

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Ciência da Computação

CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

Terceira Prova

Turma: B

**NP-completude**

Prof. Flávio L. C. de Moura

6 de dezembro de 2018

1. **(2.5 pontos)** O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

Prove que  $2\text{-SAT} \in \text{P}$ .

**Solução.** Consideremos a seguinte expressão cuja é uma instância de 2-SAT:

$$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_2)$$

Dessa forma, obtemos duas afirmações:

- (a) Se  $G$  contém um caminho de  $\phi$  até  $\psi$ , então também contém o caminho de  $\neg\psi$  até  $\neg\phi$ .

Para provarmos, consideremos que o caminho de  $\phi$  a  $\psi$  é  $\phi \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_k \rightarrow \psi$ . Agora, pela construção de  $G$ , se há uma aresta  $(x, y)$ , então tem um aresta  $(\neg x, \neg y)$ . Logo, temos  $(\neg\psi, \neg P_k), \dots, (\neg P_1, \neg\phi)$ . Portanto, temos um caminho de  $\neg\psi$  até  $\neg\phi$ .

- (b) Uma cláusula conjuntiva de dois valores  $\Upsilon$  é insatisfazível se e somente se existe um  $x$  tal que:

- i. há um caminho de  $x$  a  $\neg x$  no grafo.
- ii. há um caminho de  $\neg x$  a  $x$  no grafo

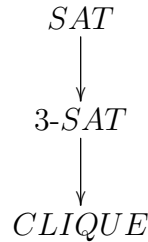
Suponhamos que existam os caminhos  $x$  a  $\neg x$  e  $\neg x$  a  $x$  para algum  $x \in G$ , mas também existe uma associação satisfatível  $\rho(x_1, x_2 \dots x_n)$  para a cláusula  $\Upsilon$ .

Para o caso (i), consideremos que  $\rho(x_1, x_2 \dots x_n)$  tal que  $x$  é verdadeiro. Assim o caminho de  $x$  a  $\neg x$  é  $x \rightarrow \dots \rightarrow \phi \rightarrow \psi \rightarrow \neg x$ . Agora, se existe uma aresta entre  $X$  e  $Y$  do grafo  $G$ , então existe  $(\neg A \vee B)$  em  $\Upsilon$ . A aresta de  $X$  a  $Y$  indica que  $X$  é verdadeiro, então  $Y$  também deve ser. Como  $x$  é verdadeiro, todos os literais entre ele e  $\phi$  também devem ser. Da mesma forma, de  $\psi$  a  $\neg x$  devem ser falsos, pois  $\neg x$  é falso. Isso resulta em uma aresta entre  $\phi \wedge \psi$ , onde  $\phi$  é verdadeiro e  $\psi$  é falso. Por consequência, a cláusula  $(\neg\phi \vee \psi)$  é falsa, contradizendo a afirmação de  $\rho(x_1, x_2 \dots x_n)$  para  $\Upsilon$ .

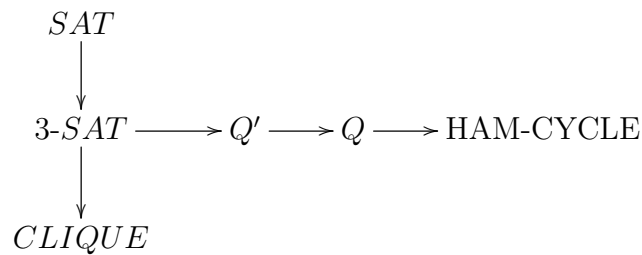
Já para o caso (ii), consideremos que  $\rho(x_1, x_2 \dots x_n)$  tal que  $x$  é falso. Assim, a prova é semelhante ao caso (i).

Portanto, havendo a existência de um caminho  $x$  a  $\neg x$  e/ou  $\neg x$  a  $x$  no grafo, assim podendo utilizar algoritmos como BFS ou DFS, cujos levam tempo polinomial,  $\Theta(V + E)$ . Assim, provamos que 2-SAT  $\in$  P.

- 2. **(2.5 pontos)** Em aula, assumimos que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completos. As reduções foram feitas de acordo com o seguinte diagrama:



Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo simple que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez. Considere o problema de decisão HAM-CYCLE que pergunta se um dado grafo (não-dirigido)  $G$  possui um ciclo Hamiltoniano. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema  $Q$  então inicialmente mostre que  $Q$  é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que  $Q$  é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema  $Q'$ , e também sabe como mostrar que  $Q'$  é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo. Então o diagrama correspondente à sua solução seria:



E todas as reduções (de 3-SAT para  $Q'$ , de  $Q'$  para  $Q$  e de  $Q$  para HAM-CYCLE) devem ser detalhadas na sua solução.

**Solução.** Para provarmos que HAM-CYCLE é NP-Completo, precisamos mostrar que  $3-SAT \leq_p \text{HAM-CYCLE}$ .

Assim, consideremos uma instância  $I$  do 3-SAT, com as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e as cláusulas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Criamos um grafo  $G_v$  com que representa as variáveis, enquanto criamos um outro grafo  $G_c$  que representa as cláusulas. Vale observar que cada cláusula  $C_k$  apresenta-se no formato:

$$(x_k \vee x_{k+1} \vee x_{k+2})$$

Com isso, unimos as variáveis do grafo  $G_v$  com as cláusulas do grafo  $G_c$ , de forma a criar uma relação do tipo:

$$\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n.$$

Um caminho Hamiltoniano atribui uma associação de verdade para cada variável, dependendo de qual direção a corrente de conexões é transversada.

Para haver um ciclo Hamiltoniano é preciso que cada nó cláusula do grafo seja visitado. Dessa forma, podemos visitar apenas as cláusulas que satisfazem a condição (ao atribuir o valor de verdade para cada uma). Assim se temos um ciclo Hamiltoniano, conseguindo satisfazer a condição da instância  $I$  do 3-SAT precisa ter um ciclo Hamiltoniano.

3. **(2.5 pontos)** Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido)  $G$ , que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice  $v \in G$ , e adicionar uma bola a algum vértice adjacente de  $v$ . Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo  $G$ , e uma função  $p(v)$  que retorna o número de bolas de gude no vértice  $v$ , existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de  $G$ , exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

**Solução.** [Escreva aqui sua solução.](#)

4. **(2.5 pontos)** Uma fórmula booleana em *forma normal conjuntiva com disjunção exclusiva (FN CX)* é uma conjunção de diversas cláusulas, e cada cláusula é uma disjunção exclusiva (XOR) de diversos literais. Lembre-se que a disjunção exclusiva é dada por:

$a$	$b$	$a \oplus b$
$V$	$V$	$F$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

O problema FNCX-SAT pergunta se uma dada fórmula em FNCX é satisfatível. Mostre que o problema FNCX-SAT está em  $P$ , ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

**Solução.** Provaremos que  $\text{FNCX-SAT} \in P$ . Para isso, observaremos o comportamento do XOR ou disjunção exclusiva. Assim, temos a seguinte tabela-verdade:

$a$	$b$	$\neg a \wedge b$	$a \wedge \neg b$	$(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$

Como pode ser visto, é possível transformar a disjunção exclusiva em uma disjunção de 2 literais. Com isso, podemos tratar o FNCX-SAT como um caso especial do 2-SAT, assim, provando que o FNCX-SAT  $\in P$ .