Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação

CIC 117536 - Projeto e Análise de Algoritmos

Terceira Prova

Turma: B

NP-completude

Prof. Flávio L. C. de Moura

6 de dezembro de 2018

1. **(2.5 pontos)** O problema 2-SAT tem como instâncias as fórmulas lógicas formadas por conjunções de disjunções de até dois literais, onde um literal é uma variável booleana ou a negação de uma variável booleana. Por exemplo, a expressão a seguir é uma instância de 2-SAT:

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$

Prove que 2-SAT $\in$ P.

Solução.

Prova 5- Projeto & Análise de Algoritmos

01) Iremos provar que o problema 2-SAT pertence à classe P utilizando grafos de implicação e componentes fortemente conectados no grafo.

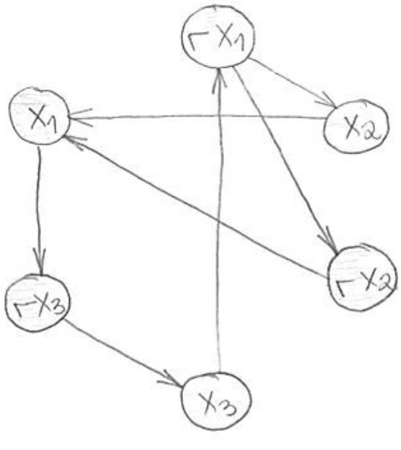
- Dada uma fórmula lógica ϕ em forma normal conjuntiva de n variáveis e m cláusulas, constroi-se seu grafo de implicaçóes da seguinte forma:

  - Para cada cláusula $(X \vee Y)$ de ϕ, em que X, Y são literais, cria-se arestas direcionadas $\neg X \rightarrow Y$ e $\neg Y \rightarrow X$. Estas arestas dizem, por exemplo: se "X" não é true, então "Y" deve ser true e vice-versa.

  - Para o exemplo dado, tem-se o grafo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_3)$$

obs: no caso de uma cláusula possuir apenas 1 literal, completa-se a expressão por um processo linear.



• Afirmação: No grafo de implicações de uma expressão lógica ϕ, se um literal qualquer e sua negação pertencem a um mesmo componente fortemente conectado, então ϕ não é satisfazível. (É equivalente dizer que existe no grafo um caminho de um literal qualquer x para $\neg x$ e de $\neg x$ para x.

• Prova: Sabe-se que arestas do grafo de implicações ligam literais A e B de forma que se A é true, B também é true. Dessa forma, em um componente fortemente conectado do grafo, existirá um conjunto de variáveis de mesmo valor lógico. Assim, se em um componente fortemente conectado existir um literal e sua negação, a fórmula ϕ será insatisfazível, pois não é possível um literal x ter o mesmo valor que sua negação $\neg x$.

Dessa forma, basta então determinar e analisar as componentes fortemente conectadas do grafo de implicações de ϕ. Sabe-se que este processo pode ser feito em tempo polinomial (linear), por algoritmos como a busca em profundidade, de complexidade $O(V+E)$.

Assim, 2-SAT $\in$ P.

2. **(2.5 pontos)** Em aula, assumimos que SAT é um problema NP-completo (Teorema de Cook-Levin), e a partir deste fato mostramos que 3-SAT e CLIQUE também são problemas NP-completos. As reduções foram feitas de acordo com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} SAT \arrow[d] \\ 3\text{-}SAT \arrow[d] \\ CLIQUE \end{tikzcd}$$

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo simple que visita cada vértice de um grafo exatamente uma vez. Considere o problema de decisão HAM-CYCLE que pergunta se um dado grafo (não-dirigido) G possui um ciclo Hamiltoniano. Mostre que HAM-CYCLE é um problema NP-completo. Sua solução deve ser construída a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE. Caso, você não veja como reduzir diretamente HAM-CYCLE a partir destes, mas sabe como fazê-lo a partir de um certo problema Q então inicialmente mostre que Q é NP-completo a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, e assim por diante. Digamos que você não saiba como mostrar que Q é NP-completo diretamente a partir de SAT, 3-SAT ou CLIQUE, mas você sabe como fazê-lo a partir de outro problema Q', e também sabe como mostrar que Q' é NP-completo a partir de 3-SAT, por exemplo. Então o diagrama correspondente à sua solução seria:

$$\begin{tikzcd} SAT \arrow[d] \\ 3\text{-}SAT \arrow[d] \arrow[r] & Q' \arrow[r] & Q \arrow[r] & \text{HAM-CYCLE} \\ CLIQUE \end{tikzcd}$$

E todas as reduções (de 3-SAT para Q', de Q' para Q e de Q para HAM-CYCLE) devem ser detalhadas na sua solução.

Solução.

(02) Iremos provar que o problema HAM-CYCLE é NP-COMPLETO.

→ A solução será desenvolvida a partir da redução de instâncias de 3-SAT para instâncias de HAM-CYCLE.

∘ Para uma fórmula SAT de n-variáveis, existem 2^n possíveis atribuições para os literais. Modela-se estas 2^n possibilidades por um grafo direcionado que contém 2^n ciclos hamiltonianos da seguinte forma.

I. Construir n caminhos $P_1, P_2, \cdots, P_n$ correspondendo às n variáveis. Cada caminho P_i consiste de $2 \cdot k$ vértices $(v_{i,1}, v_{i,2}, \cdots, v_{i,2k})$, onde k é o número de cláusulas da fórmula.

Por exemplo, para $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4)$:

Teremos 4 caminhos de 6 vértices:

$P_1 = \langle v_{1,1}, v_{1,2}, \cdots, v_{1,6} \rangle$

$\vdots$

$P_4 = \langle v_{4,1}, v_{4,2}, \cdots, v_{4,6} \rangle$.

- Ainda neste passo, adicionam-se arestas direcionadas da seguinte forma:

→ Adicionar arestas de $v_{i,j-1}$ para $v_{i,j}$ (esquerda para direita) no caminho P_i correspondendo a atribuição x_i = TRUE. Uma aresta de direção oposta é adicionada para x_i = FALSE.

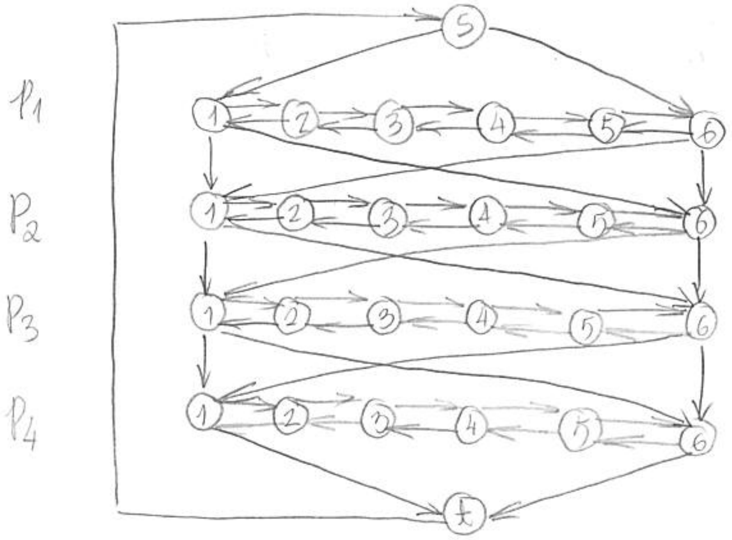
II. Conecta-se os caminhos adicionando arestas de $v_{i,1}$ e $v_{1,6}$ para $v_{i+1,1}$ e $v_{i+1,6}$.

III. Adiciona-se nós de $\underbrace{\text{origem}}_{s}$ e $\underbrace{\text{destino}}_{t}$.

IV. Adiciona-se arestas de s para $v_{1,1}$ e $v_{1,6}$ e de $v_{4,1}$ e $v_{4,6}$ para t.

V. Adiciona-se aresta de t para s, caminho que estará presente em todos HAM-CYCLE do grafo.

Até agora tem-se:



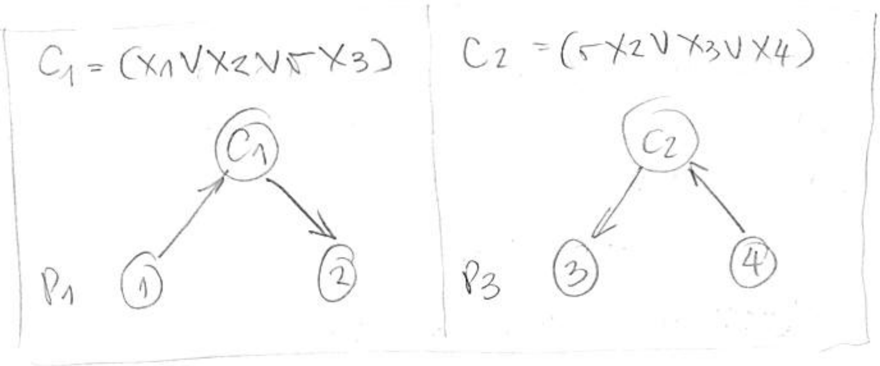
VI. Adicionar vértices correspondentes à cada cláusula da fórmula.

Ex: $\underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4)}_{C_2} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4)}_{C_3}$

VII. Conectar as cláusulas aos caminhos.

- Se a clausula C_j contém o literal x_i, conectar C_j a $v_{i,2j-1}$ e a $v_{i,2j}$. a direção dessas arestas será: esquerda → direita se C_j contem x_i. Direção oposta se contém $\neg x_i$

Exemplo:



→ O grafo resultante foi omitido por motivos de brevidade.

→ Conclusões acerca do grafo:

1. Qualquer HAM-CYCLE no grafo construído G atravessa o caminho P_i da esquerda para direita ou o contrário. Isso ocorre porque qualquer caminho que entra em um vértice $v_{i,j}$ <u>deve</u> sair de $v_{i,j+1}$ tanto imediatamente quanto por um nó da cláusula entre eles, para que a propriedade hamiltoniana seja mantida. Exatamente da mesma forma, todos os caminhos que entram por $v_{i,j-1}$ devem sair por $v_{i,j}$.

2. Uma vez que cada caminho P_i pode ser atravessado em 2 formas possíveis e temos n caminhos para cada um dos n literais, podem existir 2^n ciclos hamiltonianos no grafo. Cada um dos 2^n ciclos correspondem à uma atribuição particular das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3. Este grafo pode ser construído em tempo polinomial!

→ continuando:

A. Se existe um HAM-CYCLE H no grafo G:

- Se H atravessa P_i da esquerda para direita, atribuir x_i = TRUE.
- Se H atravessa P_i da direita para esquerda, atribuir x_i = FALSE.

→ Já que H visita cada nó-cláusula C_j, pelo menos um caminho P_i foi caminhado na direção da direita relativa ao nó C_j.

↳ Esta atribuição obtida satisfaz o 3-SAT dado.

B. Se existe uma atribuição que satisfaz o 3-SAT:

- Selecionar o caminho que atravessa P_i da Esq → dir se X_i = TRUE ou dir → esq se X_i = FALSE.
- Incluir os nós cláusula sempre que possível.
- Conectar a origem s para P_1, P_n até o destino t e P_i em P_{i+1} para manter a continuidade do caminho.
- Conectar t em s para completar o ciclo.

→ já que a atribuição é tal que todas as cláusulas são satisfeitas, todos os nó-cláusula são incluídos no caminho.
Os Pi vértices, vértices s e t são todos incluídos e como o caminho é unidirecional, nenhum vértice é visitado duas vezes.

⇒ O caminho obtido é um ciclo hamiltoniano.

∴ Portanto, HAM-CYCLE ∈ NPC.

3. **(2.5 pontos)** Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido) G, que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice $v \in G$, e adicionar uma bola a algum vértice adjacente de v. Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo G, e uma função $p(v)$ que retorna o número de bolas de gude no vértice v, existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de G, exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo. A mesma observação feita no exercício anterior vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

   Solução.Escreva aqui sua solução.

4. **(2.5 pontos)** Uma fórmula booleana em *forma normal conjuntiva com disjunção exclusiva (FNCX)* é uma conjunção de diversas cláusulas, e cada cláusula é uma disjunção exclusiva (XOR) de diversos literais. Lembre-se que a disjunção exclusiva é dada por:

a	b	$a \oplus b$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   O problema FNCX-SAT pergunta se uma dada fórmula em FNCX é satisfatível. Mostre que o problema FNCX-SAT está em P, ou então que FNCX-SAT é NP-completo. No último caso, a mesma observação feita nos dois exercícios anteriores vale aqui: a prova deve ser feita a partir de problemas que provamos serem NP-completos, e reduções intermediárias, caso existam, devem ser incluídas na solução.

   Solução.

(04) Uma cláusula XOR-SAT, por exemplo $(x_1 \oplus \neg x_2 \oplus x_3)$, pode ser reescrita na forma $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$ para que seus literais apareçam na fase positiva (termos não-negados). Assim, pode-se representar a cláusula como uma equação linear: $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$.

Assim, um conjunto de M cláusulas com N variáveis pode ser representado como um sistema linear com M equações de N incógnitas.

Por exemplo, dada uma fórmula:

$$\phi = (\neg x_1 \oplus \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \oplus x_3) \wedge (x_2 \oplus \neg x_4)$$

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, tem-se a matriz:

$$\begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Pode-se organizar o conjunto de equações lineares correspondentes às cláusulas em uma matriz da forma $M = [A|b]$, onde A é uma matriz $m \times n$ com entradas em $\{0,1\}$ representando a presença ou não de uma variável na cláusula. O operador "|" significa concatenação e b é um vetor com entradas em $\{0,1\}$

representando o resultado da operação XOR da cláusula.

→ As equações lineares podem ser resolvidas pelo método de eliminação de Gauss, por exemplo, que opera em tempo polinomial.

Portanto, o problema FNCX-SAT ∈ P.