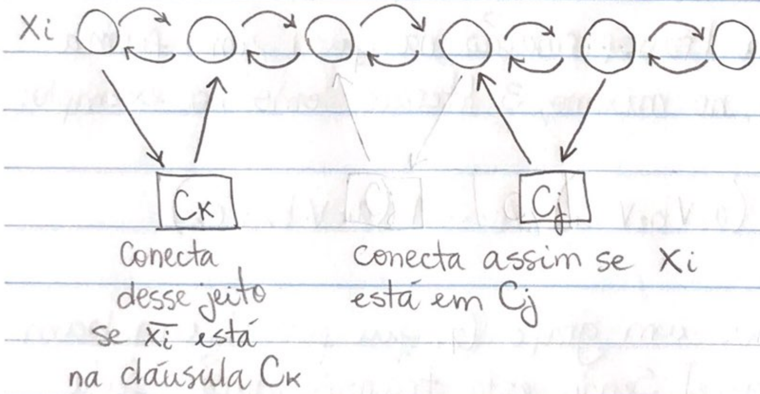
A partir disso, criaremos um grafo G, que possui um ham cycle, se ϕ é satisfazível. Sendo esta transformação feita em tempo polinomial.

A redução se baseia em caminhar por um caminho i da esquerda para a direita se x_i é "setado" para verdadeiro. Cada caminho tem $(3m+1)$ nós, onde m é a quantidade de cláusulas em ϕ.



Onde cada a_i, b_i e c_i é um literal x_i ou $\overline{x_i}$ e $C_1 \ldots C_k$ são as cláusulas de ϕ.

Cada "estrutura diamante" tem uma linha de nós com conexões bidirecionais.



Para existir um ciclo hamiltoniano, devemos visitar cada nó de cláusula.
Apenas podemos visitar uma cláusula se ela for satisfeita (colocando um de seus termos como verdadeiro).
Então, se existir um ciclo hamiltoniano, ϕ é satisfazível.

Como a criação do grafo é limitada pela representação 3SAT, número de cláusulas m e literais K, temos que $Q' \leq_P Q$, logo, por provar 1 e 2, temos que o ham cycle é NP-completo.

4- Para provarmos que FNCX-SAT $\in P$, temos que, primeiramente provar que uma instância FNCX-SAT é satisfatível em tempo polinomial. Exemplo de uma instância FNCX-SAT:

$$\phi = (\bar{a} \oplus b \oplus c) \wedge (b \oplus c)$$

Para descobrirmos se ϕ é satisfatível, podemos transformar ϕ em um sistema de equações lineares em módulo 2, sendo cada XOR possui a característica de soma em módulo 2.

Portanto, podemos representar cada literal x_i de ϕ como uma variável e $\bar{x_i}$ como uma variável mais 1, resultando no seguinte sistema linear, como exemplo, baseado em ϕ:

$$(a+1) + b + c \equiv 1 \mod 2$$
$$b + c \equiv 1 \mod 2$$

Esta transformação pode ser feita em tempo polinomial, pois é limitada pela quantidade de literais e cláusulas.

Com esta nova representação, basta provarmos que o sistema de equações acima possui uma solução. Para isto, podemos utilizar Eliminação Guassiana.

Entretanto, ainda temos que provar que a eliminação gaussiana $\in P$. Segue abaixo o algoritmo da eliminação gaussiana:

1- Troque duas linhas da matriz
2- Multiplique uma linha por um valor não nulo
3- Adicionar o múltiplo de uma linha em outra linha

Após estas operações se encontra uma matriz triangular que resolve o sistema.

A eliminação de gauss exige no máximo:

$$\frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} \text{ subtações}$$

Logo, a eliminação gaussiana possui complexidade temporal de $O(n^3)$.

Ou seja, a eliminação gaussiana pode ser resolvida em tempo polinomial. Logo, a eliminação gaussiana $\in P$, então FNCX-SAT $\in P$.

A operação realizada pode ser descrita pelo seguinte diagrama, onde α é FNCX-SAT e β é a eliminação gaussiana: